MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND INNOVATIONS OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF EXACT AND SOCIAL SCIENCES

OXUS UNIVERSITY

INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE

MATHEMATICAL ANALYSIS AND DYNAMICAL SYSTEMS

CONFERENCE PROGRAMME

MAY 20 - 21, 2025

TASHKENT, UZBEKISTAN

О КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Жураев Ф.М.

Бухарский государственный университет, ул. М. Икбола, 11, Бухара 200100, Узбекистан
fjm1980@mail.ru

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область в плоскости переменных x, y , ограниченная кривыми:

$$S_j: \quad |x|=1, \;\; 0<y<1, \;\; S_3: \quad 0<x<1, \quad y=1, \;\; S_4: \quad -1<x<0, \quad y=1,$$

$$\Gamma_j: \; |x|-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0, \quad \Gamma_{j+2}: \; |x|+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1, \;\; y\leq 0,$$

здесь и далее $x\geq 0$, при $j=1$, $x\leq 0$, при $j = 2$, причем $m<0$.

Введем обозначения $\Omega_1^+=\Omega\cap\{(x,y): \; x>0, \; y>0\}$,

$$\Omega_2^+=\Omega\cap\{(x,y): \; x<0, \; y>0\}, \, \Omega_1^-=\Omega\cap\{(x,y): \; x>0, \; y<0\},$$

$$\Omega_2^-=\Omega\cap\{(x,y): \; x<0, \; y<0\}, \quad I_1=\{(x,y): \; 0<x<1, \; y=0\},$$

$$I_2=\{(x,y): \; -1<x<0, \; y=0\}, \; I_3=\{(x,y): \; x=0, \; 0<y<1\},$$

$$\Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup J_j, \; \Omega_3=\Omega_1^+\cup\Omega_2^-\cup J_3, \; A_j((-1)^{j+1},0)=\bar{I}_j\cap\bar{S}_j,$$

$$C_j\left[(-1)^{j+1}\frac{1}{2}; \;\; -\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right]=\bar{\Gamma}_j\cap\bar{\Gamma}_{j+2}, \; (j=1,2),$$

$$O(0,0)=\bar{I}_1\cap\bar{I}_2, \, B_1(1,1)=\bar{S}_1\cap\bar{S}_3, \; B_2(-1,1)=\bar{S}_2\cap\bar{S}_4, \, B_0(0,1)=\bar{S}_3\cap\bar{S}_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-|x|^p u_y-\rho_j u\,(x,0)\,, & (x,y)\in\Omega_j^+, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}+\mu_j u\,(x,0)\,, & (x,y)\in\Omega_j^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $m, \quad p, \quad \rho_j, \quad \mu_j \; (j=1,2)-$любые действительные числа, причем

$$m<0, \;\; p>0, \;\; \rho_j>0, \;\; \mu_j>0, \; (j=1,2). \tag{2}$$

Задача. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\right)\cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\right)\cap C^2\left(\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\right)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях Ω_j^+ е Ω_j^- $(j=1,2)$;
3) $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j}=\varphi_j(y), \;\; 0\leq y\leq 1, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_j}=\psi_j(x), \quad 0\leq(-1)^{j+1}x\leq\frac{1}{2}, \; (j=1,2); \tag{4}$$

4) на линии вырождения I_i $(i=\overline{1,3})$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y)=a_j(x)\lim_{y\to-0} u_y(x,y)+b_j(x),\ (x,0)\in I_j,\ (j=1,2), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y)=a_3(y)\lim_{x\to-0} u_x(x,y),+b_3(y),\ (x,0)\in I_3; \tag{6}$$

где $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ a_i(t),\ b_i(t)(i=1,2,3)-$ заданные функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$,

$$\varphi_j(y)\in C\,[0,1]\cap C^1\,(0,1)\,,\ (j=1,2), \tag{7}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\ \frac{1}{2}\right),\quad \psi_2(x)\in C^1\left[-\frac{1}{2},\ 0\right]\cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right). \tag{8}$$

$$a_j(x),\ \ b_j(x)\in C(\bar{J}_j)\cap C^2(J_j),\quad a_j(x)\neq 0,\ \ \forall x\in\bar{J}_j,\ \ (j=1,2), \tag{9}$$

$$a_3(y),\ \ b_3(y)\in C(\bar{J}_3)\cap C^2(J_3),\quad a_3(y)\neq 0,\ \ \forall x\in\bar{J}_3. \tag{10}$$

Теорема. *Если выполнены условия (2), (7)–(10), то в области* Ω *решение задачи существует и единственно.*

При доказательство единствености решения задачи важную роль играет следующая лемма.

Леммы. *Если* $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv 0,\quad \forall y\in[0,1],\ \psi_1(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, *и* $\psi_2(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$, *то*

$$\tau_j(x)\equiv 0,\quad \forall x\in\bar{I}_j\quad (j=1,2). \tag{11}$$

Лемма доказывается с помощью метода интегральной энергии.

Доказательства теоремы существования решения задачи основана на теории вольтерских и фредгольмских интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //Дифференциальные уравнения. 1976.12(1).

2. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //Дифференциальные уравнения.
1978.14(1)

3. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // Узбекский математический журнал. 2011. 2.