



# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

Научный вестник Бухарского государственного университета  
Scientific reports of Bukhara State University

8/2023



E-ISSN 2181-1466  
9 772181 146004



ISSN 2181-6875  
9 772181 687004



8/2023

<https://buxdu.uz>

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIIY AXBOROTI**  
**SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY**  
**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Ilmiy-nazariy jurnal**  
2023, № 8, sentabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriiy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.  
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

**Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
**Elektron manzil:** nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

**TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor  
**Bosh muharrir o'rinbosari:** Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor  
**Mas'ul kotib:** Shirinova Mexriygo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

**Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich,** fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

**Danova M.,** filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

**Margianti S.E.,** iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

**Minin V.V.,** kimyo fanlari doktori (Rossiya)

**Tashqarayev R.A.,** texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

**Mo'minov M.E.,** fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

**Mengliyev Baxtiyor Rajabovich,** filologiya fanlari doktori, professor

**Adizov Baxtiyor Rahmonovich,** pedagogika fanlari doktori, professor

**Abuzalova Mexriso Kadirovna,** filologiya fanlari doktori, professor

**Amonov Muxtor Raxmatovich,** texnika fanlari doktori, professor

**Barotov Sharif Ramazonovich,** psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

**Baqoyeva Muhabbat Qayumovna,** filologiya fanlari doktori, professor

**Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich,** biologiya fanlari doktori, professor

**Jumayev Rustam G'aniyevich,** siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

**Djurayev Davron Raxmonovich,** fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Durdiyev Durdimurod Qalandarovich,** fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Olimov Shirinboy Sharofovich,** pedagogika fanlari doktori, professor

**Qahhorov Siddiq Qahhorovich,** pedagogika fanlari doktori, professor

**Umarov Baqo Bafoyevich,** kimyo fanlari doktori, professor

**Murodov G'ayrat Nekovich,** filologiya fanlari doktori, professor

**O'rayev Darmonoy Saidjonovna,** filologiya fanlari doktori, professor

**Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich,** iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Hayitov Shodmon Ahmadovich,** tarix fanlari doktori, professor

**To'rayev Halim Hojiyevich,** tarix fanlari doktori, professor

**Rasulov Baxtiyor Mamajonovich,** tarix fanlari doktori, professor

**Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich,** iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Quvvatova Dilrabo Habibovna,** filologiya fanlari doktori, professor

**Axmedova Shoir Nematovna,** filologiya fanlari doktori, professor

**Amonova Zilola Qodirovna,** filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Hamroyeva Shahlo Mirjonovna,** filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Nigmatova Lola Xamidovna,** filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Boboyev Feruz Sayfullayevich,** tarix fanlari doktori

**Jo'rayev Narzulla Qosimovich,** siyosiy fanlar doktori, professor

**Rasulov Zubaydullo Izomovich,** filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Qurbonova Gulnoz Negmatovna,** pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

**Zaripov Gulmurot Toxirovich,** texnika fanlari nomzodi, dotsent

<https://buxdu.uz>

MUNDARIJA \*\*\* СОДЕРЖАНИЕ \*\*\* CONTENTS

**ANIQ VA TABIIY FANLAR \*\*\* EXACT AND NATURAL SCIENCES \*\*\*  
ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

Sabirova R.A.	Xos to'liqning qovushoq-elastik silindrik qobiqda tarqalish xususiyatlari	4
Khalkhadzhaev B.B., Yusupov Sh.B., Mambetsaraev K.A.	On a weak generalized solution of a mixed-type fourth order equation of the second kind	9
Сафаров Ж.Ш.	Прямая и обратная задача для уравнения вязкоупругости с дополнительной информацией нестандартного вида	15
Жураев Ф.М.	О краевой задаче с условиям Геллерстедта на параллельных характеристиках для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа	23
Jo'orakulov S.Z.	Properties of polymers	32
Хайруллаев Ч.К.	Жамият ҳаётида соғлом турмуш тарзининг аҳамияти ва уни ташкил қилишининг асосий омиллари	38

**TILSHUNOSLIK \*\*\* LINGUISTICS \*\*\* ЯЗЫКОЗНАНИЕ**

Yuldasheva D.N.	Sukut – ichki va tashqi nutqning harakat birligi	45
Bobokalonov O.O.	Character of shifonemas in linguistics	52
Bozorova G.Z.	Tibbiy atamalarda pleonastik birliklarning voqelanishi	59
Hamroyeva M.R.	Tohir Malik badiiy asarlarida qo'llanilgan antroponimlarning yasalish strukturasi	63
Kurbanova I.Sh.	Exploring the derivation of railway terminology: a linguistic analysis	68
Rabieva M.G'.	Translation as a type of intercultural communication	73
Radjabov N. N.	Ingliz va o'zbek tillarida undoshlarning fonologik xususiyatlarida izomorfizm va allomorfizm	77
Rakhmatova M.M.	The role of figurative devices in expressing implicative meaning	88
Seytnazarova I.E.	Tilewbergan Jumamuratov asarlarida frazeologizmlarning uslubiy qo'llanilishi	92
Велиева С.Р.	Русские идеологические топонимы в иноязычной среде (на материале регионов Республики Узбекистан)	97
Гаппарова М.Т.	Инглиз ва ўзбек тилларида луғат белгилари	104
Каримова Г.Х.	Эргонимы как объект лингвокультурологического исследования	109
Нарзуллаева Д.Б.	Теолингвистика ва теолингвистик бирликлар тадқиқи	114
Ширинова М.Ш.	Мустақиллик даври ўзбек кинофильмлари тилида эғалик ва келишик воситаларининг қўлланиши	121
Ёкубова Ш.Ю., Юсупова А. Ш.	Глагол и простая структура предложения в узбекском языке	125



**О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМ ГЕЛЛЕРСТЕДТА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ  
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

*Жураев Фуркат Мухитдинович*  
БухГУ старший преподаватель кафедры  
Дифференциальные уравнения  
fjm1980@mail.ru

*Аннотация.* Изучены краевые задачи для невырождающихся уравнений гиперболического, параболического, гипероло-параболического и эллиптико-гиперболического типов. В последние годы это направление интенсивно развивалось и уточнены так, что весьма важные задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для невырождающихся нагруженных уравнений с частными производными. Известно, что краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка ранее не изучены. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач, для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

*Ключевые слова:* Краевые задачи, нагруженное уравнение парабола-гиперболического типа, нагруженное уравнение с вырождением, представление общего решения, метод интегралов энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение со сдвигом.

**BUZILISHGA EGA BO'LGAN YUKLANGAN PARABOLOK - GIPERBOLIK TIPIDAGI  
TENGLAMA UCHUN PARALLEL XARAKTERISTIKALAR BO'YICHA GELLERSTEDT  
SHARTLARI BILAN CHEGARAVIY MASALASI HAQIDA**

*Annotatsiya.* Buzilishga ega bo'lmagan giperbolik, parabolik, giperbolik-parabolik va elliptik-parabolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o'rganilgan. So'ngi yillarda bu yo'nalish jadal ravishda ishlab chiqildi va takomillashtirildi, shuning uchun matematik fizika va biologiyaning juda muhim masalalari buzilishga ega bo'lmagan yuklangan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga olib keladi. Ma'lumki, ikkinchi tartibli aralash tipdagi buzilishga ega bo'lgan yuklangan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar ilgari o'rganilmagan. Bu birinchi navbatda umumiy yechimning ifodalannaganligi bilan bog'liq, boshqa tomondan bunday masalalar siljish bilan kam o'rganilgan integral tenglamalarga keltiriladi. Shunga asosanib, ushbu ish soha ichida buziladigan yuklangan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun lokal masalani qo'yish va o'rganishga bag'ishlangan.

*Kalit so'zlar:* Chegaraviy masalalar, parabolik-giperbolik tipdagi yuklangan tenglama, umumiy yechimning tasviri, energiya integral usuli, ekstremum printsiipi, siljishli integral tenglama.

**ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEMES WITH GELLERSTEDT CONDITIONS ON  
PARALLEL CHARACTERISTIK FOR A DEGENERATE LOADED PARABOLIC-HYPERBOLIC  
EQUATION**

*Annotation.* Boundary value problems for non-degenerate equations of hyperbolic, parabolic, hyperbolic-parabolic and elliptic-hyperbolic types are studied. In recent years, this direction has been intensively developed and refined so that very important problems of mathematical physics and biology lead to boundary value problems for non-degenerate loaded partial differential equations. It is known that boundary value problems for a degenerate loaded equation of mixed type of the second order have not been studied before. This is due, first of all, to the lack of representation of the general solution for such equations; on the other hand, such problems are reduced to little-studied integral equations with a shift. Based on this, the present work is devoted to the formulation and study of local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation that degenerates inside the domain.

*Keywords:* Boundary value problems, loaded equation of parabolic-hyperbolic type, loaded equation with degeneration, general solution representation, method of energy integral, extremum principle, integral equation with shift.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время круг рассматриваемых задач для невырождающихся нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гипербола-параболического и эллиптико-параболического типов значительно расширился. Отметим работы [1-6]. Теория краевых задач для нагруженных уравнений второго порядка с интегро-дифференциальным оператором были изучены в работах [7], [8]. В работах [9], [10] изучены локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов второго и третьего порядка.

Несколько нам известно, краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева [11], В.М.Казиева [12], Б.Исломов и Ф.Джураева [13], Р.Р.Ашурова и С.З. Жамалова [14], Б.И.Исломов и Ф.М.Жураева [15], [24].

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач, для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \rho_j u(x, 0), & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_j u(x, 0), & (x, y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m, p, \rho_j, \mu_j (j=1, 2)$  – любые действительные числа, причем

$$m < 0, p > 0, \rho_j > 0, \mu_j > 0, (j=1, 2). \quad (2)$$

Пусть  $\Omega$  – конечная односвязная область в плоскости переменных  $x, y$ , ограниченная кривыми:

$$S_j : |x|=1, 0 < y < 1, S_3 : 0 < x < 1, y=1, S_4 : -1 < x < 0, y=1,$$

$$\Gamma_j : |x| - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0, \Gamma_{j+2} : |x| + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1, y \leq 0,$$

здесь и далее  $x \geq 0$ , при  $j=1, x \leq 0$ , при  $j=2$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_1^+ &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, & \Omega_2^+ &= \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, \\ \Omega_1^- &= \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\}, & \Omega_2^- &= \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y < 0\}, \\ I_1 &= \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, & I_2 &= \{(x, y) : -1 < x < 0, y = 0\}, & I_3 &= \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}, \\ \Omega_j &= \Omega_j^+ \cup \Omega_j^-, & \Omega_3 &= \Omega_1^+ \cup \Omega_2^-, & A_j &= ((-1)^{j+1}, 0) = \bar{I}_j \cap \bar{S}_j, \\ C_j &\left[ (-1)^{j+1} \frac{1}{2}; -\left( (-1)^{j+1} \frac{2-m}{4} \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = \bar{\Gamma}_j \cap \bar{\Gamma}_{j+2}, (j=1, 2), & O(0, 0) &= \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2, \\ B_1(1, 1) &= \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3, & B_2(-1, 1) &= \bar{S}_2 \cap \bar{S}_4, & B_0(0, 1) &= \bar{S}_3 \cap \bar{S}_4. \end{aligned}$$

$$2\beta = \frac{m}{m-2}, \text{ причем } 0 < \beta < \frac{1}{2}, 0 < p - 2\beta < 1 \quad (3)$$

В области  $\Omega$  для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

**Задача  $\tilde{T}$ .** Найти функцию  $u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами:

- 1)  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+) \cap C^2(\Omega_1^- \cup \Omega_2^-)$ ;
- 2)  $u(x, y)$  является регулярным решением уравнения (1) в областях  $\Omega_j^+$  и  $\Omega_j^- (j=1, 2)$ ;
- 3)  $u(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j} = \varphi_j(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{\Gamma_3} = q_1(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad u|_{\Gamma_2} = q_2(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \quad (5)$$

4) на линии вырождения  $J_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) выполняется условия склеивания

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x, 0) \in I_j, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y), \quad (x, 0) \in I_3; \quad (7)$$

где  $\varphi_1(y)$ ,  $\varphi_2(y)$ ,  $q_1(x)$ ,  $q_2(x)$  – заданные функции, причем  $\varphi_1(0) = q_1(1) = 0$ ,

$$\varphi_j(y) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1), \quad (8)$$

$$q_1(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap C^3\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad q_2(x) \in C^1\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap C^3\left(-\frac{1}{2}, 0\right). \quad (9)$$

### 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ $\tilde{T}$

Если выполнены условия 1) и 2) задачи  $\tilde{T}$ , то любое регулярное решение уравнения (1) можно представить в виде [2], [16]:

$$u(x, y) = v(x, y) + \omega(x) \quad (10)$$

где

$$v(x, y) = \begin{cases} v_j(x, y), & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ w_j(x, y), & (x, y) \in \Omega_j^-, \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_j^+(x), & (x, 0) \in \bar{I}_j, \\ \omega_j^-(x), & (x, 0) \in \bar{I}_j, \end{cases} \quad (12)$$

здесь  $v_j(x, y)$  и  $w_j(x, y)$  ( $j = 1, 2$ ) регулярные решения уравнения

$$Lv_j \equiv v_{jxx} - |x|^p v_{jy} = 0 \quad (x, y) \in \Omega_j^+, \quad (13)$$

$$Lw_j \equiv w_{jxx} - (-y)^m w_{jyy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_j^- \quad (j = 1, 2), \quad (14)$$

а  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$  ( $j = 1, 2$ ) произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j^{+''}(x) - \rho_j \omega_j^+(x) = \rho_j v_j(x, 0), \quad (x, 0) \in I_j, \quad (15)$$

и

$$\omega_j^{-''}(x) + \mu_j \omega_j^-(x) = -\mu_j w_j(x, 0), \quad (x, 0) \in I_j \quad (16)$$

соответственно.

Учитывая, что функция  $ax + b$  является решениям уравнениям (13) и (14), произвольные функции  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$  ( $j = 1, 2$ ) можно починить условиям

$$\omega_j^+((-1)^{j+1}) = \omega_j^{+'}((-1)^{j+1}) = 0, \quad (17)$$

$$\omega_1^-(0) = \omega_1^{-'}(0) = 0, \quad \omega_2^-(-1) = \omega_2^{-'}(-1) = 0. \quad (18)$$

Решение задачи Коши (15), (17) и (16), (18) соответственно имеет вид:

$$\omega_j^+(x) = \sqrt{\rho_j} \int_{(-1)^{j+1}}^x \tau_j(t) \operatorname{sh} \sqrt{\rho_j}(x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (19)$$

$$\omega_1^-(x) = -\sqrt{\mu_1} \int_0^x \tau_1(t) \operatorname{sh} \sqrt{\mu_1} (x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_1, \quad (20)$$

$$\omega_2^-(x) = -\sqrt{\mu_2} \int_{-1}^x \tau_2(t) \operatorname{sh} \sqrt{\mu_2} (x-t) dt, \quad (x, 0) \in \bar{I}_2,$$

где

$$\tau_j(x) \equiv \nu_j(x, 0) = w_j(x, 0), \quad (x, 0) \in \bar{I}_j. \quad (21)$$

В силу (1), (4), (5), (11), (12), (17), (18) задача сведется к задаче  $\tilde{T}^*$  для уравнения

$$0 = \begin{cases} L v_j, & (x, y) \in \Omega_j^+, \\ L w_j, & (x, y) \in \Omega_j^- \end{cases} \quad (22)$$

с краевыми условиями

$$v_j|_{S_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (23)$$

$$w_1|_{\Gamma_3} = q_1(x) - \omega_1^-(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (24)$$

$$w_2|_{\Gamma_3} = q_2(x) - \omega_2^-(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \quad (25)$$

здесь  $\omega_j^-(x)$  – определяются из (20) ( $j=1,2$ ).

Чтобы доказать единственность решения задачи  $\tilde{T}$ , сначала докажем единственность решения задачи  $\tilde{T}^*$  для уравнений (22).

Для доказательства единственности решение задачи  $\tilde{T}^*$  для уравнения (22) важную роль играет следующая лемма.

**Лемма 1.** Если  $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0, \forall y \in [0,1], q_1(x) \equiv 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$

$q_2(x) \equiv 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right],$  то

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2), \quad (26)$$

здесь  $\tau_j(x)$  ( $j=1,2$ ) – определяются из (21).

В работе [15] была доказана, что

$$\tau_j(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_j \quad (j=1,2). \quad (27)$$

В силу (27) из (19) и (20) с учетом (12), получим

$$\omega(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2. \quad (28)$$

**Теорема 1.** Если выполнены условия леммы 1 и (28), то в области  $\Omega$  решение задачи  $\tilde{T}^*$  для уравнения (22) единственно.

*Доказательство.* Согласно принципу максимума для параболических уравнений [18],[19], [20] краевая задача  $\tilde{T}^*$  для уравнения (22) в области  $\bar{\Omega}_3$  с однородными условиями (21), (23) с учетом (27) не имеет отличного от нуля решения, т.е.  $\nu_j(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}_j^+$  ( $j=1,2$ ). Тогда из условия (25), (25) с учетом (12), (28) следует, что

$$\omega_j^-(x) \equiv 0, \quad (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (j=1,2). \quad (29)$$

В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями  $w_j(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in \bar{I}_j, w_b(x, y)|_{y=0} = 0, (x, 0) \in I_j$  для уравнения (14) в области  $\Omega_j^+$  с учетом (28) и (29) получим  $w_j(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{\Omega}_j^-$ .



Отсюда, и из (11) имеем

$$v(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (30)$$

Из (30) следует единственность решения задачи  $\tilde{T}^*$  для уравнения (22).

**Теорема 1 доказана.**

**Теорема 2.** Если выполнены условия теоремы 1, то в области  $\Omega$  решение задачи  $\tilde{T}$  для уравнения (1) единственно.

**Доказательство.** В силу (28), (30) из (10) следует, что

$$u(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (31)$$

Тем самым доказана единственность решения задачи  $\tilde{T}$  для уравнения (1).

**Теорема 2 доказана.**

#### 4. Существования решения задачи $\tilde{T}$

**Теорема 3.** Если выполнены условия (2), (3), (8) и (9), то в области  $\Omega$  решение задачи  $\tilde{T}$  существует.

Для доказательства теоремы 3 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

**Задача  $\tilde{T}_j$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega_j) \cap C^2(\Omega_j^+ \cup \Omega_j^-)$  ( $j=1,2$ ) уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4), (5) и

$$u(0, y) = \tau_3(y), \quad (0, y) \in \bar{I}_3, \quad (32)$$

где  $\tau_3(y)$  – заданная функция, причем

$$\tau_3(y) \in C(\bar{I}_3) \cap C^1(I_3). \quad (33)$$

**Задача  $\tilde{T}_3$ .** Найти решение  $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_3) \cap C^1(\Omega_3 \cup I_1 \cup I_2) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_3^+ \cup \Omega_3^-)$  уравнения (1), удовлетворяющие условиям (4) и

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau_j(x) + \omega_j^+(x), \quad (x, 0) \in \bar{I}_j \quad (j=1,2),$$

где

$$\tau_j(x) = w_j(x, -0) = v_j(x, +0), \quad (x, 0) \in \bar{I}_j \quad (34)$$

и  $\omega_j^+(x)$  – определяется соответственно (19).

##### 4.1. Исследование задачи $\tilde{T}_j$ ( $j=1,2$ )

**Теорема 3.j.** Если выполнены условия (2), (3), (8), (9) и (33), то в области  $\Omega_j$  существует единственное решение задачи  $\tilde{T}_j$ .

**Доказательство.** В силу леммы 1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболических гиперболических уравнений [20] следует, что решение  $u(x, y)$  задачи  $\tilde{T}_j$  при  $q_j(x) \equiv 0$  свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области  $\bar{\Omega}_j^+$  достигает лишь на  $\bar{\Gamma}_j \cup \bar{I}_3$ , ( $j=1,4$ ).

Согласно принципу экстремума, однородная задача  $\tilde{T}_j$ , т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи  $\tilde{T}_j$

Переходим к доказательству существования решения задачи  $\tilde{T}_j$  и  $\tilde{T}_j^*$  с условиями (23), (24), (25) и  $v_j(0, y) = \tau_3(y)$ ,  $(0, y) \in \bar{I}_3$ .

В силу решения задачи Коши [13] для уравнения (22) в области  $\Omega_j^-$  ( $j=1,2$ ) с учётом (24), (25) имеем

$$q_1\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1(x)^{1-2\beta} \Gamma(\beta) D_{1x}^{-\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) -$$



$$-\gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{1x}^{\beta-1} x^{-\beta} v_1(x), (x, 0) \in I_1, \quad (35)$$

$$q_2 \left( \frac{x-1}{2} \right) - \omega_2^- \left( \frac{x-1}{2} \right) = \gamma_1 (1+x)^{1-2\beta} \Gamma(\beta) D_{x0}^{-\beta} (1+x)^{\beta-1} \tau_2(x) - \\ -\gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{x0}^{\beta-1} (1+x)^{-\beta} v_2(x), (x, 0) \in I_2, \quad (36)$$

где  $\tau_j(x)$  определяются из (34) и

$$w_{jy}(x, -0) = v_{jy}(x, +0) = v_j(x), (x, 0) \in I_j, (j=1, 2). \quad (37)$$

соответственно,

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \gamma_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{2-m} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а  $D_{0x}^{-\alpha}[\cdot]$  и  $D_{-1x}^{-\alpha}[\cdot]$  - интегральные операторы дробного порядка  $\alpha (\alpha > 0)$  [21]:

$$D_{ax}^{-\alpha} \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > a, \quad \text{Re } \alpha > 0. \quad (38)$$

Применяя дифференциальные операторы,  $\frac{d}{dx} D_{0x}^{-\beta} \dots \equiv D_{0x}^{1-\beta} \dots$  и  $\frac{d}{dx} D_{-1x}^{-\beta} \dots \equiv D_{-1x}^{1-\beta} \dots$  к обеим частям равенств (35), (36) ( $j=1, 2$ ) и используя, формулы [21]:

$$D_{1x}^{1-\beta} D_{1x}^{\beta-1} v_1(x) = v_1(x), \quad D_{x0}^{1-\beta} D_{x0}^{\beta-1} v_2(x) = v_2(x), \\ D_{1x}^{1-\beta} x^{1-2\beta} D_{1x}^{-\beta} x^{\beta-1} \tau_1(x) = x^{-\beta} D_{1x}^{1-2\beta} \tau_1(x), \\ D_{x0}^{1-\beta} (1+x)^{1-2\beta} D_{x0}^{-\beta} (1+x)^{\beta-1} \tau_2(x) = (1+x)^{-\beta} D_{x0}^{1-2\beta} \tau_2(x)$$

получим функциональные соотношения между  $\tau_j(x)$  и  $v_j(x)$ , принесенные из области  $\Omega_j^-$  на  $I_j (j=1, 2)$ :

$$v_1(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-2\beta} \tau_1(x) + \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-\beta} \omega_1^- \left( \frac{x}{2} \right) - \\ - \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-\beta} q_1 \left( \frac{x}{2} \right), (x, 0) \in I_1, \quad (39)$$

$$v_2(x) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-2\beta} \tau_2(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-\beta} \omega_2^- \left( \frac{x-1}{2} \right) - \\ - \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-\beta} q_2 \left( \frac{x-1}{2} \right), (x, 0) \in I_2, \quad (40)$$

Согласно условиям задачи  $\tilde{T}$ , переходя к пределу в уравнении (13) при  $y \rightarrow +0$ , с учетом (34) и (37) получим

$$\tau_j^*(x) - |x|^p v_j(x) = 0. \quad (41)$$

с условиями

$$\tau_1(0) = \tau_3(0) = q_2(0), \quad \tau_1(1) = q_1(0), \quad (42)$$

$$\tau_2(-1) = q_2(0), \quad \tau_2(0) = \tau_3(0), \quad \tau_2(1) = q_1(0). \quad (43)$$

Решая задачу (41) и (42), (43) получим функциональное соотношение между  $\tau_j(x)$  и  $v_j(x)$ , перенесенное из области  $\Omega_j^+$  на  $I_j$ :

$$\tau_j(x) = (-1)^{j+1} \int_0^{(-1)^{j+1}} G_j(x,t) ((-1)^{j+1} t)^p v_j(t) dt + f_j(x), \quad (x, 0) \in \bar{I}_j, \quad (44)$$

где

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (x-1)t, & 0 \leq t \leq x, \\ (t-1)x, & x \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (45)$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} (t+1)x, & -1 \leq t \leq x, \\ (x+1)t, & x \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (46)$$

$$f_1(x) = q_2(0) + x[\varphi_1(0) - q_2(0)], \quad (47)$$

$$f_2(x) = q_1(1) - x[\varphi_2(0) - q_1(1)]. \quad (48)$$

Исключив  $\tau_j(x)$  из (39), (40) и (44) с учётом (20), получим интегральное уравнение относительно  $v_j(x)$  ( $j=1,2$ ):

$$v_1(x) - \int_0^1 K_1(x,t) t^p v_1(t) dt = \Psi_1(x), \quad (x, 0) \in I_1, \quad (49)$$

$$v_2(x) + \int_{-1}^0 K_2(x,t) (-t)^p v_2(t) dt = \Psi_2(x), \quad (x, 0) \in I_2, \quad (50)$$

где

$$K_1(x,t) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-2\beta} G_1(x,t) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-\beta} \int_0^x sh \sqrt{\mu_1} \frac{x-z}{2} G_1\left(\frac{z}{2}, t\right) dz, \quad (51)$$

$$K_2(x,t) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-2\beta} G_2(x,t) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-\beta} \int_{-1}^x sh \sqrt{\mu_2} \frac{x-z}{2} G_2\left(\frac{z-1}{2}, t\right) dz,$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) = & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{1x}^{1-2\beta} f_1(x) - \frac{x^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} \int_0^x sh \sqrt{\mu_1} \frac{x-z}{2} f_1\left(\frac{z}{2}\right) dz - \\ & - \frac{x^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{0x}^{1-\beta} q_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad (x, 0) \in I_1, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x) = & \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-2\beta} f_2(x) - \frac{(1+x)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-\beta} \int_{-1}^x sh \sqrt{\mu_2} \frac{x-z}{2} f_2\left(\frac{z-1}{2}\right) dz - \\ & - \frac{(1+x)^\beta}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{x0}^{1-\beta} q_2\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad (x, 0) \in I_2. \end{aligned} \quad (53)$$

На основании (2), (3), (8) и (9) с учетом свойств оператора интегро-дифференцирования, Бета, гипергеометрической функции [21, гл. 1, § 1, 2 и 4, стр.4-32] и функции  $G_j(x,t)$  ( $j=1,2$ ) из (51), (52) и (53) следует, что ядро и правой части уравнения (48) и (49) допускают оценки

$$|K_j(x,t)| \leq c_1, \quad (54)$$

$$|\Psi_1(x)| \leq c_2 x^{2\beta-1}, \quad |\Psi_2(x)| \leq c_3 (1+x)^{2\beta-1}, \quad c_j = const > 0 \quad (j=1,3). \quad (55)$$

На основании (8), (9), с учётом (54) заключаем, что  $\Psi_j(x) \in C^2(I_j)$ , причем функция  $\Psi_1(x)$  ( $\Psi_2(x)$ ) может иметь особенность порядка меньше  $1-2\beta$  при  $x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -1$ ), а при  $x \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0$ ) ограничена.

В силу (2), (3), (54) и (55) уравнения (49) и (50) является интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма [22] и из единственности

решения задачи  $\tilde{T}$  заключаем, что интегральное уравнение (49) и (50) однозначно разрешимо в классе  $C^2(J_j)$ , причем  $v_j(x)$  может иметь особенность порядка меньше  $1-2\beta$  при  $|x| \rightarrow 0$ , а при  $|x| \rightarrow 1$  ограничено и её решение даётся формулой:

$$v_j(x) = \Psi_j(x) + \int_0^{(-1)^{j+1}} K_j^*(x,t) \Psi_j(t) dt, \quad (x,0) \in I_j, (j=1,2), \quad (56)$$

здесь  $K_j^*(x,t)$  - резольвента ядро  $K_j(x,t)$ .

Подставляя (56) в (44) находим

$$\tau_j(x) \in C(\bar{I}_j) \cap C^2(I_j), \quad (j=1,2). \quad (57)$$

Следовательно, задача  $\tilde{T}_j^*$  однозначно разрешима в силу эквивалентности ее интегральному уравнению Фредгольма второго рода (49) и (50).

Таким образом, решения задачи  $\tilde{T}_j^*$  можно восстановить в области  $\Omega_j^+$  как решение первой краевой задачи для уравнения (13) [23], а в  $\Omega_j^-$  как решение задачи Коши для уравнения (14).

Этим завершается исследование существования решения задачи  $\tilde{T}_j^*$  для уравнения(22).

В силу (44), (55) из (19) и (20) с учетом (10), (11), (12) определим функции  $\omega_j^+(x)$  и  $\omega_j^-(x)$ .

Тогда решение задачи  $\tilde{T}_j$  в области  $\Omega_j^+$  находится в виде

$$u(x,y) = v_j(x,y) + \omega_j^+(x), \quad (58)$$

где  $v_j(x,y)$  - решение первой краевой задачи для уравнения (13) [20], [23], а в областях  $\Omega_j^-$  в виде

$$u(x,y) = w_j(x,y) + \omega_j^-(x), \quad (j=1,2), \quad (59)$$

здесь  $w_j(x,y)$  - решение задачи Коши для уравнения (14) в области  $\Omega_j^- (j=1,2)$  [13].

Таким образом, в области  $\Omega_j$  решение задачи  $\tilde{T}_j$  существует и единственно.

**Теорема 3.1 доказана.**

#### 4.2. Исследование задачи $\tilde{T}_3$

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия (2),(3), (8) и (57), тогда в области  $\Omega_3$  существует единственное решение задачи  $\tilde{T}_3$ .

Доказательство теорема 3.3 приведено в работе [15].

**Переходим к доказательству существования решения задачи  $\tilde{T}$**

Пусть  $u(x,y)$  – решение задачи  $\tilde{T}$  в области  $\Omega$  с условиями (4)- (7), тогда пользуясь результатами задач  $\tilde{T}_i (i = \overline{1,3})$  (см пункт 4.1 и 4.2) задачи  $\tilde{T}$  эквивалентном образом редуцируется к исследованию задач  $\tilde{T}_1$  и  $\tilde{T}_2$  для уравнения (1), где  $r_3(y)$  – определяется из [15, формулы 4.39].

Однозначная разрешимость задач  $\tilde{T}_j$  следует из теоремы 3.1 ( $j=1,2$ ). Следовательно, области  $\Omega$  решение задачи  $\tilde{T}$  существует.

**Теорема 3 доказана.**

Этим завершается исследование задачи  $\tilde{T}$  для уравнения (1).

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. // "Дифференциальные уравнения". 19(1). 1983. С. 86-94.
2. Исломов Б., Куръязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка. // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С. 3-6.
3. Джениалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы. 1995. 270 с.
4. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения. // "Тр. МИАН". 2002. Т. 236. С. 298-303.
5. Хубиев К.У. Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами. // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2(15). 2007. С. 155-157.
6. Isломov B., Baltaeva U.I. Boundary value problems for the classical and mixed integro-differential equations with Riemann-Liouville operators. // International Journal of Partial Differential equations. 2013. Article ID 157947. Pp. 11-17.
7. Kishin B.S., Abdullaev O.Kh. About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives // "International Journal of Differential Equations". 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.
8. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // «Научный вестник. Математика». 2017. №5. С. 25-30.
9. Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения. // "Математические заметки". 51(3). 1992. С. 91-96.
10. Balkizov Zh. A. Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain. // "Ufa Mathematical Journal". 9( 2). 2017. pp. 25-39.
11. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // "Дифференциальные уравнения". 12(1). 1976. С. 103-108.
12. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // «Дифференциальные уравнения». 14(1). 1978. С.181-184.
13. Исломов Б., Джуроев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // "Узбекский математический журнал". 2011. № 2. С. 75-85.
14. Dzhatalov S.Z., Ashurov R.R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle // "Uzbek Mathematical Journal". 2018. №3. pp. 63-72.
15. Исломов Б., Жураев Ф. Локальные краевые задачи для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области // "Уфимский математический журнал". Том 14. № 1(2022). С. 41-56
16. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанного - составного типа. Т. Фан. 1974. 156 с.
17. Джуроев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно- составного типа. Ташкент: Фан. 1979. 240 с.
18. Джуроев Т.Д., Согуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220с.
19. Ильин А.М., Калашиников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболоческого типа. // "ЖВМиМФ". 4(6). 1965.С. 1006-1024.
20. Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнений смешанного параболо- гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения. // Дис. канд. физ.мат. наук. Ташкент: ИМАН РУз. 1995. 120 с.
21. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985. 301 с.
22. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз.1959. 232 с.
23. Герсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск. 1978. 53 с.
24. Исломов Б., Жураев Ф.М. Краевые задачи с условиям геллерстедта на параллельных характеристиках для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.// БухДУ илмий ахбороти 2023, № 1. С. 34-42.