ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Жураев Ф.М.
Email: Zhuraev6114@scientifictext.ru

Жураев Фуркат Мухитдинович - старший преподаватель,
кафедра дифференциальных уравнений, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *краевые задачи для невырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции и трёхмерный аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, исследованы в работах многих учёных. Несколько нам известно, краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. В данной статье доказана однозначно разрешимость решения задачи Геллерстедта вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа.*
Ключевые слова: *вырождающие нагруженные уравнения, краевая задача, задача Геллерстедта, существование и единственность решение.*

HELLERSTEDT PROBLEMS FOR A DEGENERATING LOADED EQUATION OF PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE

Zhuraev F.V.

Zhuraev Furkat Mukhitdinovich - Senior Lecturer,
DEPARTMENT OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY, BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *boundary value problems for non-degenerate loaded equations of mixed type of the second and third order, when the loaded part contains a trace or derivative of the desired function and a three-dimensional analogue of the Tricomi problem for a loaded equation of parabolic-hyperbolic type, have been investigated in the works of many scientists. We know a little that boundary value problems of the type of the Tricomi and Gellerstedt problem for a degenerate loaded equation of mixed type of the second order have been investigated relatively little. In this article, we prove the uniquely solvability of the solution to the the Hellerstedt problem for a degenerate loaded parabolic-hyperbolic type.*
Keywords: *a degenerate loaded equation, boundary value problems, the Hellerstedt problem, the existence and uniqueness of a solution.*

УДК 517.956.6

Краевые задачи для невырождающихся нагруженных уравнений смешанного типа второго и третьего порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции изучены в работах А.М. Нахушева, Н.Н. Ланина, В.А. Елеева, Б. Исломова и Д.М. Курьязова, Б. Исломова и У.И. Болтаевой. Трёхмерный аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа исследована в работе Б. Исломова и Е. Аликулова.

Несколько нам известно, краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию краевой задачи типа задачи Геллерстедта, для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в виде

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^{p}u_{y}-\mu_0 u(x,0), & x>0, \quad y>0 \\ u_{xx}-(-y)^{m}u_{yy}+\mu_j u(x,0), & x>0, \; y<0 \end{cases}$$

$$(1)$$

где $m, \quad p, \quad \mu_0 \quad \mu_1 \quad \mu_2$ - любые действительные числа, причем

$$m<0,\; p>0,\; \mu_0>0,\; \mu_1<0,\; \mu_2<0. \qquad (2)$$

Пусть Ω_0 - область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=h$ соответственно, при $x>0, y>0$; Ω_1 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $A(0,0)E(x_0,0)$ оси x и двумя характеристиками

$$AC_1: \quad x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0 \qquad EC_1: \quad x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$$

уравнения (1), выходящими из точки $A(0,0)$ и $E(x_0,0)$ и пересекающимися в точке $C_1\left[\frac{x_0}{2};\; -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_2 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $E(x_0,0)B(1,0)$ оси x и двумя характеристиками $EC_2:\; x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$ $BC_2:\; x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1), выходящими из точек $E(x_0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C_2\left[\frac{1+x_0}{2};\; -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_3 - характеристический четырёхугольник, ограниченный характеристиками EC_1, EC_2 и C_1C: $x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $C_2C:\; x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1), пересекающимися в точках E, C_1, C_2 и $C\left[\frac{1}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$ при $x>0,\ y<0$, причем $x_0\in[0,1]$.

Введем следующие обозначения:

$$J_{11}=\left\{(x,y):\ 0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},$$

$$J_{12}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},$$

$$J_{21}=\left\{(x,y):\ x_0<x<\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},$$

$$J_{22}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0+1}{2}<x<1,\ y=0\right\},$$

$$J_0=\left\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\right\},$$

$$J_1=\left\{(x,y):\ 0<x<x_0,\ y=0\right\},$$

$$J_2=\left\{(x,y):\ x_0<x<1,\ y=0\right\},$$

$$\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\cup J_1,$$

$$2\beta=\frac{2}{m-2},\ \text{причем}\ 0<\beta<\frac{1}{2}\qquad(3)$$

В области Ω для уравнения (1) исследуются аналоги задачи Геллерстедта [22-24].

Задачи АГ. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях $\Omega_j\ \left(j=\overline{0,3}\right)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{AA_0}=\varphi_1(y),\quad u\big|_{BB_0}=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h\qquad(4)$$

$$u\big|_{EC_1}=f_1(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_{12}\qquad(5_1)$$

$$u\big|_{BC_2}=f_2(x),\quad (x,0)\in\bar{J}_{22}\qquad(5_2)$$

4) на линии вырождения $AE \cup EB$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\lim_{y\to-0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \qquad (6_j)$$

равномерно при $(x,0)\in J_j \ (j=1,2)$,

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, ($f_1(x)$, $f_2(x)$) - заданные функции, причем

($f_2(1)=\varphi_2(0)$),

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \qquad (7)$$

$$\left(\ f_j(x)\in C^1(\bar{J}_{j2})\cap C^3(J_{j2})\ \right), \quad (j=1,2) \qquad (8_j)$$

Теорема. Если выполнены условия (2), (3), (7), (8_1) и (8_2), то в области Ω существует единственное решение задачи АГ.

Единственность решения задачи АГ доказывается с помощью принципа экстремума, а существование – методом интегральных уравнений. Этими методами воспользовались и в следующих работах [1-26].

Список литературы / References

1. *Бозоров З.Р.* Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости. Сибирский журнал индустриальной математики. 23:1 (2020). С. 28-45.
2. *Бешимова Д.Р.* Компактные пространства. Молодой учёный. №13(117). Июль-1, 2016.
3. *Бешимова Д.Р.* Слабо сепарабельные пространства. Молодой учёный. № 12(116). Июнь-2, 2016.
4. *Бешимова Д.Р.* Слабая плотностьпространства слабо аддитивных функционалов. Молодой учёный. № 8 (112). Февраль-1, 2016.
5. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты.и Сибирские Электронные Математические Известия. 17 (2020). Стр. 179-189.
6. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Eurasian journal of mathematical and computer applications. 7:2 (2019). Pp. 4–19.
7. *Durdiev U.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences 42:18 (2019). Pp. 7440–7451.
8. *Durdiev U.D.* An Inverse Problem for the System of Viscoelasticity Equation in the Homogeneous Anisotropic Media. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 13:4 (2019). Pp. 1-8.
9. *Маматова Н.Х.* Преподавание предмета «математика для экономистов» при помощи метода кейс-стади. Вестник Науки и образования. 19 (97). 2, 2020. С. 45-50.
10. *Mamatova N.H. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R.* Optimal interpolation formulas in the sobolev space of periodic functions. Computational mathematics, 2016. Том 6. № 4. P. 75-87.

11. *Matatova N.H., Hayotov A.R., Shadimetov H.M.* Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space of periodic function of variables by Sobolev method. Ufimskii Matematicheskii Zhurnal, 2013. № 1. P. 90-101.
12. *Маматова Н.Х., Меражова Ш.Б.* Постановка задачи о нахождении оптимальных коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы на пространстве L2˜ (0,1). Ученый XXI века, 2018. № 3. 43-44 стр.
13. *Меражова Ш.Б., Нуриддинов Ж.З., Меражов Н.И., Хидиров У.Б.* Методы решений задачи Коши для уравнения волны в случае n=2 и n=3 // Academy. 4 (55), 2020. С. 21-25.
14. *Меражова Ш.Б.* Постановка обратной задачи для параболических интегро-дифференциальных уравнений с интегральным членом типа свертки // Ученый XXI века. 5-3 (2018). С. 47-49.
15. *Меражова Ш.Б.* Решение методам продолжения задач математической физики в полуограниченных областях // Молодой учёный. 12 (2016). С. 43-45.
16. *Меражова Ш.Б., Маматова Н.Х.* Априорная оценка для решения первой краевой задачи для уравнения смешанного типа // Молодой учёный. 12 (116), 2016. С. 42-56.
17. *Меражова Ш.Б., Мардонова Ф.Я.* Эквивалентность задачи для уравнения смешанного типа и задачи Коши для уравнений симметрической системе // Ученый XXI века 6-1 (53), 2019. С. 20-23.
18. *Тураева Н.А.* Методические рекомендации по обучению будущих учителей математики конструированию и анализу урока. Вестник Науки и образования. 19(97). 2, 2020. С. 45-50.
19. *Меражова Ш.Б.* Понятие прямой и обратной задачи в преподавании предмета уравнений математической физики. Вестник Науки и образования. 19 (97). 2, 2020. С. 81-85.
20. *Merajova Sh.B.* Methods of teaching the practical application of topics related to differential equations. European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences. Vol. 8. No. 9, 2020. Pp. 37-40.
21. *Narmanov A.Ya*., *Parmonov H.F.* On the geometry of hamiltonian symmetries. Mathematics and Statistics. 8(3): 293-298, 2020.
22. *Жураев Ф.М.* Задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. Молодой учёный. № 8. Апрель, 2016.
23. *Жураев Ф.М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. Молодой учёный. № 25. Июнь, 2017.
24. *Жураев Ф.М.* Задача Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа / Россия. Ученый XXI века. № 4-1, 2018.
25. *Элмуродова Х.Б.* Условия существование виртуального уровня обобщенной модели Фридрихса. Молодой ученый. 13(117). 62-65.
26. *Элмуродова Х.Б.* Кубический числовой образ на примерах. Молодой ученый. 12(116). 70-73.