ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 14. № 1 (2022). С. 41-56.

УДК 517.95, 517.956.6

ЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Б.И. ИСЛОМОВ, Ф.М. ЖУРАЕВ

Аннотация. В начале 21-го века изучены краевые задачи для невырождающихся уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-гиперболического типов. В последние годы это направление интенсивно развивалось и уточнено так, что весьма важные задачи математической физики и биологии приводят к краевым задачам для невырождающихся нагруженных уравнений с частными производными. Известно, что краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка ранее не изучены. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

В данной работе найден новый подход для получения представления общего решения для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа. Единственность решения поставленных задач доказывается методом интегралов энергии. Существования решений поставленных задач эквивалентным образом сводятся к интегральному уравнению Фредгольма и Вольтерра второго рода со сдвигом. Доказана однозначная разрешимость полученных интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение параболо-гиперболического типа, нагруженное уравнение с вырождением, представление общего решения, метод интегралов энергии, принцип экстремума, интегральное уравнение со сдвигом.

Mathematics Subject Classification: 35M10, 35M12, 35L10, 35K10

1. Введение

Первые результаты по изучению модельных уравнений смешанного типа, содержащих параболо-гиперболические операторы, посвященные построению решений, изучению их свойств и исследованию краевых задач, получены в работе И.М. Гельфанда [1]. Далее они развиты в работах Г.М. Стручиной [2], Я.Ф. Уяфлянда [3] и Л.А. Золиной [4].

После этих статей в конце двадцатого века появилось множество работ [5]–[9] и их учеников, где изучается задача Трикоми и ее обобщения, задачи со смещениями, задача типа задачи Бицадзе–Самарского и другие нелокальные задачи для параболических, гиперболических, смешанных параболо-гиперболических и эллиптико-гиперболических уравнений второго порядка.

В работах [10]–[13], используя методы спектрального анализа, исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа второго порядка в прямоугольной области.

B.I. Islomov, F.M. Juraev, Local boundary value problems for a loaded equation of parabolic-hyperbolic type degenerating inside the domain.

Поступила 12 декабря 2020 г.

Многие, весьма важные задачи математической физики и биологии [14], особенно задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод [15], моделирования процессов переноса частиц [16], задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, моделирования фильтрации жидкости в пористых средах [17], исследования обратных задач [18], решение многих задач оптимального управления агроэкосистемой [19], приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений с частными производными.

Термин «нагруженное уравнение» впервые появился в работах A. Kneser [20]. Принятое сейчас в научной литературе общее определение нагруженных уравнений было дано в 1976 г. А.М. Нахушевым. В его работе [21] дано наиболее общее определение и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения.

В настоящее время круг рассматриваемых задач для невырождающихся нагруженных уравнений гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов значительно расширился. Отметим работы [22]–[27]. Теория краевых задач для нагруженных уравнений второго порядка с интегро-дифференциальным оператором были изучены в работах [28], [29]. В работах [30], [31] изучены локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов второго и третьего порядка.

Насколько нам известно, краевые задачи для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы А.М. Нахушева [32], Б. Исломова и Ф. Джураева [33], Р.Р. Ашурова и С.З. Жамалова [34]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям.

Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию локальных краевых задач для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

2. Постановка задачи

Пусть Ω – конечная односвязная область в плоскости переменных x, y, ограниченная кривыми:

$$S_1=\{(x,y): x=1,\quad 0<y<1\},\qquad S_2=\{(x,y):\ x=-1,\quad 0<y<1\},$$
$$S_3=\{(x,y): 0<x<1,\quad y=1\},\qquad S_4=\{(x,y): -1<x<0,\quad y=1\};$$
$$\Gamma_1=\left\{(x,y):\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\quad y\leqslant 0\right\},$$
$$\Gamma_2=\left\{(x,y):\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\quad y\leqslant 0\right\},$$
$$\Gamma_3=\left\{(x,y):\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1,\quad y\leqslant 0\right\},$$
$$\Gamma_4=\left\{(x,y):\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=-1,\quad y\leqslant 0\right\},\quad m<0.$$

Введем обозначения:

$$\Omega_1^+=\Omega\cap\{(x,y): x>0,\quad y>0\},\qquad \Omega_2^+=\Omega\cap\{(x,y): x<0,\quad y>0\},$$
$$\Omega_1^-=\Omega\cap\{(x,y): x>0,\quad y<0\},\qquad \Omega_2^-=\Omega\cap\{(x,y): x<0,\quad y<0\},$$

$$I_1=\{(x,y):0<x<1,\quad y=0\},\qquad I_2=\{(x,y):-1<x<0,\quad y=0\},$$
$$I_3=\{(x,y):x=0,\quad 0<y<1\},\quad \Omega_j=\Omega_j^+\cup\Omega_j^-\cup J_j,(j=1,2),\quad \Omega_3=\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\cup J_3,$$
$$A_j((-1)^{j+1},0)=\bar I_j\cap\bar S_j,\quad C_j\left((-1)^{j+1}\frac{1}{2};-\left((-1)^{j+1}\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right)=\bar\Gamma_j\cap\bar\Gamma_{j+2},$$
$$O(0,0)=\bar I_1\cap\bar I_2,\qquad B_1(1,1)=\bar S_1\cap\bar S_3,\qquad B_2(-1,1)=\bar S_2\cap\bar S_4,\qquad B_0(0,1)=\bar S_3\cap\bar S_4.$$

В области Ω рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases}u_{xx}-|x|^pu_y-\rho_ju\,(x,0)\,, & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ u_{xx}-(-y)^mu_{yy}+\mu_ju\,(x,0)\,, & (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases}\tag{2.1}$$

где m, p, ρ_j, μ_j $(j=1,2)$ – любые действительные числа, причем

$$m<0,\qquad p>0,\qquad \rho_j>0,\qquad \mu_j>0,\qquad j=1,2.\tag{2.2}$$

В области Ω для уравнения (2.1) исследуются следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C\left(\bar\Omega\right)\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\right)\cap C^2\left(\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\right)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (2.1) в областях Ω_j^+ и Ω_j^- $(j=1,2)$;
3) $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{S_j}=\varphi_j(y),\qquad 0\leqslant y\leqslant 1,\tag{2.3}$$
$$u|_{\Gamma_j}=\psi_j(x),\qquad 0\leqslant(-1)^{j+1}x\leqslant\frac{1}{2},\qquad j=1,2;\tag{2.4}$$

4) на линии вырождения $I_i(i=\overline{1,3})$ выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\qquad (x,0)\in I_j,\qquad j=1,2,\tag{2.5}$$
$$\lim_{x\to+0}u_x(x,y)=\lim_{x\to-0}u_x(x,y),\qquad (x,0)\in I_3;\tag{2.6}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ – заданные функции, причем $\psi_1(0)=\psi_2(0)$,

$$\varphi_j(y)\in C\,[0,1]\cap C^1\,(0,1)\,,\qquad j=1,2,\tag{2.7}$$
$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\qquad \psi_2(x)\in C^1\left[-\frac{1}{2},0\right]\cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right).\tag{2.8}$$

Задача 2(3). Найти функцию $u(x,y)$, обладающую всеми свойствами задачи 1 кроме условий (2.4), которые заменяются условиями

$$u|_{\Gamma_1}=g_1(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\qquad u|_{\Gamma_4}=g_2(x),\qquad -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2},\tag{2.9}$$
$$\left(u|_{\Gamma_2}=f_1(x),\qquad -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0,\qquad u|_{\Gamma_3}=f_2(x),\qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right),\tag{2.10}$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$, $(f_1(x),\ f_2(x))$ – заданные функции, причем $g_1(-1)=\varphi_2(0)$, $(f_2(1)=\varphi_2(0))$,

$$g_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\qquad g_2(x)\in C^1\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\tag{2.11}$$
$$\left(f_1(x)\in C^1\left[-\frac{1}{2},\,0\right]\cap C^3\left(-\frac{1}{2},0\right),\qquad f_2(x)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^3\left(\frac{1}{2},1\right)\right).\tag{2.12}$$

3. Единственность решения задачи 1

Если выполнены условия 1) и 2) задачи 1, то любое регулярное решение уравнения (2.1) можно представить в виде [22]:

$$u\,(x,y)=\upsilon\,(x,y)+\omega\,(x)\,, \tag{3.1}$$

где

$$\upsilon\,(x,y)=\begin{cases}\upsilon_j\,(x,y)\,, & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ w_j\,(x,y)\,, & (x,y)\in\Omega_j^-,\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\omega\,(x)=\begin{cases}\omega_j^+(x), & (x,0)\in\bar I_j,\\ \omega_j^-(x), & (x,0)\in\bar I_j,\end{cases} \tag{3.3}$$

здесь $\upsilon_j\,(x,y)$ и $w_j\,(x,y)\,(j=1,2)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_j\equiv\upsilon_{jxx}-|x|^p\,\upsilon_{jy}=0, \qquad (x,y)\in\Omega_j^+, \tag{3.4}$$

$$Lw_j\equiv w_{jxx}-(-y)^m\,w_{jyy}=0, \qquad (x,y)\in\Omega_j^- \qquad (j=1,2)\,, \tag{3.5}$$

а $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$, $j=1,2$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j^{+\prime\prime}(x)-\rho_j\omega_j^+(x)=\rho_j\upsilon_j\,(x,0)\,, \qquad (x,0)\in I_j, \tag{3.6}$$

$$\omega_j^{-\prime\prime}(x)+\mu_j\omega_j^-(x)=-\mu_jw_j\,(x,0)\,, \qquad (x,0)\in I_j. \tag{3.7}$$

Учитывая, что функция $ax+b$ является решением уравнений (3.4) и (3.5), произвольные функции $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$ $(j=1,2)$ можно подчинить условиям

$$\omega_j^+((-1)^{j+1})=\omega_j^{+\prime}((-1)^{j+1})=0, \tag{3.8}$$

$$\omega_j^-(0)=\omega_{j^-}'(0)=0 \quad (j=1,2). \tag{3.9}$$

Решение задачи Коши (3.6), (3.8) и (3.7), (3.9) соответственно имеет вид:

$$\omega_j^+(x)=\sqrt{\rho_j}\int\limits_{(-1)^{j+1}}^{x}\tau_j(t)\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\rho}_j(x-t)dt, \qquad (x,0)\in\bar I_j, \tag{3.10}$$

$$\omega_j^-(x)=-\sqrt{\mu_j}\int\limits_0^x\tau_j(t)\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\mu_j}(x-t)dt, \qquad (x,0)\in\bar I_j, \tag{3.11}$$

где

$$\tau_j\,(x)\equiv\upsilon_j\,(x,0)=w_j\,(x,0)\,, \qquad (x,0)\in\bar I_j. \tag{3.12}$$

В силу (2.1), (2.3), (2.4), (3.2), (3.3), (3.8), (3.9) задача 1 сведется к задаче 1* для уравнения

$$0=\begin{cases}L\upsilon_j, & (x,y)\in\Omega_j^+,\\ Lw_j, & (x,y)\in\Omega_j^-\end{cases} \tag{3.13}$$

с краевыми условиями

$$\upsilon_j|_{S_j}=\varphi_j(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{3.14}$$

$$w_j|_{\Gamma_j}=\psi_j\,(x)-\omega_j^-(x), \qquad 0\leqslant(-1)^{j+1}x\leqslant\frac{1}{2}, \tag{3.15}$$

здесь $\omega_j^-(x)$ – определяются из (3.11).

Чтобы доказать единственность решения задачи 1, сначала докажем единственность решения задачи 1* для уравнений (3.13).

Для доказательства единственности решения задачи 1* для уравнений (3.13) важную роль играет следующая лемма.

Лемма 3.1. *Если* $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0$ *при* $y \in [0,1]$, $\psi_1(x) \equiv 0$ *при* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *и* $\psi_2(x) \equiv 0$ *при* $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, *то*

$$\tau_j(x) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad x \in \bar{I}_j, \qquad j = 1,2, \tag{3.16}$$

здесь $\tau_j(x)$, $j = 1,2$, *определяются из (3.12).*

Доказательство. Докажем эту лемму с помощью метода интегралов энергии. Пусть $w_j(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемое решение однородной задачи 1* в области Ω_j^- и $\Omega_{j\varepsilon}^-$, здесь $\Omega_{j\varepsilon}^-$ – область с границей $\partial\Omega_{j\varepsilon}^- = \bar{I}_{j\varepsilon} \cup \bar{\Gamma}_{j\varepsilon} \cup \bar{\Gamma}_{(j+2)\varepsilon}$, строго лежащей в области Ω_j^- $(j = 1,2)$, ε – достаточно малое положительное число.

Пусть $j = 1$, тогда, интегрируя по области $\Omega_{1\varepsilon}^-$ тождество

$$\begin{aligned} 0 =& x^p(-y)^{-m} w_1 (w_{1xx} - (-y)^m w_{1yy}) \\ =& \frac{\partial}{\partial x}(x^p(-y)^{-m} w_1 w_{1x}) - \frac{\partial}{\partial y}(x^p w_1 w_{1y}) \\ &- x^p\left[(-y)^{-m} w_{1x}^2 - w_{1y}^2\right] - p x^{p-1}(-y)^{-m} w_1 w_{1x} \end{aligned} \tag{3.17}$$

и применяя формулу Грина, имеем

$$\int\limits_{\bar{\Gamma}_{1\varepsilon}\cup\bar{\Gamma}_{3\varepsilon}\cup\bar{J}_{1\varepsilon}} x^p(-y)^{-m} w_1 w_{1x} dy + x^p w_1 w_{1y} dx = \iint\limits_{\Omega_{1\varepsilon}^-} x^p \left((-y)^{-m} w_{1x}^2 - w_{1y}^2\right) dxdy$$
$$+ p \iint\limits_{\Omega_{1\varepsilon}^-} x^{p-1}(-y)^{-m} w_1 w_{1\,x} dxdy.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условия 1) задачи 1, как и в работе ([35], гл. 5), получим

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 x^p \tau_1(x)\nu_1(x) dx =& \int\limits_{\bar{\Gamma}_3} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}} w_1 dw_1 - \int\limits_{\bar{\Gamma}_1} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}} w_1 dw_1 \\ &- \iint\limits_{\Omega_1^-} x^p \left((-y)^{-m} w_{1x}^2 - w_{1y}^2\right) dxdy \\ &- p \iint\limits_{\Omega_1^-} x^{p-1}(-y)^{-m} w_1 w_{1x} dxdy, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$\tau_1(x) = w_1(x,0), \qquad (x,0) \in \bar{I}_1, \qquad \nu_1(x) = w_{1y}(x,0), \qquad (x,0) \in I_1. \tag{3.19}$$

Для вычисления правой части равенства (3.18) перейдем к характеристическим координатам

$$\xi = x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}, \qquad \eta = x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}. \tag{3.20}$$

При этом область Ω_1^- перейдет в треугольник Δ_1^- со сторонами O_1C_{11}, $C_{11}A_{11}$ и $A_{11}O_1$, лежащими на прямых $\eta = 0$, $\xi = 1$ и $\eta = \xi$.

В силу (3.11), (3.15) при $\psi_1(x)=0$ с учетом (3.20) и канонического вида уравнения (3.5) при $j=1$, т.е. $\upsilon_{\xi\eta}=\frac{\beta}{\xi-\eta}\left(\upsilon_\xi-\upsilon_\eta\right)$ из правой части равенства (3.18), имеем

$$\int\limits_{\bar\Gamma_1} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}w_1dw_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\left(\omega_1^-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{p-2\beta}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\int\limits_0^1 \xi^{p-2\beta-1}w_1^2(\xi,0)d\xi, \tag{3.21}$$

$$\int\limits_{\bar\Gamma_3} x^p(-y)^{-\frac{m}{2}}w_1dw_1=-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\left(\omega_1^-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}p\int\limits_0^1 (1+\eta)^{p-1}(1-\eta)^{-2\beta}w_1^2(1,\eta)d\eta + \left(\frac{1}{2}\right)^{p}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\beta\int\limits_0^1 (1+\eta)^{p}(1-\eta)^{-2\beta-1}w_1^2(1,\eta)d\eta, \tag{3.22}$$

$$\iint\limits_{\Omega_1^-} x^p\big(w_{1y}^2-(-y)^{-m}w_{1x}^2\big)dxdy=\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\Bigg(\left(\omega_1^-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{p-\beta}{2}\int\limits_0^1\frac{w_1^2(\xi,0)d\xi}{\xi^{1+2\beta-p}}-\beta\int\limits_0^1\frac{(1+\eta)^pw_1^2(1,\eta)d\eta}{(1-\eta)^{2\beta+1}} + p\int\limits_0^1\frac{(1+\eta)^{p-1}w_1^2(1,\eta)d\eta}{(1-\eta)^{2\beta}} - p(p-1)\iint\limits_{\triangle_1}\frac{(\xi+\eta)^{p-2}w_1^2(\xi,\eta)}{(\xi-\eta)^{2\beta}}d\xi d\eta\Bigg), \tag{3.23}$$

$$\iint\limits_{\Omega_1^-} x^{p-1}(-y)^{-m}w_1w_{1x}dxdy=-\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\Bigg(\int\limits_0^1\xi^{p-2\beta-1}w_1^2(\xi,0)d\xi - \int\limits_0^1\frac{(1+\eta)^{p-1}}{(1-\eta)^{-2\beta}}w_1^2(1,\eta)d\eta\Bigg)-\left(\frac{1}{2}\right)^{p}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta} \cdot(p-1)\iint\limits_{\triangle_1}\frac{(\xi+\eta)^{p-2}}{(\xi-\eta)^{2\beta}}w_1^2(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{3.24}$$

где $2\beta=-\frac{m}{2-m}$, $0<m<1$, причем

$$0<-\beta<\frac{1}{2},\qquad 0<p-2\beta<1. \tag{3.25}$$

Подставляя (3.22), (3.23) и (3.24) в (3.18) с учетом (2.2) и (3.25) получим

$$\int\limits_0^1 x^p \tau_1(x)\nu_1(x)dx = \frac{p-\beta}{2^{p+1}}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\int\limits_0^1 \xi^{p-2\beta-1}w_1^2(\xi,0)d\xi \geqslant 0. \tag{3.26}$$

Пусть теперь $j=2$, тогда точно так же как выше, интегрируя по области Ω_2^- тождество (3.17), получаем

$$\int\limits_{-1}^0 (-x)^p \tau_2(x)\nu_2(x)dx = \frac{p-\beta}{2^{p+1}}\left(\frac{2-m}{4}\right)^{-2\beta}\int\limits_{-1}^0 (-\xi)^{p-2\beta-1}w_2^2(\xi,0)d\xi \geqslant 0, \tag{3.27}$$

где

$$\tau_2(x) = w_2(x,0), \qquad (x,0)\in \bar{I}_2, \qquad \nu_2(x) = w_{2y}(x,0), \qquad (x,0)\in I_2. \tag{3.28}$$

Из условия 1) задачи 1, а также из непрерывности $\omega(x)$ и, учитывая (3.1), (3.2), (3.3), (3.19), (3.28), имеем

$$w_j(x,-0) = \upsilon_j(x,+0) = \tau_j(x), \qquad (x,0)\in \bar{I}_j, \tag{3.29}$$

$$w_{jy}(x,-0) = \upsilon_{jy}(x,+0) = \nu_j(x), \quad (x,0)\in I_j \quad (j=1,2). \tag{3.30}$$

Согласно условиям задачи 1, переходя к пределу в уравнении (3.4) при $y\to +0$, с учетом (3.29) и (3.30) получим

$$\tau_j''(x) - |x|^p\,\nu_j(x) = 0. \tag{3.31}$$

Тогда, в силу условия леммы 1 из (3.31) с учетом $\tau_j(0) = \tau_j((-1)^{j+1}) = 0$, находим

$$\int\limits_0^{(-1)^{j+1}} |x|^p\,\tau_j(x)\nu_j(x)dx + \int\limits_0^{(-1)^{j+1}} {\tau'}_j^2(x)dx = 0, \quad j=1,2. \tag{3.32}$$

Сравнивая (3.26), (3.27) и (3.32), имеем

$$\int\limits_0^{(-1)^{j+1}} |x|^p \tau_j(x)\nu_j(x)dx = 0$$

или

$$\int\limits_0^{(-1)^{j+1}} \tau_j'^2(x)dx = 0, \quad j=1,2.$$

Отсюда, и из условий $\tau_j(0) = \tau_j((-1)^{j+1}) = 0$ следует, что

$$\tau_j(x)\equiv 0 \quad \text{при} \quad x\in \bar{I}_j, \quad j=1,2. \tag{3.33}$$

□

В силу (3.33) из (3.10) и (3.11) с учетом (3.3), получим

$$\omega(x)\equiv 0, \qquad \forall x\in \bar{I}_1\cup \bar{I}_2. \tag{3.34}$$

Теорема 3.1. *Если выполнены условия леммы 3.1 и (3.34), то в области Ω решение задачи 1^* для уравнения (3.13) единственно.*

Доказательство. Согласно принципу максимума для параболических уравнений [6], [36], [37] краевая задача 1^* для уравнения (3.13) в области $\bar{\Omega}_3$ с однородными условиями (3.12), (3.14) с учетом (3.33) не имеет отличного от нуля решения, т.е. $\upsilon_j(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_j^+$ $(j=1,2)$. Тогда из условия (3.15) с учетом (3.3), (3.34) следует, что

$$\omega_j^-(x) \equiv 0, \quad (x,0) \in \bar{I}_j, \quad j=1,2. \tag{3.35}$$

В силу единственности решения задачи Коши с однородными условиями

$$w_j(x,y)\big|_{y=0} = 0, \quad (x,0) \in \bar{I}_j, \quad w_{jy}(x,y)\big|_{y=0} = 0, \quad (x,0) \in I_j$$

для уравнения (3.13) в области Ω_j^- с учетом (3.34) и (3.35) получим $w_j(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_j^-$. Отсюда, и из (3.2) имеем

$$\upsilon(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in \bar{\Omega}. \tag{3.36}$$

Из (3.36) следует единственность решения задачи 1^* для уравнения (3.13). □

Теорема 3.2. *Если выполнены условия теоремы 3.1, то в области Ω решение задачи 1 для уравнения (2.1) единственно.*

Доказательство. В силу (3.34), (3.36) из (3.1) следует, что

$$u(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in \bar{\Omega}. \tag{3.37}$$

Тем самым доказана единственность решения задачи 1 для уравнения (2.1).

□

4. Существование решения задачи 1

Теорема 4.1. *Если выполнены условия (2.2), (2.7), (2.8) и (3.25), то в области Ω решение задачи 1 существует.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 4.1 важную роль играют следующие задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

Задача 1_j. Найти решение $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega_j) \cap C^2(\Omega_j^+ \cup \Omega_j^+)$ $(j=1,2)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.3), (2.4) и

$$u(0,y) = \tau_3(y), \qquad (0,y) \in \bar{I}_3, \tag{4.1}$$

где $\tau_3(y)$ – заданная функция, причем

$$\tau_3(y) \in C(\bar{I}_3) \cap C^1(I_3). \tag{4.2}$$

Задача 1_3. Найти решение $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_3) \cap C^1(\Omega_3 \cup I_1 \cup I_2) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1^+ \cup \Omega_2^+)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.3) и

$$u(x,y)\big|_{y=0} = \tau_j(x) + \omega_j^+(x), \quad (x,0) \in \bar{I}_j \quad (j=1,2),$$

где $\tau_j(x)$ и $\omega_j^+(x)$ – определяются соответственно из (3.29) и (3.10).

4.1. Исследование задачи 1_j $(j=1,2)$.

Теорема 4.2. *Если выполнены условия (2.2), (2.7), (2.8), (3.25) и (4.2), то в области Ω_j существует единственное решение задачи 1_j.*

Доказательство. В силу леммы 3.1 и из принципа экстремума для вырождающихся параболо-гиперболических уравнений [37] следует, что решение $u(x,y)$ задачи 1_j при $\psi_j(x) \equiv 0$ свой положительный максимум (ПМ) и отрицательный минимум (ОМ) в замкнутой области $\bar{\Omega}_j^+$ достигает лишь на $\overline{\Gamma}_j \cup \overline{I}_3$ $(j = 1, 2)$.

Согласно принципу экстремума, однородная задача 1_j, т.е. задача с нулевыми граничными условиями, не имеет отличного от нуля решения. Отсюда следует единственность решения задачи 1_j.

Переходим к доказательству существования решения задачи 1_j и 1_j^* с условиями (3.14), (3.15) и $v_j(0,y) = \tau_3(y), \quad (0,y) \in \bar{I}_3$.

В силу решения задачи Коши [33] для уравнения (3.13) в области Ω_j^- $(j = 1, 2)$ с учетом (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right) = &\gamma_1 x^{1-2\beta}\Gamma(\beta)\ D_{0x}^{-\beta} x^{\beta-1}\tau_1(x) \\ &- \gamma_2\Gamma(1-\beta)\ D_{0x}^{\beta-1} x^{-\beta}\nu_1(x), \quad (x,0) \in I_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \psi_2\left(\frac{x}{2}\right) - \omega_2^-\left(\frac{x}{2}\right) = &\gamma_1 (-x)^{1-2\beta}\Gamma(\beta) D_{x0}^{-\beta}(-x)^{\beta-1}\tau_2(x) \\ &- \gamma_2\Gamma(1-\beta) D_{x0}^{\beta-1}(-x)^{-\beta}\nu_2(x), \quad (x,0) \in I_2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$ – определяются из (3.29) и (3.30) соответственно,

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а $D_{0x}^{-\alpha}(\cdot)$ и $D_{x0}^{-\alpha}(\cdot)$ – интегральные операторы дробного порядка $\alpha\,(\alpha > 0)$ [38]:

$$D_{ax}^{-\alpha}\phi_j(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^{(-1)^{j+1}x}\frac{\phi_j(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (-1)^{j+1}x > a, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{4.5}$$

Применяя дифференциальные операторы, $\frac{d}{dx}D_{0x}^{-\beta}\ldots \equiv D_{0x}^{1-\beta}\ldots$ и $-\frac{d}{dx}D_{x0}^{-\beta}\ldots \equiv D_{x0}^{1-\beta}\ldots$ к обеим частям равенств (4.3), (4.4) и используя формулы [38]:

$$\begin{aligned} &D_{0x}^{1-\beta}D_{0x}^{\beta-1}\nu_1(x) = \nu_1(x), \\ &D_{x0}^{1-\beta}\ D_{x0}^{\beta-1}\nu_2(x) = \nu_2(x), \\ &D_{0x}^{1-\beta}x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_1(x) = x^{-\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau_1(x), \\ &D_{x0}^{1-\beta}(-x)^{1-2\beta}D_{x0}^{-\beta}(-x)^{\beta-1}\tau_2(x) = (-x)^{-\beta}D_{x0}^{1-2\beta}\tau_2(x), \end{aligned}$$

получим функциональные соотношения между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$, перенесенные из области Ω_j^- на I_j $(j = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} \nu_1(x) = &\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\ D_{0x}^{1-2\beta}\tau_1(x) \\ &+ \frac{x^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\ D_{0x}^{1-\beta}\omega_1^-\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{1-\beta}\psi_1\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (x,0) \in I_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \nu_2(x) = &\frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x0}^{1-2\beta}\tau_2(x) \\ &+ \frac{(-x)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x0}^{1-\beta}\omega_2^-\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{(-x)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}D_{x0}^{1-\beta}\ \psi_2\left(\frac{x}{2}\right), \qquad (x,0) \in I_2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Согласно условиям задачи 1, переходя к пределу в уравнении (3.4) при $y \to +0$, с учетом (3.29) и (3.30) получим (3.31) с условиями

$$\tau_1(0) = \tau_3(0) = \psi_1(0), \quad \tau_1(1) = \varphi_1(0), \tag{4.8}$$

$$\tau_2(-1) = \varphi_2(0), \quad \tau_2(0) = \tau_3(0) = \psi_2(0). \tag{4.9}$$

Решая задачу (3.31) и (4.8), (4.9), получим функциональное соотношение между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$, перенесенное из области Ω_j^+ на I_j:

$$\tau_j(x) = (-1)^{j+1} \int\limits_0^{(-1)^{j+1}} G_j(x,t)\left((-1)^{j+1}t\right)^p \nu_j(t)dt + f_j(x), \qquad (x,0) \in \bar{I}_j, \tag{4.10}$$

где

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (t-1)\,x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (x-1)\,t, & t \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & -1 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$f_j(x) = \psi_j(0) + (-1)^{j+1}x\left(\varphi_j(0) - \psi_j(0)\right). \tag{4.13}$$

Исключив $\tau_j(x)$ из (4.6), (4.7) и (4.10) с учетом (3.11), получим интегральное уравнение относительно $\nu_j(x)$ $(j = 1, 2)$:

$$\nu_1(x) - \int\limits_0^1 K_1(x,t)t^p\nu_1(t)dt = \Psi_1(x), \qquad (x,0) \in I_1, \tag{4.14}$$

$$\nu_2(x) + \int\limits_{-1}^0 K_2(x,t)(-t)^p\nu_2(t)dt = \Psi_2(x), \qquad (x,0) \in I_2, \tag{4.15}$$

где

$$\begin{aligned} K_j(x,t) =& \frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)} A_{jx}^{1-2\beta} G_j(x,t) - \frac{\left((-1)^{j+1}x\right)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)} A_{jx}^{1-\beta} \\ & \cdot \int\limits_0^x \sin\frac{\sqrt{\mu_1}(x-z)}{2} G_j\left(\frac{z}{2}, t\right) dz, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(x) =& \frac{\gamma_1\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)} A_{jx}^{1-2\beta} f_j(x) - \frac{\left((-1)^{j+1}x\right)^\beta}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)} A_{jx}^{1-\beta}\psi_j\left(\frac{x}{2}\right) \\ & - \frac{\left((-1)^{j+1}x\right)^\beta}{2\gamma_2\Gamma(1-\beta)} A_{jx}^{1-\beta} \int\limits_0^x \sin\frac{\sqrt{\mu_1}(x-z)}{2} f_j\left(\frac{z}{2}\right) dz, \quad (x,0) \in I_j, \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$A_{jx}^\alpha g(x) = \begin{cases} D_{0x}^\alpha g(x), & j = 1, \\ D_{x0}^\alpha g(x), & j = 2. \end{cases} \tag{4.18}$$

На основании (2.2), (2.7), (2.8) и (3.25) с учетом свойств оператора интегро-дифференцирования, Бета, гипергеометрической функции ([38], гл. 1) и функции $G_j(x,t)$

$(j = 1, 2)$ из (4.16) и (4.17) следует, что ядро и правой части уравнения (4.14) и (4.15) допускают оценки

$$|K_j(x,t)| \leqslant c_1, \tag{4.19}$$

$$|\Psi_j(x)| \leqslant const\,|x|^{2\beta-1}, \quad c_j = const > 0. \tag{4.20}$$

На основании (2.7), (2.8), с учетом (4.20) заключаем, что $\Psi_j(x) \in C^2(I_j)$, причем функция $\Psi_j(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $|x| \to 0$, а при $|x| \to 1$ ограничена.

В силу (2.2), (4.19) и (4.20) уравнения (4.14) и (4.15) являются интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Фредгольма [39] и из единственности решения задачи 1_j заключаем, что интегральное уравнение (4.14) и (4.15) однозначно разрешимо в классе $C^2(I_j)$, причем $\nu_j(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $|x| \to 0$, а при $|x| \to 1$ ограничено и ее решение дается формулой:

$$\nu_j(x) = \Psi_j(x) + \int\limits_0^{(-1)^{j+1}} K_j^*(x,t)\Psi_j(t)dt, \quad (x,0) \in I_j \quad (j = 1,2), \tag{4.21}$$

здесь $K_j^*(x,t)$ – резольвента ядра $K_j(x,t)$.

Подставляя (4.21) в (4.10), находим

$$\tau_j(x) \in C(\bar{I}_j) \cap C^2(I_j) \quad (j = 1,2)\,. \tag{4.22}$$

Следовательно, задача 1_j^* однозначно разрешима в силу эквивалентности ее интегральному уравнению Фредгольма второго рода (4.14) и (4.15).

Таким образом, решение задачи 1_j^* можно восстановить в области Ω_j^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) [40], а в Ω_j^- как решение задачи Коши для уравнения (3.5).

Этим завершается исследование существования решения задачи 1_j^* для уравнения (3.13).

В силу (4.10), (4.21) из (3.10), (3.11) с учетом (3.1), (3.2), (3.3) определим функции $\omega_j^+(x)$ и $\omega_j^-(x)$. Тогда решение задачи 1_j в области Ω_j^+ находится в виде

$$u(x,y) = \upsilon_j(x,y) + \omega_j^+(x), \tag{4.23}$$

где $\upsilon_j(x,y)$ – решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) [37], [40], а в областях Ω_j^+ в виде

$$u(x,y) = w_j(x,y) + \omega_j^-(x) \quad (j = 1,2)\,, \tag{4.24}$$

здесь $w_j(x,y)$ – решение задачи Коши для уравнения (3.5) в области Ω_j^- $(j = 1,2)$ [33].

Таким образом, в области Ω_j решение задачи 1_j существует и единственно. □

4.2. Исследование задачи 1_3.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия (2.2, (2.7), (3.25) и (4.22), тогда в области Ω_3 существует единственное решение задачи 1_3.*

Доказательство. Решение первой краевой задачи с условиями (3.14), (4.1) для уравнения (3.4) в области Ω_j^+ имеет вид [40]:

$$\begin{aligned} \upsilon_j(x,y) =& (-1)^{j+1}\left(\int\limits_0^{(-1)^{j+1}} R_j(x,t,y;\alpha)\left((-1)^{j+1}t\right)^p \tau_j(t)dt\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y R_j^{(1)}(x,y-t;\alpha)\,\tau_3(t)dt+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y R_j^{(2)}(x,y-t;\alpha)\,\varphi_j(t)dt\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

и принадлежит классу $u(x,y)\in C(\bar\Omega_j)\cap C^1(\Omega_j\cup I_j)\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_j^+)$, если выполнены условия (2.7), (4.2), (4.22), здесь $R_j(x,t,y;\alpha)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения (3.13) в области Ω_j^+ $(j=1,2)$:

$$\begin{aligned} R_j(x,\xi,y;\alpha) =& \sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_k^2 y}{4}\right)\frac{(1-\alpha)\sqrt{x\xi}}{J^2_{2-\alpha}(\lambda_k)}J_{1-\alpha}\left(\lambda_k(1-\alpha)\left((-1)^{j+1}x\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\right)\\ &\cdot J_{1-\alpha}\left(\lambda_k(1-\alpha)\left((-1)^{j+1}\xi\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\right), \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} R_j^{(1)}(x,y;\alpha) =& 1+(-1)^j(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}x\\ &-\int\limits_0^{(-1)^{j+1}}\left(1+(-1)^j(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}\xi\right)R_j(x,t,y;\alpha)\left((-1)^{j+1}\xi\right)^p d\xi, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} R_j^{(2)}(x,y;\alpha) =& (-1)^{j+1}(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}x\\ &-\int\limits_0^{(-1)^{j+1}} R_j(x,t,y;\alpha)\left((-1)^{j+1}(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}\xi\right)\left((-1)^{j+1}\xi\right)^p d\xi, \end{aligned} \tag{4.28}$$

здесь

$$J_\theta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\theta+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\theta+2k}$$

– функция Бесселя первого рода, λ_k – положительные корни уравнения $J^2_{1-\alpha}(\lambda_k)=0$, $k\in N\cup\{0\}$, $\alpha=\frac{p+1}{p+2}$, причем

$$\frac{1}{2}<\alpha<1. \tag{4.29}$$

Дифференцируя (4.25) по x и переходя к пределу при $x\to 0$, имеем

$$\nu_3(y)=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y N_j(y-t;\alpha)\tau_3(t)dt+\Phi_j(y),\quad (0,y)\in I_3, \tag{4.30}$$

где $\upsilon_{jx}(0,y)=\nu_3(y)$, $(0,y)\in I_3$,

$$\begin{aligned} \Phi_j(y) =& \lim_{x\to 0}(-1)^{j+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^1 R_j(x,t,y;\alpha)\left((-1)^{j+1}t\right)^p\tau_j(t)dt\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y R_j^{(2)}(x,y-t;\alpha)\,\varphi_j(t)dt\right), \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}N_j(y-t;\alpha)\equiv&(1-\alpha)^{2\alpha-1}(-1)^{j+1}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left(R_j^{(1)}(x,y-t;\alpha)\right)\\ =&(-1)^j\left((1-\alpha)+\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_k^2(y-t)}{4}\right)\frac{2^{2\alpha}\lambda_k^{-2\alpha}}{\Gamma^2(1-\alpha)J^2_{2-\alpha}(\lambda_k)}\right).\end{aligned}$$

На основании свойств функции $J_\theta(z)$ функция $N_j(y-t;\alpha)$ представима в виде [40]:

$$N_j(y-t;\alpha)=\frac{(-1)^j}{\Gamma(1-\alpha)}(y-t)^{\alpha-1}+B_j(y-t), \tag{4.32}$$

здесь $B_j(y-t),(j=1,2)$ – непрерывно–дифференцируемые функции при $y\geqslant t$.

Подставляя (4.32) в (4.30), получим функциональное соотношение между $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$, перенесенное из области Ω_j^+ на I_3 :

$$\nu_3(y)=\frac{(-1)^j}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y(y-t)^{\alpha-1}\tau_3(t)dt+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y B_j(y-t)\tau_3(t)dt+\Phi_j(y).$$

Отсюда в силу формулы (4.5) имеем

$$\nu_3(y)=\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)}D_{0y}^{1-\alpha}\tau_3(y)+B_j(0)\tau_3(y)+\int\limits_0^y B_j'(y-t)\tau_3(t)dt+\Phi_j(y). \tag{4.33}$$

Исключив $\nu_3(y)$ из соотношений (4.33) при $j=1$ и (4.33) при $j=2$, а затем, применяя интегральный оператор $D_{0y}^{\alpha-1}(\cdot)$ с учетом $\tau_3(0)=0$ и $D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{1-\alpha}\tau_3(y)=\tau_3(y)$, получим

$$\tau_3(y)=\int\limits_0^y M(y,t)\tau_3(t)dt+\Phi(y),\quad (0,y)\in\bar I_3, \tag{4.34}$$

где

$$M(y,t)=\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\left(\frac{B_2(0)-B_1(0)}{(y-t)^\alpha}-\int\limits_t^y\frac{B_2'(z-t)-B_1'(z-t)}{(y-z)^\alpha}dz\right), \tag{4.35}$$

$$\Phi(y)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{2(\alpha)}D_{0y}^{\alpha-1}\left(\Phi_2(y)-\Phi_1(y)\right), \tag{4.36}$$

здесь $\Phi_j(y)$ $(j=1,2)$ – определяется из (4.31).

В силу (2.2), (2.7), (3.25), (4.22), (4.29) и свойства функции $B_j(y-t)$ с учетом (4.26), (4.27), (4.28), (4.31) из (4.35) и (4.36) следует, что:

1) ядра $M(y,t)$ непрерывны в $\{(y,t):0\leqslant t<y\leqslant 1\}$ и при $y\to t$ допускает оценку

$$|M(y,t)|\leqslant const(y-t)^{-\alpha}; \tag{4.37}$$

2) функция $\Phi(y)$ принадлежит классу $C\left(\bar I_3\right)\cap C^1\left(I_3\right)$ и допускает оценку

$$|\Phi(y)|\leqslant const\ y^{1-\alpha}. \tag{4.38}$$

Из (4.37) и (4.38) следует, что интегральное уравнение (4.34) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [39] заключаем, что интегральное уравнение (4.34) однозначно разрешимо в классе $C\left(\bar{J}_3\right) \cap C^1\left(J_3\right)$ и его решение дается формулой

$$\tau_3(y) = \int\limits_0^y M^*(y,t)\Phi(t)dt + \Phi(y), \qquad (0,y) \in \bar{I}_3, \tag{4.39}$$

где $M^*(y,t)$ – резольвента ядра $M(y,t)$.

Подставляя (4.39) в (4.33) с учетом (4.37), (4.38) определим функцию $\nu_3(y)$ из класса

$$\nu_3(y) \in C^1\left(I_3\right), \tag{4.40}$$

причем $\nu_3(y)$ может иметь особенность порядка меньше $1-\alpha$ при $y \to 0$, ограничена при $y \to 1$.

Следовательно, задача 1_3^* однозначно разрешима.

Таким образом, решение задачи 1_3^* можно восстановить в области $\Omega_j^+ (j=1,2)$ как решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) [40].

Этим завершается исследование существования решения задачи 1_3^* для уравнения (3.4) в области Ω_3.

В силу (4.10), (4.21) из (3.10) с учетом (3.1), (3.2), (3.3) определим функции $\omega_j^+(x)$. Тогда решение задачи 1_3 в области Ω_3 находится в виде

$$u(x,y) = \upsilon_j(x,y) + \omega_j^+(x), \tag{4.41}$$

где $\upsilon_j(x,y)$ – решение первой краевой задачи для уравнения (3.4) (см.(4.25)).

Следовательно, задача 1_3 однозначно разрешима. □

Переходим к доказательству существования решения задачи 1.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи 1 в области Ω с условиями (2.3)–(2.6), тогда пользуясь результатами задач 1_i $(i=\overline{1,3})$ (см. параграфы 4.1 и 4.2), задача 1 эквивалентным образом редуцируется к исследованию задач 1_1 и 1_2 для уравнения (2.1), где $\tau_3(y)$ – определяется из формулы (4.39). □

Однозначная разрешимость задач 1_1 и 1_2 следует из теоремы 4.2. Следовательно, области Ω решение задачи 1 существует. □

Этим завершается исследование задачи 1 для уравнения (2.1).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.4. *Если выполнены условия (2.2), (2.7), (2.11), (3.25) и (4.29), то в области Ω существует единственное решение задачи 2.*

Теорема 4.5. *Если выполнены условия (2.2), (2.7), (2.12), (3.25) и (4.29), то в области Ω существует единственное решение задачи 3.*

Доказательство теоремы 4.4 и 4.5 проводится методом доказательства теорем 3.2 и 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Гельфанд. *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений* // Успехи матем. наук. **15**:3(87), 3–19 (1959).
2. Г.М. Стручина. *Задача о сопряжении двух уравнений* // ИФЖ. **4**:11, 99–104 (1961).
3. Я.С. Уфлянд. *К вопросу построения распространений колебаний в составных электрических линиях* // ИФЖ. **7**:1, 89–92 (1964).

4. Л.А. Золина. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболичиского типа* // ЖВМ и МФ. **6**:6, 991–1001 (1966).
5. Е.И. Моисеев, Н.И. Ионкин. *О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями* // Дифф. уравнения. **15**:7, 1284–1295 (1979).
6. Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажонов. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Т.: ФАН. 1986. 220 с.
7. М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов. *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.* Ташкент. Фан. 1997. 165 с.
8. Е.И. Моисеев, Т.Н. Лихоманенко. *Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Доклады РАН. **446**:3, 256–258 (2012).
9. T.Sh. Kal'menov, M.A. Sadybekov. *On a Frankl–type problem for a mixed parabolic–hyperbolicequation* // Sibirsk. Mat. Zh. **58**:2, 298–304 (2017).
10. К.Б. Сабитов. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Доклады РАН. **413**:1, 23–26 (2007).
11. К.Б. Сабитов. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* //Матем. заметки. **86**:2, 273–279 (2009).
12. К.Б. Сабитов. *Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области* // Дифф. уравнения. **47**:5, 705–713 (2011).
13. К.Б. Сабитов. *Начально–граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения* // Матем. заметки. **102**:3, 415–435 (2017).
14. А.М. Нахушев. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа. 1995.
15. A.M. Nakhushev. *Nonlocal problem and the Goursat problem for loaded hyperbolic equation and their application in prediction of ground moisture* // Soviet Math. Dokl. **19**:5, 1243–1247 (1978).
16. J. Wiener, L. Debnath. *A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments* // Internet J. Math. and Math. Scz. **18**:2, 209–228 (1995).
17. М.Х. Шхануков. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифф. уравнения. **18**:4, 689–699 (1982).
18. А.И. Кожанов. *Об одном не линейным нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче* // Матем. заметки. **76**:6, 840–853 (2004).
19. М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений.* Алматы: ГЫЛЫМ. 2010.
20. A. Kneser. *Belastete integralgleichungen* // Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo. **37**, 169–197 (1914).
21. А.М. Нахушев. *Нагруженные уравнения и их приложения* // Дифф. уравнения. **19**:1, 86–94 (1983).
22. Б. Исломов, Д.М. Курьязов. *Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка* // ДАН РУз. **1-2**, 3–6 (1996).
23. М.Т. Дженалиев. *К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений.* Алматы: ИТПМ. 1995.
24. A.Kh. Attaev. *The Cauchy problem for the Mc Kendrick–Von Foerster loaded equation* // Int. J. Pure Appl. Math. **113**:4, 569–574 (2017).
25. U.I. Baltaeva. *The loaded parabolic–hyperbolic equation and its relation to non–local problems* // Nanosystems: Phys. Chem. Math. **8**:4, 413–419 (2017).
26. Ю.К. Сабитова. *Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с нагруженными слагаемыми* // Изв. вузов. Математика. **9**, 42–58 (2018).
27. К.У. Хубиев. *Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. **28**:1, 82–90 (2018).
28. B. Islomov, U.I. Baltaeva. *Boundary value problems for the classical and mixed integro–differential equations with Riemann–Liuovil operators* // Int. J. Partial Differ. Equ. **2013**, 157947, 11–17 (2013).

29. B.S. Kishin, O.Kh. Abdullaev. *About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives* // Int. J. Differ. Equ. **2016**, 9815796, 6 pp. (2016).
30. Л.С. Пулькина. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения* // Матем. заметки. **51**:3, 91–96 (1992).
31. Zh.A. Balkizov. *Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic–hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain* // Ufa Math. J. **9**:2, 25–39 (2017).
32. А.М. Нахушев. *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка* // Дифф. уравнения. **12**:1, 103–108 (1976).
33. Б. Исломов, Ф.М. Джураев. *Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа* // Узбекский матем. журн. 2, 75–85 (2011).
34. S.Z. Dzhamalov, R.R. Ashurov. *On a nonlocal boundary–value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle* // Uzbek Math. J. 3, 63–72 (2018).
35. Т.Д. Джураев. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно– составного типа.* Ташкент: Фан. 1979.
36. А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // ЖВМиМФ. **4**:6, 1006–1024 (1965).
37. С.Х. Акбарова. *Краевые задачи для уравнений смешанного параболо–гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумялиниями и различными порядками вырождения* // Дис. ... канд. физ.мат. наук. Ташкент: ИМ АН РУз. 1995. 120 с.
38. М.М. Смирнов. *Уравнения смешанного типа.* Москва: «Высшая школа», 1985.
39. С.Г. Михлин. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз. 1959.
40. С.А. Терсенов. *Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени.* Новосибирск. 1978.

Бозор Исломович Исломов,
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
ул. Университетская, 4,
100174, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: islomovbozor@yandex.com

Фуркат Мухитдинович Жураев,
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, 11,
200114, г. Бухара, Узбекистан
E-mail: fjm1980@mail.ru