O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
INNOVATSION
RIVOJLANISH VAZIRLIGI

IQTIDORLI TALABALAR, MAGISTRANTLAR, TAYANCH DOKTORANTLAR VA DOKTORANTLARNING

TAFAKKUR VA TALQIN

MAVZUSIDARESPUBLIKA MIQYOSIDAGI ILMIY-AMALIY ANJUMAN TO'PLAMI

Бухоро-2021

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
MAGISTRATURA BO’LIMI

IQTIDORLI TALABALAR, MAGISTRANTLAR, TAYANCH DOKTORANTLAR VA DOKTORANTLARNING

TAFAKKUR VA TALQIN

mavzusida

Respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjuman to’plami

2021 yil, 27-may

ЗАДАЧА АГ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Ф.М. Жураев

старший преподователь кафедры Дифференциальные уравнения БухГУ.

Мақолада соҳа ичида бузилишга эга бўлган юкланган параболик-гиперболик типдаги тенглама учун Геллерстедт масаласига ўхшаш масала ечимининг бир қийматли ечилиши исботланган.

In this paper unique solvability are proved of the analogue of Gellerstedt problem for loaded degeneration parabolic-hyperbolic equation.

Краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы В.М.Казиева [1], Б.Исломова и Ф.Джураева [2,3].

1. Постановка задачи АГ

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-|x|^{p}u_{y}-\mu_{i}u(x,0), & y>0, \\ u_{xx}-(-y)^{m}u_{yy}+\mu_{j+2}u(x,0), & y<0, \end{cases} \qquad (1_i)$$

где $m,\ p,\ \mu_i,\ \mu_{j+2}$ - любые действительные числа, причем

$$m<0,\ p>0,\ \mu_i>0,\ \mu_{j+2}<0,\ \left(i=1,2;\ j=\overline{1,4}\right) \qquad (2_i)$$

Пусть Ω_0 - область, ограниченная отрезками A_1B_1, B_1B_2, B_2A_2, A_2A_1 прямых $x=1, y=1, x=-1, y=0$ соответственно, при $y>0$; Ω_{11} - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $O(0,0)E_1(x_0,0)$ оси x и двумя характеристиками $OC_{11}: x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $E_1C_{11}:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0$ уравнения (1_i), выходящими из точки $O(0,0)$ и $E_1(x_0,0)$ и пересекающимися в точке $C_{11}\left[\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_{21}-характеристический треугольник, ограниченный отрезком $E_1(x_0,0)B_1(1,0)$ оси x и двумя характеристиками $E_1C_{21}:\quad x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=x_0 \qquad B_1C_{21}:\quad x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1_i), выходящими из точек $E_1(x_0,0)$ и $B_1(1,0)$ и пересекающимися в точке $C_{21}\left[\frac{1+x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$, Ω_{31} - характеристический четырёхугольник, ограниченный характеристиками E_1C_{11}, E_1C_{21} и $C_{11}C_1:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $C_{21}C_1:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=1$ уравнения (1_i), пересекающимися в точках E_1, C_{11}, C_{21} и $C_1\left[\frac{1}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$, причем $x_0\in[0,1]$. Ω_{12} - характеристический треугольник, ограниченный отрезком $O(0,0)E_2(-x_0,0)$ оси x и двумя характеристиками $OC_{12}:\quad x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0,\quad E_2C_{12}:\quad x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=-x_0$ уравнения (1_i), выходящими из точки $O(0,0)$ и $E_2(-x_0,0)$ и пересекающимися в точке $C_{12}\left[-\frac{x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}x_0\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$; Ω_{22}-характеристический треугольник, ограниченный отрезком $E_2(-x_0,0)A_2(-1,0)$ оси x и двумя характеристиками $E_2C_{22}:\ x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=-x_0,\quad A_2C_{22}:\ x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=-1$ уравнения (1_i), выходящими из точек $E_2(-x_0,0)$ и $A_2(-1,0)$ и пересекающимися в точке $C_{22}\left[-\frac{1+x_0}{2};\ -\left(\frac{2-m}{4}(1-x_0)\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$, Ω_{32} - характеристический четырёхугольник, ограниченный характеристиками E_2C_{12}, E_2C_{22} и $C_{12}C_2$:

$x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=0$, $C_{22}C_2$: $x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}=-1$ уравнения (1_i), пересекающимися в точках E_2, C_{12}, C_{22} и $C_2\left[-\frac{1}{2};\left(\frac{2-m}{4}\right)^{\frac{2}{2-m}}\right]$, причем $-x_0\in[-1,0]$.

Введем следующие обозначения: $\Omega_{01}=\Omega_0\cap\{(x,y):x>0,y>0\}$, $\Omega_{02}=\Omega_0\cap\{(x,y):x<0,y>0\}$, $\Omega_3=\Omega_{01}\cup\Omega_{02}\cup J_3$, $J_3=\{(x,y):x=0,0<y<1\}$

$$J_{11}=\left\{(x,y):\ 0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},\ J_{12}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},$$

$$J_{21}=\left\{(x,y):\ x_0<x<\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},\ J_{22}=\left\{(x,y):\ \frac{x_0+1}{2}<x<1,\ y=0\right\},$$

$$J_0=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},\ J_1=\{(x,y):\ 0<x<x_0,\ y=0\},$$

$$J_2=\{(x,y):\ x_0<x<1,\ y=0\},\ \Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\Omega_{31}\cup J_0,$$

$$J^1{}_{11}=\left\{(x,y):\ -\frac{x_0}{2}<x<0,\ y=0\right\},\ J^1{}_{12}=\left\{(x,y):-x_0<x<\frac{x_0}{2},\ y=0\right\},$$

$$J^1{}_{21}=\left\{(x,y):\ -\frac{x_0+1}{2}<x<x_0,\ y=0\right\},\ J^1{}_{22}=\left\{(x,y):\ -1<x<-\frac{x_0+1}{2},\ y=0\right\},$$

$$J^1{}_0=\{(x,y):\ -1<x<0,\ y=0\},\ J^1{}_1=\{(x,y):-x_0<x<0,\ y=0\},$$

$$J^1{}_2=\{(x,y):\ -1<x<x_0,\ y=0\},\ \Omega_2=\Omega_{12}\cup\Omega_{22}\cup\Omega_{32}\cup J^1{}_0,\ \Omega=\Omega_3\cup\Omega_1\cup\Omega_2$$

Задача $A\Gamma$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_{01}\cup\Omega_{02})\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1_i) в областях Ω_{j1} и Ω_{j2} $\left(j=\overline{0,3}\right)$;

3) $u_y\in C(\Omega_i)$ причем $u_y(x,y)$может обращаться бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $|x|\to 0$, а при $|x|\to 1$, ограничена;

4) $u_x\in C(\Omega_3)$ на линии вырождения J_3 выполняется условия склеивания

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \lim_{x\to-0} u_x(x,y), (0,y)\in J_3 \qquad (3)$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{A_iB_i} = \varphi_i(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (4_i)$$

$$u\big|_{E_1C_{i1}} = \psi_i(x),\ |x|\in \bar{J}_{i2}, \qquad (5_i)\quad u\big|_{E_2C_{i2}} = \psi_i^{\,1}(x),\ |x|\in \bar{J}_{i2}; \qquad (6_i)$$

где $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $\psi_i^{\,1}(x), (i=1,2)$-заданные функции, причем $\psi_1(x_0)=\psi_2(x_0)$, $\psi_1^{\,1}(x_0)=\psi_2^{\,1}(x_0)$, $\varphi_i(y)\in C(\bar{J}_3)\cap C^1(J_3)$, (7_i)

$$\psi_i(x)\in C^1\left(|x|\in \bar{J}_{i2}\right)\cap C^3\left(|x|\in J_{i2}\right),\ \psi_i^{\,1}(x)\in C^1\left(|x|\in \bar{J}_{i2}\right)\cap C^3\left(|x|\in J_{i2}^{\,1}\right).$$

(8_i)

Здесь $2\beta=\dfrac{m}{m-2}$, причем $0<\beta<\dfrac{1}{2}$. $\qquad (9)$

2. Исследование задачи АГ для уравнения (1_i)

Теорема. Если выполнены условия (2_i), (7_i),(8_i) и (9), то в области Ω решение задачи $A\Gamma$ существует и единственно.

Единственность решения задачи АГ доказывается с помощью принципа экстремума, а существование – методом интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. //«Дифференциальные уравнения». -1978. Т.14. № 1. С.181-184.
2. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа. // «Узбекский математический журнал». -2011. № 2. С. 75-85.
3. Исломов Б., Джураев Ф. Задача АТ для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. // «Узбекский математический журнал». -2015. № 2. С. 35-51.