S.H. HODJIYEV
N.O. JO‘RAYEVA

MATEMATIK ANALIZNING ASOSIY TUSHUNCHALARI

(O‘quv qo‘llanma)

“KAMOLOT” nashriyoti
BUXORO-2023

UO‘K: 159.9:616.8-008.6"36"(075.8)
KBK: 88.4ya73
A 95

S.H. Hodjiyev, N.O. Jo‘rayeva, Matematik analizning asosiy tushunchalari. [Matn]: o‘quv qo‘llanma / Buxoro : “BUXORO DETERMINANTI”MCHJning Kamolot nashriyoti, 2023. - 176 b.

Ushbu qo‘llanma matematika, oliy matematika va matematik analiz fanlari o‘tiladigan kollej va oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchlar:

S.Sh.Yo‘ldoshev - *Buxoro muxandislik-texnologiya institutining “Axborot kommunikatsiya texnologiyalar” kafedrasi mudiri, f.m.f.n.*
R.H.Rasulov - *Buxoro davlat universiteti «Matematik analiz» kafedrasi dotsent, f.m.f.n.*

ISBN: 978-9943-9148-2-7

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy va O‘rta maxsus ta’lim vazirligi 2022-yil «25» noyabrdagidagi « 388 »sonli burug’iga asosan nashrga ruxsat berildi. Ro‘yxatga olish raqami 388-071.

“KAMOLOT” nashriyoti
S.H. Hodjiyev
N.O. Jo‘rayeva

KIRISH

Matematik analiz fanidan juda ko‘p adabiyotlar bir necha tomdan (qismdan) iborat va ularning ko‘pchilik qismi kirill alifbosida yoki rus tilida. Kitobxon uchun matematik analizning asosiy mavzularini o‘rganish va matematikaning boshqa bilimlarini uzluksiz o‘lashtirish uchun doimo qo‘llaniladigan mavzularni o‘z ichiga olgan qo‘llanma (ma’limotnoma) bo‘lgani maqsadga muvofiq deb o‘ylaymiz.

Ushbu qo‘llanmada analiz fanini o‘rganish uchun kerak bo‘ladigan barcha boshlang‘ich tushunchalar, belgilarning kiritilish tarixi, asosiy ta’rif va teoremalar, mavzularga doir misollar izohlari biln yechib ko‘rsatilgan. Qo‘llanma didaktik asosda qurilgan va kerakli “mavzu” mundarija orqali oson topiladi. Qo‘llanma oxirida ayrim asosiy funksiyalar grafiklari va elementar matematikaga doir barcha asosiy formulalar keltirilgan.

Ushbu qo‘llanma matematika, oliy matematika va matematik analiz fanlari o‘tiladigan kollej va oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun mo‘ljallangan.

Ushbu qo‘llanmani sinchiklab o‘qib, uni metodik jihatdan yaxshilanishiga hissalarini qoshganlilari uchun “Algebra va analiz” kafedrasi a’zolari fizika-matematika fanlari nomzodi T.Rasulovga va shu kafedra katta o‘qituvchisi A.A.Abdullayevga mualliflar tashakkur izhor qiladilar.

Agar siz o‘quvchilar ham qo‘llanmaning kamchilik va xatoliklari haqida o‘z fikrlaringizni bildirsangiz biz o‘z minnatdorchiligimizni bildirgan bo‘lar edik.

Mualliflar

1§. Ayrim asosiy matematik tushunchalar

Biror tasdiq hamda “rost” yoki “yolg‘on” mulohaza yuritish mumkin bo‘lsa, u “***fikr***” (*gap, ma’noli so‘z, bayon*) deyiladi. Fikrlar A, B, C va hokazo lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan, $A \equiv \{5 < 7\}$, $B \equiv \{Toshkent \quad O'zbekiston\ poytaxti\}$, $C \equiv \{9, \quad tub\ son\}$. Bu misolda A, B ***fikrlar*** “rost”, C-esa “yolg‘on” fikrlar.

Sodda “fikrlardan” murakkab fikrlar “va”, “yoki”, “faqat va faqat”, “agar…, u holda …” so‘zlari yordamida tashkil qilinadi. Fikr bir yoki bir necha parametrga bog‘liq bo‘lishi mumkin va ular $A(n)$, $B(n, m)$, $C(x, y, z)$,… kabi belgilanadi. Fikr faqat biror sohada ma’noga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli u qaysi sohada berilgani ko‘rsatilishi kerak. Masalan, $A(x) = \{x^2 + 1 > 0\}$, $x \in R$ da “to‘g‘ri”.

Har bir fan boshlang‘ich tushuncha, tasdiq va aksiomalar asosida quriladi.

Aksioma (***grekcha so‘z bo‘lib-qabul qilingan holat, talab qilaman*** degan ma’noni bildiradi)-to‘g‘riligi o‘z-o‘zidan ko‘rinib turgan va isbotsiz qabul qilingan “fikrlar”ga aytiladi.

Lemma (***grekcha so‘z bo‘lib, faraz, taxmin***)-boshqa tasdiqlarni (teoremalarni) isbot qilishda ishlatiladigan yordamchi “fikr”.

Teorema (***grekcha so‘z bo‘lib, qarayman, o‘rganaman degan ma’noni bildiradi***)-matematik tasdiq (fikr) bo‘lib, to‘g‘riligi isbot qilish bilan ko‘rsatiladi.

Teorema asosan ikki qismdan iborat bo‘ladi: “shart” va “xulosa”dan iborat. Teoremaning “shart” qismi (“fikri”), “xulosa” (fikri) qismidan “u holda” (“unda”) so‘zi bilan ajraladi.

Misol. 1-**teorema.** Agar uchburchak burchaklaridan bittasi o‘tmas bo‘lsa, u holda qolgan ikkitasi o‘tkir bo‘ladi.

Bu teoremada “Agar uchburchak burchaklaridan bittasi o‘tmas bo‘lsa” so‘zlari teoremaning “shart” qismi, qolgan qismi “xulosa” qismi bo‘ladi. Qisqacha teorema tuzilishini “agar …, u holda …” ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

Teoremani quyidagi “fikr” (bayon) ko‘rinishida yozish mumkin:

$$(\forall x) \ A(x) \Rightarrow B(x), x \in M .$$

Har qanday “agar …, u holda …” ko‘rinishida ifodalangan teoremani unga ***teskari teorema*** holda ifodalash mumkin. Berilgan teoremaning “sharti” uning “xulosasi” (natijasi) bilan, “xulosasi” esa “sharti” bilan almashtirilsa, unga ***teskari teorema*** hosil bo‘ladi. Bu holda berilgan teorema to‘g‘ri, ikkinchisi esa teskari teorema bo‘ladi.

To‘g‘ri va unga teskari teoremalar ***o‘zaro teskari teoremalar*** deyiladi. Masalan, 2- teorema. Agar berilgan natural sonning raqamlar yig‘indisi 9 ga bo‘linsa, u holda u son 9 ga bo‘linadi degan teoremani “to‘g‘ri” teorema desak, uni teskarisi “Agar berilgan son 9 ga bo‘linsa, u holda sonning raqamlar yig‘indisi 9 ga bo‘linadi” kabi ifodalanadi.

Agar $A(n)=\{n\ sonning\ raqamlar\ yig'indisi\ 9\ ga\ bo'linadi\}$, $B(n)\equiv\{n\ soni\ 9\ ga\ bo'linadi\}$ va bularda $n\in N$ "fikr"lardan iborat bo‘lsin.

Agar teorema

$$(\forall n)\quad A(n)\Rightarrow B(n),\ n\in N \text{ va } (\forall n)\quad B(n)\Rightarrow A(n),\ n\in N$$

ko‘rinishida bo‘lsa, u ***o‘zaro teskari*** bo‘ladi. Teskari teorema har doim o‘rinli bo‘lmasligi mumkin.

1-teorema teskarisi o‘rinli emas, ya’ni "Agar biror uchburchakning ikki burchagi o‘tkir bo‘lsa, u holda u to‘g‘ri burchakli bo‘ladi" degan teorema o‘rinli emas.

To‘g‘ri va teskari teoremalar o‘zaro teskari bo‘lishi uchun, ulardagi shartlar na faqat ***yetarli*** bo‘lishi shu bilan xulosa o‘rinli bo‘lishi uchun ***zarur*** ham bo‘lishi kerak.

"To‘g‘ri" va "teskari" teoremalar bilan "zarur" va "yetarli", hamda "zaruriy va yetarli" so‘zlar chambarchas bog‘liq.

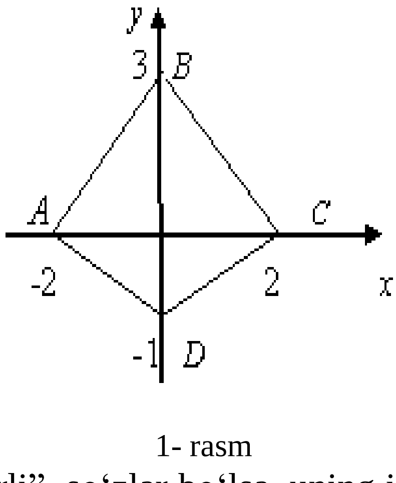
Agar $(\forall x)$ $A(x)\Rightarrow B(x)$ teorema o‘rinli bo‘lsa, $A(x)$ "fikr" $B(x)$ uchun ***yetarli shart***, $B(x)$ "fikr" esa $A(x)$ uchun ***zaruriy shart*** deyiladi.

Bularni farqlash uchun quyidagi teoremani qaraylik. 3-teorema. Agar to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, u holda uning diagonallari o‘zaro teng bo‘ladi.

Q to‘plam x-to‘rtburchaklardan iborat bo‘lsin, u holda $A(x)\equiv\{x\ to'rtburchaklar\ to'g'ri\ to'rburchak\}$, $B(x)\equiv\{x\ to'rtburchak\ diagonallari\ o'zaro\ teng\}$ "fikrlar" bo‘lsin.

3-teorema to‘g‘ri, shu sababli $A(x)$ shart $B(x)$ uchun ***yetarli***, ya’ni to‘rtburchakning diagonallari teng bo‘lishi uchun, uning to‘g‘ri burchakli bo‘lishi ***yetarli***. $B(x)$ "fikr" ("natija", "xulosa") $A(x)$ uchun ***zaruriy shart*** bo‘ladi, chunki to‘rtburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lishi uchun uning diagonallari teng bo‘lishi ***zaruriy shart*** (yetarli emas). Diagonallar tengligidan to‘rtburchakning doimo to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lishi kelib chiqavermaydi (1-rasmga qarang).

Agar $(\forall x)$ $A(x)\Rightarrow B(x),\ x\in M$ teorema o‘rinli bo‘lishi bilan unga teskari teorema $(\forall x)$ $B(x)\Rightarrow A(x),\ x\in M$ teskari teorema ham o‘rinli bo‘lsa, $A(x)$ "shart" $B(x)$ uchun ***"zarur" va "yetarli"*** shart, $B(x)$ sa $A(x)$ uchun zaruriy va yetrli shart bo‘ladi (deyiladi). Bunga misol qilib, 2-teoremani qarash mumkin, ya’ni "sonning 9 ga bo‘linishi uchun, uning raqamlar yig‘indisi 9 ga bo‘linishi zarur va yetarli".



1- rasm

Eslatma. Agar teoremada "zaruriy va yetarli" so‘zlar bo‘lsa, uning isboti zaruriyligi va yetarliligidan ko‘rsatilishi kerak.

Ayrim hollarda "zaruriy va yetarli" so‘zlar o‘rnida "faqat va faqat shunda" kabi so‘zlar ishlatilishi mumkin.

2§. To‘plam tushunchasi

2.1. To‘plam tushunchasi

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib, u misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, shkafdagi kitoblar, barcha to‘g‘ri kasrlar, quyosh sistemasidagi sayyoralar, berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami haqida gapirish mumkin.

2.2. To‘plam elementi

To‘plamni tashkil etgan narsalar (predmetlar) uning ***elementlari*** deb ataladi.

Odatda, to‘plamlar bosh harflar bilan, uning elementlari esa kichik harqlar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, C, ...$ larni to‘plam, $a, b, c, ...$ larni esa to‘plam elementi deyish mumkin.

Agar A to‘plamning elementi a bo‘lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va “a element A to‘plamda tegishli deb o‘qiladi”. Aks holda $a \notin A$ deb yoziladi va “a element A to‘plamga tegishli emas” deb o‘qiladi. Masalan, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ bo‘lsa, $6 \in A$, $7 \notin A$ bo‘ladi.

2.3. Chekli to‘plam

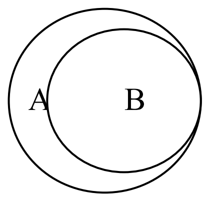
Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plam ***chekli to‘plam*** deb ataladi. Masalan, shkafdagi kitoblar chekli to‘palamni tashkil etadi.

2.4. Cheksiz to‘plam

Matematik analizda ko‘pincha chekli bo‘lmagan to‘plamlarni –cheksiz to‘plam deyiladi. Masalan, barcha to‘g‘ri kasrlar, berilgan nuqtadan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami cheksiz to‘plamlarga misol bo‘ladi.

2.5. Qism to‘plam

Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning ham elementi bo‘lsa, B to‘plam A ***to‘plamning qismi*** yoki ***qismiy to‘plami*** (to‘plam osti) deb ataladi va $B \subset A$ kabi belgilanadi. Masalan, $B = \{2,4,6,8\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bo‘lsin. Bunda $B \subset A$ ekanligini ko‘rish qiyin emas (2-rasm).



2-rasm

2.6. Bo‘sh to‘plam

Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘palam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Bo‘sh to‘plam Ø har qanday A to‘plamning qismi (qismiy to‘plami) hisoblanadi.

2.7. Teng to‘plamlar

Ta’rif. Agar A va B to‘plamlar uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar bir-biriga ***teng to‘plamlar*** deb aytaladi va $A = B$ kabi yoziladi.

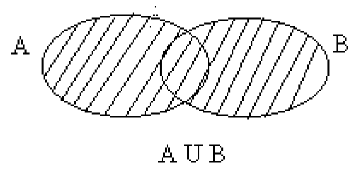
Masalan, A to‘plam $k\pi$ ko‘rinishdagi sonlardan iborat bo‘lsin, bunda $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, ya`ni $A = \{a : a = k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ va $B$ to‘plam esa $\sin x = 0$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo‘lsin, ya`ni $B = \{x : \sin x = 0\}$. Agar $\sin x = 0$

tenglamaning barcha yechimlari $x = k\pi,\ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ formula bilan yozlishini hisobga olsak, $A = B$ bo‘lshini ko‘ramiz.

To‘plamlar ustida amallar

2.8. To‘plamlar yi’gindisi (birlashmasi)

Ta`rif. A va B to‘plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan C to‘plam A va B ***to‘plamlarning yig‘indisi (birlashmasi)*** deyiladi va u $C = A \cup B$ kabi belgilanadi (3-rasm).



3-rasm

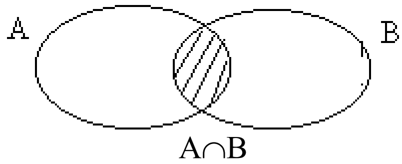
Quyidagilar o‘rinli: $A \cup \varnothing = A,\ A \cup A = A,\ A \cup B = B \cup A$.

Masalan, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ bo‘lsa, unda ularning yig‘indilari quyidagi to‘plamlardan iborat bo‘ladi $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Agar $A_1, A_2, ..., A_t$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, ularning yig‘indisi $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_t$ yuqoridadek ta`riflanadi.

2.9. To‘plamlar ko‘paytmasi (kesishmasi)

Ta`rif. A va B to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan D to‘plam A va B ***to‘plamlarning ko‘paytmasi (kesishmasi)*** deyiladi. A va B to‘plamlarning ko‘paytmasi $D = A \cup B$ kabi belgilanidi (4-rasm). Masalan, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi $A \cap B = \{2,4\}$ to‘plam bo‘ladi. Ta`rifdan bevosita $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A \subset B$ bo‘lsa, unda $A \cap B = A$ bo‘ladi.



4-rasm

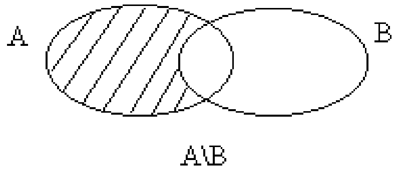
Agar $A_1, A_2, ..., A_t$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_t$ yuqoridadek ta`riflanadi.

2.10. Kesishmaydigan to‘plamlar

Agar $A \cap B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda A va B larga ***kesishmaydigan to‘plamlar*** deyiladi. Masalan, $E = \{2,4,6\}$, $F = \{1,3,5\}$ to‘plamlar kesishmaydigan to‘plamlar bo‘ladi, chunki $E \cap F = \varnothing$.

2.11. To‘plamlar ayirmasi

Ta`rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tuzilgan U to‘plam A to‘plamdan B ***to‘plamning ayirmasi*** deb ataladi (5-rasm).



5-rasm

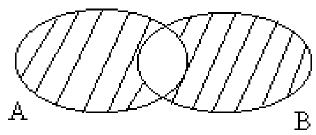
Masalan, agar $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,6,9,12\}$ bo‘lsa, $A \setminus B = \{1,2,4,5\}$ va $B \setminus A = \{6,9,12\}$ bo‘ladi.

2.12. To‘ldiruvchi to‘plam

Agar A to‘plam S to‘plamning qismi (ya`ni $A \subset S$ bo‘lsa, ushbu $S \setminus A$ ayirma A to‘plamni S to‘plamga ***to‘ldiruvchi to‘plam*** deb ataladi va $C_S A$ kabi yoziladi: $C_S A = S \setminus A$

2.13. To‘plamlarning simmetrik ayirmasi

**Ta`rif.** $A$ to‘plamning $B$ to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan va $B$ to‘plamning $A$ to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to‘plam $A$ va $B$ ***to‘plamlarning simmetrik ayirmasi*** deb ataladi (6-rasm). Simmetrik ayirma $A\Delta B$ kabi belgilanadi. Ta`rifga ko‘ra



$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

6-rasm

Masalan, agar $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{4,5,6,8,7,8,9\}$ bo‘lsa, bu to‘plamning simmetrik ayirmasi $A\Delta B = \{1,2,3,7,8,9\}$ bo‘ladi.

2.14. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi

Ikki A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Birinchi elementi A to‘plamga, ikkinchi elementi B to‘plamga tegishli bo‘lgan tartiblangan (a,b) juftliklarni qaraylik: $a \in A, b \in B$.

Ta`rif. Barcha (a,b) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan to‘plam A va B to‘plamlarning ***Dekart ko‘paytmasi*** deb ataladi. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi $A \times B$ kabi belgilanadi. Odatda $A \times A$ to‘plam A^2 deb belgilanadi.: $A \times A = A^2$. Bunda (a,b) va (b,a) juftliklar $A \times B$ to‘plamning turli elementlari hisoblanadi.

Masalan, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ to‘plamlar uchun $A \times B = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\},\{2,3\}\}$, $B \times A = \{\{2,1\},\{2,2\},\{3,1\},\{3,2\}\}$ bo‘ladi.

Yuqorida to‘plamlarni va ular ustida bajarilgan amallarni tasvirlash uchun ishlatilgan shakllar ***Eyler –Viyen*** diagrammalari deb ataladi.

2.15. Universal to‘plam

Yuqorida kiritilgan amallar ixtiyoriy to‘plamlar uchun, to‘plamlarning tabiatiga hech qanday shart qo‘ymasdan ta`riflandi. Ma`nosizlik hollarni istisno qilish uchun, odatda barcha amallar biror ***universal to‘plam*** deb ataluvchi to‘plamning qismiy to‘plamlari ustida bajariladi deb hisoblanadi va u universal to‘plam U yoki Ω bilan belgilanadi.

Matematik analiz kursi davomida, universal to‘plam sifatida asosan haqiqiy sonlar to‘plami R qaraladi.

2.16. To‘plamni bo‘laklash

Biror A to‘plam berilgan bo‘lib, $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlar uning qismiy to‘plamlari bo‘lsin. $A_k \subset A$ $(k = 1,2,...,n)$.

Agar $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ qismiy to‘plamlar sistemasi uchun:

1) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = A,$

2) $A_k \cap A_i = \varnothing \quad (k \neq i, k, i = 1,2,...,n)$

shartlar bajarilsa, $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ sistema A da bo‘laklash bajargan yoki A to‘plam $A_1, A_2, ..., A_n$ to‘plamlarga ***bo‘laklangan*** deyiladi. Ikkala shart birgalikda A dagi har bir element bo‘laklashning bitta va faqat bitta elementga tegishli bo‘lishini ta`minlaydi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ to'plam berilgan bo'lib, $A_1=\{1,2,3\}$, $A_2=\{4,5\}$, $A_3=\{6\}$ bo'lsa, 1) $A_1\cup A_2\cup A_3=A$; 2) $A_1\cap A_2=\varnothing$, $A_2\cap A_3=\varnothing$, $A_1\cap A_3=\varnothing$. Demak A to'plam A_1, A_2 va A_3 to'plamlarga bo'lingandir.

2.17. To'plamlarni taqqoslash

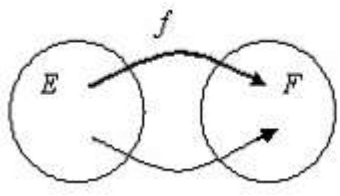
Turli to'plamlarni taqqoslashga, ularni elementlarning miqdori bo'yicha solishtirishga to'g'ri keladi.

Agar A va B lar chekli to'plamlar bo'lsa, u holda ularning elementlarini bevosita sanash bilan elementlar soni bir-biriga tengligini yoki A to'plamning elementlari soni B to'plamning elementlari sonidan ko'p yoki kam ekanini aniqlash mumkin.

Agar A va B to'plamlar cheksiz to'plamlar bo'lsa, unda bu to'plamlarning elementlarini, ravshanki, sanash yo'li bilan taqqoslab bo'lmaydi. Ammo, bu to'plamlarni ularning elementlarini bir-biriga mos qo'yish yo'li bilan taqqoslash mumkin.

2.18. Aksalantirishlar

Ta'rif (*akslantirish berilgan deyiladi*). Agar E to'plamdan olingan har bir elementga ($x\in E$) biror qonun qoidaga ko'ra F to'plamda bitta y element ($y\in F$) mos qo'yilgan bo'lsa, u holda E to'plam F to'plamga ***akslantirilgan*** deyiladi va $f: E\to F$ yoki $x\xrightarrow{f} y$ kabi belgilanadi.



Bunda E to'plam f akslantirishning ***aniqlanish sohasi*** deyiladi.

2.19. Ichiga akslantirish

Ta'rif. Agar $f: E\to F$ akslantirishda $f(E)\neq F$ bo'lsa, bu akslantirishga E to'plamni F ning ***ichiga akslantirish*** deyiladi.

2.20. Ustiga (syuryektiv) akslantirish

Ta'rif. Agar $f: E\to F$ akslantirishda $f(E)=F$ bo'lsa, bu akslantirishga E to'plamni F ning ***ustiga (syuryektiv) akslantirish*** deyiladi.

2.21. O'zaro bir qiymatli (biyektiv) moslik

Agar $f: E\to F$ akslantirish ustiga akslantirish bo'lsa va ixtiyoriy $y\in F$ element yagona elementning aksi bo'lsa, f akslantirish ***o'zaro bir qiymati moslik*** deyiladi.

2.22. Ekvivalent to'plamlar

Ta`rif. Agar A va B to'plamlar elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular bir-biriga ***ekvivalent to'plamlar*** deb ataladi.

Ekvivalent A va B to'plamlar $A\sim B$ kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{10,11,12,13,14\}$ bo'lsa, $A\sim B$.

2.23. Sanoqli to'plam

Ta`rif. Natural sonlar to'plami N ga ekvivalent bo'lgan har qanday *to'plam* ***sanoqli to'plam*** deb ataladi.

Natural sonlar to‘plami N ga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlar ***sanoqli to‘plamlar sinfini*** tashkil etadi.

To‘plamning qismi o‘ziga ekvivalent bo‘lishi faqat cheksiz to‘plamlargagina xosdir.

2.24. To‘plam quvvati

Ekvivalent to‘plamlar sinfining miqdoriy xarakteristikasi sifatida to‘plamning quvvati tushunchasi kiritiladi. Chekli to‘plamlar uchun quvvat to‘plam elementlarining sonidan iboratdir.

2.25. O‘rganish usullari

Odatda jarayonlar ***deduktiv*** va ***induktiv*** fikrlashlar (usullar) yordamida o‘rganiladi.

Deduktiv usulda o‘rganishda umumiy tasdiqlardan xususiy tasdiqlarni o‘rinli ekanigini mantiqan fikrlab ko‘rsatiladi.

Induktiv usulda esa tasdiq bir nechta to‘g‘ri oddiy xususiy hollardan umumiy hol uchun to‘g‘riligi ko‘rsatiladi.

2.26. Matematik induksiya usuli

Biror n natural songa bog‘liq $A(n)$ gipoteza bayon qilingan bo‘lsin. Matematik induksiya yordamida gipoteza quyidagicha o‘rganiladi:

1. $n=1$ da mulohazaning to‘g‘riligi tekshiriladi;
2. $n=k$ da $A(k)$ mulohaza to‘g‘ri deb qabul qilinadi;
3. $n=k+1$ da $A(k)$ to‘g‘riligidan foydalanib $A(k+1)$ uchun to‘g‘riligi ko‘rsatiladi.

Shundan so‘ng, $A(n)$ mulohaza barcha n lar uchun o‘rinli deb xulosa qilinadi.

Misol. Quyidagi formulani

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ixtiyoriy $n\in N$ da o‘rinli ekanligini isbot qiling.

1. $n=1$ da tenglikning ikkala tomoni 1 ga teng, ya’ni

$$1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2$$

bo‘lib, matematik induksiyaning mezoni birinchi sharti bajariladi.

2. Faraz qilamiz $n=k$ da formula o‘rinli, ya’ni

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

bo‘lsin. Bu tenglikni ikkala tomoniga $(k+1)^3$ hadni qo‘shsmiz

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k+2}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Shunday qilib formulaning $n=k$ to‘g‘riligidan uning $n=k+1$ uchun o‘rinliligi kelib chiqdi. Bu esa, formulaning barcha n lar uchun o‘rinli bo‘lishini bildiradi.

3§. Haqiqiy sonlar

3.1.Natural sonlar. Tartiblangan to‘plam

Sanashda ishlailadigan sonlar natural sonlar to‘plamini tashkil qiladi. $N=\{1, 2, 3, ...\}$-barcha natural sonlar to‘plamini ifodalaydi. Bu to‘plamdan olingan ixtiyoriy natural son n, m va p lar uchun quyidagi ikki tasdiq doimo o‘rinli:

1) $n=m, n>m, n<m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli;

2) $n<m, m<p$ tengsizliklardan $n<p$ tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Agar biror E to‘plamning elementlari uchun yuqorida keltirilgan 1) va 2) tasdiqlar o‘rinli bo‘lsa, E to‘plam ***tartiblangan to‘plam*** deyiladi. Natural sonlar to‘plami tartiblangan to‘plam.

Natural sonlar to‘plami quyidan 1 bilan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan.

3.2. Natural sonlar ustida bajariladigan amallar

Natural sonlar to‘plami N da ikkita amal qo‘shish $(n+m)$ va ko‘paytirish $(n \cdot m)$ amallari doimo bajariladi va ular quyidagi xossalarga ega.

1°. Kommutativlik: $n+m=m+n, \quad n \cdot m = m \cdot n$.

2°. Assotsiativlik: $(n+m)+p=n+(m+p), \quad (n \cdot m)\cdot p = n \cdot (m \cdot p)$.

3°. Distributivlik: $(n+m)\cdot p = n \cdot p + m \cdot p$.

4°. N to‘plamda shunday k element borki, $k \cdot n = n \cdot k = n$ bo‘ladi. Bu element $k=1$ dir.

3.3. Butun sonlar

Natural sonlarga qarama-qarshi sonlar manfiy butun sonlar (manfiy natural) deyiladi.

Barcha manfiy natural sonlar, nol soni va barcha natural sonlar ***butun sonlar*** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z=\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Bu to‘plamdagi 0 soni ixtiyoriy $n \in N$ uchun $n+0=n$ va $n+(-n)=0$ tengliklarni qanoatlantiradi. Bu yerda n va $-n$ o‘zaro ***qarama-qarshi sonlar*** deb ataladi.

Ravshanki, $N \subset Z$.

Butun sonlar to‘plami tartiblangan. Butun sonlar to‘plami ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanmagan.

3.4. Butun sonlar to‘plamida bajariladigan amallar

1°. Kommutativlik: $n+m=m+n, \quad n \cdot m = m \cdot n$.

2°. Assotsiativlik: $(n+m)+p=n+(m+p), \quad (n \cdot m)\cdot p = n \cdot (m \cdot p)$.

3°. Distributivlik: $(n+m)\cdot p = n \cdot p + m \cdot p$.

4°. Z to‘plamda shunday k element borki, $k\cdot n=n\cdot k=n$ bo‘ladi. Bu element $k=1$ dir.

5°. Ixtiyoriy $q\in Z$ element uchun Z to‘plamda shunday element $-q$ mavjudki, $q+(-q)=0$ bo‘ladi.

6°. Ixtiyoriy $q\in Z$ element uchun $q+0=0+q=q$ bo‘ladi.

7°. Ixtiyoriy $q\in Z$ element uchun $q\cdot 0=0\cdot q=0$ bo‘ladi.

3.5. Ratsional sonlar

Ushbu qisqarmaydigan $r=\frac{p}{n};\ p\in Z, n\in N$ kasr ko‘rinishida tasvirlanadigan har bir son ***ratsional son*** deyiladi. Ratsional sonlar to‘plami Q harfi bilan belgilanadi:

$$Q=\{r: r=\frac{p}{n},\ p\in Z, n\in N, \quad EKUB(p,n)=1\}.$$

Ravshanki, $N\subset Z\subset Q$.

Ratsional sonlar to‘plami tartiblangan. Ratsional sonlar to‘plami ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanmagan.

3.6. Ratsional sonlar to‘plamida bajariladigan amallar

Ratsional sonlar to‘plamida qo‘shish, ko‘paytirish, ayirish amallari bilan bir qatorda bo‘lish amali (nolga teng bo‘lmagan songa) ham kiritiladi va bu amallarga nisbatan ushbu xossalar o‘rinli (bu xossalarda r, t va s lar ixtiyoriy ratsional sonlar):

1°. Kommutativlik: $r+t=t+r, \quad rt=tr$.

2°. Assotsiativlik: $(r+t)+s=r+(t+s), \quad (r\cdot t)\cdot s=r\cdot(t\cdot s)$.

3°. Distributivlik: $(r+t)\cdot s=r\cdot s+t\cdot s$.

4°. Nol sonining xususiyati: $r+0=r, \quad r\cdot 0=0$.

5°. Bir sonining xususiyati: $r\cdot 1=r$.

6°. Qarama-qarshi elementning mavjudligi: $\forall r\in Q$ uchun shunday $-r\in Q$ son mavjudki, $r+(-r)=0$ bo‘ladi.

7°. Teskari elementning mavjudligi: $\forall r\in Q$ $(r\neq 0)$ uchun shunday $r^{-1}\in Q$ son mavjudki, $r\cdot r^{-1}=1$ bo‘ladi.

8°. Ixtiyoriy $r\in Q,\ t\in Q,\ s\in Q$ sonlar uchun $r>t$ bo‘lganda $r+s>t+s$.

9°. Ixtiyoriy $r\in Q,\ t\in Q,\ s\in Q$ $(s>0)$ sonlar uchun $r>t$ bo‘lganda $r\cdot s>t\cdot s$ bo‘ladi.

10°. Ixtiyoriy ikki musbat r va t ratsional sonlar uchun shunday natural son n mavjudki, $n\cdot r>t$ bo‘ladi. Bu xossa odatda ***Arximed aksiomasi*** deyiladi.

3.7. Ratsional sonlar to‘plamining asosiy xossalari

Ratsional sonlar to‘plami ikkita asosiy xossaga ega: tartiblanganlik va zichlik.

Ratsional sonlar to‘plamining tartiblanganlgi. Ratsional sonlar to‘plami Q dan olingan ixtiyoriy ratsional r, s, t sonlar uchun quyidagi ikki tasdiq o‘rinli bo‘ladi:

1) $r=s, r>s, r<s$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli.
2) $r<s, s<t$ tengsizliklardan $r<t$ tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Bu hol ratsional sonlar to‘plami Q ning tartiblanganligi xossasini ifodalaydi.

Ratsional sonlar to‘plamining zichligi. Faraz qilaylik, $r \in Q, t \in Q$ va $r<t$ bo‘lsin. U holda $\frac{r+t}{2} \in Q$ va $r<\frac{r+t}{2}<t$ bo‘ladi. Bu esa r va t ratsional sonlar orasida $\frac{r+t}{2}$ ratsional son bor ekanligini ko‘rsatadi. $\frac{r+t}{2}$ sonni s bilan belgilab, r va s sonlari orasida joylashgan $\frac{r+s}{2}$ hamda s va t orasida joylashgan $\frac{s+t}{2}$ ratsional sonlar borligini ko‘ramiz: $r<\frac{r+s}{2}<\frac{r+t}{2}<\frac{s+t}{2}<t$

Bu jarayonni istagancha davom ettirish yo‘li bilan ixtiyoriy r va t ratsional sonlar orasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar borligi aniqlanadi. Mana shu xossa ratsional sonlar to‘plami Q ning ***zichligi xossasi*** deyiladi.

3.8. To‘plamning eng katta elementi

Ta`rif. Agar shunday $r^* \in A$ $(A \subset Q)$ topilib, $\forall r \in A$ uchun $r \le r^*$ tengsizlik bajarilsa, r^* ratsional son A ***to‘plamning eng katta elementi*** deyiladi.

3.9. To‘plamning eng kichik elementi

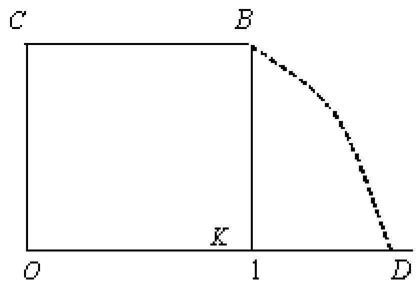
Ta`rif. Agar shunday $r_* \in A$ $(A \subset Q)$ topilib, $\forall r \in A$ uchun $r \ge r_*$ tengsizlik bajarilsa, r_* ratsional son A ***to‘plamning eng kichik elementi*** deyiladi.

3.10. Ratsional sonlar to‘plamini kengaytirish zaruriyati

Tomoni bir birlikka teng bo‘lgan $QABC$ kvadratni qaraylik.

Bu kvadratnng diagonali OB ning uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng. Sirkulning uchini 0 nuqtada qo‘yib, radiusi OB ga teng bo‘lgan aylana chizaylik. Bu aylana OA tomon joylashgan to‘g‘ri chiziqni D nuqtada kesadi.

$OA<OB$ bo‘lgani uchun D nuqta A nuqtadan o‘ngga joylashgan bo‘ladi. Ravshanki, $OB=OD=\sqrt{2}$. Demak, D nuqtaga $\sqrt{2}$ son mos keladi. $\sqrt{2}$ esa ratsional son emas.



7-rasm

Bu quyidagi teoremada isbotlanadi.

Teorema. Ratsional sonlar to‘plami Q da kvadratni 2 ga teng bo‘lgan ratsional son mavjud emas.

Teskarisini faraz qilaylik, ya`ni Q to‘plamda shunday qisqarmaydigan $\frac{p}{n}$ $(p \in Z, n \in N)$ kasr ko‘rinishida yoziladigan ratsional son borki, bu

$$\left(\frac{p}{n}\right)^2 = 2 \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. Yuqoridagi tenglikni quyidagicha

$$p^2 = 2n^2 \qquad (2)$$

yozib olamiz. Bundan p juft son ekanligi ko‘rinadi. Demak, $p = 2m$ $(m \in Z)$ demak, buni (2) ga qo‘yib $n^2 = 2m^2$ hosil bo‘ladi. Bu esa n sonning ham jut ekanligini ko‘rsatadi. Demak, yuqoridagi farazdan p va n sonlar juft sonligi kelib chiqadi. Binobarin ular uchun 2 umumiy ko‘paytuvchi. Bu esa $\frac{p}{n}$ sonning qisqarmaydigan kasr ekaniga zid.

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqda olingan har bir nuqtada Q to‘plamda unga mos keladigan ratsional son mavjud bo‘lavermas ekan.

Ratsionl sonlar to‘plamni kengaytirishda bir-biriga ekvivalent bo‘lgan bir necha usullar mavjud Koshi usuli, Kantor usuli, Veyershtras usuli hamda Dedekind usuli.

3.11. Ratsional sonlar to‘plamida kesim

Ta`rif. Ratsional sonlar to‘plami Q shunday A va A' to‘plamlarga ajratilib, bunda

1) $A \neq \varnothing, A' \neq \varnothing$
2) $A \cup A' = Q$
3) $\forall a \in A, \forall a^{`} \in A' \Rightarrow a < a'$

shartlar qanoatlantirilsa, A va A' to‘plamlar Q to‘plamga ***kesim bajaradi*** deyiladi. Bunda A to‘plam ***kesimning quyi sinfi***, A' esa ***yuqori sinfi*** deyiladi. Kesim (A, A') kabi belgilanadi.

Masalan: r_0 va undan kichik bo‘lgan barcha ratsional sonlardan iborat to‘plam A, r_0 dan katta bo‘lgan barcha ratsional sonlar to‘plami A' bo‘lsin: $A = \{r : r \in Q, r \le r_0\}, A' = \{r : r \in Q \;\; r_0 > r\}$. Bu A va A' to‘plamlar uchun ta`rifidagi uchala shart ham bajariladi. Demak, bunday tuzilgan A va A' to‘plamlar Q da kesim bajaradi. Odatda bu kesim $r_0 = (A, A')$ kabi belgilanadi.

<u>I tur kesim</u>. Kesimning quyi sinfi A da eng katta element (r_0 ratsional son) mavjud, kesimning yuqori sinfi A'da esa eng kichik element mavjud emas. Bunda r_0 ratsional son quyi sinf A ning yopuvchi elementi bo‘ladi.

<u>II tur kesim</u>. Kesimning quyi sinfi A ga eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da esa kichik element (r_0', p ratsional son) mavjud. Bunda r_0' ratsional son yuqori sinf A' ning yopuvchi element bo‘ladi.

<u>III tur kesim</u>. Kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da eng kichik element mavjud emas. Bunda quyi sinf A da, yuqori sinf A' da yopuvchi elementlar mavjud emas.

Birinchi va ikkinchi tur kesimlarda ularning quyi yoki yuqori sinflarni yopiq bo‘lib, yopuvchi elementlarni bir sinfda ikkinchi sinfga o‘tkazib, har doim bir turdagi kesimga – quyi sinfi ochiq, yuqori sinfi esa esa yopiq bo‘lgan kesimga keltirish mumkin. Quyi sinfda eng katta element mavjud bo‘lmagan (ochiq sinf) , yuqori sinfda esa eng kichik element mavjud bo‘lgan (yopiq sinf) kesim ***ratsional kesim*** deyiladi.

Q da bajariladigan har bir ratsional kesim bitta ratsional sonni aniqlaydi.

3.12. Irratsional son

Irratsional sonlar deb $\frac{m}{n},\ (m \in Z,\ n \in N)$ ko‘rinishida yozib bo‘lmaydigan sonlarga aytiladi. Masalan, $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \ldots$. Bunday sonlar to‘plami I yoki U harfilari bilan belgilanadi.

3.13. Irratsional kesim

Ratsional sonlar to‘plami Q da bajarilgan III tur kesim quyi sinfi ham, yuqori sinfi ham ochiq bo‘lgan kesim ***irratsional kesim*** deyiladi.

Ta’rif. Ratsional sonlar to‘plami Q da bajarilgan kesim ***irratsional sonni*** aniqlaydi deyiladi.

3.14. Haqiqiy sonlar

Ta`rif. Ratsional hamda irratsional sonlar umumiy nom bilan ***haqiqiy sonlar*** deyiladi.

Barcha haqiqiy sonlar to‘plami R harfi bilan belgilanadi. Tarifga ko‘ra, $R = Q \cup U$. R-lotincha realus – “haqiqiy” degan ma`noni anglatuvchi so‘zning bosh harfi.

3.15. Haqiqiy sonlar to‘plamida kesim

Ta`rif. Haqiqiy sonlar to‘plami R shunday E va E' to‘plamlarga ajratilib, unda

1) $E \neq \varnothing,\ E' \neq \varnothing$
2) $E \cup E' = R$
3) $\forall x \in E, \forall x' \in E' \Rightarrow x < x'$

shartlar bajarilsa, E va E' to‘plamlar R to‘plamda ***kesim bajaradi*** deyiladi va (E, E') kabi belgilanadi.

Bunda E to‘plam kesimning quyi sinfi, E' to‘plam esa kesimning yuqori sinfi deyiladi.

Masalan, ushbu $E = \{x : x \in R, x \leq x_0\}$, $E^{`} = \{x : x \in R, x > x_0\}$ $(x_0 \in R)$ to‘plamlar R da (E, E') kesim bajaradi. Bu kesimning quyi sinfi E da eng katta element (u x_0 ga teng) bo‘lib, yuqori sinfi E da eng kichik element bo‘lmaydi.

3.16. Dedekind teoremasi

Teorema. Haqiqiy sonlar to‘plami R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim uchun faqat quyidagi ikki holdan biri bo‘lishi mumkin;

a) Kesimning quyi sinfi $-E$ da eng katta elementi mavjud, yuqori sinf – E' da esa eng kichik element mavjud emas;

b) kesimning quyi sinfi – E da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf – E' da esa eng kichik element mavjud.

Teorema. R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim yagona haqiqiy sonni aniqlaydi.

3.17. Haqiqiy sonlarning asosiy xossalari

Haqiqiy sonlar to‘plami tartiblanganlik va zichlik xossalariga ega.

I. **<u>Tartiblanganlik xossasi</u>**.

1) Ixtiyoriy ikki x va y sonlar berilgan bo‘lsa, unda

$$x=y, \quad x<y, \quad x>y$$

munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi;

2) x, y, z haqiqiy sonlar uchun ushbu $x<y, \quad y<z$ tengsizliklardan $x<z$ tengsizlik kelib chiqadi.

II. **<u>Zichlik (uzluksizlik) xossasi</u>**. Ixtiyoriy ikkita x va y haqiqiy sonlar bo‘lib, $x<y$ ($x>y$) bo‘lsa, u holda shunday r ratsional son mavjudki, $x<r<y$ ($x>r>z$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy ikkita bir-biriga teng bo‘lmagan haqiqiy sonlar orasida kamida bitta haqiqiy son mavjud. Bundan esa ular orasida cheksiz ko‘p haqiqiy son mavjudligi kelib chiqadi. Demak, R-zich to‘plam ekan.

3.18. Haqiqiy sonlarning asosiy aksiomalari

I. **<u>Qo‘shish amali</u>**. Ixtiyoriy tartiblangan bir juft a va b haqiqiy sonlar uchun yagona usul bilan aniqlangan va ularning ***yig‘indisi*** deb ataluvchi $a+b$ ko‘rinishda belgilanuvchi son mavjud. Quyidagi xossalar o‘rinli:

I_1. Kommutativlik: $a+b=b+a$.

I_2. Assotsiativlik: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

I_3. Ixtiyoriy $a\in R$ uchun $a+0=a$.

I_4. Ixtiyoriy $a\in R$ uchun va unga qarama-qarshi $-a$ son uchun

$$a+(-a)=0.$$

II. **<u>Ko‘paytirish amali</u>**. Ixtiyoriy tartiblangan bir juft a va b haqiqiy sonlar uchun yagona usul bilan aniqlangan va ularning ***ko‘paytmasi*** deb ataluvchi $a\cdot b$ ko‘rinishda belgilanuvchi son mavjud. Quyidagi xossalar o‘rinli:

II_1. Kommutativlik: $a\cdot b=b\cdot a$.

II_2. Assotsiativlik: $a\cdot(bc)=(ab)\cdot c$.

II_3. Bir sonining xususiyati: $a\cdot 1=a$.

II_4. Teskari sonning mavjudligi. $\forall a\in R$ ($a\neq 0$) ga teskari son deb ataluvchi va $\frac{1}{a}$ ko‘rinishida belgilanuvchi son mavjud bo‘lib

$$a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

III. Qo‘shish va ko‘paytirish amallari orasidagi bog‘liqlik.

Distributivlik (***qo‘shishning ko‘paytirishga nisbatan taqsimot qonuni***)

$$(a+b)c=ac+bc.$$

IV. <u>Tartiblanganlik.</u> Ixtiyoriy a haqiqiy son uchun quyidagilarning biri o‘rinli: $a>0$ (a noldan katta), $a=0$ (a nolga teng) yoki $a<0$ (a kichik noldan), shu bilan birga $a>0$ shart $-a<0$ shart bilan teng kuchli.

Agar $a>0$, $b>0$ bo‘lsa quyidagilar o‘rinli:

IV_1. $a+b>0$.

IV₂. $ab>0$.

V. <u>Uzluksizlik</u>. Ixtiyoriy $a\in A\subset B,\ b\in B\subset R$ va $a\le b$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganda, shunday α son mavjudki

$$a\le\alpha\le b$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Elementlari I-V xossalarga ega bo‘lgan to‘plam haqiqiy sonlar to‘plami deyiladi. Bu to‘plamning har bir elementi ***haqiqiy son*** deyiladi.

3.19. Qo‘shish va ko‘paytirishning asosiy xossalari

<u>Ayirish amali.</u> Qo‘shishga nisbatan teskari amal bu ayirish amali.

Ixtiyoriy tartiblangan a va b haqiqiy sonlar uchun $a+(-b)$ son a va b sonlar ayirmasi deyiladi va $a-b$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$a-b=a+(-b)$$

Agar

$$a+b=c$$

bo‘lsa, tenglikni ikkala tomoniga $-b$ ni qo‘shib $(a+b)+(-b)=c+(-b)$ tengsizlikni hosil qilamiz I_2 dan va ayirish ta’rifidan

$$a+(b+(-b))=c-b,$$

hamda $b+(-b)=0$ dan

$$a=c-b.$$

1°. <u>Nol xususiyatga ega bo‘lgan son yagonadir</u>. Faraz qilaylik nol xususiyatga ega bo‘lgan 0 va $0'$ ikkita nol bo‘lsin. U holda I_3 dan $0'+0=0',\ 0+0'=0$. I_2 dan tenglikning o‘ng tomonlari teng, bundan chap tomonlar ham teng bo‘lishi kerak, $0=0'$.

2°. <u>Berilgan songa qarama-qarshi son yagonadir.</u> b va c sonlar a songa qarama-qarshi sonlar bo‘lsin, ya’ni $a+b=0$ va $a+c=0$. Unda birinchi tenglikdan $a+b+c=0+c$ yoki $(a+b)+c=c$ bundan $(a+c)+b=c$, lekin $a+c=0$, natijada $b=c$.

3°. Ixtiyoriy a son uchun

$$-(-a)=a$$

tenglik o‘rinli.

Haqiqatan, $a+(-a)=0$ tenglikdan kommutativligidan $-a+a=0$. Bundan $a=-(-a)$.

4°. Ixtiyoriy a son uchun

$$a-a=0$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatdan,

$$a-a=a+(-a)=0.$$

5°. Ixtiyoriy a va b sonlar uchun

$$-a-b=-(a+b)$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatdan,

$$a+b+(-a-b)=(a-a)+(b-b)=0.$$

6°. $a+x=b$ tenglama R da yagona

$$x=b-a$$

ildizga ega. Haqiqatdan, agar $a+b=c$ bo‘lsa, $a=c-b$ ni hisobga olsak, $x=b-a$. Ildiz mavjudligini ko‘rsatish uchun, $x=b-a$ son ildiz ekanligini tekshirish kerak:

$$a+(b-a)=a+[b+(-a)]=[a+(-a)]+b=b.$$

Bo‘lish amali. Ko‘paytirish amaliga teskari amal, bu bo‘lish amalidir.

Ta’rif. Ixtiyoriy tartiblangan a va b $(b\neq 0)$ sonlar uchun, $a\cdot\frac{1}{b}$ son a sonni b songa bo‘lish deyiladi va $\frac{a}{b}$ yoki $a:b$ kabi belgilanadi.

7°. Bir soni xususiyatiga ega bo‘lgan son yagona.

8°. Noldan farqli berilgan songa teskari son yagonadir.

9°. Ixtiyoriy $a\neq 0$ son uchun quyidagi tenglik o‘rinli

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$$

10°. Ixtiyoriy $a\neq 0$ son uchun

$$\frac{a}{a}=1.$$

11°. Ixtiyoriy $a\neq 0$, $b\neq 0$ uchun

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}.$$

12°. $ax=b$ tenglama $a\neq 0$ da haqiqiy sonlar to‘plamida $x=\frac{b}{a}$ yagona yechimga ega.

7°-12° xossalar xuddi 1°-6° xossalar kabi isbot qilinadi.

13°. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tenglik $b\neq 0$, $d\neq 0$ da faqat $ad=bc$ da o‘rinli.

14°. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun

$$a(b-c)=ab-ac$$

tenglik o‘rinli.

Haqiqatdan,

$$a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac.$$

15°. Ixtiyoriy a son uchun

$$a\cdot 0=0.$$

Ixtiyoriy b son uchun $b-b=0$. 4° dan va 14° dan

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0$$

ekanligi kelib chiqadi.

16°. Agar $ab=0$ bo‘lsa, ko‘paytuvchilardan hech bo‘lmaganda biri nolga teng.

Faraz qilaylik $a\neq 0$, $ab=0$ ni $\frac{1}{a}$ ga ko‘paytiramiz. $\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0$, bundan $\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)b=0$ bundan $b=0$.

17°. Ixtiyoriy a va b sonlar uchun

$$(-a)b=-ab,\quad (-a)(-b)=ab$$

va xususiy holda $(-1)a=-a$.

Haqiqatdan,

$$(-a)b=(-a)b+ab-ab=(-a+a)b-ab=-ab.$$

Bundan,

$$(-a)(-b)=-a(-b)=(-1)[a(-b)]=(-1)(-ab)=-(-ab)=ab.$$

18°. Kasrlarni qo‘shish quyidagi

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\quad (b\neq 0,\ d\neq 0)$$

qoida bilan bajariladi.

Isboti. Yuqorida keltirilgan qoidalardan foydalanamiz:

$$\frac{ad+bc}{bd}=(ad+bc)\frac{1}{bd}=ad\frac{1}{bd}+bc\frac{1}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}.$$

19°. Kasrlarni ko‘paytirish

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad (b\neq 0,\ d\neq 0)$$

qoida bilan bajariladi.

$$11^\circ\Rightarrow\frac{ac}{bd}=ac\cdot\frac{1}{bd}=ac\frac{1}{b}\frac{1}{d}=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot\left(c\cdot\frac{1}{d}\right)=\frac{ac}{bd}.$$

20°. $\frac{a}{b}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ kasrga teskari kasr $\frac{b}{a}$ bo‘lib, $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$ (kasrlarni ko‘paytirish xossasidan kelib chiqadi).

21°. Kasrlarni bo‘lish

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}\quad (b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0)$$

qoida bilan bajariladi.

<u>Daraja.</u> a haqiqiy son va n natural son berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. a sonining n marta o‘zini o‘ziga ko‘paytmasi a sonining n-***darajasi*** deyiladi va a^n kabi belgilanadi. Demak,

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ marta}.$$

Ta’rifdan $a^0=1$ va ixtiyoriy $n\in N$ uchun

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

22°. Agar m va n butun sonlar bo‘lsa ($m\leq 0, n\leq 0$ da $a\neq 0$),

$$a^m a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn}$$

tengliklar o‘rinli.

Agar $m=0, n=0$ bo‘lsa, tenglik o‘rinliligi aniq. Agar m,n natural sonlar bo‘lsa, daraja ta’rifidan

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ marta}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ marta}=a^{m+n}.$$

Agar $m<0, n>0$ va $a\neq 0$ da $k=-m$ hamda $k\leq n$ da

$$a^m\cdot a^n=a^{-k}a^n=\frac{a^n}{a^k}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\ marta}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k\ marta}}=a^{n-k}=a^{m+n}$$

va $k>n$ da

$$a^m a^n=\frac{a^n}{b^k}=\frac{1}{a^{k-n}}=a^{n-k}=a^{m+k}.$$

Agar $m<0, n<0$ va $a\neq 0$ bo‘lsa $k=-m$, $l=-n$ deb 11° dan foydalanib

$$a^m a^n=a^{-k}\cdot a^{-l}=\frac{1}{a^k}\cdot\frac{1}{a^l}=\frac{1}{a^{k+l}}=a^{-(k+l)}=a^{m+n}.$$

Elementlari I, II, III shartlarni qanoatlantiruvchi hech bo‘lmaganda bitta elementga ega bo‘lgan to‘plamga ***maydon*** deyiladi.

Ratsional sonlar, haqiqiy sonlar, kompleks sonlar va ratsional funksiyalar maydon hosil qiladi.

3.20. Son qiymatlarini taqqoslash va ularning asosiy xossalari

Ta’rif. Agar $b-a>0$ bo‘lsa, b son a sondan katta deyiladi va $b>a$ ko‘rinishida yoziladi yoki a son b sondan kichik deyiladi va $a<b$ ko‘rinishida yoziladi. Taqqoslashning asosiy xossalarini keltiramiz.

1°. Agar $a>b$ va $b>c$ bo‘lsa, $a>c$ bo‘ladi (tranzitivlik xossasi).
Agar $a>b$ va $b>c$ bo‘lsa, ta’rifdan $a-b>0$ va $b-c>0$. IV_1 dan

$$(a-b)+(b-c)>0,\quad a+b-b-c=a-c>0.$$

2°. Agar $a>b$ bo‘lsa, ixtiyoriy c sonda $a+c>b+c$ o‘rinli. Oldingi bo‘limdagi 5° dan,

$$a-b=a+c-c+b=(a+c)-(b+c)>0$$

(chunki $a>b$), natijada $a+c>b+c$.
$a<b$ ko‘rinishdagi munosabat “a kichik b” va $a=b$ “a teng b” hamda $a>b$ “a katta b” deb o‘qiladi.
$a\leq b$ yozuv $b\geq a$ yozuviga teng kuchli bo‘lib, $a=b$ yoki $a<b$ ma’noni anglatadi.

3°. Ixtiyoriy ikkita a va b sonlar uchun quyidagi munosabatlardan faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi:

$$a>b,\ a=b \text{ yoki } a<b.$$

4°. Agar $a<b$ bo‘lsa, $-a>-b$ o‘rinli.
Haqiqatdan, $a<b$ shartdan $-a=-a+b+(-b)=(b-a)+(-b)>0+(-b)=-b$.

5°. Agar $a<b$ va $c\leq d$ bo‘lsa, $a+c<b+d$ o‘rinli, ya’ni bir xil ishorali tengsizliklarni hadlab qo‘shish mumkin.

6°. Agar $a<b$ va $c\geq d$ bo‘lsa, $a-c<b-d$ o‘rinli.
Haqiqatdan, $c\geq d$ va 4° dan $-c=-d$. $a<b$ va $-c\leq -d$ tengsizliklarni qo‘shish, $a-c<b-d$ ega bo‘lamiz.

7°. Agar $a<b$ va $c<0$ bo‘lsa $ac>bc$ o‘rinli.
Shu bo‘limdagi 4° dan $-c>0$ va IV_2 dan $a(-c)<b(-c)$. Oldingi bo‘limdagi 17° dan, $ac<-cb$. Natijada 4° dan, $ac>bc$.

Natija. Agar $b>0$, $d>0$ bo‘lsa,

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$$

shart $ad<bc$ shartga teng kuchli.

3.21. Sonli oraliqlar (sonli to‘plamlar)

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan ***to‘plam sonli*** to‘plam deyiladi va $E=\{x\}$ kabi belgilanadi.

Matematik analizda asosan sonli to‘plamlar qaraladi.

Sonli oraliqlar turi, geometrik tasviri, belgilanishi va tengsizliklar yordamida 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Oraliqlar turi	Geometrik tasviri	Belgilanishi	Tengsizliklar yordamida ifodalanishi
Interval	—a○/////b○→	(a,b)	$a<x<b$
Kesma (segment)	—a●/////b●→	$[a,b]$	$a\le x\le b$
Yarim interval	—a○/////b●→	$(a,b]$	$a<x\le b$
Yarim interval	—a●/////b○→	$[a,b)$	$a\le x<b$
Nur	—a●////////→	$[a,+\infty)$	$x\ge a$
Nur	////////b●→	$(-\infty,b]$	$x\le b$
Ochiq nur	—a○////////→	$(a,+\infty)$	$x>a$
Ochiq nur	////////b○→	$(-\infty,b)$	$x<b$

Eslatma. Amalda “interval”, “kesma (segment)”, “yarim interval”, “nur” terminlari yagona nom bilan “sonli oraliqlar” deb yuritiladi.

3.22. Haqiqiy sonning moduli

Haqiqiy son a ning ***moduli*** deb, agar $a\ge 0$ bo‘lsa, bu sonning o‘ziga, agar $a<0$ bo‘lsa, unga qarama-qarshi son $-a$ ga aytiladi. a sonning moduli $|a|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|a|=\begin{cases} a, & agar \quad a\ge 0,\\ -a, & agar \quad a<0.\end{cases}$$

Masalan, $|-5|=-(-5)=5$, chunki $-5<0$; $|e-2|=e-2$ chunki, $e\approx 2{,}7...>2$.

Geometrik nuqtai nazardan $|a|$ son koordinata to‘g‘ri chizig‘ida a nuqtadan 0 nuqtagacha bo‘lgan masofani bildiradi (8-rasm).

8-rasm

3.23. Haqiqiy son absolyut qiymatining xossalari

$x \in R$ sonning absolyut qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \geq 0\ bo'lsa, \\ -x, & agar\ x < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

Haqiqiy sonning absolyut qiymatining xossalarini keltiramiz:

1⁰. $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, x \leq |x|, -x \leq |x|$$

munosabatlar o‘rinli. Bu munosabatlar sonning absolyut qiymati ta’rifidan kelib chiqadi.

2⁰. Agar $x \in R$ sonlar

$$|x| < a \quad (a > 0) \qquad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x sonlar

$$-a < x < a \qquad (2)$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha. Boshqacha aytganda (1) va (2) tengsizliklar ekvivalent tengsizliklardir:

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a .$$

3⁰. Agar $x \in R$ sonlar $|x| \leq a\ (a > 0)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x lar $-a \leq x \leq a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha, ya’ni

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a .$$

4⁰. Ikki $x \in R$ va $y \in R$ haqiqiy sonlar yig‘indisining absolyut qiymati bu sonlar absolyut qiymatlarining yig‘indisidan katta emas, ya’ni

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

5⁰. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

tengsizlik o‘rinli.

6⁰. $x \in R$, $y \in R$ sonlar uchun

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

tenglik o‘rinli.

7⁰. $x \in R$, $y \in R$, $y \neq 0$ sonlar uchun

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ \ ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

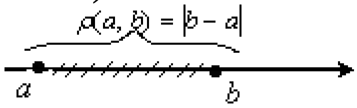
munosabatlark o‘rinli.

3.24. Koordinata to‘g‘ri chizig‘idagi ikki nuqta orasidagi masofa

Agar a va b-koordinata to‘g‘ri chizig‘idagi ikkita nuqta bo‘lsa, u holda ular orasidagi $\rho(a, b)$ masofa

$$\rho(a, b) = |b - a|$$

formula orqali ifodalanadi (9-rasm)



9-rasm

Masalan, $a=-3, b=-7$ bo‘lsa bu nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(-3,-7)=|-7-(-3)|=|-7+3|=4.$$

3.25. To‘plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari. Chegaralangan to‘plam

Ta`rif. Agar shunday M son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $x\in E$ uchun $x\le M$ tengsizlik bajarilsa, E $(E\subset R)$ to‘plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, M son esa E ning ***yuqori chegarasi*** deyiladi.

Bu ta`rifni qisqacha quyidagicha aytsa ham bo‘ladi, agar shunday $M\in R$ va ixtiyoriy $x\in E$ uchun $x\le M$ bo‘lsa, E $(E\subset R)$ to‘plam ***yuqoridan*** chegaralangan deyiladi, M son esa E ning yuqori chegarasi deyiladi.

Ta`rif. Agar

$$\forall M\in R, \exists x_0\in E: x_0>M$$

bo‘lsa, E $(E\subset R)$ to‘plam ***yuqoridan chegaralanmagan*** bo‘ladi

Ta`rif. Agar

$$\exists m\in R, \forall x\in E: x\ge m$$

bo‘lsa, E $(E\subset R)$ to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi, m son esa E $(E\subset R)$ ning ***quyi chegarasi*** deyiladi.

Ta`rif. Agar

$$\forall m\in R, \exists x_0\in E: x_0<m$$

bo‘lsa, E to‘plam quyidan chegaralanmagan deyiladi.

Ta`rif. Agar $E\subset R$ to‘plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, E to‘plam ***chegaralangan*** deyiladi.

Masalan, $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...\right\}$ to‘plam chegaralangan, $N=\{1,2,3,...\}$ to‘plam quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan; $F=\{x: x\in R, x<0\}$ to‘plam esa quyidan chegaralanmagan yuqoridan chegaralangan to‘plam bo‘ladi.

Misol. Ushbu $A=\left\{n: n\in N, \frac{n}{n^2+1}\right\}$ to‘plamning chegaralanganligi ko‘rsatilsin.

Ravshanki, ixtiyoriy $n\in N$ da $\frac{n}{n^2+1}>0$ bo‘ladi. Demak, A to‘plam quyidan chegaralangan.

Agar

$$0\le(n-1)^2=n^2-2n+1\Rightarrow 2n\le n^2+1\Rightarrow\frac{n}{n^2+1}\le\frac{1}{2}$$

bo‘lishini e`tiborga olsak, unda A to‘plamning yuqoridan chegaralanganligini topamiz.

Agar E to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning yuqori chegarasi cheksiz ko‘p bo‘ladi. Bu tasdiq M sondan katta bo‘ladi har qanday haqiqiy son E to‘plamning yuqori chegarasi bo‘la olishidan kelib chiqadi.

Shuningdek, agar E to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lib uning quyi chegarasi ham cheksiz ko‘p bo‘ladi. Bu esa m sondan kichik bo‘lgan har qanday haqiqiy son E to‘plamning quyi chegarasi bo‘la olishidan kelib chiqadi.

Teorema. Har qanday yuqoridan chegaralangan to‘plam uchun uning yuqori chegaralar orasida eng kichigi mavjud.

E $(E \subset R)$ to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsin, ya`ni shunday haqiqiy M son mavjudki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun $x \le M$ tengsiz o‘rinli.

Ta’rif. Yuqoridan chegaralangan E to‘plamning yuqori chegaralarining eng kichigi E ning ***aniq yuqori chegarasi*** deb ataladi va $\sup E$ kabi belgilanadi.

Misol. $E = \{x : x < 0\}$: $\sup E = 0$.

Teorema. Har qanday nuqtadan chegaralangan to‘plam uchun quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.

Ta’rif. Quyidan chegaralangan E to‘plamning quyi chegaralarining eng kattasi E ning aniq quyi chegarasi deb ataladi va $\inf E$ kabi belgilanadi.

Misol. $E = \left\{\dfrac{1+n}{n},\ n = 1, 2, \dots, n, \dots\right\}$, $\inf E = 1$.

4§. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti

4.1. Sonli ketma-ketlik tushunchasi

Faraz qilaylik, f har bir natural son $n \in N$ ga biror haqiqiy $x_n \in R$ sonni mos qo‘yuvchi akslantirish bo‘lsin:

$$f : n \to x_n \quad (x_n = f(n)).$$

Bu akslantirish qiymatlaridan tuzilgan

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ifoda ***haqiqiy sonlar ketma-ketligi*** (qisqacha ***sonlar ketma-ketligi***) deyiladi va $\{x_n\}$ ko‘rinishida belgilanadi.

Misol. $x_n = \dfrac{1}{n}$: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$

4.2. Sonli ketma-ketlikning yuqoridan (quyidan) chegaralanganligi

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas M soni mavjud bo‘lsaki, $\forall n \in N$ uchun $x_n \le M$ $(x_n \ge M)$ bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik ***yuqoridan*** **(*quyidan*)** ***chegaralangan*** deyiladi.

Bu ta’rifni qisqacha

$$\exists M \in R, \quad \forall n \in N : x_n \le M \ \ (x_n \ge M)$$

kabi ifodalash mumkin.

Misol. 0, $-1, -2, -3, ..., -n, ...$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ketma-ketlikning har bir hadi 0 dan katta emas.
$1!, 2!, 3!, ..., n!, ...$ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $\{n!\}$ ketma-ketlikning har bir hadi 1 dan kichik emas.

4.3. O‘suvchi sonli ketma-ketliklar

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ***o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi)*** ketma-ketlik deyiladi.
Misol. 1, 2, 2, 3, 3, 3, …. o‘suvchi; $2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ...$ qat’iy o‘suvchi ketma-ketliklar bo‘ladi.

4.4. Kamayuvchi sonli ketma-ketliklar

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ***kamayuvchi*** **(*qat’iy kamayuvchi*)** ketma-ketlik deyiladi.
Misol. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{2n}, ...$ kamayuvchi.

4.5. Monoton ketma-ketliklar

Ta’rif. O‘suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan ***monoton ketma-ketlilar*** deyiladi.

4.6. Sonli ketma-ketlikning limiti

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$$

sonlar ketma-ketligi hamda biror a son ($a \in R$) berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ***yaqinlashuvchi*** deyiladi, a son esa $\{x_n\}$ ***ketma-ketlikning limiti*** deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

kabi belgilanadi.

Bu ta’rifni qisqacha

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

kabi ifodalash mumkin.

Misol. Ushbu $x_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1, \sqrt[n]{a} > 1) : a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ..., \sqrt[n]{a}, ...$ketma-ketlikning limiti 1ga teng bo‘lishini ko‘rsating.

Ixtiyoriy musbat ε sonni olamiz. Olingan ε songa ko‘ra natural n_0 sonni $n_0 = \left[\frac{\lg a}{\lg(1+\varepsilon)}\right] + 1$ bo‘lsin deb qaraylik. Bu holda $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural n sonlar uchun

$$|x_n - 1| = \left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < a^{\frac{\lg(1+\varepsilon)}{\lg a}} - 1 = \left(a^{\log_a 10}\right)^{\lg(1+\varepsilon)} - 1 = \varepsilon$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning limiti 1 ga teng bo‘lishini ko‘rsatadi.

4.7. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalari

1°. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lib, $a > p$ $(a < q)$ bo‘lsa, u holda ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari ham p sondan katta (q sondan kichik) bo‘ladi.

2°. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u chegaralangan bo‘ladi.

3°. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagonadir.

4.8. Cheksiz kichik miqdor

Ta’rif. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ga cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Misol. $x_n = \frac{1}{n}$ o‘zgaruvchi cheksiz kichik miqdordir, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Cheksiz kichik miqdorlar α_n, β_n kabi belgilanadi.

1-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yig‘indisi cheksiz kichik bo‘ladi.

2-lemma. Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko‘paytmasi cheksiz kichik bo‘ladi.

4.9. Cheksiz katta miqdor

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural n_0 son topilsaki, ixtiyoriy $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > \varepsilon$$

bo‘lsa, $\{x_n\}$ ga cheksiz katta miqdor deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son topilsaki, $\forall\, n > n_0$ uchun $x_n > \varepsilon$ $(x_n < -\varepsilon)$ bo‘lsa, unda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ $(-\infty)$ deb olinadi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu $\left\{(-1)^n \cdot n\right\}: -1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘ladi. Haqiqatan, $\left|(-1)^n \cdot n\right| = n$ bo‘lib, har qanday musbat M son olinganda ham $n \in N$ sonni shunday tanlab olish mumkinki, $\left|(-1)^n \cdot n\right| = n > M$ bo‘ladi.

4.10. Limitga ega bo‘lgan ketma-ketliklar haqida teoremalar (yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar)

Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lib, ular chekli limitga ega bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

U holda:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b} \ (b \neq 0, \ y_n \neq 0)$

bo‘ladi.

4) agar ixtiyoriy $n > N$ uchun $x_n \le y_n$ bo‘lsa, $a \le b$ bo‘ladi.

5) e **soni.** Quyidagi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1,2,3,...)$ ketma-ketlik $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281...$ chekli limitga ega. e soni irratsional son.

4.11. Ketma-ketlik limitining mavjudligi

1. Ixtiyoriy $n > n_0$ uchun $y_n \le x_n \le z_n$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lib, $\forall n \in N$ uchun $x_n \le c$ $(x_n \ge c)$ bo‘lsa, u holda $\lim x_n \le c$ $(\lim x_n \ge c)$ bo‘ladi.

3. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lib, yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega; agar yuqoridan chegaralangan bo‘lmasa uning limiti $+\infty$ bo‘ladi.

4. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo‘lib, quyidan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega: $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo‘lmasa uning limiti $-\infty$ bo‘ladi.

5. <u>Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi:</u> ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lib quyidagilar

1) $\{x_n\}$ o‘suvchi, $\{y_n\}$ kamayuvchi ketma-ketlik,

2) ixtiyoriy $n \in N$ lar uchun $x_n < y_n$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ bajarilgan bo‘lsa, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ o‘rinli bo‘ladi.

6. Monoton va chegaralangan ketma-ketlik limitga ega.

4.12. Qismiy ketma-ketlik

Faraz qilaylik, ixtiyoriy $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan ushbu $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, ...$

($n_1 < ... < n_k < ...,\quad n_k \in N, k = 1,2,...,$) ketma-ketlik berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ***qismiy ketma-ketligi*** deyiladi

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga (chekli yoki cheksiz) ega bo‘lsa, uning har qanday qismiy ketma-ketligi shu limitga ega bo‘ladi.

Eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketligining limiti mavjud bo‘lishidan berilgan ketma-ketlik limiti mavjud bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Ta’rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketligining limiti berilgan ***ketma-ketlikning qismiy limiti*** deyiladi.

Misol. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ ketma-ketlik, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligidir.

Lemma (*Bolsano-Veyershtrass lemmasi*). Agar $\{x_n\}$ chegaralangan bo‘lsa, bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

4.13. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi mezoni

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo‘lsaki, barcha $n > n_0$ va $m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ***fundamental ketma-ketlik*** deyiladi.

Teorema (*Koshi teoremasi, mezoni*). Ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun u fundamental bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4.14. Ketma-ketlikning quyi va yuqori limitlari

Ta`rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kattasi berilgan ***ketma-ketlikning yuqori limiti*** deyiladi va u

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

ko‘rinishida belgilanadi.

Ta`rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kichigi berilgan ***ketma-ketlikning quyi limiti*** deyiladi va u

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

ko‘rinishida belgilanadi.

Teorema. Har qanday ketma-ketlikning quyi va yuqori limiti mavjud.

Teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik c limitga ega bo‘lishi uchun $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = c$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Misol. Ushbu $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...$ketma-ketlikning yuqori limiti $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 3$, quyi limiti esa $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n 1$ bo‘ladi.

4.15. Ayrim ketma-ketlik (funksiya) lar limitlari

1. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$.

$$◀ \frac{1}{|q|^n}=\left(1+\frac{1-|q|}{|q|}\right)^n=1+n\frac{1-|q|}{|q|}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1-|q|}{|q|}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1-|q|}{|q|}\right)^n>n\cdot\frac{1-|q|}{|q|}\Rightarrow$$

$\frac{1}{|q|^n}>n\cdot\frac{1-|q|}{|q|}$, $|q|^n=|q^n|<\frac{|q|}{1-|q|}\cdot\frac{1}{n}<\varepsilon$ bu $\forall\varepsilon>0$ $n>\frac{|q|(1-|q|)^{-1}}{\varepsilon}$ o‘rinli▶

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=+\infty\right]$.

$$◀ \quad \left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0\quad n>1+\frac{2}{\varepsilon}$$

bo‘lganda ▶

2.1*. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ $(a>1)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty\right]$.

$$◀ a>1, a=1+\lambda, \lambda>0.\ \left|\frac{n}{a^n}\right|=\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+\lambda)^n}=\frac{n}{1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\ldots+\lambda^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2}=$$

$=\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\varepsilon$. $n>2$ da $n-1>\frac{n}{2}$ $\quad\frac{2}{(n-1)\lambda^2}<\frac{4}{n\lambda^2}<\varepsilon$ ▶

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1, k>0)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty\right]$.

◀ $a>1, \lambda>0, a=1+\lambda$. Binomdan

$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\ldots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$. $n>2$ da $n-1>\frac{n}{2}$ natijada

$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2$ yoki $\lambda=a-1\Rightarrow a^n>\frac{(a-1)^2}{4}n^2$. $\frac{a^n}{n}>\frac{(a-1)}{4}n$, $n\to\infty$ $\left(\frac{a-1}{4}\right)n\to\infty$

$\frac{a^n}{n}\to\infty\Rightarrow\frac{n}{a^n}\to 0$ bu $k=1$ hol (3) kabi, yoki $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty$ isbot bo‘ldi.

Endi $k>1$ bo‘lsin. $\frac{a^n}{n^k}=\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k>\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}$ $\left[b=a^{\frac{1}{k}}>1\quad\frac{b^n}{b}\to\infty\right]\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=+\infty$ ▶

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. ◀ $a=1$ $\sqrt[n]{1}=1$. 1) $a>1$ bo‘lsin. Unda $\sqrt[n]{a}>1$ bo‘lib

$a=\left[1+(\sqrt[n]{a}-1)\right]^n=$

$=1+n(\sqrt[n]{a}-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{a}-1)^2+\ldots+(\sqrt[n]{a}-1)^n>n(\sqrt[n]{a}-1)\Rightarrow a>n(\sqrt[n]{a}-1)\Rightarrow 0<\sqrt[n]{a}-1<$

$<\frac{a}{n}<\varepsilon$ $\quad n>\frac{a}{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ da $\sqrt[n]{a}\to1$, $n\to\infty$ ▶

2) $0<a<1$, unda $\frac{1}{a}>1$. 1) dan $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to1$ ya’ni, $n\to\infty$.

Bu holda $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}}=1.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

◀ $n=\left[1+(\sqrt[n]{n}-1)\right]^n=1+n(\sqrt[n]{n}-1)+\dfrac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2+...+(\sqrt[n]{n}-1)^n$ bundan $n>\dfrac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2$ bundan $(\sqrt[n]{n}-1)^2<\dfrac{2}{n-1}\Rightarrow\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$ bo‘ladi. $n>1+2\varepsilon^{-2}$ o‘rinli bo‘lsa, $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|\to 0$ ▶

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

◀ $\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}^{n\ ta}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)\cdot ...\cdot n}$. $0<\left|\dfrac{a^n}{n!}\right|=\dfrac{|a|}{1}\cdot\dfrac{|a|}{2}\cdot ...\cdot\dfrac{|a|}{m}\cdot\dfrac{|a|}{m+1}\cdot ...\cdot\dfrac{|a|}{n}<\dfrac{|a|^m}{m!}\left(\dfrac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}<$ $<\varepsilon:\ n\to\infty,\ \dfrac{|a|^{n-m}}{m+1}\to 0$ yetarlicha katta n larda▶

6*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0.$ ◀ $0<\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{\overbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}^{n\ ta}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}\le 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}=\dfrac{9}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $n\to\infty,\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to 0$ ▶

7. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0.$

◀ Agar $|q|<1$ bo‘lsa. $\left|\dfrac{1}{q}\right|=a>1$ $\left|n\cdot q^n\right|=\dfrac{n}{\left|\dfrac{1}{q}\right|^n}=\dfrac{n}{a^n}$ 2* va 3 dagidek isbot bo‘ladi▶

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_b n}{n}=0\quad(b>1).$

◀ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$ 2* dan. Unda $\dfrac{1}{a^n}<\dfrac{n}{a^n}<1$ (yetarli katta n larda) $a>1$ va $\forall\varepsilon>0$ uchun $a=b^\varepsilon$ bo‘lsin ($a=b^\varepsilon>1$). Natijada $\dfrac{1}{a^n}<\dfrac{n}{a^n}<1$ dan $\dfrac{1}{b^{\varepsilon n}}<\dfrac{n}{b^{\varepsilon n}}<1$ ikkala tomonini $b^{\varepsilon n}$ ga ko‘paytiramiz. $1<n<b^{\varepsilon n}$ va buni "b" asosga ko‘ra logarfmlaymiz. $\log_b 1<\log_b n<\log_b b^{\varepsilon n}\Rightarrow 0<\log_b n<\varepsilon n$ yoki n ga bo‘lsak $0<\dfrac{\log_b n}{n}<\varepsilon$ isbot bo‘ldi ▶

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=0.$ ◀ $n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$ ekanligini ko‘rsatamiz▶.

Matematik induksiyada: $n=1$ da $1>\dfrac{1}{3}$ o‘rinli. n da o‘rinli $n!>\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$. $n\sim n+1$ da o‘rinliligini ko‘rsatamiz.

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}(n+1)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{3}\right)^{n}(n+1)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\frac{3}{(n+1)^{n}}n^{n}=$$

$$=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n}.$$

Chunki,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^{2}}+...+\frac{n(n-1)(n-2)....(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^{n}}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n+1}}<1+1+\frac{1}{2}+...+$$

$+\frac{1}{2^{n-1}}+...=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$. Limit mavjudligi quyidagi tengsizlikdan kelib chiqadi.

$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^{n}}}=\frac{3}{n}<\varepsilon$ bu o‘rinli $n>\frac{3}{\varepsilon}$ ▶

10. $x\to 0$ da $x\sin\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+o\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

5§. Funksiya va uning limiti

5.1. Funksiya tushunchasi

X va Y haqiqiy sonlarning biror to‘plamlari bo‘lsin:

Ta’rif. Agar X to‘plamdagi har bir x songa biror qoida yoki qonunga ko‘ra Y to‘plamdan bitta y son mos qo‘yilsa, X to‘plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va $f:x\to y$ yoki $y=f(x)$ ko‘rinishida belgilanadi.

Bunda X– funksiyaning aniqlanish to‘plami (sohasi), Y– funksiyaning o‘zgarish to‘plami (sohasi) deyiladi. Bu yerda x erkli o‘zgaruvchi (funksiya argumenti), y esa ekrsiz o‘zgaruvchi (x o‘zgaruvchining funksiyasi) deyiladi.

Masalan: 1) f- har bir haqiqiy x songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Demak, $f:x\to[x]$ yoki $y=[x]$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish to‘plami $X=R,$ o‘zgarish to‘lami esa $Y=Z$ bo‘ladi.

5.2. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta’rifidagi har bir x ga bitta y ni mos qo‘yadigan qoida yoki qonun turli usullarda berilishi mumkin.

1. Ko‘pincha x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymatini x ustiga qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va h.k. amallar bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul funksiyaning ***analitik*** **usulda berilishi** deyiladi.

Misol. x va y o‘zgaruvchilar ushbu $y=\sqrt{1+x^2}$ formula yordamida berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X=\{x : x\in R\}$ to‘plamdan iborat. Bunda har bir x ga mos keladigan y ning qiymati avvalo x ni kvadratga ko‘tarish, so‘ngra uni 1 ga qo‘shish va bu yig‘indidagi kvadrat ildiz chiqarish kabi amalllarni bajarish natijasida topiladi.

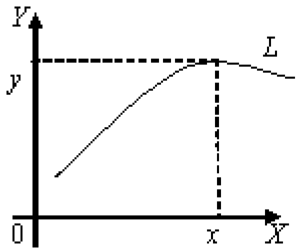
2. Bazi hollarda $x\,(x\in X)$ va $y\,(y\in Y)$ o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish jadval orqali berilgan bo‘lishi mumkin. Masalan ish davomida ishchining ishlab chiqargan maxsulotini kuzatganimizda, t_1 vaqtda T_1 birlik maxsulot tayyorlagan, t_2 vaqtda T_2 birlik maxsulot tayyorlagan va hokazo bo‘lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi:

Vaqt, t	t_1	t_2	t_3	$\ldots$	t_k
Maxsulot birligi, T	T_1	T_2	T_3	$\ldots$	T_k

Bu jadvalda t vaqt bilan maxsulot ishlab chiqarish miqdori T orasidagi funksional bog‘lanishni ifodalaydi, bunda t-argument, T esa funksiya bo‘ladi. Bog‘lanishning bunday berilishi, funksiyaning ***jadval usulda berilishi*** deyiladi.

3. XOY tekisligida shunday L chiziq berilgan bo‘lsinki, OX o‘qida joylashgan nuqtalardan shu o‘qqa o‘tkazilgan perpendikulyar bu L chiziqni faqat bitta nuqtada kesib o‘tsin.

OX o‘qida bunday nuqtalardan iborat to‘plamni X orqali belgilaylik. X to‘plamdan ixtiyoriy x ni olib, bu nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarning L chiziq bilan kesishgan nuqtasining ordinatasini y bilan belgilaymiz va olingan x ga bu y ni mos qo‘yamiz (10-rasm). Natijada X to‘plamdan olingan har bir x ga yuqorida ko‘rsatilgan qoidaga ko‘ra bitta y mos qo‘yilib, funksiya hosil bo‘ladi. Bunda x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish L chiziq yordamida berilgan bo‘ladi. Odatda f ning bunday berilishi uning ***grafik usulda berilishi*** deyiladi.



10-rasm

Funksiyalar so‘zlar orqali ham berilishi mumkin.

5.3. Funksiyaning xususiy qiymati

Biror X to‘plamda $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. $x_0\in X$ ga mos keluvchi y_0 miqdor $y=f(x)$ funksiyaning $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va $f(x_0)=y_0$ kabi belgilanadi.

5.4. Funksiyaning grafigi

Tekislikning $(x,\ f(x))$ nuqtalardan iborat, ushbu

$$(x,\ f(x))=\{(x,\ f(x)) : x\in X,\ f(x)\in Y\}$$

to‘plam $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

5.5. Juft va toq funksiya

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya ***juft funksiya***, $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya ***toq funksiya*** deyiladi.

Misol. $y = x^2, y = |x|$, $x \in R$ funksiyalar uchun $(-x)^2 = x^2, |-x| = x$ bo'lgani sababli ular juft funksiyalardir. $y = tgx, y = x^3$, $x \in R$ funksiyalar uchun $tg(-x) = -tgx,\ (-x)^3 = -x^3$ bo'lganligi sababli ular toq funksiyalardir.

Juft funksiya grafigi Oy ga nisbatan simmetrik, toq funksiya esa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

5.6. Davriy funksiya va funksiyaning davri

Ta'rif. Agar shunday o'zgarmas T $(T \neq 0)$ son mavjud bo'lib, $\forall x \in X$ uchun

$$x + T \in X, \quad x - T \in X,$$
$$f(x+T) = f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi va bu shartlarni qanoatlantiruvchi musbat T larning eng kichigi (agar u mavjud bo'lsa) funksiyaning davri deyiladi.

5.7. Eng kichik musbat davr

Agar $T \neq 0$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(x+T) = f(x)$ munosabat o'rinli bo'lsa, bu munosabat ixtiyoriy kT $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$ uchun ham o'rinli bo'ladi.

Demak, $\pm T, \pm 2T, ...$ lar ham $f(x)$ funksiyaning davrlari bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning musbat davrlar to'plamini M deb belgilaylik. Agar $T_0 = \inf M$ ham $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, ya'ni $T_0 \in M$ bo'lsa, u ***eng kichik musbat davr*** (asosiy davr) deyiladi. Eng kichik musbat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

5.8. Davriy funksiyaning xossalari

1°. Agar X to'plamda berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri davriy funksiyalar bo'lib, $T \neq 0$ ularning davri bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ va $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'ladi va T ularning ham davri bo'ladi.

2°. X to'plamda berilgan $f(x)$ funksiya davriy funksiya, $T \neq 0$ uning davri bo'lsin. g esa $f(x)$ ning qiymatlari to'plami $\{f(x) : x \in X\}$ da berilgan ixtiyoriy funksiya bo'lsin. U holda $g(f(x))$ murakkab funksiya ham davriy funksiya bo'ladi va uning davri T bo'ladi.

Misol. $f(x) = \log_2 \cos x$. Bu funksiya argumenti $\cos x$ funksiya eng kichik musbat davri 2π bo'lganidan $f(x)$ funksiya eng kichik musbat davri ham 2π bo'ladi.

3°. $f(x)$ davriy funksiya, $T \neq 0$ soni uning davri bo'lsin. Agar x_0 $x_0 \in X$ bo'lsa, u holda barcha $x_0 + kT$ ko'rinishidagi $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ nuqtalar ham shu sohaga tegishli bo'ladi: $x_0 + kT \in X$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning berilish sohasiga tegishli bo‘lmasa ($x \overline{\in} X$), u holda barcha $x_0 + kT$ ko‘rinishidagi $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ nuqtalar ham shu sohaga tegishli bo‘lmaydi ($x_0 + kT \overline{\in} X$).

4°. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo‘lsa, bu funksiya o‘zining har bir qiymatini x argumentning cheksiz ko‘p qiymatlarida qabul qilinadi.

Natija. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo‘lsa, berilish sohasida monoton funksiya bo‘lmaydi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $a \in R$ uchun $f(x) = a$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydi yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Misol. $f(x) = x^2 - 1$ davriymas, chunki $x^2 - 1 = 0 \quad (a = 0)$ ikkita yechimga ega.

5°. $f(x)$ davriy funksiya bo‘lsin. Agarda

$$f(x+T) = f(x)$$

T ga nisbatan tenglama sifatida qaralsa (x ni esa parametr deyilsa), u holda $f(x+T) = f(x)$ tenglama x parametrning barcha qiymatlari uchun umumiy bo‘lgan noldan farqli kamida bitta $T = T_1$ yechimga ega bo‘ladi.

Bu xossaga ko‘ra $f(x)$ funksiyaning davriymasligini ko‘rsatish uchun x ning ikkita $x = x_0$, $x = x_1$ qiymatlarida T ga nisbatan ushbu $f(x_0 + T) = f(x_0)$, $f(x_1 + T) = f(x_1)$ tenglamalarning noldan farqli umumiy yechimga ega emasligini ko‘rsatish yetarli.

6°. $f(x)$ davriy funksiya bo‘lib, $T \neq 0$ uning davri bo‘lsin. Agar uzunligi T ga teng bo‘lgan biror $[\alpha, \alpha + T]$ oraliqda $|f(x)| \leq M \; (x \in [\alpha, \alpha + T])$ bo‘lsa, argument x ning ixtiyoriy qiymatida ham shu tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

5.9. To‘plamda o‘suvchi funksiya

$f(x)$ funksiya X to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar argument x ning X to‘plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo‘lishidan $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi)*** deyiladi.

Misol. $f(x) = \sqrt{x^3}$ funksiya $X = \{x : x \geq 0\}$ da qat’iy o‘suvchi. Darhaqiqat, ixtiyoriy $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ nuqtalar olib, $x_1 < x_2$ bo‘lsin deb qaraylik. U holda

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2^3} - \sqrt{x_1^3} > 0,$$

chunki katta sondan katta ildiz chiqadi.

Demak, $x_1 < x_2$ tengsizlik bajarilganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik ham bajariladi.

5.10. To‘plamda kamayuvchi funksiya

$f(x)$ funksiya X to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar x argumentning X to‘plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo‘lishidan $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***kamayuvchi (qat’iy kamayuvchi)*** deyiladi.

5.11. Monoton fuksiya

O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

5.12. Teskari funksiya

$y=f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, Y esa funksiya qiymatlaridan iborat to‘plam bo‘lsin: $Y=\{f(x): x\in X\}$. Shu bilan birga Y to‘plamdan olingan har bir y ga X to‘plamdan faqat bitta x mos kelsin. Bu holda Y to‘plamdan olingan har bir y ga X to‘plamdan faqat bitta x mos qo‘yilishini ifodalaydigan funksiyaga keladi. Bu funksiya $y=f(x)$ ga nisbatan ***teskari funksiya*** deyiladi va u $x=f^{-1}(y)$ ko‘rinishida belgilanadi.

5.13. Murakkab funksiya

$y=f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo‘lib, $Y_f=\{f(x): x\in X\}$ esa funksiya qiymatlaridan iborat to‘plam bo‘lsin. So‘ngra Y_f to‘plamda o‘z navbatida biror $z=\varphi(y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Natijada X to‘plamdan olingan har bir x ga Y_f to‘plamdan bitta y ($f: x\to y$) son va Y_f to‘plamdan olingan bunday y songa bitta z ($\varphi: y\to z$) son mos qo‘yiladi: $x\xrightarrow{f} y\xrightarrow{\varphi} z$. Demak, X to‘plamdan olingan har bir x ga bitta z son mos qo‘yiladi.

Odatda, bunday holda f va φ funksiyalarning ***murakkab funksiyasi*** beriladi va u $z=\varphi(f(x))$ kabi belgilanadi.

Misol. $z=\ln\sin x$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $z=\ln y,\ y=\sin x$ funksiya yordamida hosil bo‘lgan funksiya. $y=\sin x$ funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ aniqlangan bo‘lib, $z=\ln y$ funksiya esa $y>0$, ya’ni $\sin x>0$ da mavjud. Demak, $z=\ln\sin x$ murakkab funksiya $X=\{x: x\in(2k\pi;(2k+1)\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,...\}$ to‘plamda aniqlangan.

5.14. Elementar funksiyalar

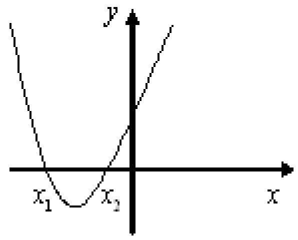
1. Butun ratsional funksiyalar

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$$

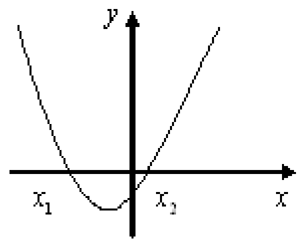
ko‘rinishidagi funksiya (bunda $n\in N$ va $a_0,a_1,....,a_{n-1},a_n$-o‘zgarmas sonlar) ***butun ratsional funksiya*** deyiladi. Butun ratsional funksiya ko‘phad deb ham yuritiladi. Bu funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan.

Misol. $y=ax+b$ chiziqli funksiya va $y=ax^2+bx+c$ kvadrat uchhadlar butun ratsional funsiyalardir. Ma’lumki, chiziqli funksiyaning grafigi tekislikda to‘g‘ri chiziqni, kvadrat uchhadning grafigi esa ***parabolani*** ifodalaydi. Kvadrat uchhad grafigining holati a koeffisient hamda diskriminant $D=b^2-4ac$ ning ishoralariga bog‘liq bo‘ladi.

1) $a>0, D>0, x_1<0, x_2<0$ 2) $a>0, D>0, x_1<0, x_2>0$



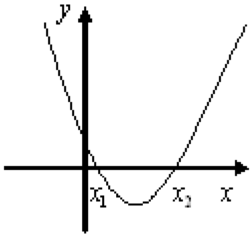
Grafigi I,II,III choraklarda.



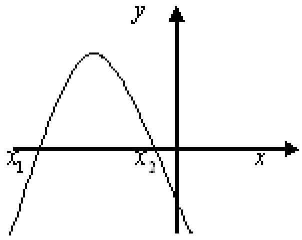
Grafigi I,II,III,IV choraklarda.

3) $a > 0, D > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

4) $a < 0, D > 0, x_1 < 0, x_2 < 0$.



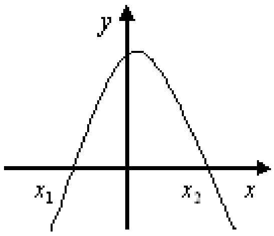
Grafigi I,II,IV choraklarda.



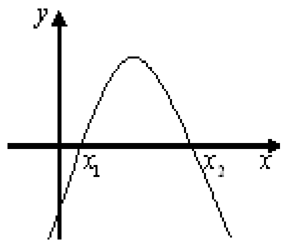
Grafigi II,III,IV choraklarda.

5) $a < 0, D > 0, x_1 < 0, x_2 > 0$.

6) $a < 0, D > 0, x_1 > 0, x_2 > 0$



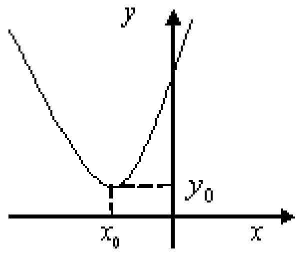
Grafigi I,II,III,IV choraklarda.



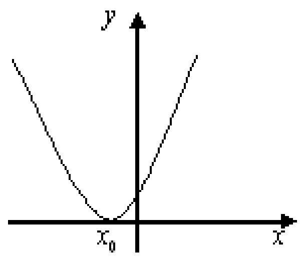
Grafigi I,III,IV choraklarda.

7) $a > 0, D < 0,\ x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} > 0$.

8) $a > 0, D = 0, y = 0$.



Grafigi I,II choraklarda.



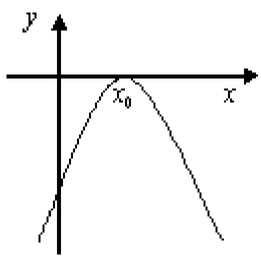
Grafigi I,II choraklarda.

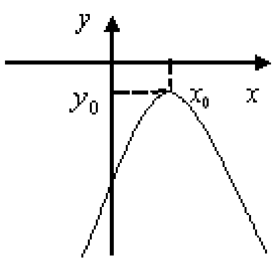
9) $a < 0, D = 0, y = 0$.

10) $a < 0, D < 0,\ x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} < 0$.

Grafigi III,IV choraklarda.

Grafigi III,IV choraklarda.



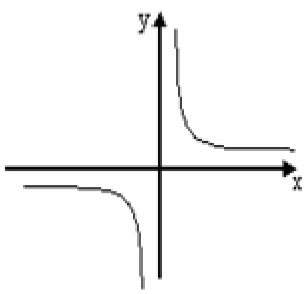


2. Kasr ratsional funksiyalar

Ikki butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+a_m}$$

funksiya kasr ***ratsional funksiya*** deyiladi. Kasr ratsional funksiya $x=R\setminus\{x:x\in R,\, b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+a_m=0\}$ to‘plamda,



11-rasm

ya’ni maxrajni nolga aylantiruvchi nuqtalardan farqli barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plamda aniqlangan.

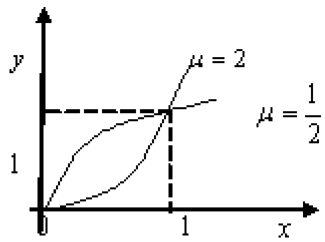
Misol. $y=\frac{1}{x}$ va $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ lar kasr ratsional funksiyalar bo‘ladi.

Ma’lumki, $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi teng yonli giperboloiddan iborat (11-rasm).

3. Darajali funksiya

Ushbu $y=x^{\mu}$ ko‘rinishidagi funksiyaga darajali funksiya deyiladi. Bunda μ ixtiyoriy o‘zgarmas haqiqiy musbat son. Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi μ ga bog‘liq. μ butun son bo‘lganda ratsional funksiyaga ega bo‘lamiz.

Agar μ ratsional, masalan $\mu=\frac{1}{m}>0$ bo‘lsa, m juft bo‘lganda $x^{\mu}=x^{\frac{1}{m}}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $X=[0,+\infty)$, toq bo‘lganda esa funksiyaning aniqlanish sohasi $R=(-\infty,+\infty)$ oraliqdan iborat bo‘ladi. μ irratsional son bo‘lganda $x>0$ deb olinadi.

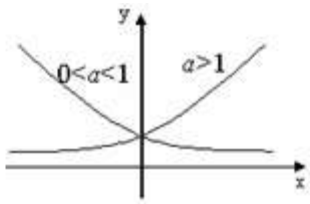


12-rasm

Darajali funksiyaning grafigi har doim tekislikning $(0,0)$ hamda $(1,1)$ nuqtalaridan o‘tadi (12-rasm).

4. Ko‘rsatkichli funksiya

$y=a^x$ ko‘rinishidagi funksiya ***ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi, bunda $a>0$ va $a\neq 1$. Ko‘rsatkichli funksiyaning aniqalnish sohasi R to‘lamdan iborat bo‘lib, funksiya qiymatlari esa har doim musbat bo‘ladi. Bu

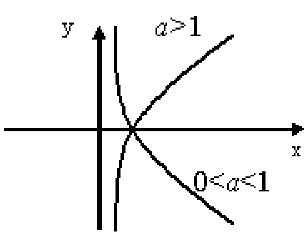


13-rasm

funksiyaning grafigi OX o‘qidan yuqorida joylashgan va doim tekislikning $(0,1)$ nuqtasidan o‘tadi (13-rasm).

5. Logarfmik funksiya

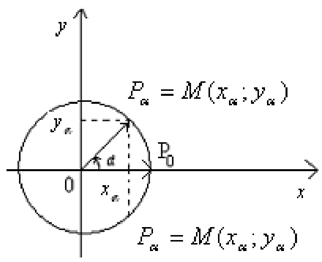
$y=\log_a x$ ko‘rinishidagi funksiyaga ***logarfmik funksiya*** deyiladi, bunda $a>0$ va $a\neq 1$. Logarfmik funksiya $X=(0,+\infty)$ intervalda aniqlangan. Bu funksiyaning grafigi OY o‘qini o‘ng tomonida joylashgan va doim tekislikning (1, 0) nuqtasidan o‘tadi (14-rasm).



14-rasm

6. Trigonomertik funksiyalar

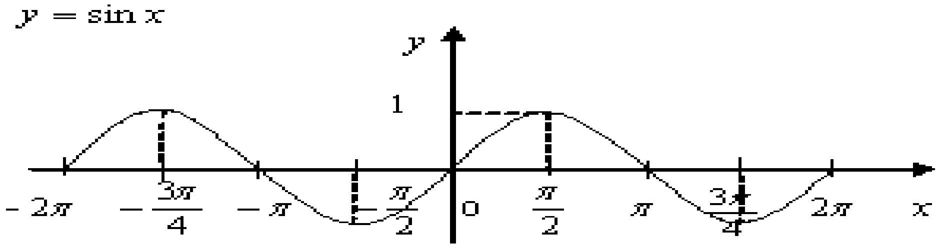
Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, radiusi 1 ga teng aylana berilgan bo‘lsin (trigonometrik aylana). Koordinata boshi atrofida OP_0 $(|OP|=1)$ vektorni soat strelkasi harakatiga teskari yo‘nalishda biror burchakka burish $P_0 = M(1;0)$ nuqtani $P_\alpha = M(x_\alpha; y_\alpha)$ nuqtaga o‘tkazsin. Bu musbat yo‘nalishli burilish hisoblanadi. Soat strelkasi harakati bo‘ylab α burchakka burish manfiy burchakka burish hisoblanadi. Bu holda α o‘zgarishi bilan P_α nuqtaning koordinatalari x_α va y_α lar ham turlicha o‘zgaradi (15-rasm).



15-rasm

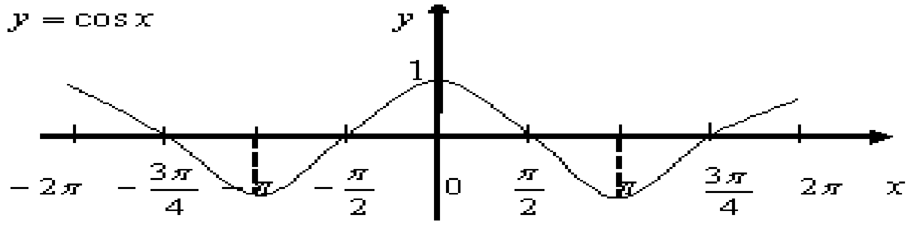
$OP_0 = (1;0)$ vektorni α burchakka burish bilan hosil qilingan $OP_\alpha = (x_\alpha; y_\alpha)$ vektorning absissasi α burchakning kosinusi, ordinatasi esa uning sinusi deb aytiladi va mos ravishda $x_\alpha = \cos\alpha$, $y_\alpha = \sin\alpha$ deb belgilanadi ($tg = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $ctg = \dfrac{\cos x}{\sin x}$).

1. $y = \sin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat: $D(y) = R$. Qiymatlar sohasi esa $[-1, 1]$ kesmadan iborat: $E(y) = [-1, 1]$. Ushbu funksiya $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $(n \in Z)$ oraliqda o‘suvchi; $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $(n \in Z)$ oraliqda kamayuvchidir (16-rasm).



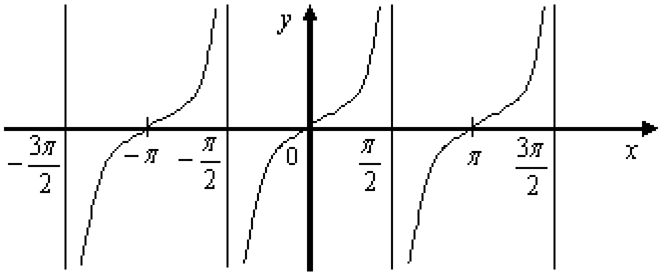
16-rasm

2. $y = \cos x$ funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat: $D(y) = R$. Qiymatlar sohasi esa $[-1, 1]$ kesmadan iborat: $E(y) = [-1, 1]$. Ushbu funksiya $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $(n \in Z)$ oraliqda kamayuvchi, $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $(n \in Z)$ oraliqda o‘suvchidir (17-rasm).



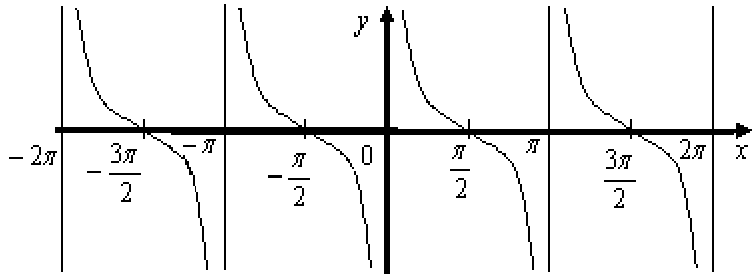
17-rasm

3. $y = tgx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(x) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $(n \in Z)$; qiymatlar sohasi esa $E(y) = R$. $y = tgx$ funksiya har bir $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $(n \in Z)$ oraliqda o‘suvchi (18-rasm).



18-rasm

4. $y = ctgx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $(n \in Z)$; qiymatlar sohasi esa $E(y) = R$. $y = ctgx$ funksiya har bir $(\pi n; \pi + \pi n)$, $(n \in Z)$ oraliqda kamayuvchi (19-rasm).



19-rasm

7. Giperbolik funksiyalar

Ushbu $y = e^x$ ko‘rsatkichli funksiya yordamida tuzilgan quyidagi

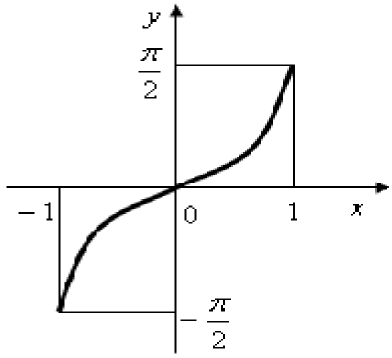
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ chx = \frac{e^{-x} + e^x}{2},\ thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

funksiyalar ***giperbolik*** (mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik kotangens) ***funksiyalar*** deyiladi.

shx, chx, thx funksiyalar R da, $cthx$ funksiya esa $X = R \setminus \{0\}$ to‘plamda aniqlangan. Quyidagilar o‘rinli $thx = \frac{shx}{chx}$, $cthx = \frac{chx}{shx}$, $sh2x = 2shx \cdot chx$, $ch^2x - sh^2x = 1$, $sh^2x + ch^2x = ch2x$.

8. Teskari trigonometrik funksiyalar

$y = \arcsin x$ funksiya



20-rasm

1) $D(y) = [-1, 1]$;

2) $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ tenglik bajarilgani uchun bu funksiya toqdir;

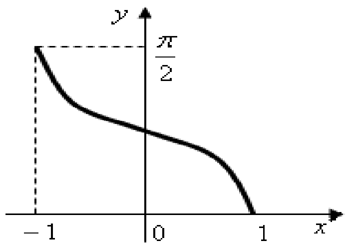
4) $(0;1]$ oraliqda musbat, $[-1;0)$ oraliqda manfiy qiymatlidir;

5) $[-1;1]$ kesmada o‘suvchi bo‘lib, bu oraliqning chap oxirida o‘zining eng kichik $-\frac{\pi}{2}$ qiymatiga, o‘ng oxirida eng katta $\frac{\pi}{2}$ qiymatiga erishadi.

Bu funksiyaning grafigi $y = \sin x$ funksiyanig $\left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to‘g‘ri chizig‘iga nisbatan simmetrik yasash bilan hosil qilinadi (20-rasm).

$y = \arccos x$ **funksiya**

1) $D(y) = [-1, 1]$;
2) $E(y) = [0; \pi]$;
3) Funksiya toq ham, juft ham emas;
4) $[-1; 1]$ oraliqda musbat qiymatlidir;
5) $[-1; 1]$ kesmada kamayuvchi bo‘lib, bu oraliqning chap oxirida o‘zining eng katta π qiymatiga, o‘ng oxirida eng kichik 0 qiymatiga erishadi.



21-rasm

Bu funksiyaning grafigi $y = \cos x$ funksiyanig $[0; \pi]$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to‘g‘ri chizig‘iga nisbatan simmetrik yasash bilan hosil qilinadi (21-rasm).

$y = arctgx$ **funksiya**

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
3) $arctg(-x) = -arctgx$ tenglik bajarilgani uchun bu funksiya toqdir;
4) R_+ oraliqda musbat, R_- oraliqda manfiy qiymatlidir;
5) R haqiqiy sonlar to‘plamida o‘suvchi.

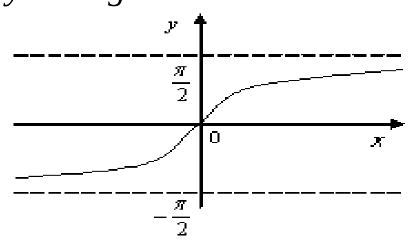
Bu funksiyaning grafigi $y = tgx$ funksiyanig $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to‘g‘ri chizig‘iga nisbatan simmetrik yasash bilan hosil qilinadi (22-rasm).

$y = arcctgx$ **funksiya**

1) $D(x) = R$;
2) $E(y) = (0; \pi)$;
3) Funksiya toq ham, juft ham emas;
4) R to‘plamning har bir nuqtasida musbat qiymatlidir;
5) R to‘plamda kamayuvchi.

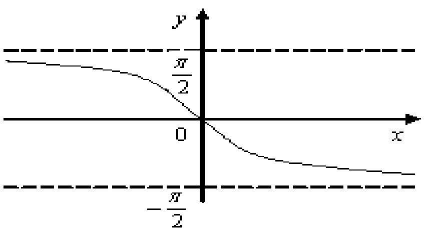
Bu funksiyaning grafigi $y = ctgx$ funksiyanig $(0; \pi)$ oraliqdagi grafigini $y = x$ to‘g‘ri chizig‘iga nisbatan simmetrik yasash bilan hosil qilinadi (23-rasm).

$y = arctgx$



22-rasm

$y = arcctgx$



23-rasm

5.15. Funksiyaning yuqoridan (quyidan) chegaralanganligi

$y = f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas M (o‘zgarmas m) son topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$f(x) \le M \quad (f(x) \ge m)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, ya’ni shunday o‘zgarmas M va m sonlar topilsaki, ixtiyoriy $x \in X$ uchun

$$m \le f(x) \le M$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***chegaralangan*** deyiladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy M (ixtiyoriy m) son olinganda ham, shunday $x_0 \in X$ ($x_0' \in X$) son topilsaki,

$$f(x_0) > M \quad (f(x_0') < m)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deyiladi.

5.16. To‘plamning limit nuqtasi

Ta’rif. Agar a nuqtaning har bir atrofida X to‘plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, a nuqta X ***to‘plamning limit nuqtasi*** deyiladi.

Ta’rif. Agar a nuqtaning har bir o‘ng (chap) atrofida X to‘plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, a nuqta X ning ***o‘ng (chap) limit nuqtasi*** deyiladi (a cheksiz ham bo‘lishi mumkin).

5.17. To‘plam limit nuqtasining xossalari

1°. X to‘plamning limit nuqtasi shu to‘plamga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

2°. Agar a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, a nuqtaning har bir atrofida X to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalari bo‘ladi.

3°. Agar a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, X to‘plam nuqtalaridan a ga intiluvchi $\{x_n\}$, ($x_n \in X, x_n \ne a, n = 1, 2, 3, ...$) ketma-ketlik tuzish mumkin.

5.18. Funksiyaning limiti

$X = \{x\}$ haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo‘lsin. Bu to‘plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan.

Ta’rif (Geyne ta’rifi). Agar X to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ($x_n \ne 0, n = 1,2,...$) ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning a ***nuqtadagi (yoki*** $x \to a$ ***dagi) limiti*** deyiladi va u $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ yoki $x \to a$ da $f(x) \to b$ ko‘rinishida belgilanadi.

Ta’rif (Koshi ta’rifi). Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a ***nuqtadagi*** ($x\to a$ dagi) ***limiti*** deyiladi.

5.19. Funksiyaning o‘ng (chap) limiti

Ta’rif (Geyne ta’rifi). Agar X to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo‘lib a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ***o‘ng (chap) limiti*** deyiladi va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ yoki $f(a+0)=b$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ yoki $f(a-0)=b$).

Ta’rif (Koshi ta’rifi). Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, argument x ning $a<x<a+\delta$ ($a-\delta<x<a$) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ***o‘ng (chap) limiti*** deyiladi.

Chap va o‘ng limitlar ***bir tomonli limitlar*** deyiladi

Funksiyaning o‘ng (chap) limitlari quyidagi ko‘rinishda belgilanadi:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b \text{ yoki } f(a+0)=b,$$

$$(\lim_{x\to a-0} f(x)=b \text{ yoki } f(a-0)=b).$$

Misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1, & agar\ \ x<1\\ x+1, & agar\ \ x>1\end{cases}$$

funksiyaning $x=1$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlarini toping.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(-2x+1)=-1.$$

Teorema (*limitga ega bo‘lish haqida*). $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(a+0)=f(a-0)=b$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

5.20. Chekli limitga ega bo‘lgan funksiyaning xossalari

X to‘plam berilgan bo‘lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo‘lsin. Bu to‘plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

1°. Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo‘lib, $b>p$ ($b<q$) bo‘lsa, a nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x ($x\neq a$) ning qiymatlarida $f(x)>p$ ($f(x)<q$) bo‘ladi.

2°. Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo‘lsa, a nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x ($x\neq a$) ning qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

3°. Agar argument x ning a nuqtaning biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida $f_1(x) \le f_2(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \le \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

4°. Agar argument x ning a nuqtaning biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa va $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ bo‘ladi.

5.21. Chekli limitga ega bo‘lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar

X to‘plam berilgan bo‘lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo‘lsin. Bu to‘plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan.

1°. Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo‘lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o‘rinli.

2°. Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo‘lsa, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o‘rinli.

Natija. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo‘lsa, unda $k \cdot f(x)$ ($k = const$) funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

tenglik o‘rinli.

3°. Agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$ bo‘lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \ne 0$) funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

tenglik o‘rinli.

Teorema. Agar 1) $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = c$ limit o‘rinli bo‘lsa, a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjud bo‘lib, barcha $x \in U_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x) \ne c$ bo‘lsa, 2) c nuqta T to‘plamning limit nuqtasi bo‘lib, $\lim\limits_{t\to c} f(t) = b$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $x \to a$ da murakkab funksiya $y = f(\varphi(x))$ ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = b$$

bo‘ladi.

Teorema. $f(x)$ funksiya X to‘plamda o‘suvchi bo‘lib, u yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, funksiya a nuqtada chekli limitga ega, yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, uning limiti $+\infty$ bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamda kamayuvchi bo‘lib, u quyidan chegaralangan bo‘lsa, funksiya a nuqtada chekli limitga ega, quyidan chegaralanmagan bo‘lsa, uning limiti $-\infty$ bo‘ladi.

Ta’rif (*Koshi sharti (kriteriysi)*). Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki argument x ning $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x' va x'' qiymatlarida

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya uchun a ***nuqtada Koshi sharti*** bajarilgan deyiladi.

Teorema (*Koshi teoremasi*). $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo‘lishi uchun bu funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilishi zarur va yetarli.

5.22. Murakkab funksiyaning limiti

Biror X to‘plamda $t=\varphi(x)$ funksiya aniqlangan va bu funksiyaning qiymatlaridan iborat T to‘plamda $y=f(t)$ funksiya aniqlangan bo‘lib, ular yordamida murakkab funksiya $y=f(\varphi(x))$ hosil qilingan bo‘lsin. Bu murakkab funksiya X to‘plamda aniqlangan. Shu bilan birga a son X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

Teorema. Agar 1) $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ limit o‘rinli bo‘lib, a nuqtaning shunday $U_\delta(a)$ atrofi mavjud bo‘lsaki, barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun $\varphi(x)\neq c$ bo‘lsa, 2) c nuqta T to‘plamning limit nuqtasi bo‘lib, $\lim\limits_{t\to c}f(t)=b$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $x\to a$ da murakkab funksiya $y=f(\varphi(x))$ ham limitga ega va $\lim\limits_{x\to a}f(\varphi(x))=b$ bo‘ladi.

5.23. Cheksiz katta va kichik funksyalar

Biror X to‘plam berilgan bo‘lib, a uning limit nuqtasi bo‘lsin. Bu to‘plamda $\alpha(x)$, $\beta(x)$ funksiyalar aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $x\to a$ da $\alpha(x)$ funksiyaning limiti nolga teng bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da ***cheksiz kichik funksiya*** deyiladi.

Misol $f(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Ta’rif. Agar $x\to a$ da $\beta(x)$ funksiyaning limiti ∞ bo‘lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ da ***cheksiz katta funksiya*** deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da chekli b limitga ega bo‘lsa ($\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$), u holda $\alpha(x)=f(x)-b$ funksiya $x\to a$ da ***cheksiz kichik funksiya*** bo‘ladi.

Misol. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

5.24. Cheksiz katta (kichik) funksyalarning xossalari

1°. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar yig‘indisi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

2°. Chegaralangan funksiyaning cheksiz kichik funksiya bilan ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

3°. Agar $\alpha(x)$ $(\alpha(x)\neq 0)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lsa, $\frac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

4°. Agar $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo‘lsa, $\frac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

5.25. Funksiyalarni taqqoslash

$X\subset R$ to‘plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo‘lsin. Biror a nuqtaning $U_\delta(a)$ $(U_\delta(a)\subset X)$ atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagicha taqqoslanadi.

Ta’rif (O-belgi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun shunday $\delta>0$ va $C>0$ sonlar topilsaki, barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun

$$|f(x)|\leq C|g(x)|$$

bo‘lsa, u holda $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan ***chegaralangan*** deyiladi va $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Agar $f(x)=O(g(x))$ va $g(x)=O(f(x))$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ da ***bir xil tartibli funksiyalar*** deyiladi.

Ta’rif (ekvivalentlik, ~). Agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

bo‘lsa, $x\to a$ da $g(x)$ va $f(x)$ lar ***ekvivalent funksiyalar*** deyiladi va $f(x)\sim g(x)$ kabi belgilanadi.

Ta’rif (o-belgi). Agar $g(x)$ va $f(x)$ funksiyalar uchun

$$f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$$

bo‘lib, bunda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ bo‘lsa, u holda $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya*** deyiladi va $f(x)=o(g(x))$ kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu $|x|^3=o(x^2)$ munosabat $x\to 0$ da o‘rinli. $|x|^3=|x|\cdot x^2$ tenglikdan va $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ ekanligidan $|x|^3=o(x^2)$ o‘rinli.

5.26. Limitlarni hisoblashda kerak bo‘ladigan ajoyib va muhim limitlar

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha}\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$ 4′. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

5′. Agar $P(x)=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^m$, m-butun son, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+P(x)}-1}{x}=\frac{a_1}{m}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\right).$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=1 \quad (\varepsilon>0)$.

5.27. Funksiyaning uzluksizligi

$X\subset R$ to‘plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lib, x_0 ($x_0\in X$) to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya limiti mavjud va $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(a)$ bo‘lsa, $f(x)$ ***funksiya*** a ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Ta’rif (*Koshi ta’rifi*). Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, funksiya argumenti $x\in X$ ning $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta’rif *(Geyni ta’rifi).* Agar X to‘plamning elementlardan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona $f(a)$ ga intilsa, berilga funksiya a ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Agar

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, ushbu

$$\lim_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

munosabat ham o‘rinli bo‘ladi. Odatda $x-x_0$ ayirma ***argument orttirmasi***, $f(x)-f(x_0)$ esa ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi orttirmasi*** deyiladi.

Ular mos ravishda Δx va Δy ($\Delta f(x_0)$) kabi belgilanadi:

$$\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0).$$

Demak, $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Natijada $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ munosabat

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$$

ko‘rinishiga ega bo‘ladi.

5.28. Uzluksiz funksiyaning xossalari

Funksiyalar uzluksizligi nuqtada va oraliqda qaraladi.

1°. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda a nuqtaning yetali kichik atrofida funksiya chegaralangan bo‘ladi.

2°. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a)\neq 0$ bo‘lsa, u holda a ning yetarli kichik atrofidan olingan barcha x nuqtalarida funksiya qiymatlarining ishorasi $f(a)$ ning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi (agar har xil ishora bo‘lsa $f(a)=0$ bo‘ladi).

3°. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun a nuqtaning shunday kichik atrofi topiladiki, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x', x'' nuqtalar uchun

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi.

Teorema *(Bolsano-Koshining birinchi teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi: $f(c)=0$.

Teorema *(Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uning chetki nuqtalarida $f(a)=A,\ f(b)=B$ qiymatlarga ega va $A\neq B$ bo‘lsa, A va B orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki,

$$f(c)=C$$

bo‘ladi.

Teorema *(Veyrshtrassning birinchi teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u shu segmentda chegaralangan bo‘ladi.

Teorema *(Veyrshtrassning ikkinchi teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu segmentda o‘zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaraslariga erishadi.

5.29. Tekari funksiyaning mavjudligi

Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan, uzluksiz va qt’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lsa, bu funksiya qiymatlaridan iborat $Y=\{f(x):x\in X\}$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo‘lib, u uzluksiz va qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘ladi.

5.30. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi

Biror $y=f(x)$ funksiya X to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, X to'plamning $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' ($x', x'' \in X$) nuqtalarida

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda ***tekis uzluksiz*** deyiladi.

Ta'rif. Shunday musbat ε soni mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\delta > 0$ son olinganda ham $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x', x'' \in X$ nuqtalar topilsaki

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda ***tekis uzluksiz emas*** deyiladi.

Teorema *(Kantor teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

5.31. Funksiyaning bir tomonli uzluksizligi

$X \subset R$ da $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif. Agar $x \to a+0$ ($x \to a-0$) da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)\right)$ bo'lsa, $f(x)$ a ***nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada ham o'ngdan ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu ***nuqtada uzluksiz*** bo'ladi.

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya X ***to'plamda uzluksiz*** deyiladi.

5.32. Funksiyaning uzilishi. Uzilish turlari. Funksiya sakrashi

$f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, $a \in X$ nuqta X ***to'plamning limit nuqtasi*** bo'lsin.

Ta'rif. Agar $x \to a$ bo'lganda $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a) \text{ yoki } \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$(-\infty, +\infty)$ bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, unda $f(x)$ funksiya $x = a$ ***nuqtada uzilishga ega*** deyiladi.

Uzilish turlari: I, II- tur va “Bartaraf qilinishi mumkin bo'lgan” uzilishlar .

1. <u>I-tur uzilish</u>: agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng ($f(a+0)$) va chap ($f(a-0)$) limitlari mavjud va chekli bo'lib,

$$f(a-0) \neq f(a+0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = a$ da ***I-tur uzilishga ega*** deyiladi.

Misol. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ funksiya $x = 0$ nuqtada I-tur uzilishga ega.

Haqiqatdan,

$f(\mathrm{O}+0)=f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=+1$ va $f(\mathrm{O}-0)=f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-1$

$f(+0)\neq f(-0)$.

2. <u>Bartaraf qilish mumkin bo‘lgan uzilish</u>: $f(x)$ funksiyaning o‘ng va chap limitlari mavjud chekli bo‘lib,

$$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada ***bartaraf qilish mumkin bo‘lgan uzilishga ega*** deyiladi.

3. <u>II-tur uzilish:</u> $x\to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi. Agar chap yoki o‘ng tomonli limitlar $+\infty,-\infty$ bo‘lgan hollar ham shu II-turga kiritiladi.

5.33. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

$f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton funksiya bo‘lsa, u shu oraliqning istalgan nuqtasida yo uzluksiz bo‘ladi, yoki faqat birinchi tur uzilishga ega bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo‘lib, uning qiymatlar to‘plami $Y_f=\{f(x):x\in X\}$ biror oraliqdan iborat bo‘lsa, u holda bu funksiya X da uzluksiz bo‘ladi.

5.34. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X oraliqda berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ularning yig‘indisi ham a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi ham uzluksiz bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ularning $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$) nisbat ham a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

5.35. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

$y=f(x)$ funksiya X to‘plamda, $z=\varphi(y)$ esa Y to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya esa a nuqtadaga mos kelgan $y_a=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

5.36. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish

$z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya berilgan bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=y_a$ mavjud bo‘lib, $z=\varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\lim\varphi(f(x))$ mavjud va

$$\lim_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)=\varphi(y_a)$$

o‘rinli.

Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b\ (b>0),\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$ o‘rinli bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]}=e^{c\ln b}=b^c.$$

$f(x)^{g(x)}$ ***funksiya darajali-ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi:

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ bo‘lsa, 1^{∞} aniqmaslik bo‘ladi.
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ bo‘lsa, 0^{0} aniqmaslik bo‘ladi.
3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ bo‘lsa, ∞^{0} aniqmaslik bo‘ladi.

1^{∞} aniqmaslik quyidagicha ochiladi

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2x}$, $\quad f(x)=1+x^2,\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1,\quad g(x)=ctg^2x,$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}ctg^2x=\infty.\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctg^2x}=e^{(1+x^2-1)ctg^2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x^2ctg^2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{tgx}\right)^2}=e.$$

5.37. Funksiya hosilasi va differensiali

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning ($x_0\in R$) biror atrofida berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+x)-f(x_0)$$

ning argument orttirmasi $\Delta x=x-x_0$ ga nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\quad (\Delta x\neq 0)$$

ni qaraymiz.

Ta’rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo‘lsa, bu limit $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x)$ yoki $y'_{x=x_0}$ yoki $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ ko‘rinishlarida belgilanadi.

Misol. $f(x)=\sin x$ funksiyaning $x\in R$ nuqtadagi hosilasini ta’rifdan foydalanib toping.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

Demak, $(\sin x)'=\cos x, \quad \forall x\in R.$

5.38. Bir tomonli hosilalar

Ta'rif. Agar $\Delta x\to +0$ ($\Delta x\to -0$) da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

mavjud va chekli bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 ***nuqtadagi o‘ng (chap) hosilasi deyiladi*** va uni $f'(x_0+0)$ ($f'(x_0-0)$) ko‘rinishida belgilanadi.

Funksiyaning o‘ng va chap hosilalari ***bir tomonli hosilalar*** deyiladi.

Misol. $f(x)=|x|$ ni qaraylik. Ma’lumki, $\Delta y=|x+\Delta x|-|x|$, $x=0$ da $\Delta y=|\Delta x|$ unda $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$. Demak, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi -1 ga teng. Funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

5.39. Cheksiz hosilalar

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning ($x_0\in R$) biror atrofida berilgan bo‘lib, u x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsin.

Ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$+\infty$ (yoki $-\infty$) bo‘lsa, u ham $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi bo‘lib, bunga ***cheksiz hosila*** deyiladi.

Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty .$$

5.40. Funksiya hosilasining geometrik va mexanik ma’nosi

$f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda $f(x)$ funksiya grafigga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma mavjud. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu ***urinmaning burchak koeffisientini*** ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Agar $f'(x_0)=\pm\infty$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘ladi.

Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakati $s=f(t)$ funksiya bilan ifodalangan bo‘lsin, bunda t -vaqt, s shu vaqt ichida o‘tilgan masofa (yo‘l).

$s=f(x)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi $f'(t_0)$ harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

5.41. Teskari funksiyaning hosilasi

Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo‘lsa, bu funksiyaga teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0}=\frac{1}{f'_x(x_0)}$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu $y=\arccos x$ funksiya hosilasini toping.

Ravshanki, $y=\arccos x$ funksiya $x=\cos y$ funksiyaga $(0<y<\pi)$ teskari funksiyadir. Unda yuqoridagi qoidaga ko‘ra $y'=(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}$ bo‘ladi. Ma’lumki, $(\cos y)'=-\sin y$. Demak, $y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(-1<x<1)$.

5.42. Murakkab funksiyaning hosilasi

$u=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda, $y=F(x)$ funksiya esa (c,d) oraliqda berilgan bo‘lib,

$$y=F(f(x))$$

murakkab funksiyaga ega bo‘laylik.

Agar $u=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lib, $y=F(u)$ funksiya esa x_0 nuqtaga mos u_0 $(u_0=f(x_0))$ nuqtada $F'(u_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda murakkab funksiya $F(f(x))$ ham x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$\left[F(f(x))\right]'_{x=x_0}=F'(u_0)\cdot f'(x_0)\quad \left(\left[F(f(x))\right]'=F'(f(x))\cdot f'(x)\cdot x'\right)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu $y=\sin x^2$ funksiyaning hosilasini toping.

Ko‘rinib turibdiki bu murakkab funksiya bo‘lib, uni $y=F(u)=\sin u, u=f(x)=x^2$ deb qarash mumkin. Yuqoridagi formulaga ko‘ra: $y'=(\sin x^2)'=$ $=(\sin u)'_{u=x^2}\cdot(x^2)'=\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2$.

5.43. Hosilani hisoblashni sodda qoidalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyalar ham hosilaga ega va

1) $\left[f(x)\pm g(x)\right]' = f'(x)\pm g'(x)$;

2) $\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$, $\quad \left[(cf(x))' = c\cdot f'(x)\right]$;

3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)- f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x)\neq 0)$, $\left[\left(\dfrac{A}{f(x)}\right)' = \dfrac{Af'(x)}{f^2(x)}\right]$

bo‘ladi.

5.44. Hosilalar jadvali

1. $(x^{\mu})' = \mu\cdot x^{\mu-1}, \quad (\mu>0)$

1′. $(f^{\mu}(x))' = \mu\cdot f^{\mu-1}(x)\cdot f'(x)$

2. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a, (a>0, a\neq 1)$ $\left((e^x)' = e^x\right)$.

2′. $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$

2″. $\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$

3′. $(\log_a f(x))' = \dfrac{f'(x)\log_a e}{f(x)}$

3″. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\qquad$ 3″′. $(\ln f(x)) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4. $(\sin x)' = \cos x$.

4′. $(\sin(f(x)))' = \cos f(x)\cdot f'(x)$

5. $(\cos x)' = -\sin x$

5′. $(\cos(f(x)))' = -\sin f(x)\cdot f'(x)$

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2,...$

6′. $(tg(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x\neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2,...$

7′. $(ctg(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1$.

8′. $(\arcsin(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad -1< f(x)<1$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1$.

9′. $(\arccos(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad -1< f(x)<1$

10. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

10′. $(arctg(f(x)))' = \frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$

11 . $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

11′. $(arcctg(f(x)))' = -\frac{1}{1+f^2(x)} \cdot f'(x)$

12. $(shx)' = chx$.

12′. $(sh(f(x))' = chf(x) \cdot f'(x)$

13. $(chx)' = shx$

13′. $(ch(f(x)))' = shf(x) \cdot f'(x)$

14. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

14′. $(th(f(x)))' = \frac{f'(x)}{ch^2 f(x)}$

15. $(cthx)' = \frac{1}{sh^2 x} \quad x \neq 0$

15′. $(cth(f(x)))' = \frac{f'(x)}{sh^2 f(x)}$

5.45. Ayrim funksiyalarning hosilalari

1. $(\sqrt[n]{x^m})' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}, \quad \left(\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

2. $\left(F^n(f(x))\right)' = nF^{n-1}(f(x)) \cdot F'(f(x)) f'(x)$

3. $\left(\sin^5(\cos 3x)\right)' - 5\sin^4(\cos 3x) \cdot \cos(\cos 3x) \cdot \sin 3x \cdot 3$.

4. $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) \right]$

5. $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

6. $\left(f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad \left(\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

5.46. Parametrga bog‘liq funksiyaning hosilasi

Agar funksiya quyidagi parametr ko‘rinishida berilgan bo‘lsa,

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(x) \end{array}\right\} \quad \alpha < t < \beta$$

va $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ lar yetarli tartibda hosilaga ega

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)}{\varphi' dt}=\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{(\varphi')^3}$$

5.47. Funksiyaning differensiali

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning ($x_0\in R$) biror atrofida berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

ni qaraylik. Ravshanki, bu orttirma Δx ga bog‘liqdir.

Ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy ni

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)$$

(bunda A-o‘zgarmas, $\alpha=\alpha(\Delta x)$ bo‘lib, $\Delta x\to 0$ da $\alpha(\Delta x)\to 0$) ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, funksiya x_0 nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi.

$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)$ munosabatni quyidagicha

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+0(\Delta x)$$

ko‘rinishida yozish mumkin.

Ta’rif. $f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning Δx ga nisbati chiziqli bosh qismi $A\cdot\Delta x=f'(x)$ $(x\in(a,b))$ berilgan $f(x)$ funksiyaning x ***nuqtadagi differensiali*** deyiladi va dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi

$$dy=df(x)=f'(x)\Delta x$$

Agar $f(x)=x$ bo‘lsa, $dy=df(x)==dx=\Delta x$. Demak,

$$dy=f'(x)dx$$

5.48. Funksiya differensialining geometrik ma’nosi

$f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi grafigiga $(x, f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma orttirmasini (dy) ifodalaydi.

5.49. Funksiya differensiallanuchi bo‘lish sharti

Teorema. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun uning sh nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lishi zarur va yetarli.

5.50. Elementar funksiyalarning differensial jadvali

1. $d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx \quad (x>0)$;
2. $d(a^x)=a^x\cdot\ln a\cdot dx \quad (a>0,\ a\neq 1)$;
3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e\cdot dx \quad (x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$; $d(\ln x)=\frac{dx}{x}$;
4. $d(\sin x)=\cos x\cdot dx$;
5. $d(\cos x)=-\sin x\cdot dx$;
6. $d(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k=0;\pm1,\pm2,...\right)$;
7. $d(ctgx)-\frac{1}{\sin^2 x}dx \quad (x\neq k\pi;\ k=0;\pm1,\pm2,...)$;

8. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1 < x < 1)$;

9. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1 < x < 1)$;

10. $d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$;

11. $d(arcctgx) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$;

12. $d(shx) = chx \cdot dx$;

13. $d(chx) = shx \cdot dx$;

14. $d(thx) = \dfrac{1}{ch^2 x}dx$;

15. $d(cthx) = -\dfrac{1}{sh^2 x}dx \quad (x \neq 0)$.

5.51. Differensiallashning sodda qoidalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo‘lib, $x\in(a,b)$ da $df(x)$, $dg(x)$ mavjud bo‘lsin. U holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ va $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$) ham differensiallanuvchi bo‘ladi va ular uchun quyidagi formula o‘rinli:

$$d(f(x)\pm g(x))=df(x)+dg(x),\ df(x)\cdot g(x)=f(x)dx\pm g(x)dx,$$

$$d\,\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0).$$

Murakkab funksiyaning differensiali $u=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=F(u)$ esa (c,d) intervalda aniqlangan bo‘lib, bu funksiyalar yordamida

$$y=F(f(x))=\Phi(x)$$

murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Murakkab funksiyaning differensiali

$$d\Phi(x)=d(F(f(x)))=(F(f(x)))'=F'(u)f'(x)dx=F'(u)du.$$

Misol. Ushbu $y=\sin(x^2+\cos x)$ funksiyani differensialini toping.

Yechish.

$$dy=(\sin((x^2+\cos x))'dx=\cos(x^2+\cos x)\cdot(x^2+\cos x)'dx=$$

$$=(2x-\sin x)\cdot\cos(x^2+\cos x)dx.$$

5.52. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar

Funksiya differensiali taqribiy hisoblash formulalarni topish imkonini beradi.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, $\forall x_0\in(a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo‘lsin va $f(x_0)$ qulay hisoblanadigan bo‘lsa, bu nuqta atrofida funksiya qiymatini quyidagicha taqribiy hisoblash formula bilan hisoblash mumkin:

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(0)x.$$

Bu formuladan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$(1+x)^\mu\approx 1+\mu x,\ \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x,\ e^x\approx 1+x,\ \ln(1+x)\approx x,\ \sin x\approx x,\ tgx\approx x.$$

6§. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

6.1. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida berilgan bo‘lib, shu atrofda $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. Agar $f'(x_0)$ ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, uni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va

$$y''_{x_0}\ \text{yoki}\ f''(x_0)\ \text{yoki}\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

ko‘rinishida yoziladi. Demak,

$$y''_{x_0}=(y')'_{x_0},\ f''(x_0)=(f'(x))'_{x=x_0},\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$$

$f(x)$ funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o‘xshash ta’riflanadi.

Umuman, agar $y=f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{n-1}(x)$ hosilasi x_0 nuqtaning biror atrofida mavjud bo‘lib, bu $f^{n-1}(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, uni $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi n-tartibli hosilasi deyiladi va

$$y^{(n)}_{x=x_0} \text{ yoki } f^{(n)}(x_0) \text{ yoki } \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

ko‘rinishlardan biri orqali yoziladi.

Shunday qilib,

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad \left(\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}\right)\right)$$

bo‘ladi.

6.2. Funksiyaning yuqori tartibli differensiali

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida berilgan bo‘lib, shu atrofda ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsin. $f(x)$ funksiya differensiali $dy\equiv df(x)$ ning differensiali berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va

$$d^2y \text{ yoki } d^2 f(x)$$

ko‘rinishida yoziladi. Demak, $d^2y=d(dy)$ yoki $d^2 f(x)=d(df(x))$. Yuqorida keltirilgan funksiyalarning ikkinchi tartibli differensiali quyidagicha izohlanadi;

a) dy faqat x ning funksiyasi deb faraz qilinadi, ya’ni $f'(x)dx$ ning differensiali hisoblanganda dx o‘zgarmas ko‘paytuvchi deb qaraladi.

b) $f'(x)$ ning differensiali hisoblanganda x ning orttirmasi $\Delta x=dx$ ni birinchi tartibli differensiali $dy=f'(x)dx$ ni hisoblangandagi dx ning qiymatiga teng deb qaraladi.

$f(x)$ ning uchinchi, to‘rtinchi va h.k. tartibdagi differensiallari xuddi shunga o‘xshash ta’riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning n-tartibli differensiali $d^n f(x)$ ni

$$d^n f(x)=d(d^{n-1}f(x))=f^{(n)}(x)dx^n$$

deb ta’riflanadi.

6.3. Funksiyaning hosilasi bilan uning differensiali orasidagi bog‘lanish

Funksiyaning hosilasi bilan uning differensiali orasidagi

$$d^n y=y^{(n)}dx^n \text{ yoki } d^n f(x)=f^{(n)}(x)dx^n$$

bog‘lanish mavjud.

6.4. Yuqori tartibli differensial uchun sodda qoidalar va asosiy formulalar

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, ular shu atrofda $f^{(n)}(x)$ va $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

1. $d^n(c\cdot f(x))=c\cdot d^n f(x),\quad c=const$,
2. $d^n(f(x)\pm g(x))=d^n f(x)\pm d^n g(x)$,
3. $d^n(f(x)\cdot g(x))=d^n f(x)\cdot g(x)+C_n^1 d^{n-1}f(x)\cdot dg(x)+$

$$+C_n^2 d^{n-2} f(x)\cdot d^2 g(x)+...+C_n^{n-1} df(x)\cdot d^{n-1} g(x)+ f(x)\cdot d^n g(x).$$

(***Leybnis formulasi***) bo'ladi.

1. $y=a^x$ bo'lsa, $d^n y=a^x \ln^n a dx^n$.
2. $y=e^x$ bo'lsa, $d^n y=e^x dx^n$.
3. $y=\sin x$ bo'lsa, $d^n y=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^n$.
4. $y=\cos x$ bo'lsa, $d^n y=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^n$
5. $y=\ln x$ bo'lsa, $d^n y=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}dx^n$
6. $y=\frac{1}{x}$ bo'lsa, $d^n y=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}dx^n$.
7. $y=x^m$ bo'lsa, $d^n y=m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}dx^n$
8. $y=(1+x)^\alpha$ bo'lsa, $d^n y=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}dx^n$.

6.5. Differensial hisobning asosiy teoremalari

1°. *Ferma teoremasi.* $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

2°. *Roll teoremasi.* $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f(a)\neq f(b)$ bo'lsa, u holda shunday c ($a<c<b$) nuqta topiladiki,

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

3°. *Lagranj teoremasi.* $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f(a)=f(b)$ bo'lsa, u holda shunday c ($a<c<b$) nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \left(f(b)-f(a)=f'(0)(b-a)\right)$$

bo'ladi.

4°. *Koshi teoremasi.* $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday c ($a<c<b$) nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

6.6. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor formulasi

$y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, u $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x), f''(x),..., f^n(x)$ hosilalarga ega uni shu nuqta atrofida quyidagi formula bilan hisoblash mumkin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

Bu Teylor formulasidir. $R_n(x)$ ga Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi. U quyidagi ko‘rinishlarga ega:

1) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$, $\quad (c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1)$ (***Koshi ko‘rinishi***),

2) $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\quad (c = x_0 + \theta(x - x_0), \ 0 < \theta < 1)$ (***Lagranj ko‘rinishi***),

3) $R_n(x) = \theta\left((x - x_0)^n\right)$ (***Peano ko‘rinishi***)

6.7. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun Makloren formulasi

Agar (1) formulada $x_0 = 0$ deb olsak, unda ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

formula hosil bo‘ladi. Bu ***Makloren formulasi*** deyiladi.

Ushbu $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = (1+x)^m$, $f(x) = \ln(1+x)$ funksiyalar uchun Makloren formulasi quyidagicha bo‘ladi:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$,

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$,

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

7§. Differensial hisobning ba’zi tatbiqlari

7.1. Funksiyaning o‘suvchiligi va kamayuvchiligi

Funksiya hosilasi yordamida uning o‘suvchiligini hamda kamayuvchiligini aniqlash mumkin.

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Bu funksiya shu intervalda o‘suvchi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun

$$f'(x) \geq 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya shu intervalda kamayuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun

$$f'(x) \le 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Misol. Ushbu

$$y = x^4$$

funksiyaning o'sish va kamayish sohasi topilsin.

Hosilani topamiz: $y' = 4x^3$; $x > 0$ bo'lganda $y' > 0$ bo'ladi-funksiya o'sadi; $x < 0$ bo'lganda $y' < 0$ bo'ladi-funksiya kamayadi.

7.2. Funksiyaning o'zgarmas qiymatni saqlashi

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun shu intervalda

$$f'(x) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

1-natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, shu intervalda

$$f'(x) \equiv g'(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ bilan $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x) \equiv g(x) + C, \ C = const.$$

Eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu funksiyaning (a,b) da ***qat'iy o'suvchi*** (***qat'iy kamayuvchi***) bo'lishidan, $f'(x)$ ning ixtiyoriy $x \in (a,b)$ da musbat (manfiy) bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, $f(x) = x^3$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning R da qat'iy o'suvchi. Bu funksiya $f'(x) = 3x^3$ bo'lib, $x = 0$ nuqtada $f'(0) = 0$.

7.3. Funksiyaning ekstremum qiymatlari

$f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

Ta'rif. Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtaning shunday atrofi $U_\delta(x_0)$ mavjud bo'lsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x \ge f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga (minumumga)*** ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ***maksimumi (minimumi)*** deyiladi.

2- ta'rif . Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtaning shunday atrofi $U_\delta(x_0) \subset (a, b)$ bo'lsaki, ixtiyoriy $x \in U'_\delta(x_0)$ uchun $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$ tengsizlik o'rinli

bo‘lsa u holda x_0 nuqtada ***qat’iy maksimumga*** (***qat’iy minumumga***) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ***qat’iy maksimumi (minimumi)*** deyiladi.
Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimum (minimum) qiymatlari

$$f(x_0) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \qquad f(x_0) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\}$$

kabi belgilanadi. Bunda max (min) lotincha maximum (minimum) so‘zidan olingan bo‘lib, eng katta (eng kichik) degan ma’noni anglatadi.
Funksiyaing maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning ***ekstremumi*** deb ataladi.

Eslatma. Yuqoridagi ta’riflarda $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ dagi qiymati uning shu nuqta $f(x_0)$ atrofidan olingan nuqtalardagi qiymatlari bilangina taqqoslandi. Shuning uchun funksiyaning ekstremumini lokal ekstremum deb yuritiladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir qancha maksimum va minumumlarga ega bo‘lishi mumkin.

Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremumlari hamda funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalar topiladi.

7.4. Ekstremumning zaruriy sharti

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada maksimum (minimum) ga erishsin. x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ atrofi topiladiki, ixtiyoriy $x \in U_\delta(x_0)$da $f(x_0) \ge f(x)$ ($f(x_0) \le f(x)$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi haqida, umuman aytganda, quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) $f'(x_0)$ mavjud va chekli,
2) $f'(x_0)$ mavjud va cheksiz.
3) Hosila mavjud emas.

Birinchi holda Ferma teoremasiga ko‘ra $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi. Natijada quyidagi muhim teoremaga kelamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lib, bu nuqtada $f(x)$ funksiya ekstremumga erishsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

Biroq $f(x)$ funksiya uchun biror $x^* \in (a,b)$ nuqtada chekli hosila mavjud va $f'(x^*) = 0$ bo‘lishidan uning x^* nuqtada ekstremumga ega bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$ va $x = 0$ nuqtada $f'(x_0) = 0$ bo‘lsa ham u $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas (bu funksiya qat’iy o‘suvchi ekanligi bizga ma’lum).

Demak, yuqoridagi teorema funksiya ekstremumga erishishining zaruriy shartini ifodalaydi.

Ikkinchi holning esa bo‘lishi mumkin emas. Agarda $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi. Haqiqatan hosila ta’rifidan $\delta > 0$ topiladiki, $0 < x - x_0 < \delta$ bo‘lgan x lar uchun $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{1}{\varepsilon}$, ya’ni $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $-\delta < x - x_0 < 0$ bo‘lgan x lar uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik kelib chiqadi.

Biz $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligini ko‘rgan edik. Bu funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga ega bo‘lishi ravshandir. Demak, funksiya hosilaga ega bo‘lmagan nuqtalarda ham ekstrimumga erishishi mumkin.

7.5. Funksiyaning statsionar nuqtasi

Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyaning ***statsionar*** (turg‘un, kritik) nuqtalari deb ham ataladi.

7.6. Ekstremumning yetarli shartlari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lib, uning

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x; x \in R, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \ x \neq x_0\}$$

atrofida chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

a) Agar

$$\forall x \in \dot{U}^{-}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}^{+}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) < 0$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o‘tishida o‘z ishorasini “+” dan “-” ga o‘zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga ega*** bo‘ladi.

b) Agar

$$\forall x \in \dot{U}^{-}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}^{+}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) < 0$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda o‘z ishorasini “**–**” dan “+” ga o‘zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***minimumga ega*** bo‘ladi.

v) Agar

$$\forall x \in \dot{U}^{-}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in \dot{U}^{+}_\delta(x_0) \ \ uchun \ f'(x) > 0$$

yoki

$$\forall x \in \overset{\bullet}{U}{}^{-}_{\delta}(x_0) \quad uchun \quad f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in \overset{\bullet}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0) \quad uchun \quad f'(x) < 0$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***ekstremumga ega bo‘lmaydi***, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U'_{\delta}(x)$ atrofida ***qat’iy o‘suvchi (yoki qat’iy kamayuvchi)*** bo‘ladi.

7.7. Funksiya ekstremumini topishda uning yuqori tartibli hosilalaridan foydalanish

$f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,\ b)$ nuqtada $f', f'', ..., f^{(n)}$ hosilalarga ega bo‘lib, biror $n \geq 2$ son uchun

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

bo‘lsin.

a) Agar n - juft son, ya’ni $n = 2m (m \in N)$ bo‘lib,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) < 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga***,

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(2m)}(x_0) > 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***minimumga ega*** bo‘ladi.

b) Agar n-toq son, ya’ni $n = 2m+1 \quad (m \in N)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***ekstremumga ega bo‘lmaydi***.

Natija. Agar $x = 0$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f''(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo‘lsa, $f''(x_0) < 0$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga, $f''(x_0) > 0$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

7.8. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra funksiyaning $[a,b]$ da eng katta hamda eng kichik qiymatlari mavjud bo‘ladi va bu qiymatlarga $[a,b]$ segmentning nuqtalarida erishiladi. Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning hamma maksimum qiymatlaridan iborat to‘plam $\{\max f(x)\}$ bo‘lsin.

2) Funksiyaning $[a,b]$ segmentning chegaralaridagi, ya’ni $x = a, \ x = b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So‘ngra $\{\max f(x)\}$ to‘plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu

qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo‘ladi.

3) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalidagi barcha minimum qiymatlari topilib, ulardan $\{\min f(x)\}$ to‘plam tuziladi.

4) $[a,b]$ segmentning chegaralari $x=a,\ x=b$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning $f(a)$, $f(b)$ qiymatlari ichida eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng kichik qiymati bo‘ladi.

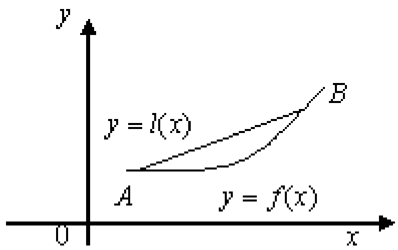
7.9. Funksiyaning botiqligi

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervaldan olingan $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin. Ravshanki, $(x_1, x_2) \subset (a,b)$. Bu yerda $l(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$.

Ta’rif. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qat’iy botiq) funksiya deyiladi.

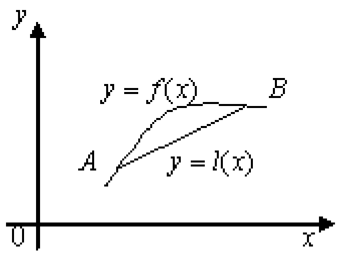


$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

Teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qat’iy botiq) bo‘lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasining (a,b) da o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi) bo‘lishi zarur va yetarli.

7.10. Funksiyaning qavariqligi

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervaldan olingan $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin. Ravshanki, $(x_1, x_2) \subset (a,b)$. Bu yerda $l(x) = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$.



Ta’rif. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham ixtiyoriy $x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \ge l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ***qavariq (qat’iy qavariq) funksiya*** deyiladi

Teorema. $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda qavariq (qat’iy qavariq) bo‘lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasining (a,b) da kamayuvchi bo‘lishi zarur va yetarli.

Funksiyaning qavariq hamda botiqligini uning ikkinchi tartibli hosilasidan (agar u mavjud bo‘lsa) foydalanib tekshirish mumkin.

Teorema. $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda botiq (qavariq) bo‘lishi uchun shu intervalda

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

7.11. Funksiyaning egilish nuqtalari

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya $U^-{}_\delta(x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo‘lib, $U^+{}_\delta(x_0)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo‘lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning (funksiya grafigining) ***egilish nuqtasi*** deb ataladi.

7.12. Funksiya grafigining asimptotalari

$f(x)$ funksiya $a \in R$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar ushbu

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \ \lim_{x\to a-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo‘lsa, u holda $x = a$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining ***vertikal asimptotasi*** deb ataladi.

Masalan, $y = \frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x = 0$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Endi $y = f(x)$ funksiya (a,∞) $((-\infty,a))$ oraliqda aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas k va b sonlar mavjud bo‘lsaki, $x \to +\infty$ da $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

ko‘rinishda ifodalansa (bunda $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$), u holda $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining ***og‘ma asimptotasi*** deb ataladi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x + 2}$$

bo‘lsin. Bu funksiya

$$f(x) = 2x - 8 + \frac{21}{x+2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $x \to +\infty$ da $\alpha(x) = \frac{2}{x+1} \to 0$ bo‘lib, berilgan funksiya $f(x) = 2x - 8 + \alpha(x)$ ko‘rinishida ifodalanadi. Bundan esa $f(x) = 2x - 8$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining og‘ma asimptotasi ekanligi kelib chiqadi.

Teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega bo‘lish uchun

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

tengliklarning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

7.13. Funksiyani tekshirish. Grafiklarni yasash

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi sxema bo‘yicha olib borish maqsadga muvofiqdir:

1^0. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;

2^0. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;

3^0. Funksiyani juft, toq hamda davriyligini aniqlash;

4^0. Funksiyani monotonlikka tekshirish;

5^0. Funksiyani ekstrimumga tekshirish;

6^0. Funksiya grafigining qavariq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;

7^0. Funksiya grafiginng asimptotalarini topish;

8^0. Funksiyaning haqiqiy nollarini (agar ular mavjud bo‘lsa), shuningdek argument x ning bir nechta xarakterli qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini topish.

Misol. $y = x + e^{-x}$ **funksiyani to‘liq tekshiring va grafigini chizing.**

Funksiyani yuqorida ko‘rsatilgan sxema asosida to‘liq tekshiramiz.

Funksiyaning aniqlanish sohasi haqiqiy sonlar to‘plami.

Funksiya juft ham, toq ham, davriy ham emas.

Funksiya uzluksiz. OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi: $y = f(0) = 1$.

OX o‘qi bilan kesishmaydi. Endi funksiyani monotonlik va ekstremumga tekshiramiz:

$$y' = \left(x + e^{-x}\right)' = 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

Intervallar usulidan foydalanib bu ifodaning ishorasi saqlanadigan oraliqlarni topamiz va quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	-	0	+
y	↘	min 1	↗

Qavariqlikka tekshirish uchun y'' ni hisoblaymiz:

$$y'' = (y')' = \left(1 - e^{-x}\right)' = e^{-x} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{e^x} > 0 .$$

Funksiya hamma joyda botiq.

Funksiya asimptotalarini topamiz:

a) Vertikal asimptota: yo‘q

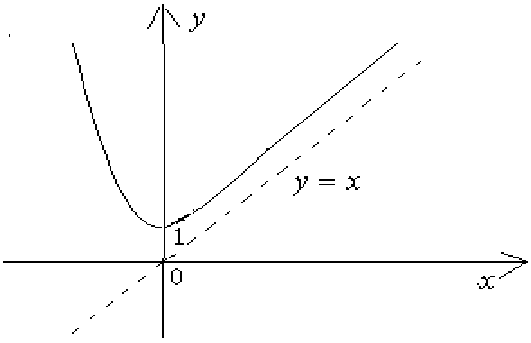
б) Gorizontal asimptota: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x + e^{-x} = \infty \Rightarrow$ Gorizontal asimptota yo‘q.

в) Og‘ma asimptota: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+e^{-x}}{x} = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left(x + e^{-x} - x\right) = 0 \Rightarrow y = x$$

og‘ma asimptota.

Endi topilgan ma'lumotlardan foydalanib funksiya grafigini chizamiz



7.14. Aniqmasliklarni ochish. Lapital qoidalari

Funksiyalarning limitini o‘rganish jarayonida $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochish bilan shug‘ullanishga to‘g‘ri keladi. Hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish ***Lapital qoidalari*** deyiladi.

1^0. $\frac{0}{0}$ **ko‘rinishidagi aniqmaslik**.

Ma’lumki, $x \to a$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ bo‘lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ko‘pincha $x \to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga qaraganda $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitini topish oson bo‘ladi. Bu nisbatlar limitlarining tengligini quyidagi teorema ko‘rsatadi.

Teorema. (a,b) intervalda aniqlangan, uzluksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo‘lsin:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

2) (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x) \neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (k-chekli yoki cheksiz).

U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lapital qoidasidan foydalanib, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ limitni osonlik bilan isbotlash mumkin.
Haqiqatan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

2^0. $\frac{\infty}{\infty}$ **ko‘rinishidagi aniqmaslik**.

Ma’lumki, $x\to a$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo‘lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bunday aniqmaslikni ochishda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkin.

Teorema. (a,b) intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning uchun ushbu shartlar bajarilsin:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ (k-chekli yoki cheksiz). U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3^0. $0\cdot\infty$ **ko‘rinishidagi aniqmaslik**.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lganda $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, uni quyidagi

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

4^0. $\infty-\infty$ **ko‘rinishidagi aniqmaslik.**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bo‘lganda $f(x)-g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikka keltirib hisoblanadi.

5^0. $1^\infty, 0^\infty, \infty^0$ **ko‘rinishidagi aniqmasliklar.**

Aytaylik,

$$\lim_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]=b$$

(b-chekli yoki cheksiz) bo‘lsin deylik. Unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^b$$

bo‘ladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi, ya’ni bu holda Lapital qoidasini takror qo‘llash mumkin bo‘ladi.

8-§. Aniqmas integral

8.1. Boshlang‘ich funksiya

$f(x)$ funksiya (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f(x)$ funksiya shu intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiyaning hosilasiga teng, ya’ni

$$F'(x)=f(x)$$

bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning ***boshlang‘ich funksiyasi*** deyiladi

8.2. Funksiya differensiali orqali boshlang‘ich funksiya ta’rifi

$f(x)$ funksiya (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $x\in(a,b)$ da $f(x)dx$ ifoda shu intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiyaning differensialiga teng, ya’ni

$$dF(x)=f(x)dx$$

bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning ***boshlang‘ich funksiyasi*** deyiladi

Misol. $f(x)=x^4$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ intervalda boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+C$ bo‘ladi, bu yerda C o‘zgarmas son.

8.3. Aniqmas integral

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $R=(-\infty;+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ shu oraliqda har doim boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘ladi.

$f(x)$ funksiya (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif. (a,b) intervalda berilgan $f(x)$ funksiya boshlang‘ich funksiyalarining umumiy ifodasi $F(x)+C$ $(C=const)$, shu $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx$$

ko‘rinishida belgilanadi. Bunda $\int -$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi. Demak,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad (C=const).$$

Misol. Masalan

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

bo‘ladi.

$\int x^5 dx$ integral shunday funksiyaki,

$$F(x) = \frac{x^6}{6} + C$$

bo‘lib

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6} + C \right)' = x^5$$

bo‘ladi.

8.4. Aniqmas integralning sodda xossalari

1°. $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ da teng, ya’ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx .$$

2°. Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas son yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (C = const).$$

8.5. Integralashning sodda qoidalari

1°. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar boshlang‘ich funksiyalarga ega bo‘lsa, u holda $f(x) + g(x)$ ham boshlang‘ich funksiyaga ega va

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

formula o‘rinli (***integralning additivlik xossasi***).

2°. Agar $f(x)$ funksiya boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lsa, u holda $k \cdot f(x)$ (k-o‘zgarmas son) ham boshlang‘ich funksiyaga ega va $k \neq 0$ da

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$$

formula o‘rinli.

8.6. Elementar funksiyalarning aniqmas integrali

1. $\int 0 \cdot dx = C, \quad C = const$;
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$;
3. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1) \quad \left(\int (ax+b)^\mu dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^\mu}{\mu+1} + C \right)$;
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) \quad \left(\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C \right)$;
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C \quad \left(-\int \frac{dx}{1+x^2} = arcctgx + C \right)$;

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \left(-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C\right);$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \left(\int e^x dx = e^x + C\right);$

8. $\int \sin xdx = -\cos x + C \quad \left(\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C\right);$

9. $\int \cos xdx = \sin x + C \quad \left(\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + C\right);$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C \quad \left(\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}ctgax + C\right);$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \quad \left(\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}tgax + C\right);$

12. $\int shxdx = chx + C$

13. $\int chxdx = shx + C$;

14. $\int \frac{1}{sh^2 x}dx = \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$;

15. $\int \frac{1}{ch^2 x}dx = \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

16. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C;$

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C; \ (a \neq 0)$

18. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C;$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \ (a > 0)$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \ (a > 0)$

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C;$

22. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \ (a > 0)$

23. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

8.7. Integrallash usullari

1. ***O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash***. Ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bunda $f(x)$ funksiya biror $X = (a,b)$ intervalda aniqlangan va $f(x) = \varphi(g(x))g'(x)$ ko'rinishida yozish mumkin deylik.

Agar $\varphi(t)$ funksiya $T=(t_1,t_2)$ intervalda boshlang‘ich funksiya $\Phi(t)$ ga ega bo‘lib, $g(x)$ funksiya $X=(a,b)$ intervalda (bunda $g(x)\subset T$) differensialanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int f(x)dx=\int\varphi(g(x))g'(x)dx=\Phi(g(x))+C$$

formula o‘rinli.
Misol. Ushbu

$$\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$$

aniqmas integralni hisoblang.
$d(arctgx)=\dfrac{dx}{1+x^2}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$I=\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx=\int arctgx d(arctgx)$$

Bundan ko‘rinadiki $arctgx=t$ desak, t orqali integral quyidagi integralga keladi:

$$I=\int tdt\ ,$$

u holda

$$I=\frac{t^2}{2}+C\ .$$

Birinchi integralning x o‘zgaruvchi orqali ifodasi

$$I=\frac{1}{2}arctg^2x+C$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

2. *Bo‘laklab integrallash usuli.* Ikkita $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiya (a,b) intervalda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Ma’lumki

$$d[u(x)\cdot v(x)]=u(x)\cdot dv(x)+v(x)\cdot du(x)\ .$$

Bu tenglikdan

$$u(x)dv(x)=d[u(x)\cdot v(x)]-v(x)du(x) \qquad (1)$$

Endi (1) tenglikni integrallab topamiz:

$$\int u(x)dv(x)=\int[d[u(x)\cdot v(x)]-v(x)du(x)]=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x)\ .$$

Shunday qilib, quyidagi

$$\int u(x)dv=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du$$

formulaga kelamiz. Bu formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.
Misol. Ushbu

$$I=\int x\sin xdx$$

aniqmas integral hisoblang.

Integral ostidagi ifodani $u=x$, $dv=\sin xdx$ lar ko‘raytmasi deb olamiz. U holda $du=dx$, $v=-\cos x$ bo‘ladi. Bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra:

$$I=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C\ .$$

Eslatma. $\int u(x)dv(x)$ integralni hisoblashda logarifmik funksiya, ko‘phad, teskari trigonometrik funksiyalarni $u(x)$ deb belgilash maqsadga muvofiq.

8.8. Ko‘phad va uning ildizlari haqida

Biror

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \qquad (2)$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin, bunda $a_0, a_1, a_2,...,\ a_n$-o‘zgarmas haqiqiy sonlar, $a_n\neq 0$, $n\in N$ esa ko‘phadning darajasi.

Biror $\alpha\in R$ son uchun $P(\alpha)=0$ bo‘lsa, α son $P(x)$ ko‘phadning ildizi deyiladi. U holda Bezu teoremasiga ko‘ra $P(x)$ ko‘phad $x-\alpha$ ga qoldiqsiz bo‘linib, u quyidagi

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

ko‘rinishida ifodalanadi, bunda $Q(x)-\ (n-1)$-darajali ko‘phad.
Agar (2) ko‘phad $(x-\alpha)^k$ ($k\in N$) ga qoldiqsiz bo‘linsa, α son (2) ko‘phadning k karrali ildizi bo‘ladi. Bu holda $P(x)$ ko‘phad ushbu
$P(x)=(x-\alpha)^k R(x)$ ko‘rinishida ifodalash mumkin, bunda $R(x)-\ (n-k)$-darajali ko‘phad.

Agar $h=\alpha+i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa, u holda $\bar{h}=\alpha-i\beta$ kompleks son ham bu ko‘phadning ildizi bo‘ladi. Shuningdek, $h=\alpha+i\beta$ son $P(x)$ ning k karrali ildizi bo‘lsa, $\bar{h}=\alpha-i\beta$ son ham bu ko‘phadning k karrali ildizi bo‘ladi.

Teorema. Har qanday n-darajali

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

ko‘phad ($a_0, a_1, a_2,...,\ a_n$-o‘zgarmas haqiqiy sonlar, $a_n\neq 0$), ushbu

$$P(x)=(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}....(x-\alpha_k)^{\lambda_k}(x^2+p_1x+$$
$$+q_1)^{\gamma_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}...(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin, bunda

$$\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k+2(\gamma_1+\gamma_2+....+\gamma_s)=n$$

bo‘lib, $(x^2+p_jx+q_j)=0$ $(j=1,2,3,...,s)$ tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

8.9. Sodda kasr

Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},\ m=1,2,3,...$$

ko‘rinishidagi kasrlarga sodda kasrlar deyiladi, bunda A, B, C hamda a, p, q lar o‘zgarmas sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad esa haqiqiy ildizga ega emas.

8.10. Ratsional funksiya va to‘g‘ri kasr

Quyidagi

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

va

$$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_vx^v$$

ko‘phadlarning ($a_0, a_1, a_2,...,\ a_n, b_0, b_1, b_2,...,\ b_v$-o‘zgarmas sonlar $n\in N, v\in N$) nisbati

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_vx^v}$$

kasr ***ratsional funksiya*** deyiladi, $n<v$ esa u ***to‘g‘ri kasrga*** aylanadi.

Teorema. Har qanday to‘g‘ri kasr sodda kasrlar yig‘indisi orqali ifodalanadi.

8.11. Sodda kasrlarni integrallash

Sodda kasrlarni aniqmas integralini hisoblash.

1°. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning aniqmas integrali:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C\,.$$

2°. $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$ sodda kasrning aniqmas integrali:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=\frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C\,.$$

3°. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning integrali $I=\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ ni hisoblash uchun avval kasrning maxrajida turgan x^2+px+q kvadrat uchhadni ushbu

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

ko‘rinishida yozib olamiz. U holda

$$I=\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

bo‘ladi, bunda $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Bu integralda $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirish bajaramiz:

$$I=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left[t^2+a^2\right]+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C_*=\frac{B}{2}\ln\left[x^2+px+q\right]+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_2\,.$$

Demak,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln\left[x^2+px+q\right]+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_2\,,$$

bunda C_2-ixtiyoriy o‘zgarmas.

4°. $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}$ sodda kasrning integrali $I_m=\int\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx$ ni hisoblash uchun 3°-holdagidek o‘zgaruvchilarni almashtiramiz: $x+\dfrac{p}{2}=t$. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$I_m=\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\int\frac{Bx+C}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^m}dx=$$

$$=\int\frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Bunda $\int\dfrac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ integral rekurrent formula orqali hisoblanadi.

8.12. Ratsional funksiyalarning aniqmas integrali

$f(x)$ ratsional funksiya bo‘lib, uning aniqmas integralini hisoblash talab etilsin.

Ma’lumki, ratsional funksiya ikkita $P(x)$ va $Q(x)$-butun ratsional funksiyalar nisbatidan iborat, ya’ni

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Agar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ noto‘g‘ri kasr (suratidagi ko‘phadning darajasi maxrajdagi ko‘phadning darajasidan katta) bo‘lsa, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funsiya hamda to‘g‘ri kasr yig‘indisi ko‘rinishida quyidagicha ifodalab olinadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

U holda

$$\int f(x)dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int R(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

bo‘ladi.

8.13. Ba’zi irratsional ko‘rinishidagi funksiyalarni integrallash. Eyler almashtirishlari.

$R(x,y)$ deganda x va y o‘zgaruvchiga nisbatan ratsional bo‘lgan funksiyani tushunamiz.

I) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ integralni hisoblashda $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ almashtirish bajarilsa, ratsional funksiyani integrallashga keladi.

II) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$ integralni hisoblashda $r_1, r_2, ..., r_n$ ratsional sonlarning umumiy m maxrajga keltirib, integralda $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ almahtirish bajarilsa, ratsional funksiyani integrallashga keladi.

III) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ integralni hisoblashda quyidagi 3 ta hol qaraladi.

<u>1 – hol.</u> ax^2+bx+c kvadrat uchhad har xil x_1 va x_2 xaqiqiy ildizlarga ega bo‘lsin. Bundan $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Bunda

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$$

almashtirish bajaramiz.

<u>2 - hol.</u> $a>0$ bo‘lsin. Unda

$$\sqrt{ax^2+bx+c)}=t-\sqrt{a}x \ \ (yoki \ \sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x)$$

almashtirish bajaramiz.

<u>3 - hol.</u> $c>0$ bo‘lsin. U holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c} \ \ (yoki \ \sqrt{ax^2+bx+c}=tx-\sqrt{c})$$

almashtirishni bajarish yordamida hisoblanishi kerak bo‘lgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

(1) - (3) almashtirishlarga ***Eyler almashtirishlari*** deb ataladi.

8.14. Binomial differensiallarni integrallash

a*)** **Ta’rif.** Ushbu $x^m(a+bx^n)^p dx$ ko‘rinishidagi ifodaga ***binomial differensial deb ataladi. Bu yerda m, n, p - lar ratsional sonlar.

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

integral quyidagi 3 ta holda ratsional funksiyaning integraliga keladi.

1 - hol. p **-** ***butun son.*** $x=t^N$ almashtirish bajariladi. Bu erda N soni m va n ratsional sonlar (ya’ni kasrlar) maxrajlarning eng kichik umumiy bo‘linuvchisi.

2 - hol. $\frac{m+1}{n}$ **-** ***butun son.*** Bu holda $a+bx^n=Z^N$ almashtirish bajarish kerak bo‘ladi. $N-p$ ratsional sonning maxraji.

3 - hol. $\frac{m+1}{n}+p$ **-** ***butun son.*** Bunda $\frac{a}{x^n}+b=Z^N$, $N-p$ ning maxaraji, almashtirish bajarish etarli.

Ushbu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko‘rinishidagi integral, bunda R ratsional funksiya umumiy holda $tg\frac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$ almashtirish bilan t o‘zgaruvchining ratsional funksiyasiga aytiladi. Bu unversal almashtirishda $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

1) agar $R(\sin x, \cos x)$ ratsional funksiya $\sin x$ ni $-\sin x$ almashtirishda $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $\cos x=t$ deb belgilash ma’qul;

2) agar $R(\sin x, \cos x)$ ratsional funksiyada $\cos x$ ni $-\cos x$ ga almashtirilganda $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa $\sin x=t$ deb belgilash ma’qul;

3) agar $\sin x$ ni $-\sin x$ bilan va $\cos x$ ni $-\cos x$ blan almashtirishda $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$ o‘rinli bo‘lsa, $tgx=t$ deb belgilash ma’qul;

4) Aytaylik,

$$I=\int \sin^n x\cdot\cos^m x dx,\ (n,\ m\in Z)$$

integral berilgan bo‘lsin. Bu integralni hisoblash uchun quyidagi hollar qaraladi.

1 - hol. n - toq, m - juft bunda $\cos x=t$ almashtirish bajariladi.

2 - hol. n - juft, m - toq bunda $\sin x=t$ almashtirish bajariladi.

3 - hol. n va m - toq. Bunda $\cos x=t$, $\sin x=t$ yoki $tgx=t$ almashtirishlardan biri bajariladi.

4 - hol. n va m - juft. Bu holda

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x \text{ va } \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

formulalardan foydalanib tartib pasaytiriladi va yuqoridagi hollardan biriga keltiriladi

9-§. Aniq integral

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Bu kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

nuqtalar bilan n ta qismga bo‘lamiz. Har bir (x_{i-1}, x_i) oraliqda ixtiyoriy ξ_i nuqtani olamiz va ushbu yig`indini tuzamiz: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, bunda $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ko‘rinishdagi yig`indiga ***integral yig`indi*** (***Riman yig‘indisi***) deyiladi.

Agar $\max \Delta x_i \to 0$ da $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ yig`indining limiti mavjud va chekli bo‘lsa, u holda bu limitga $f(x)$ funksiyadan a dan b gacha olingan **aniq integral** deyiladi va $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi. a va b sonlar mos ravishda integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda chegaralangan va monoton bo‘lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘ladi.

9.1. Aniq integral xossalari

1⁰. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2⁰. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3⁰. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4⁰. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5⁰. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$ unda k - o‘zgarmas

6⁰. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \ge 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

7⁰. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \ge g(x)$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

8⁰. Agar m va M mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo‘lsa, u holda $m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ tengsizlik o‘rinli (aniq integralni baholash haqidagi teorema.)

9⁰. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ bunda $c \in (a;b)$ (o‘rta qiymat haqidagi teorema.)

10⁰. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ segmentda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

9.2. Aniq integralni hisoblash

Agar $F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyalaridan biri bo‘lsa, u holda quyidagi formula o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

bu formula ***Nyuton –Leybnis formulasi*** deyiladi.

O`zgaruvchini almashtirib integrallash formulasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $x=\varphi(t)$ funksiya esa $t\in[\alpha,\beta]$ da aniqlangan va uzluksiz $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$ bo‘lsa, hamda uzluksiz hosilaga ega bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

tenglik o‘rinli.

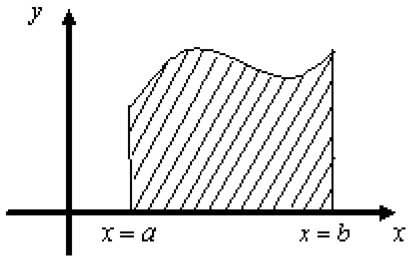
Bo‘laklab integrallash formulasi. Agar $u=u(x), v=v(x)$ funksiyalar va ularning hosilalari $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

tenglik o‘rinli.

9.3. Aniq integralning tatbiqlari. Shaklning yuzasini hisoblash

1) $f(x)\in C[a,b]$ bo‘lib, ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq 0$ tengsizlik bajarilsin. Yuqoridan $f(x)$ funksiya gradiyenti, yon tomondan $x=a$ va $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya (soha yuzi)

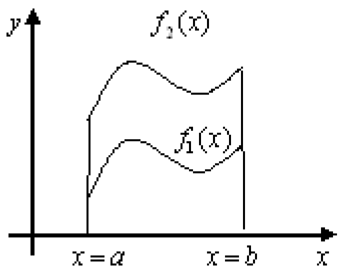


24-rasm

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

bo‘ladi.

2) Agar tekislikda shakl $f_1(x)\in C[a,b]$, $f_2(x)\in C[a,b]$ (ixtiyoriy $x\in[a,b]$ da $0\leq f_1(x)\leq f_2(x)$) $x=a$ va $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa, uning yuzi quyidagi integral bilan hisoblanadi



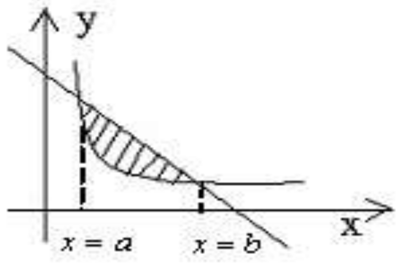
$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

bo‘ladi.

25-rasm

Misol. Ushbu $xy=4;\ x+y=5$ shakl yuzi hisoblansin.

$xy=4,\ x+y=5,\quad y=\frac{4}{x},\ y=5-x$. Soha 26-rasmda shtrixlangan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.



26-rasm

$\frac{4}{x}=5-x,\ x(5-x)=4,\ 5x-x^2-4=0,\ x^2-5x+4=0,\ x_1=\frac{5+3}{2}=4,\ x_2=\frac{5-3}{2}=1$

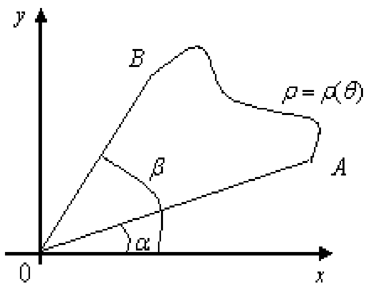
$(x_1=b, x_2=a),\ S=\int_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x^2}\right)\Bigg|_1^4=20-8+\frac{1}{4}-5+\frac{1}{2}-4=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.

9.4. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan shaklning yuzasini aniq integral yordamida hisoblash

Agar tekis shakl qutb koordinatalar sistemasida ushbu $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ funksiya tasvirlangan $\overset{\cup}{AB}$ yoy hamda OA va OB radius vektorlar bilan aniqlangan shakl (egri chiziqli sohalar) yuzi

$$S=\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$

formula bilan hisoblanadi. Bunda $\rho(\theta)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz hamda ixtiyoriy $Q\in[\alpha,\beta]$ uchun $\rho(\theta)\ge 0$.



Tekislikdagi shaklni o‘rab turuvchi egri chiziq

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\qquad (\alpha\le t<\beta)$$

27-rasm

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin.

a) $x=x(t)$, $y=y(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz, ixtiyoriy $t\in[\alpha,\beta]$ da $x(t)\ge 0$, $y(t)\ge 0$ va $x'(t)$ uzluksiz va $x'(t)\ge 0$ bo‘lsa, shakl yuzi

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)dt$$

bo‘ladi.

b) $x=x(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz, ixtiyoriy $t\in[\alpha,\beta]$ da $x(t)\ge 0$, $y(t)\ge 0$ va $y(t)$ funksiya uzluksiz va $y'(t)\ge 0$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda shakl yuzi

$$S=\int_\alpha^\beta x(t)\cdot y'(t)dt$$

bo‘ladi.

9.5. Aniq integral yordamida yoy uzunligini hisoblash

1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz va uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Shu funksiya grafikdagi $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalar orasidagi $\overset{\cup}{AB}$ egri chiziq yoyi uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

bo‘ladi.

Agar $b = x$ desak, $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$ bo‘lib,

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2} \Rightarrow dl = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Bu ifodaga ***yoy differensiali*** deb ataladi.

2) ***Parametrik ko‘rinishda berilgan egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash***. Agar

$$\overset{\cup}{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$$

bo‘lib, $\varphi'(t) \in C[\alpha, \beta]$ va $\psi'(t) \in C[\alpha, \beta]$ bo‘lsa,

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$$

bo‘ladi.

3) Qutb koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash.

3.1. Agar

$$\overset{\cup}{AB}: \begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ r = r(\varphi) \end{cases}$$

bo‘lib, $r'(\varphi) \in C[\alpha, \beta]$ bo‘lsa, unda

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Misol. $r = 4e^{\frac{5\varphi}{4}}$ $\quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$

Egri chiziq yoyi uzunligi $\ell=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r'^2(\varphi)+r^2(\varphi)}d\varphi$ formula orqali hisoblanadi.

$r'=4\cdot\frac{5}{4}e^{\frac{5\varphi}{4}}=5e^{\frac{5\varphi}{4}}$, $\ell=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{25e^{\frac{5\varphi}{2}}+16e^{\frac{5\varphi}{2}}}\,d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\frac{5\varphi}{4}}\sqrt{41}d\varphi=\sqrt{41}\cdot\frac{4}{5}e^{\frac{5\varphi}{4}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4\sqrt{41}}{5}\left(e^{\frac{5\pi}{4}}-e^{\frac{5\pi}{8}}\right)$.

3.2. Agar

$$\overset{\cup}{AB}:\begin{cases}\rho_1\le\rho\le\rho_2\\ \varphi=\varphi(\rho)\end{cases}$$

bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l=\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{[\rho\varphi'(\rho)]^2+1}\,d\rho$$

bo‘ladi.

9.6. Aylanma sirtning yuzasi

1. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin, uning grafigi quyidagi

$$\{(x,\ f(x)):x\in[a;b]\}$$

nuqtalar to‘plamidan iborat. Shu grafikdagi $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalar orasidagi $\overset{\cup}{AB}$ egri chiziqni qaraymiz.

Aytaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo‘lib, $f(x)\ge 0$ bo‘lsin. $\overset{\cup}{AB}$ yoyni OX o‘qi atrofida aylantiramiz va aylanma sirtni hosil qilamiz. Agar $f'(x)\in C[a,b]$ bo‘lsa, unda shu aylanma sirtning yuzasi ushbu

$$S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

formula yordamida hisoblanadi.

2. $\overset{\cup}{AB}$ egri chiziq yuqori yarim tekislikda joylashgan bo‘lib u $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ parametrik tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $x=x(t)$ va $y=y(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va uzluksiz $x'(t), y'(t)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Bu egri chiziqni OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning yuzi

$$S=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

formula yordamida hisoblanadi.

9.7. Aniq integral yordamida hajmni hisoblash

1. Faraz qilaylik, bizga biror T jism berilgan bo‘lib, uning OY o‘qiga parallel bo‘lgan kesimlarining yuzasi ma’lum bo‘lsin Bu yuza x o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘ladi, uni $S=S(x)$ deb belgilaylik. Agar $S(x)\in C[a,b]$ bo‘lsa, unda T jismning hajmi V ushbu

$$V=\int_a^b S(x)\,dx$$

formula yordamida hisoblanadi.

2. ***Aylanma jismning hajmi.*** Ushbu

$$D=\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$$

egri chiziqli trapetsiyani OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma jismning hajmi

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

formula yordamida hisoblanadi.

Agar shu shaklning o‘zi OY o‘qi atrofida aylantirilsa, u holda aylanish jismining hajmi

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

3. ***Umumiy holda*** $a\le x\le b$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$ tekislikni OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V=\pi\int_a^b \left[y_2^2(x)-y_1^2(x)\right]dx$$

bo‘ladi.

4. Egri chiziq

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $x=x(t)$ funksiya uzluksiz hamda uzluksiz $x'(t)\ge 0$ hosilaga ega, $y(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz hamda

$\forall t \in [\alpha, \beta]$ da $y(t) \geq 0$. Bu chiziq bilan chegaralangan shaklning OX o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) x'(t) dt$$

bo‘ladi.

9.8. O`zgaruvchi kuchning bajargan ishi

OX o‘qida shu o‘q bo‘ylab biror jism $F = F(x)$ kuch ta’sirida harakat qilayotgan bo‘lsin. Agar $F(x) \in C[a,b]$ bo‘lsa, $F = F(x)$ kuch ta’sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o‘tkazishda bajarilgan ish ushbu

$$A = \int_a^b F(x)\, dx$$

formula yordamida hisoblanadi

9.9. Statik moment. Og`irlik markazi

Aytaylik, m massaga ega bo‘lgan $M(x, y)$ - moddiy nuqta berilgan bo‘lsin. my va mx ko‘paytmalarga mos ravishda berilgan nuqtaning OX **va** OY ***o‘qlarga nisbatan statik momentlari*** deb ataladi.

Egri chiziqning OX va OY o‘qlarga nisbatan ***statik momentlari*** M_x va M_y lar ham shu kabi aniqlanadi hamda

$$M_x = \int_0^l y\, dl,\ M_y = \int_0^l x\, dl$$

formulalar yordamida hisoblanadi. Bu yerda $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ - yoy differensiali, l esa berilgan egri chiziq uzunligi.

Berilgan egri chiziq og`irlik markazining koordinatalari esa ushbu

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l},\ \bar{y} = \frac{M_x}{l}$$

formulalar yordamida hisoblanadi.

9.10. Geometrik shakllarning statik momentlari va og`irlik markazi

Agar geometrik shakl

$$D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

egri chiziqli trapetsiyadan iborat bo‘lsa, unda

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx, \quad M_y = \frac{1}{2} \int_a^b xy\, dx$$

va

$$\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\frac{M_y}{S}, \frac{M_x}{S}\right)$$

bo‘ladi. Bu yerda $S=\int_a^b y(x)\,dx$ - trapetsiyaning yuzi.

Misol. Ushbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips yoyining uzunligi hisoblansin.

Ellipsni parametrik ko‘rinishida $\begin{cases} x=a\sin t \\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ kabi ifodalab olamiz.

Unda

$$l=4l_1=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)+b^2\sin^2 t}\,dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}\,dt=4aE\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)=4aE(\varepsilon),$$

bu yerda $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - ellipsning ekstsentrisiteti.

10-§. Sonli qatorlar

Ushbu

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Quyidagi

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

ifoda ***qator*** (***sonli qator***) deyiladi.

(1) qator qisqacha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n+... .$$

Bunda $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ elementlar ***qatorning hadlari*** deyiladi. a_n esa qatorning ***umumiy hadi*** deyiladi. (1) qatorning hadlaridan quyidagi

$$A_1=a_1,$$
$$A_2=a_1+a_2,$$
$$A_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

yig‘indilarni tuzamiz. Bu yig‘indilar ***qatorning qismiy yig‘indilari*** deyiladi.

(1) qator berilgan holda har doim bu qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat ushbu

$$\{A_n\}: A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

Ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{A_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

bo'lsa, u holda qator ***yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{A_n\}$ ketma-ketlik cheksiz bo'lsa yoki bu limit mavjud bo'lmasa, u holda (1) qator ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(1) qatorning birinchi m ta hadini tashlasak, unda

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

qator hosil bo'ladi. Bu qator (1) qatorning (m-hadidan keyingi) ***qoldig'i*** deyiladi.

10.1. Yaqinlashuvchi qatorlar haqidagi teoremalar

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

qator berilgan bo'lin.

Teorema. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning istalgan

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

qoldiq qator yaqinlashuvchi bo'lsa, berilgan (1) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Natija. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning qoldig'i

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k} + ...$$

$m \to \infty$ da nolga intiladi.

Teorema. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ...$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi cA gat eng bo'ladi ($c \neq 0$-n ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son).

Teorema. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ...$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indilari mos ravishda A va B ga teng bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ...$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $A + B$ gat eng bo‘ladi.

Teorema (*qator yaqinlashishining zaruriy sharti*). Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu qatorning a_n umumiy hadi $n \to \infty$ da nolga intiladi.

10.2. Sonli qatorlarning turlari

Qatorlarning tuzilishiga ko‘ra turlari quyidagilar:

1) barcha hadlarining ishoralari manfiy bo‘lmagan qatorlar;

2) biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlarining ishoralari manfiy bo‘lmagan qatorlar

3) barcha hadlarining ishoralari manfiy son yoki biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlarining ishoralari manfiy bo‘lgan qatorlar;

4) cheksiz ko‘p manfiy ishorali va cheksiz ko‘p musbat ishorali hadlari bo‘lgan qatorlar.

10.3. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchi bo‘lish sharti

Biror (1) qator berilgan bo‘lsin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Agar $a_n \geq 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ bo‘lsa, u holda (1) qator ***musbat hadli qator*** yoki qisqacha, ***musbat qator*** deyiladi.

Teorema. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning qismiy yig‘indilari ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarli.

Misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qator yaqinlashuvchidir.

Natija. Musbat qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

10.4. Musbat qatorlarni taqqoslash

Ikkita musbat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator berilgan bo‘lsin.

Teorema. n ning biror n_0 qiymatidan boshlab barcha $n \geq n_0$ lar uchun $a_n \leq b_n$ tengsizlik o‘rnli bo‘lsin. Agar *a*) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi; *b*) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k \qquad (0\le k\le\infty)$$

limit mavjud bo‘lsin. Agar *a*) $k<\infty$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi; *b*) $k>0$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Natija. Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$$

limit o‘rinli bo‘lib, $0<k<\infty$ bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi, yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. $n\in N$ ning biror n_0 qiymatidan boshlab barcha $n>n_0$ lar uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. U holda, agar *a*) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi; *b*) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

10.5. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchilik alomatlari

Koshi alomati. Musbat qator $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ berilgan bo‘lsin. Agar $n\in N$ ning biror n_0 $(n_0\ge1)$ qiymatidan boshlab barcha $n\ge n_0$ qiymatlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n}\le q<1 \quad (\sqrt[n]{a_n}\ge1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yainlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$$

limit mavjud bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator $k<1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $k>1$ bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Eslatma. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k=1$$

limit o‘rinli bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.

Dalamber alomati. Agar $n \in N$ ning biror n_0 $(n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n \geq n_0$ qiymatlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \qquad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\right)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo‘lsa, u holda $d < 1$ bo‘lganda qator yaqinlashuvchi, $d > 1$ bo‘lganda esa qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Raabe alomati. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo‘lsin.

Agar $n \in N$ ning biror n_0 $(n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ qiymatlari uchun

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq r > 1 \qquad \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1\right)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = R \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R\right)$$

limit o‘rinli bo‘lsa, $R > 1$ bo‘lganda qator yaqinlashuvchi, $R < 1$ bo‘lganda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Integral alomat (Koshining integral alomati). Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik, $[1, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz o‘smaydigan hamda manfiy bo‘lmagan $f(x)$ funksiya uchun $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ shu funksiya uchun boshlang‘ich funksiya va $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt$$

limit mavjud va chekli bo‘lganda (1) qator yaqinlashuvchi, limit mavjud bo‘lmaganda yoki cheksiz bo‘lganda (1) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Gauss alomati. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator uchun

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad (|\theta_n| < \varepsilon, \varepsilon > 0)$$

bo‘lsa, u holda

a) $\lambda > 1$ berilgan qator yaqinlashuvchi;

b) $\lambda < 1$ berilgan qator uzoqlashuvchi;

d) $\lambda = 1$ bo‘lib, $\mu > 1$ bo‘lsa berilgan qator yaqinlashuvchi;

e) $\lambda = 1$ bo‘lib, $\mu \le 1$ bo‘lsa berilgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

10.6. Garmonik qator

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

qator garmonik qator deyiladi va u uzoqlashuvchi.

Ushbu

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ qator ***umumlashgan garmonik qator*** deyiladi $\alpha > 1$ qator yaqinlashuvchi va $\alpha \le 1$ da uzoqlashuvchi.

10.7. Ixtiyoriy hadli qatorning yaqinlashuvchiligi

Biror ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo‘lsin.

Teorema. Ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$ va $m = 1, 2, 3, \dots$ lar uchun

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

10.8. Qatorning absolyut va shartli yaqinlashuvchiligi

Ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo‘lsin. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots$$

qatorni tuzamiz.

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ***absolyut yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Ta’rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ***shartli yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Eslatma. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Dalamber alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = D$$

limit o‘rinli bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $D<1$ bo‘lganda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

10.9. Hadlarining ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatorlar. Leybnis teoremasi

Ushbu

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n-1} c_n + ...$$

qatorni qaraylik, bunda $c_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Odatda bunday qator ***hadlarining ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qator*** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + ...,$$

qator hadlarining ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatordir.

Teorema (*Leybnis teoremasi*). Agar $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n-1} c_n + ...$ qatorda

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

bo‘lsa, $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n-1} c_n + ...$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

10.10. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Riman teoremasi

1. *Guruhlash xossasi*. Biror $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo‘lsin. Bu qator hadlarini guruhlab quyidagi qatorni tuzamiz:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_2}) + ... \qquad (1)$$

bunda $n_1, n_2, ...$ $(n_1 < n_2 < ....)$ lar natural sonlar ketma-ketligi bo‘lib, $k \to \infty$ da $n_k \to \infty$.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi A songa teng bo‘lsa, u holda bu qatorning hadlarini guruhlashdan hosil bo‘lgan (1) qator ham yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi ham A songa teng bo‘ladi.

2. *O‘rin almashtirish xossasi*. Ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo‘lsin. Bu qator hadlarini o‘rinlarini almashtirib, quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + ... + a'_n + ... \qquad (2)$$

qatorni tuzamiz. Bu (2) qatorning har bir a'_n hadi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning tayin bir a_n hadining aynan o‘zidir.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘’lib, yig‘indisi A songa teng bo‘lsa, u holda bu qator hadlarining o‘rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo‘lgan (2) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi ham A songa teng bo‘ladi.

Teorema (*Riman teoremasi*). Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda har qanday A (chekli yoki cheksiz) olinganda ham berilgan qator hadlarining o‘rinlarini shunday almashtirish mumkinki, hosil bo‘lgan qatorning yig‘indisi xuddi shu A ga teng bo‘ladi.

11-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar, ularning limiti va uzluksizligi

R^m fazo. R^m fazoda ketma-ketlik va uning limiti.

11.1. R^m Evklid fazosi.

m ta haqiqiy sonlar to‘plami R ning o‘zaro Dekart ko‘paytmasidan iborat ushbu

$$R^m = R\times R\times ...\times R = \{(x_1, x_2, ..., x_m);\, x_1 \in R, ..., x_m \in R\}$$

to‘plam R^m fazo (m o‘lchamli ***Evklid fazosi***) deb ataladi.

11.2. R^m fazoda masofa va uning limiti.

R^m to‘plamda ixtiyoriy $x = (x_1, x_2,..., x_m)$, $y = (y_1, y_2,..., y_m)$ nuqtalarni olaylik. Ushbu

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_m - y_m)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}$$

miqdorga x va y nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.

U quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\rho(x, y) \ge 0$ va $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2^0 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3^0 $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $(z \in R^m)$.

11.3. R^m **fazoda ketma-ketlik**

Ushbu

$$f: N \to R^m$$

akslantirishning tasvirlari (obrazlari) dan tuzilgan

$$x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}, ..., (x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}), n \in N)$$

to‘plam R^m fazoda ***ketma-ketlik*** deyiladi va u $\{x^{(n)}\}$ kabi belgilanadi.

11.4. R^m **fazoda ketma-ketlikning limiti**

R^m fazoda biror $\{x^{(n)}\}: x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}, ...$ ketma-ketlik va $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ nuqta berilgan bo‘lsin.

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ topilsaki, ixtiyoriy $n > n_0$ uchun

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, a nuqta $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad \text{yoki} \quad n \to \infty \quad \text{da} \quad x^{(n)} \to a$$

kabi belgilanadi.

11.5. Ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi

Ta`rif. Agar $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, u yaqinlashuvchi ketma- ketlik deyiladi.

Misol. R^m fazoda ushbu

$$\{x^n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\right\}$$

ketma-ketlikning limiti a=(0,0,…,0) ekanini ko‘rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Shu ε ga ko‘ra $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1$ ni topamiz.

Unda ixtiyoriy $n > n_0$ uchun

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}), (0,0,...,0)) = \sqrt{(\frac{1}{n} - 0)^2 + (\frac{1}{n} - 0)^2 + ... + (\frac{1}{n} - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + ... + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{m}{n^2}} = \frac{\sqrt{m}}{n} \langle \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1} \langle \varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon.$

Ta`rifga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) = (0,0,...,0) = a$$

bo‘ladi.

Teorema. R^m fazoda $\{x^{(n)}\} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\}$ ketma-ketlik $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ ga intilishi:

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a$$

uchun bir yo‘la

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m \end{cases}$$

11.6. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi

R^m fazoda biror M to‘plamni qariylik: $M \subset R^m$.

Ta`rif. Agar M to‘plamdagi har bir $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtaga biror qoida yoki qonunga ko‘ra bitta haqiqiy son y $(y \in R)$ mos qo‘yilgan bo‘lsa, M to‘plamda ko‘p o‘zgaruvchili (m ta o‘zgaruvchili) funksiya berilgan deyiladi va u

$$f:(x_1, x_2, ..., x_m) \to y \quad \text{yoki} \quad y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

kabi belgilanadi. Bunda M –funksiyaning aniqlanish to‘plami, $x_1, x_2, ..., x_m$- funksiya argumentlari, y esa $x_1, x_2, ..., x_m$ o‘zgaruvchilarning funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f - R^m$ –fazodagi har bir $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtaga shu nuqta koordinatalari kvadratlarining yig‘indisini mos qo‘yuvchi qoida, ya`ni

$$f:\ x=(x_1, x_2, ..., x_m) \to x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$$

bo‘lsin. Bu holda $y = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish to‘plami $M = R^m$ bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$z = \sqrt{(-1 - x^2 - y^2)(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y)}$$

funksiyaning aniqlanish to‘plamini toping. Bu funksiya x va y larning

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0 \qquad (\text{chunki } -1 - x^2 - y^2 < 0)$$

bo‘ladigan qiymatlaridagina aniqlangan. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\begin{matrix} \sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow x = p \\ \sin^2 \pi y = 0 \Rightarrow y = q \end{matrix} \qquad (p \in Z, q \in Z)$$

Berilgan funksiyaning aniqlanish to‘plami

$$M=\{ (p,q) \in R^2 : p \in Z, q \in Z \}$$

bo‘ladi.

11.7. Karrali limit

Ta`rif** (***Geyne ta`rifi*). Agar M to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ga intiluvchi har qanday $\{x^{(n)}\}$ $(x^{(n)} \neq a, n=1, 2,...)$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x^{(n)})\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b son (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi.

Ta`rif** (***Koshi ta`rifi*). Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday δ >0 son topilsaki, ushbu $0 < \rho(x,a) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x \in M$ nuqtalarda

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi.

Funksiya limiti

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{yoki} \quad \lim_{\substack{x_1\to a_1 \\ x_2\to a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_m\to a_n}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = \text{b}$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\dfrac{1}{x}, & agar \quad x \neq 0 \quad bo'lsa, \\ 0, \quad agar \quad x = 0 \quad bo'lsa. \end{cases}$$

funksiyaning $(x,y) \to (0,0)$ dagi limiti nolga teng ekanini ko'rsating.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ songa ko'ra $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ deb olinsa, unda $0 < \rho((x,y),(0,0)) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha (x, y) nuqtalarda

$$|f(x,y) - 0| = \left|x + y\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| + |y| \le 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa Koshi ta`rifiga ko'ra $(x,y) \to (0,0)$ da berilgan funksiyaning limiti 0 ekanini bildiradi:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x + y\sin\frac{1}{x}) = 0$$

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, ushbu $\rho((x,y),(0,0)) > \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha (x, y) nuqtalarda

$$|f(x,y) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x,y)$ funksiyaning $x \to \infty, y \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y) = b$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$$

limitni hisoblang.

Avvalo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{2\sin^2\frac{(x^2+y^2)}{2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{x^2+y^2}{2}x^2y^2}{\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right]^2 \cdot \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = 2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}\right]^2 \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

ekanini topamiz. So‘ngra $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ almashtirishni bajaramiz. Unda

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 0$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = 0.$$

11.8. Takroriy limit

Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya M to‘plamda $(M \subset R^m)$ berilgan bo‘lib, $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ nuqta shu M to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m$ lar tayinlangan bo‘lib $x_i \to a_i$ da berilgan funksiyaning limiti (agar u mavjud bo‘lsa) $x_1, x_2, ... x_m$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘ladi:

$$\lim_{x_i\to a_i} f(x_1, x_2, ..., x_m) = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m).$$

φ_i funksiyalarda ham shunday mulohaza yuritib ushbu

$$\lim_{x_m\to a_m}\lim_{x_{m-1}\to a_{m-1}} \cdots \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

ni hosil qilamiz. Odatda bu limit $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning ***takroriy limiti*** deyiladi.

Teorema. $f(x, y)$ funksiya $M = \{(x, y) \in R^2 : |x - x_0| < a_1, |y - y_0| < a_2\}$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Agar: 1) $(x, y) \to (x_0, y_0)$ da $f(x, y)$ funksiyaning karrali limiti mavjud:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b;$$

2) har bir tayinlangan x da (har bir tayinlangan y da)

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad \left(\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \phi(y)\right)$$

limit mavjud bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=b \qquad \left(\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=b\right)$$

takroriy limit ham mavjud bo‘ladi.

Misol. Agar $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$ bo‘lsa, ushbu takroriy limitlarni hisoblang**.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{y\to+0} f(x,y)\right) \text{ va } \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty} f(x,y)\right)$$

Yechish: x ni o‘zgarmas desak $y>0$ da x^y y-ning funksiyasi sifatida uzluksiz bo‘ladi, shu sababli

$$\lim_{y\to+0} x^y=1$$

bo‘ladi.

y ning o‘zgarmas ($y>0$) qiymatida, x ning barcha $x>0$ qiymatida x^y x –ning funksiyasi sifatida uzluksizligidan

$$\lim_{y\to+\infty} x^y=+\infty$$

bo‘ladi.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right)=\lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^y}+1}\right)=\lim_{y\to+0}1=1.$$

12-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

12.1. Funksiya uzluksizligi ta`riflari

**Ta`rif.** Agar $x\to a$ da, ya`ni

$$\begin{array}{c} x_1\to a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m\to a_m \end{array}$$

da $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),$$

ya`ni

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \ldots\ldots\\ x_m\to a_m}} f(x_1,x_2,...,x_m)=f(a_1,a_2,...,a_m)$$

bo‘lsa, funksiya $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta`rif (*Geyne ta`rifi*). Agar M to‘plamning nuqtalaridan tuzilgan a ga ($a\in M$) intiluvchi har qanday $\{x^{(n)}\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x^{(n)})\}$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta`rif** (***Koshi ta`rifi*). Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\rho(x, y) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in M$ nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb ataladi.

$f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya argumentlarining orttirmalari

$$\Delta x_1, \Delta x_2, ... \Delta x_m$$

ga mos ushbu

$$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2, ..., x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m) =$$

$$= f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi to‘liq orttirmasi deyiladi va $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m).$$

Quyidagi

$$\Delta_{x_1} f(a) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2, ... a_m) - f(a_1, a_2, ... a_m),$$

$$\Delta_{x_2} f(a) = f(a_1, a_2 + \Delta x_2, ... a_m) - f(a_1, a_2, ... a_m),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_{x_m} f(a) = f(a_1, a_2, ... a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, ... a_m),$$

ayirmalar $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning a nuqtadagi ***xususiy orttirmalari*** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 5}$$

funksiyaning ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in R^2$ nuqtada uzluksiz bo‘lishini ko‘rsating.

(x_0, y_0) nuqtaga $\Delta x, \Delta y$ orttirmalar berib, funksiyaning to‘liq orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{y_0 + \Delta y}{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 5} - \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2 + 5} =$$

$$= \frac{(y_0 + \Delta y)(x_0^2 + y_0^2 + 5) - y_0\left[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 5\right]}{[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 5](x_0^2 + y_0^2 + 5)}$$

bu tengliklardan

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Yuqoridagi ta`rifdan berilgan funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

12.2. Xususiy uzluksizlik

**Ta`rif.** Agar $\Delta x_k \to 0$ da funksiyaning xususiy orttirmasi $\Delta_{x_k} f$ ham nolga intilsa, ya`ni

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} f = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., m)$$

bo‘lsa, $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiya $(x_1, x_2,..., x_m)$ nuqtada x_k o‘zgaruvchisi bo‘yicha uzluksiz deyiladi. Odatda funksiyaning bunday uzluksizligini ***uning har o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy uzluksizligi*** deyiladi.

Teorema. Agar $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0) \in M$ nuqtada uzluksiz (barcha o‘zgaruvchili bo‘yicha bir yo‘la uzluksiz) bo‘lsa, funksiya shu nuqtada har bir o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy uzluksiz bo‘ladi.

12.3. Funksiyaning uzilishi

Ta`rif. Agar

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2,..., x_m) = b \neq f(a_1, a_2,..., a_m)$$

bo‘lsa, yoki

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2,..., x_m) = \infty$$

bo‘lsa, yoki $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lmasa, u holda funksiya $(a_1, a_2,..., a_m)$ nuqtada ***uzilishga*** ega deyiladi.

12.4. Funksiyaning tekis uzluksizligi

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, M to‘plamning $\rho((x_1', x_2',..., x_m'),(x_1'',..., x_m'')) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $(x_1',..., x_m') \in M, (x_1'',..., x_m'') \in M$ nuqtalarda

$$\left| f(x_1'', x_2'',..., x_m'') - f(x_1', x_2',..., x_m') \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiya M to‘plamda ***tekis uzluksiz*** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = ax + by + c$$

funksiyaning

$$M = \{(x, y) \in R^2 : |x| < +\infty, |y| < +\infty, \quad a \in R, b \in R, c \in R\}$$

to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish: $(x_1, y_1) \in M$ va $(x_2, y_2) \in M$ nuqtalar uchun quyidagiga ega bo‘lamiz

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |ax_1 + by_1 + c - (ax_2 + by_2 + c)| =$$

$$= |a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2)| \le |a| \cdot |x_1 - x_2| + |b| \cdot |y_1 - y_2|$$

ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olib, unga ko‘ra olinadigan $\delta > 0$ sonda

$$|x_1 - x_2| < \delta, \quad |y_1 - y_2| < \delta, \quad (\delta = \frac{\varepsilon}{2d}, d = \max(|a|, |b|))$$

shart bajarilganda

$$|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| \le d(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo‘lib, ta`rifdan berilgan funksiya M da tekis uzluksizligi kelib chiqadi.

Teorema (*Kantor teoremasi*). Agar $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiya chegaralangan yopiq M to‘plamda ($M \subset R$) berilgan va uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi.

13-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi va differensiallari

13.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari

$f(x_1, x_{2,}...x_m)$ funksiya ochiq M to‘plamda $(M \subset R^m)$ berilgan bo‘lib, $(x_1^0, x_2^0,...x_m^0) \in M$ bo‘lsin. Bu funksiyaning x_k $(k = 1,2,...,m)$ koordinatasiga shunday Δx_k $(k = 1, 2,..., m)$ orttirma beraylikki, $(x_1^0, x_2^0,..., x_k^0 + \Delta x_k,..., x_m) \in M$ bo‘lsin. Unda funksiya

$$\Delta x_k f = f(x_1^0, x_2^0,.., x_k^0 + \Delta x_k,.., x_m) - f(x_1^0, x_2^0,.., x_m^0)$$

xususiy orttirmaga ega bo‘ladi.

Ta`rif. Agar $\Delta x_k \to 0$ da ushbu

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0,..., x_k^0 + \Delta x_k,.., x_m^0) - f(x_1^0,.., x_m^0)}{\Delta x_k}$$

limit mavlud va chekli bo‘lsa, bu limit $f(x_1, x_2,.., x_m)$ funksiyaning $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)$ nuqtadagi x_k o‘zgaruvchisi bo‘yicha ***xususiy hosilasi*** deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_1^0,..., x_m^0)}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_k}, f`_{x_k}(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)$$

belgilarning biri bilan belgilanadi. Demak,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k} \qquad (k = 1, 2,..., m).$$

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

funksiyaning (2,2) nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalarini hisoblang.

Ta`rifdan

$$\frac{\partial f(2,2)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x, 2) - f(2,2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2+\Delta x+2} - e^{2+2}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{4+\Delta x} - e^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^4(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^4 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^4$$

Xuddi shunga o‘xshash,

$$\frac{\partial f(2,2)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(2, 2 + \Delta y) - f(2,2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{4+\Delta y} - e^4}{\Delta y} = e^4.$$

Demak,

$$\frac{\partial f(2,2)}{\partial x} = e^4, \frac{\partial f(2,2)}{\partial y} = e^4.$$

13.2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiallari

Ta`rif. Agar $f(x_1, x_2,.., x_m)$ funksiyaning $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)$ nuqtadagi $\Delta f(x_1^0, x_2^0,...x_m^0)$ orttirmasini

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m$$

kabi ifodalash mumkin bo‘lsa, $f(x_1, x_2,..., x_m)$ funksiya $(x_1^0, x_2^0,..., x_m^0)$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi (bunda $A_1, A_2,..., A_m$ lar $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ larga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmaslar, $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m$ lar esa $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ larga bog‘liq va

$\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$ da $\alpha_1 \to 0, \alpha_2 \to 0, ..., \alpha_m \to 0$ $(\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_m = 0)$ bo'lganda $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ deb olinadi).

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

funksiyaning ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in R^2$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini ko'rsating.

Berilgan funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi to'la orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$

$$= 2x_0 \Delta x + 2y_0 \Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Agar $A_1 = 2x_0, A_2 = 2y_0, \alpha_1 = \Delta x, \alpha_2 = \Delta y$ deyilsa, unda

$$\Delta f(x_0, y_0) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

bo'ladi. Bu esa berilgan funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi ekanini bildiradi.

Ta`rif. $f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya orttirmasi $\Delta f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ning $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ larga nisbatan chiziqli bosh qismi

$$A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + .. + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m$$

$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ nuqtadagi differensiali deyiladi va df yoki $df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$df(x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (\Delta x_1 = dx_1, ..., \Delta x_m = dx_m).$$

13.3. Taqribiy hisoblashda to'liq differensialning tadbig'i

Faraz qilaylik, $f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya ochiq $M \subset R^m$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) \in M$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\Delta f\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) = df\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) + 0(\rho)$$

bo'ladi. $\rho \to 0$ da

$$\frac{\Delta f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)}{df\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)} \to 1.$$

Natijada ushbu

$$\Delta f\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) \approx df\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0)$$

taqribiy formulaga kelamiz. Uni

$$\Delta f\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m$$

yoki

$$f\ (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ... x_m^0 + \Delta x_m) \approx f\ (x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m$$

kabi yozish ham mumkin.

Misol. Ushbu

$$\alpha = 1{,}02^{3{,}01}$$

miqdorning taqribiy qiymatini toping. Berilgan miqdorning taqribiy qiymatini topish uchun

$$f(x,y) = x^y$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya (1,3) nuqtada differensiallanuvchi. Demak,

$$\Delta f(1,3) = \frac{\partial f(1,3)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(1,3)}{\partial y}\partial y + 0(\rho).$$

Endi $\Delta x = 0{,}02, \Delta y = 0{,}01$ deylik: Unda

$$\Delta f(1,3) \approx \frac{\partial f(1,3)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(1,3)}{\partial y}\Delta y$$

bundan

$$f(1+0{,}02, 3+0{,}01) - f(1,3) \approx y\cdot x^{y-1}\cdot \Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y\Big|_{x=1, y=3, \Delta x=0{,}02, \Delta y=0{,}01}$$

bundan

$$f(1{,}02;3{,}01) - f(1{,}3) \approx 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot \ln 1\cdot 0{,}01 \Rightarrow 1{,}02^{3{,}01} - 1 \approx 0{,}06 \Rightarrow 1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06\,.$$

Demak,

$$\alpha = 1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06.$$

13.4. Yo‘nalish bo‘yicha hosila

Ta`rif. l chiziqdagi (x,y) nuqta l chiziq bo‘ylab (x_0, y_0) nuqtaga intilganda ushbu

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho((x_0,y_0),(x,y))}$$

nisbatning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x,y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi l ***yo‘nalish bo‘yicha hosilasi*** deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho((x_0,y_0),(x,y))}.$$

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada har qanday l yo‘nalishi bo‘yicha hosilaga ega va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$$

bo‘ladi.

Eslatma. Funksiyaning differensiallanuvchi bo‘lmagan nuqtada ham yo‘nalish bo‘yicha hosila mavjud bo‘lishi mumkin.

13.5. Murakkab funksiyaning hosilasi

Teorema. Agar

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, ..., t_k),$$
$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k),$$
$$.........................$$
$$x_m = \varphi_m(t_1, t_2, .., t_k).$$

funksiyalarning har biri $(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, $f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya esa mos $(x_1^0, x_2^0, .., x_m^0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda murakkab funksiya ham $(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib,

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_2},$$
$$..$$
$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

bo‘ladi.
Misol. Ushbu

$$u = f(x, xy, xyz)$$

funksiyaning x, y, z argumentlar bo‘yicha hosilasini toping.

Yechish: Bu funksiya x, y, z o‘zgaruvchilarning murakkab funksiyasi: $u = f(x_1, x_2, x_3)$, bu yerda $x_1 = x,\ x_2 = xy,\ x_3 = xyz,\ u = f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyaning x_1, x_2, x_3 argumentlar bo‘yicha hosilasi f_x, f_y, f_z bilan belgilaymiz.

Bu funksiyalar argumentlari ham xuddi f funksiyaning argumentlaridek yuqoridagi formulani qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1^{`}\cdot 1 + f_2^{`}\cdot y + f_3^{`} yz$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2^{`}\cdot x + f_3^{`} xz$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3^{`} xy.$$

13.6. Funksiyaning yuqori tartibli xususiy hosilalari

$f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya ochiq M $(M \subset R^m)$ to‘plamda berilgan bo‘lib, uning $(x_1, x_2, ..., x_m)$ nuqtasida $f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_m}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Ma`lumki, bu xususiy hosilalar $x_1, x_2, ..., x_m$ larga bog‘liq bo‘ladi.

Ta`rif. $f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_m}$ larning x_k $(k = 1, 2, ..., m)$ o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy hosilalari berilgan funksiyaning ***ikkinchi tartibli xususiy*** hosilalari deyiladi va

$$f''_{x_1 x_k}, ..., f''_{x_m x_k} \quad (k = 1, 2, ..., m)$$

yoki

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, m)$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} = f''_{x_1 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k} = f''_{x_2 x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

....

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_k} = f''_{x_m x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right).$$

Teorema. $f(x, y)$ funksiya ochiq M $(M \subset R^2)$ to‘plamda berilgan bo‘lib, shu to‘plamda $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ hamda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ aralash hosilalarga ega bo‘lsin. Agar aralash hosilalar $(x_0, y_0) \in M$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda shu nuqtada

$$\frac{\partial f^2 (x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f (x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu $F = f(x + y, x^2 + y^2)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasini toping. Quyidagi almashtirishni bajaramiz: $u = x + y, v = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial v}{\partial y} = 2y; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 v}{\partial x \ \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F + 0 \frac{\partial F}{\partial u} + 2 \frac{\partial F}{\partial v} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F + 2 \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4x \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 2y \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F + 0 \frac{\partial F}{\partial u} + 2 \frac{\partial F}{\partial v} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} + 2y \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 F + 2 \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 4y \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 2x \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + 2y \frac{\partial}{\partial v}\right) F + 0 \frac{\partial F}{\partial u} + 0 \frac{\partial F}{\partial v} =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2y \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 2x \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 4xy \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(x + y) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 4xy \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

13.7. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

Faraz qilaylik $f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya $(x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsin.

Ta`rif. $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiyaning $(x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lganda, shu nuqtadagi $(n-1)$ tartibli differensiali $d^{n-1} f$ ning differensiali berilgan $f(x_1, x_2 ..., x_m)$ funksiyaning n-tartibli differensiali deyiladi va u $d^n f$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

13.8. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi

$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya R^m fazoning $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ nuqtasi atrofida $n+1$ marta differensiallanuvchi bo‘lsin. Ushbu formula

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_1^0, x_2^0, .., x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + ... +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m - x_m^0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - x_m^0)\right)^2 f +$$

$$+ ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - x_m^0)\right)^n f + R_n(f),$$

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}(x_m - x_m^0)\right)^{n+1} f$$

ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ***Teylor formulasi***, $R_n(f)$ esa ***Teylor formulasining qoldiq hadi*** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = x^y$$

funksiyaning $n = 3$ bo‘lganda $(x_0, y_0) = (1,1)$ nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

Bu holda $f(x, y)$ funksiyaning Teylor formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right) f +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 f + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^3 f + R_3(f)$$

funksiyaning (1,1) dagi qiymati $f(1,1) = 1$.

Endi $f(x, y) = x^y$ funksiyaning xususiy hosilalarini va ularning (1,1) nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2 \partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = 2x^{y-1}\ln x + yx^{y-1}(\ln x)^2, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^2 \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y (\ln x)^3, \quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3} = 0.$$

Natijada

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{6}[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2 \partial y}(x-x_0)^2(y-y_0) +$$

$$+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y^2}(x-x_0)\ (y-y_0)^2 + + \frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3] + R_3(f) ==$$

$$1 + 1(x-1) + 0\cdot(y-1) + \frac{1}{2}[0(x-1)^2 + 2\cdot 1(x-1)(y-1) + 0\cdot(y-1)^2] +$$

$$+\frac{1}{6}[0\cdot(x-1)^3 + 3\cdot 1\cdot(x-1)^2(y-1) + 3\cdot 0\cdot(x-1)(y-1)^2 + 0(y-1)^3] + R_3(f) =$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3(f)$$

bo‘ladi. Bu berilgan funksiyaning Teylor formulasidir.

13.9. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremum qiymatlari

$f(x_1, x_2, .., x_m)$ funksiya ochiq $M(M \subset R^m)$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in M$ bo‘lsin.

Ta`rif. Agar $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ nuqtaning shunday U_δ atrofi:

$$U_\delta = \{(x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m : \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_k^0)^2} < \delta\} \subset M\, (\delta > 0)$$

mavjud bo‘lsaki, $\forall (x_1, x_2, ..., x_m) \in U_\delta$ uchun

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) \le f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \quad (f(x_1, x_2, ..., x_m) \ge f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0))$$

bo‘lsa, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada maksimumga (minimumga) ega deyiladi, $f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ qiymat esa $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiyaning ***maksimum (minimum) qiymati*** deyiladi. U

$$f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)=\max_{(x_1,...,x_m)\in U_\delta}\{f(x_1,x_2,...,x_m)\}$$

$$(f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)=\min_{(x_1,...,x_m)\in U_\delta}\{f(x_1,x_2,..,x_m)\}).$$

kabi belgilanadi.

Teorema. Agar $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada barcha $\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_m}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda $\frac{\partial f(x_1^0,x_2^0,....,x_m^0)}{\partial x_i}=0$, $i=1,2,...,m$ bo‘ladi.

Teorema. $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,....,x_m^0)\in R^m$ nuqtaning biror $U_\delta(\delta>0)$ atrofida berilgan va ushbu shartlarni bajarsin:

1) $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya U_δ da barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha birinchi va ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega;

2) $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqta $f(x_1,...,x_m)$ funksiyaning statsionar nuqtasi;

3) koeffitsientlari

$$a_{ik}=\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\partial x_i\partial x_k}\quad (i,k=1,2,...,m)$$

bo‘lgan

$$Q(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m)=\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan.

U holda $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada minimumga (maksimumga) erishadi.

Agar kvadratik forma ishora saqlamasa, $f(x,y)$ funksiya $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun bu teorema quyidagicha bo‘ladi: $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning atrofi

$$U_\delta=\left\{(x,y)\in R^2:\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}(\delta>0)$$

da berilgan va bu atrofda barcha birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. (x_0,y_0) nuqta $f(x,y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

va

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},a_{12}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},a_{22}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

bo‘lsin.

1^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \quad \text{va} \quad a_{11}>0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga erishadi.

2^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \quad \text{va} \quad a_{11}<0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga erishadi.

3^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishmaydi.

4^0. Agar

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$$

bo‘lsa $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada ekstremumga erishishi ham, erishmasligi ham mumkin. Bu “shubhali” hol qo‘shimcha tekshirish talab qiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x,y)=x^3+y^3-3axy \quad (a\neq 0)$$

funksiyani ekstremumga tekshiring.

Avvalo berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2-3ay,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3y^2-3ax.$$

Ularni nolga tenglab,

$$\begin{cases} 3x^2-3ay=0, \\ 3y^2-3ax=0. \end{cases}$$

sistemadan berilgan funksiyaning statsionar nuqtalari (0,0) hamda (a,a) ekanini topamiz.

Ravshanki,

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=6y, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-3a.$$

(a,a) nuqtada

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(a,a)}{\partial x^2}=6a, \quad a_{12}=\frac{\partial^2 f(a,a)}{\partial x\partial y}=-3a, \quad a_{22}=\frac{\partial^2 f(a,a)}{\partial y^2}=6a$$

bo‘lib,

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=36a^2-9a^2=27a^2>0$$

bo‘ladi.

Demak, $a>0$ da $a_{11}>0$ bo‘lib, qaralayotgan funksiya (a,a) nuqtada minimumga, $a<0$ da $a_{11}<0$ bo‘lib, qaralayotgan funksiya (a,a) nuqtada maksimumga erishadi.

(0,0) nuqtada

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=36\cdot 0-9a^2=-9a^2<0$$

bo‘lib, bu nuqtada funksiya ekstremumga erishmaydi.

$f(x,y,z)$ funksiya $(x_0,y_0,z_0)\in R^3$ nuqtaning biror U_δ atrofida $(\delta>0)$ berilgan va bu atrofda barcha birinchi, ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsin. (x_0,y_0,z_0) nuqta $f(x,y,z)$ funksiyaning statsionar nuqtasi

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$f'_y(x_0,y_0,z_0)=0,$$
$$f'_z(x_0,y_0,z_0)=0,$$

va

$$A_1=a_{11},\quad A_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad A_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

bu determinantlarda,

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0,y_0,z_0),\ a_{22}=f''_{y^2}(x_0,y_0,z_0),\ a_{33}=f''_{z^2}(x_0,y_0,z_0),$$

$$a_{12}=a_{21}=f''_{xy}(x_0,y_0,z_0),=f''_{yx}(x_0,y_0,z_0),\ a_{13}=a_{31}=f''_{xz}(x_0,y_0,z_0),=f''_{zx}(x_0,y_0,z_0),$$

$$a_{23}=a_{32}=f''_{yz}(x_0,y_0,z_0),=f''_{zy}(x_0,y_0,z_0),$$

1) Agar $A_1>0,\ \ A_2>0,\ \ A_3>0$ bo‘lsa, $f(x,y,z)$ funksiya (x_0,y_0,z_0) nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

2) Agar $A_1<0,\ A_2>0,\ A_3<0$ bo‘lsa, $f(x,y,z)$ funksiya (x_0,y_0,z_0) nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

3) Agar 1) va 2) guruhdagi shartlarning birortasi bajarilmasa qo‘shimcha tekshirish talab qilinadi.

14-§. Oshkormas funksiyalar

x va y o‘zgaruvchilarning $F(x,y)$ funksiyasi uchun ushbu

$$F(x,y)=0$$

tenglamaga ega bo‘laylik.

Teorema. $F(x,y)$ funksiya $(x_0,y_0)\in R^2$ nuqtaning biror $U_{h,k}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: x_0-h<x<x_0+h, y_0-k<y<y_0+k\}$ $(h>0, k>0)$ atrofida berilgan va quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $U_{h,k}((x_0,y_0))$ da uzluksiz;

2) x o‘zgaruvchining (x_0-h,x_0+h) oraliqdan olingan har bir tayin qiymatida y o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida o‘suvchi;

3) $F(x_0,y_0)=0$.

U holda (x_0,y_0) nuqtaning shunday

$$U_{\delta,\varepsilon}((x_0,y_0))=\{(x,y)\in R^2: x_0-\delta<x<x_0+\delta, y_0-\varepsilon<y<y_0+\varepsilon\}$$

atrofi $(0<\delta<h, 0<\varepsilon<k)$ topiladiki,

1) ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun $F(x,y)=0$ tenglama yagona y yechimga $(y \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon))$ ega, yani $F(x,y)=0$ tenglama yordamida

$$x \to y : F(x,y)=0$$

oshkormas ko'rinishdagi funksiya aniqlanadi.

2) $x = x_0$ bo'lganda unga mos kelgan $y = y_0$ bo'ladi,

3) oshkormas ko'rinishda aniqlangan

$$x \to y : F(x,y)=0$$

funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Teorema. $F(x,y)$ funksiya $(x_0, y_0) \in R^2$ nuqtaning biror atrofi $U(x_0, y_0)$ da aniqlangan bo'lib quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1^0. $F(x,y)$ funksiya U da n marta uzluksiz differensiallanuvchi ($n = 1,2...$)

2^0. $F(x_0, y_0)=0$.

3^0. $F_y^`(x_0, y_0) \neq 0$.

U holda shunday $I \subset U(x_0, y_0)$ atrof va bu atrofda $f(x)$ funksiya mavjud bo'lib,

$$(I = I_x \times I_y ; I_x = \{x \in R : |x-x_0| < \alpha\}, I_y = \{y \in R : |y-y_0| < \beta\})$$

ixtiyoriy $(x,y) \in I$ larda

1) $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y = f(x)$

2) $f(x)$ funksiya I_x da n-marta uzluksiz differensiallanuvchi va 1-tartibli hosila uchun

$$f^`(x) = -\frac{F_x^`(x, f(x))}{F_y^`(x, f(x))}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ushbu

$$\begin{cases} F_1 = F_1(x,y,u,v)=0, \\ F_2 = F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

tenglamalar sistemasini qaraylik.

Misol. Ushbu

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0 \quad (y > 0)$$

tenglama oshkormas funksiyani aniqlaydimi?

$y^2 - \ln y$ ayirma har doim musbat bo'ladi:

$$y^2 - \ln y > 0.$$

Shu sababli x o'zgaruvchining $(-\infty, \infty)$ dagi hech bir qiymatida

$$x^2 + y^2 - \ln y = 0$$

tenglik bajarilmaydi. Binobarin, berilgan tenglama oshkormas funksiyani aniqlamaydi.

15-§. FUNKSIONAL KETMA-KETLIKLAR VA QATORLAR

15.1. Funksional ketma-ketlik va qatorlarning yaqinlashuvchiligi

Faraz qilaylik, har bir natural $n \in N$ songa X to‘plamda aniqlangan $f_n(x)$ funksiya mos kelsin. U holda

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

ketma-ketlik hosil bo‘lib, bu ketma-ketlik ***funksional ketma-ketlik*** deyiladi. Funksional ketma-ketlik $\{f_n(x)\}$, uning umumiy hadi esa $f_n(x)$ kabi belgilanadi.

Ta`rif. Agar $\{f_n(x_0)\}$ sonlar ketma-ketligi ***yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi)*** bo‘lsa, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik x_0 nuqtada yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi, x_0 nuqta esa bu funksional ketma-ketlikning yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtasi deyiladi.

$\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to‘plam ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi deyiladi. $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi M da aniqlangan ushbu

$$f : x \to \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in M)$$

funksiya, $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlikning limit funksiyasi deyiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in M).$$

15.2. Tekis yaqinlashuvchiligi

Biror $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

funksional ketma-ketlik berilgan bo‘lib, M esa bu funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi va $f(x)$ limit funksiyasi bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in M).$$

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ topilsaki, ixtiyoriy $n > n_0$ uchun bir yo‘la hamma $x \in M$ lar uchun

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik M to‘plamda $f(x)$ ***ga tekis yaqinlashadi*** (funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashuvchi) deyiladi.

Demak, bu holda ta`rifdagi n_0 natural son faqat ε ga bog‘liq bo‘lib, x larga bog‘liq bo‘lmaydi.

$\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $f(x)$ ga tekis yaqinlashuvchiligi

$$f_n(x) \Rightarrow f(x) \qquad (x \in M)$$

kabi belgilanadi.

15.3. Notekis yaqinlashuvchilgi

**Ta`rif.** Agar ketma-ketlik har bir $\varepsilon > 0$ uchun hamma $x$ lar uchun umumiy $n_0$ topish mumkin bo‘lmasa, ya`ni ixtiyoriy $n \in N$ olinganda ham shunday ε_0 va $x_0 \in M$ topilsaki,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilmasa, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik M to‘plamda $f(x)$ ga notekis yaqinlashadi deyiladi.

Bu holda n_0 natural son ε ga bog‘liq bo‘lishi bilan birga qaralayotgan x ga ham bog‘liq bo‘ladi.

Teorema. $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning M to‘plamda limit funksiya $f(x)$ ga tekis yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Misol. Ushbu

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} \qquad (0 \le x \le 1)$$

funksional ketma-ketlikni tekis yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Bu ketma-ketlikning limit funksiyasi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} = 1$$

bo‘ladi. Endi

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} - 1 \right| = \left| \frac{nx}{x^2 + n^2} \right| = \frac{nx}{x^2 + n^2}$$

ning supremumini topamiz. Ravshanki, $[0,1]$ da

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = \sup \frac{nx}{x^2 + n^2} = \max \frac{nx}{x^2 + n^2}$$

bo‘ladi. Agar $x \in [0,1]$ va n>1 da

$$\left(\frac{nx}{x^2 + n^2} \right)' = \frac{n(x^2 + n^2) - nx \cdot 2x}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n(n^2 - x^2)}{(x^2 + n^2)^2} > 0$$

ekanligini e`tiborga olsak, unda [0,1] da $\frac{nx}{x^2 + n^2}$ ning o‘suvchi bo‘lishini va u $[0,1]$ da o‘zining teng katta qiymatini $x = 1$ da qabul qilishini aniqlaymiz. Demak,

$$\max \frac{nx}{x^2 + n^2} = \frac{n}{1 + n^2}.$$

Shunday qilib, berilgan ketma-ketlik uchun

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n}{1 + n^2}$$

bo‘lib, undan

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)|=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan ketma-ketlik $[0,1]$ da tekis yaqinlashuvchi.

15.4. Fundamental ketma-ketlik. Koshi teoremasi

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $n_0\in N$ son topilsaki, $n>n_0, m>n_0$ bo‘lganda ixtiyoriy $x\in X$ uchun bir yo‘la

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik X da ***fundamental*** ketma-ketlik deyiladi.

Teorema (**Koshi teoremasi**). $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik X to‘plamda limit funksiyaga ega bo‘lishi va unga tekis yaqinlashishi uchun u X da fundamental bo‘lishi zarur va yetarli.

15.5. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketliklarning xossalari

M to‘plamda $(M\subset R)$ biror $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik berilgan bo‘lib, uning limit funksiyasi $f(x)$ bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad (x\in M)$$

1^0. Agar $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hadi M to‘plamda uzluksiz bo‘lib, bu funksional ketma-ketlik M da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $f(x)$ limit funksiya ham M to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

2^0. Agar $x\to x_0$ da $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ hadi chekli

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n \qquad (n=1,2,3,...)$$

limitga ega bo‘lib, bu ketma-ketlik M da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi, uning limiti $a(a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ esa $f(x)$ ning $x\to x_0$ dagi limitiga teng:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a.$$

3^0. Agar $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hadi $[a,b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx,..., \int_a^b f_n(x)dx,...$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi, uning limiti esa $\int_a^b f(x)dx$ ga teng bo‘ladi:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

$\mathbf{4^0}$**.** Agar $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik har bir $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hadi $[a,b]$ segmentda uzluksiz $f_n^`(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hosilaga ega bo‘lib bu hosilalardan tuzilgan

$$f_1^`(x), f_2^`(x),..., f_n^`(x),\dots$$

funksional ketma-ketlik $[a,b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda limit funksiya $f(x)$ shu $[a,b]$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\{f_n^`(x)\}$ ketma-ketlikning limiti $f^`(x)$ ga teng bo‘ladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d}{dx}f_n(x)\right]=f^`(x)=\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right].$$

15.6. Funksional qatorlar va ularning yaqinlashuvchiligi

X to‘plamda $(X\subset R)$ biror

$$u_1(x),u_2(x),...,u_n(x),...$$

funksional ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

ifoda funksional qator deyiladi va u $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

Ta`rif. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)(x_0\in X)$ sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi, x_0 nuqta esa funksional qatorning ***yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtasi*** deyiladi.

15.7. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to‘plam bu funksional qatorning ***yaqinlashish sohasi*** deyiladi.

(1) funksional qatorning dastlabki hadlaridan tuzilgan ushbu

$$S_1(x)=u_1(x)$$
$$S_2(x)=u_1(x)+u_2(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

yig‘indilar funksional qatorning qismiy yig‘indilari deyiladi.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$ ga (1) funksional qatorning limiti deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+...+x^{n-1}+...$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping. Bu qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \begin{cases} \dfrac{1-x^n}{1-x}, agar \quad x \neq 1 \quad bo'lsa, \\ n, \qquad agar \quad x = 1 \quad bo'lsa \end{cases}$$

bo‘ladi. Unda

$$\forall x \in (-1,1) \quad uchun \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall x \in [1,+\infty) \quad uchun \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \infty,$$

ixtiyoriy $x \in (-\infty,-1]$ uchun $\{S_n(x)\}$ ketma-ketlik limitga ega emas.

Shunday qilib, berilgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi $M(-1;1)$ intervaldan iborat ekan.

15.8. Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligi

X to‘plamda $(X \subset R)$ biror yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + .. + u_n(x) + ...$$

funksional qator berilgan bo‘lib, uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Ta`rif. Agar X to‘plamda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat $\{S_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik qator yig‘indisi $S(x)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda bu funksional qator X da tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

$\{S_n(x)\}$ ketma-ketlik X da $S(x)$ ga notekis yaqinlashsa, unda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator X da ***notekis yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator X da $S(x)$ ga tekis yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Veyershtrass alomati. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

funksional qatorning har bir $u_n(x) \quad (n = 1, 2, 3,...)$ hadi X to‘plamda

$$|u_n(x)| \le c_n \quad (n = 1, 2, 3,...)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator X da ***tekis yaqinlashuvchi*** bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\sum \frac{\sin n^2 x}{n^2} = \frac{\sin 1^2 x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \ldots$$

funksional qatorni Veyershtrass alomatidan foydalanib tekis yaqinlashuvchiligini ko‘rsating.

Berilgan qatorning har bir

$$u_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n^2} \quad (n = 1,2,3\ldots)$$

hadi uchun

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$$

bo‘ladi va ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Veyershtrass alomatiga ko‘ra berilgan funksional qator $(-\infty, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Teorema (***Koshi teoremasi***). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning X da tekis yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning qismiy yig‘indilari ketma-ketligining X da fundamental bo‘lishi zarur va yetarli.

15.9. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

1^0. Funksional qator yig‘indisining uzluksizligi. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning hadlari X to‘plamda uzluksiz bo‘lib, bu funksional qator X da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qatorning yig‘indisi $S(x)$ ham X da uzluksiz bo‘ladi.

2^0. Funksional qatorlarda hadma-had limitga o‘tish. Agar $x \to x_0$ da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ hadi chekli

$$\lim_{x \to x_0} u_n(x) = c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

limitga ega bo‘lib, bu qator X da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

qator ham yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi c esa $S(x)$ ning $x \to x_0$ dagi limiti

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=c$$

ga teng bo‘ladi:

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x).$$

3^0. Funksional qatorni hadma-had integrallash. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hadi $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, bu qator shu segmentda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan

$$\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+...+\int_a^b u_n(x)dx+...$$

qator ham yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi esa $\int_a^b S(x)dx$ ga teng bo‘ladi:

$$\int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))dx=\sum_{n=1}^{\infty}(\int_a^b u_n(x)dx).$$

ga teng bo‘ladi.

4^0. Funksional qatorni hadma-had differensiallash. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funksional qatorning har bir $u_n(x)$ hadi $(n=1,2,3,...)$ $[a,b]$ segmentda uzluksiz $u_n'(x)$ $(n=1,2,3,...)$ hosilaga ega bo‘lib, bu hosilalardan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{`}(x)$ funksional qator $[a,b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda berilgan funksional qatorning yig‘indisi $S(x)$ shu $[a,b]$ da $s^{`}(x)$ hosilaga ega va

$$S^{`}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{`}(x)$$

bo‘ladi:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x).$$

16-§. DARAJALI QATORLAR

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$

yoki umumiyroq

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...$$

Qatorlar (bunda $a_0,a_1,...,a_n,...va-x_0$ -o‘zgarmas haqiqiy sonlar) ***darajali qatorlar*** deyiladi.

Teorema (***Abel teoremasi***). Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator x ning $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) qiymatida yaqinlashuvchi bo‘lsa, x ning

$$|x| < |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida darajali qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator x ning ba`zi ($x \neq 0$) qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba`zi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda shunday yagona r ($r > 0$) son topiladiki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator x ning $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

16.1. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi

Ta`rif. Yuqoridagi teoremadan r soni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning ***yaqinlashish radiusi***, $(-r, r)$ interval esa darajali qatorning ***yaqinlashish intervali*** deyiladi.

Eslatma. $x = \pm r$ nuqtalarda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator yaqinlashishi ham mumkin, uzoqlashishi ham mumkin.

Teorema (*Koshi-Adamar teoremasi*). Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} - \text{yuqori limit}) \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Eslatma. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ bo‘lsa, $r = +\infty$; agar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ bo‘lsa, $r = 0$ bo‘ladi.

Eslatma. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ darajali qatorning yaqinlashish intervali $(x_0 - r, x_0 + r)$ bo‘ladi. Bunda r ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ qatorning yaqinlashish radiusi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^{\sqrt{2}}} + \ldots + \frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}} + \ldots$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusini, yaqinlashish intervalini va yaqinlashish sohasini toping.

Bu darajali qatorning yaqinlashish radiusini (1) ga ko‘ra topamiz:

$$r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\sqrt{n}}{n}}=1$$

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$, yaqinlashish intervali esa (-1,1) bo‘ladi. $x=\pm r=\pm 1$ da darajali qator mos ravishda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

sonli qatorlatga aylanadi. Bu qatorlarning yaqinlashuvchiligi ma`lum. Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi [-1,1] segmentdan iborat.

16.2. Darajali qatorlarning xossalari

Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (1)$$

berilgan bo‘lsin.

1^0. Agar (1) qatorning yaqinlashish radiusi r ($r>0$) bo‘lsa, u holda bu qator $[-c,c]$ ($0<c<r$) da tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

2^0. Agar (1) qatorning yaqinlashish radiusi r bo‘lsa, u holda bu qatorning

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

yig‘indisi $(-r,r)$ da uzluksiz funksiya bo‘ladi.

3^0. Agar (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo‘lib, bu qator $x=r$ ($x=-r$) nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qatorning yig‘indisi $S(x)$ funksiya $x=r$ ($x=-r$) nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksiz bo‘ladi.

4^0. Agar (1) qatorning yaqinlashish radiusi r bo‘lsa, bu qatorni $[a,b]$ ($[a,b]\subset(-r,r)$) oraliqda hadlab integrallash mumkin.

5^0. Agar (1) qatorning yaqinlashish radiusi r bo‘lsa, bu qatorni $(-r,r)$ da hadlab differensiallash mumkin.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

funksional qatorning yig‘indisini toping.

Ma`lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

darajali qator (-1,1) da yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $\frac{x}{1-x}$ ga teng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Bu qatorni hadlab differensiallab topamiz:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

16.3. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

$f(x)$ funksiya $x_0 (x_0 \in R)$ nuqtaning biror $U_\delta(x_0) = \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\}$ atrofida berilgan bo‘lib, shu atrofda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lsin. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{`}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{``}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots.$$

Bu yerda $f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0)$. Darajali qator $f(x)$ funksiyaning ***Teylor qato***ri deyiladi. Xususan, $x_0 = 0$ da qator quyidagicha bo‘ladi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f^{`}(0)}{1!} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

(odatda bu qatorni ***Makloren qatori*** ham deyiladi).

Teorema. $f(x)$ funksiya biror $(-r, r)$ $(r > 0)$ oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lib, uning $x = 0$ nuqtadagi Teylor qatori

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f^{`}(0)}{1!} x + \frac{f^{``}(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

bo‘lsin. Bu qator $(-r, r)$ da $f(x)$ ga yaqinlashishi uchun $f(x)$ funksiya Teylor formulasi

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{`}(0)}{1!} x + \frac{f^{``}(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x)$$

ning qoldiq hadi barcha $x \in (-r, r)$ da nolga intilishi

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0$$

zarur va yetarli.

Teorema. $f(x)$ funksiya biror $(-r, r)$ oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lsin. Agar shunday o‘zgarmas $M > 0$ soni topilsaki, barcha $x \in (-r, r)$ hamda barcha n $(n = 1, 2, \ldots)$ uchun

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < M$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $(-r, r)$ oraliqda $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi, ya`ni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f^{`}(0)}{1!} x + \frac{f^{``}(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

funksiyani Makloren qatoriga yoying.

Ma`lumki, $x \in (-1; 1)$ da

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

bo‘ladi. Bunda x ni $-x$ ga almashtirib, topamiz:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} - ....$$

Natijada

$$\ln(1+x)lb(1-x) = 2x + \frac{2x^2}{3} + ... + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + ...$$

bo‘ladi. Keyingi qatorning (-1,1) da yaqinlashuvchiligi ravshan. Demak,

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^2}{3} + ... + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + ...$$

17-§. Xosmas integrallar

17.1. Cheksiz oraliq bo‘yicha xosmas integrallar

$f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lib, bu oraliqning istalgan $[a,t]$ $(a < t < +\infty)$ qismida integrallanuvchi, ya`ni ixtiyoriy $t\ (t > a)$ uchun ushbu

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

Ta`rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

17.2. Xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligi

Ta`rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib, u chekli bo‘lsa, (1) xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ esa cheksiz $[a,+\infty)$ ***oraliqda integrallanuvchi*** deyiladi.

Agar $t \to +\infty$ da $F(x)$ funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, yoki limit mavjud bo‘lmasa, (1) xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$I = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini aniqlang va qiymatini toping.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx$$

bo‘lib,

$$F(t)=\int_0^t xe^{-x^2}dx=\int_0^t e^{-x^2}\frac{1}{2}dx^2=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^t=-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}$$

bo‘lganligidan esa

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=\frac{1}{2}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}.$$

17.3. Yaqinlashuvchi xosmas integrallarning xossalari. Asosiy formulalar

1^0. Agar $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty}[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^{+\infty}f(x)dx\pm\beta\int_a^{+\infty}g(x)dx$$

bo‘ladi, bunda α,β -o‘zgarmas sonlar.

2^0. Agar ixtiyoriy $x\in[a,+\infty)$ uchun $f(x)\le g(x)$ bo‘lib, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$$

bo‘ladi.

3^0. *Nyuton-Leybnis formulasi.* $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lib, $F(x)$ esa uning shu oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin ($F'(x)=f(x)$). Unda

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a) \qquad (2)$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$F(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}F(t).$$

4^0. O‘zgaruvchini almashtirish formulasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz, $\varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha,\beta)$ da uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo‘lib,

$$a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t)=+\infty$$

bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$$

bo‘ladi.

5^0. Bo‘laklab integrallash formulasi. Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lib, $\lim\limits_{x\to+\infty}(uv)$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$uv\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(uv) - u(a)v(a).$$

Misol. Ushbu

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

integralni hisoblang. Ma`lumki,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

bo‘lib,

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}$$

funksiyani uning boshlang‘ich funksiyasidir. Unda Nyuton-Leybnis formulasiga ko‘ra topamiz:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{3}\ln 2$$

17.4. Xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligi haqida teoremalar

Teorema. $f(x)$ funksiya xosmas integrali $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $t \in (a,+\infty)$ da $F(t) = \int_a^t f(x)dx \le C$ ($C = const$) bo‘lishi zarur va yetarli.

Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da berilgan bo‘lib, $\forall x \in [a,+\infty)$ da

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

bo‘lsin. U holda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi; $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini ko‘rsating. Ravshanki, ixtiyoriy $x \geq 1$ uchun

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

bo‘ladi. Unda

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

ning yaqinlashuvchi bo‘lishini e’tiborga olib, yuqoridagi teoremaga binoan

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

ning ham yaqinlashuvchi ekanini topamiz. Ravshanki,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{1} e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ da $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 \leq k \leq +\infty)$$

bo‘lsin. Agar $k < +\infty$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Agar $k > 0$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. Agar $x \to +\infty$ da $f(x)$ funksiya $\frac{1}{x}$ ga nisbatan $\alpha(\alpha > 0)$ tartibli cheksiz kichik bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral $\alpha > 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teorema (*Koshi teoremasi*). Quyidagi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $t_0 (t_0 > a)$ son topilib, $t' > t_0, t'' > t_0$ bo‘lgan ixtiyoriy t', t'' lar uchun

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_a^{t''} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx \right| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

17.5. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi. Dirixle alomati

Ta`rif. Agar $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ absolyut yaqinlashuvchi integral deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $[a,+\infty)$ da absolyut integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Teorema (***Dirixle alomati***). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan bo‘lib, ular quyidagi shartlarni bajarsin:

1) funksiya $[a,+\infty)$ da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang‘ich $F(x)$ ($F'(x)=f(x)$) funksiyasi chegaralangan,

2) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da $g'(x)$ hosilaga ega va u uzluksiz funksiya,

3) $g(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ da kamayuvchi,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

17.6. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari va ularning yaqinlashuvchiligi tushunchalari

$f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim intervalda berilgan bo‘lib, b nuqta $f(x)$ ning maxsus nuqtasi bo‘lsin. Bu funksiya $[a,b)$ ning istalgan $[a,t]$ $(a<t<b)$ qismida integrallanuvchi, ya`ni ixtiyoriy t $(a<t<b)$ uchun ushbu

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti

$$\lim_{t\to b-0} F(t)$$

mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ bo‘yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0} F(t)=\lim_{t\to b-0}\int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

Ta`rif. Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib, u chekli bo‘lsa, (3) xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. $f(x)$ esa $[a,b)$ va integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa yoki limit mavjud bo‘lmasa, (3) xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

17.7. Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b)$ da berilgan bo‘lib, b nuqta shu funksiyalarning maxsus nuqtasi bo‘lsin.

1^0. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi, bu yerda α, β -o‘zgarmas sonlar.

2^0. Agar ixtiyoriy $x \in [a,b)$ uchun $f(x) \le g(x)$ bo‘lib, $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi.

3^0. *Nyuton- Leybnis formulasi*. $f(x)$ funksiya $[a,b)$ oraliqda uzluksiz bo‘lib, $F(x)$ esa uning shu oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin ($F'(x) = f(x)$).

Unda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a) \qquad (4)$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$F(b-0) = \lim_{t \to b-0} F(t)$$

4^0. *O‘zgaruvchini almashtirish formulasi.* $f(x)$ funksiya $[a,b)$ da uzluksiz, $\varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha,\beta)$ da uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo‘lib,

$$a = \varphi(a) \le \varphi(t) < \lim_{t \to b-0} \varphi(t) = b$$

bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi`(t)dt$$

bo‘ladi.

5^0. *Bo‘laklab integrallash formulasi*. Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a,b)$ da uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lib, $\lim_{t \to b-0}(uv)$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$uv\Big|_a^b = \lim_{t\to b-0} u(t)v(t) - u(a)v(a)$$

Misol. Ushbu

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

integralni hisoblang. Ravshanki,

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

funksiyaning (1,2] oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi

$$F(x) = 2\cdot\sqrt{\ln x}$$

bo‘ladi. Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib, topamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = (2\sqrt{\ln x})\Big|_{1-0}^{2} = 2\ln 2 - 2\lim_{t\to 1-0}\sqrt{\ln t} = 2\ln 2$$

17.8. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi haqida teoremalar

$f(x)$ funksiya $[a,b)$ da berilgan bo‘lib, b nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo‘lsin.

Teorema. $[a,b)$ da manfiy bo‘lmagan $f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun $\forall t\in(a,b)$ da

$$F(t) = \int_a^b f(x)dx \le C \qquad (C = const)$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b)$ da berilgan bo‘lib, b nuqta shu funksiyalarning maxsus nuqtasi bo‘lsin. Agar $\forall x\in[a,b)$ da

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

bo‘lsa, u holda $\int_a^b g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchiligidan $\int_a^b f(x)dx$ ning yaqinlashuvchiligi; $\int_a^b f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligidan $\int_a^b g(x)dx$ ning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}dx$$

integralning yaqinlashuvchiligini ko‘rsating. Ravshanki, $\forall x\in[0,1)$ da

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} \le \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$$

bo‘ladi. Ushbu

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$$

xosmas integralning yaqinlashuvchiligini e’tiborga olib, yuqoridagi teoremadan foydalanib,

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}dx$$

integralning yaqinlashuvchi ekanini topamiz.

Teorema. Agar x ning b ga yetarli yaqin qiymatlarida

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\alpha}} \ (\alpha > 0)$$

bo‘lsa, u holda $\varphi(x) \le C < +\infty$ va $\alpha < 1$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi, $\varphi(x) \ge C > 0$ va $\alpha \ge 1$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teorema. Agar $x \to b-0$ da $f(x)$ funksiya $\frac{1}{b-x}$ ga nisbatan $\alpha(\alpha > 0)$ tartibli cheksiz katta bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integral $\alpha < 1(\alpha \ge 1)$ bo‘lganda yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Teorema (*Koshi teoremasi*). Quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx$$

xosmas integralning (b-maxsus nuqta) yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topilib, $b-\delta < t' < b, b-\delta < t'' < b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy t' va t'' lar uchun

$$|F(t'') - F(t')| = \left| \int_a^{t''} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx \right| = \left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Teorema (*Dirixle alomati*). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b)$ da berilgan bo‘lib, ular quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)$ funksiya $[a,b)$ da uzluksiz va uning shu oraliqdagi boshlang‘ich $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) funksiyasi chegaralangan,

2) $g(x)$ funksiya $[a,b)$ da $g'(x)$ hosilaga ega va u uzluksiz funksiya,

3) $g(x)$ funksiya $[a,b)$ da kamayuvchi,

4) $\lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0.$

U holda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

17.9. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi

Ta`rif. Agar $\int_a^b |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ absolyut yaqinlashuvchi integral deb ataladi, $f(x)$ funksiya esa $[a,b)$ da absolyut integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

18-§. PARAMETRGA BOG‘LIQ INTEGRALLAR

18.1. Parametrga bog‘liq integral tushunchasi

$f(x,y)$ funksiya

$D=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, y\in E\subset R\}$

to‘plamda berilgan bo‘lsin. y o‘zgaruvchining har bir tayin qiymatida $f(x,y)$ funksiya x o‘zgaruvchisi bo‘yicha $[a,b]$ da integrallanuvchi, ya`ni

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

Bu integral y o‘zgaruvchining E dan olingan qiymatiga bog‘liq bo‘ladi:

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \qquad (1)$$

Odatda (1) perametrga bog‘liq integral, y o‘zgaruvchi esa parametr deyiladi.

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, (ixtiyoriy $\forall x\in[a,b]$) $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$ topilsaki, $|y-y_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y\in E$ uchun

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon, \quad x\in[a,b]$$

bo‘lsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya $f(x,y)$ ning $y\to y_0$ dagi ***limit funksiyasi*** deyiladi.

$$\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)\right)$$

Ta`rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\Delta=\Delta(x,\varepsilon)>0$ topilsaki, $|y|>\Delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y\in E$ uchun

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

bo‘lsa, u holda $\varphi(x)$ funksiya $f(x,y)$ ning $y\to\infty$ dagi ***limit funksiyasi*** deyiladi.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya $y\to y_0$ da limit funksiya $\varphi(x)$ ga ega bo‘lib, unga tekis yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, x $(x\in[a,b])$ ga bog‘liq bo‘lmagan shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilib, $|y-y_0|<\delta$, $|y`-y_0|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y,y'\in E$ hamda ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Misol. Ushbu

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}$$

funksiya $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in R, 0<y<+\infty\}$ to‘plamda berilgan bo‘lsin. $y\to+\infty$ da limit funksiyani toping va intilishi xarakterini tekshiring.

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty}\sin\frac{x}{y} = 0$$

ekanini ko‘rish qiyin emas: $\varphi(x)=0$

$$|f(x,y)-\varphi(x)| = \left|\sin\frac{x}{y}\right| \le \left|\frac{x}{y}\right| < \varepsilon \Rightarrow y > \frac{|x|}{\varepsilon}.$$

ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ga ko‘ra $\Delta=\frac{|x|}{\varepsilon}$ desak, u holda $|y|>\Delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy y uchun $\left|\sin\frac{x}{y}\right|<\varepsilon$ bo‘ladi. Bu yerda $\Delta=\frac{|x|}{\varepsilon}$ faqatgina ε ga bog‘liq bo‘lmay x ga ham bog‘liqdir. Δ ni x ga bog‘liqmas qilib olib bo‘lmasligini ko‘rsatishni o‘quvchiga havola etamiz. Demak, qaralayotgan funksiya o‘z limit funksiyasiga notekis yaqinlashadi.

18.2. Parametrga bog‘liq integrallarning funksional xossalari

Teorema. $f(x,y)$ funksiya y ning E to‘plamdan olingan har bir tayin qiymatida x ning funksiyasi sifatida $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsin. Agar $f(x,y)$ funksiya $y\to y_0$ da $\varphi(x)$ limit funksiyaga ega bo‘lsa va unga tekis yaqinlashsa, u holda

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

funksiya $[c,d]$ oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda berilgan va y o‘zgaruvchining $[c,d]$ oraliqdan olingan har bir tayin qiymatida x o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsin. Agar $f(x,y)$ funksiya D da $f'_y(x,y)$ xususiy hosilaga ega bo‘lib, y D da uzluksiz bo‘lsa, u holda $I(y)$ funksiya ham $[c,d]$ oraliqda $I'(y)$ hosilaga ega va ushbu

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx \qquad (3)$$

munosabat o‘rinlidir.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda $\int_c^d I(y)dy$ integral mavjud va

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx \qquad (4)$$

munosabat o‘rinlidir.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda uzluksiz, $\alpha(y),\beta(y)$ funksiyalar $[c,d]$ da uzluksiz va $a\le\alpha(y)\le\beta(y)\le b$ (5) tengsizlikni qanoatlantirsin. U holda

$$\tilde{I}(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

funksiya ham $[c,d]$ oraliqda uzluksiz bo‘ladi.

18.3. Leybnis formulasi

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda uzluksiz, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilaga ega va D da uzluksiz, $\alpha(y),\beta(y)$ funksiyalar $\alpha'(y),\beta'(y)$ hosilalarga ega va ular (5) shartni qanoatlantirsin. U holda $I(y)$ funksiya ham $[c,d]$ oraliqda hosilaga ega va

$$I(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx+\beta'(y)f(\beta(y),y)-\alpha'(y)f(\alpha(y),y) \qquad (6)$$

munosabat o‘rinlidir. (6) ga ***Leybnis formulasi*** deyiladi.

18.4. Parametrga bog‘liq xosmas integrallar

$f(x,y)$ funksiya $D=\{(x,y)\in R^2 : x\in[a,+\infty), y\in E\subset R\}$ to‘plamda berilgan bo‘lib,

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\ , \quad (y\in E)$$

xosmas integral mavjud va chekli bo‘lsin. Bu integral y ning qiymatiga bog‘liq bo‘lib,

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral parametrga bog‘liq (chegarasi cheksiz) ***xosmas integral*** deb ataladi. Chegarasi cheksiz bo‘lgan xosmas integral ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $[a,A]$ da $(a<A<+\infty)$

$$I(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx \qquad (7)$$

integral mavjud va

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\lim_{A\to+\infty} I(A,y)\,. \qquad (8)$$

Demak, $I(y)$ va $I(A,y)$ funksiyalar (8) va (7) integrallar orqali aniqlangan bo‘lib, $I(y)$ $I(A,y)$ funksiyaning $A\to+\infty$ dagi limit funksiyasidir.

Ta`rif. Agar $A \to +\infty$ da $I(A, y)$ funksiya o‘z limit funksiyasi $I(y)$ ga E to‘plamda tekis (notekis) yaqinlashsa, u holda

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

integral E to‘plamda tekis (notekis) yaqinlashuvchi deb ataladi.

Teorema (***Koshi teoremasi***). (8) integral E to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $A' > \Delta, A'' > \Delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi A', A'' va ixtiyoriy $y \in E$ uchun

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Tekis yaqinlashishga tekshirish uchun Veyershtrass alomati: $f(x, y)$ funksiya D to‘plamda berilgan.

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

Agar shunday $\varphi(x)$ funksiya topilib $(x \in [a, +\infty))$,

1) ixtiyoriy $x \in [a, +\infty)$ va ixtiyoriy $y \in E$ uchun $f(x, y) \le \varphi(x)$ bo‘lsa,

2) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

integral E to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctgxy}{1 + x^2} dx, \quad y \in R$$

integralni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Agar

$$\left| \frac{arctgxy}{1 + x^2} \right| \le \frac{\pi}{2(1 + x^2)}$$

ekanini hisobga olsak va $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2(1 + x^2)}$ deyilsa, u holda

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

bo‘lgani uchun Veyershtrass alomatiga ko‘ra berilgan integral R da tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

18.5. Parametrga bog‘liq xosmas integrallarning funksional xossalari

$f(x,y)$ funksiya D to‘plamda berilgan y_0 E to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya

1) y o‘zgaruvchining E dan olingan har bir tayin qiymatida x o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida $[a,+\infty)$ da uzluksiz,

2) $y \to y_0$ da ixtiyoriy $[a,A]$ $(a < A < +\infty)$ oraliqda $\varphi(x)$ limit funksiyaga tekis yaqinlashuvchi bo‘lsin.

Agar

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral E to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $y \to y_0$ da $I(y)$ funksiya limitga ega va

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

munosabat o‘rinli.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda uzluksiz va

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral $[c,d]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $I(y)$ funksiya $[c,d]$ da uzluksiz bo‘ladi.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda uzluksiz, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilaga ega va u ham D da uzluksiz bo‘lib, $y \in [c,d]$ da

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lsin.

Agar $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ integral $[c,d]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $I(y)$ funksiya ham $[c,d]$ oraliqda $I'(y)$ hosilaga ega bo‘ladi va

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

munosabat o‘rinli.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya D to‘plamda uzluksiz va

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

integral $[c,d]$ oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda $I(y)$ funksiya $[c,d]$ oraliqda integrallanuvchi va

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \right] dy = \int_a^{+\infty} \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

munosabat o‘rinli.

$f(x,y)$ funksiya $D = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,+\infty), y \in [c,+\infty)\}$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

Misol. Ushbu

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, p \geq p_0 > 0$$

integralni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Ushbu $x = e^{-t}$ $(t < 0)$ almashtirish natijasida integral $\int_0^{+\infty} t^q e^{-pt} dt$ ko‘rinishga keladi.

$$\left| t^q e^{-pt} \right| \leq \frac{t^q}{e^{p_0 t}}$$

bo‘lib, $\int_0^{+\infty} \frac{t^q}{e^{p_0 t}} dt$ integralga yaqinlashuvchi ekanini ko‘rish mumkin. Demak, Veyershtrass alomatiga ko‘ra, berilgan integral tekis yaqinlashuvchi.

18.6. Eyler integrallari

1. *Beta funksiya (I tur Eyler integrali*).

Ushbu $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ $(a > 0, b > 0)$ integral ***beta funksiya*** yoki I tur Eyler integrali deb ataladi.

Beta funksiyaning xossalari:

1. $B(a,b) = B(b,a)$

2. $B(a,b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a,b-1) \quad (b > 1, a > 0)$

2`. $B(a,n) = \dfrac{n-1}{a+n-1} \cdot \dfrac{n-2}{a+n-2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{a+1} B(a,1), \quad n \in N$

3. $B(a,1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1)$

4. $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

2. *Gamma funksiya* (*II tur Eyler integrali*).

Ushbu $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ $(a > 0)$ integral ***gamma funksiya*** yoki II tur Eyler integrali deb ataladi.

Gamma funksiya xossalari:

1. $\Gamma(a) = \lim\limits_{n \to \infty} n^a \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}$

2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

2`. $\Gamma(n+1) = n!$

2``. $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$.

3. $\Gamma(a)$ $(0,+\infty)$ da uzluksiz va barcha tartibdagi uzluksiz hosilalarga ega va

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^n\,dx \qquad (n=1,2,\ldots).$$

4. $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

5. $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=B(a,1-a)=\dfrac{\pi}{\sin a\pi}$.

Xususan, $a=\dfrac{1}{2}$ da $(0<a<1)$.

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

6. $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$ **(*Lejandr formulasi*).**

Misol. Ushbu

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integralni hisoblang.

$x^2=t$ almashtirish natijasida integral quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

Yuqoridagi (5) munosabatdan foydalanib $I=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ekanini topamiz. Demak,

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Misol. Ushbu

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx$$

integralni hisoblang.

$\sin x=\sqrt{t}$ $(t>0)$ almashtirish natijasida integral quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)^3(1-\sin^2 x)^2dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{\frac{3}{2}}\cdot t^{\frac{5}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{\frac{5}{2}-1}\cdot t^{\frac{7}{2}-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{120}=\frac{3\pi}{512}$$

19-§. KARRALI INTEGRALLAR

19.1. Ikki karrali integral ta`riflari

$f(x,y)$ funksiya $(D)\subset R^2$ sohada berilgan bo‘lsin. Bu sohaning $P\in$T bo‘linishi va bu bo‘linishlarning har bir kvadratlanuvchi (D_k) $(k=1,2,...,n)$ bo‘lagida ixtiyoriy (ξ_k,η_k) nuqta olib,

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)D_k \qquad (1)$$

yig‘indini tuzaylik, bunda $D_k-(D_k)$ sohaning yuzi.

Odatda (1) $f(x,y)$ funksiyaning integral yig‘indisi yoki ***Riman yig‘indisi*** deb ataladi.

Ta`rif. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $\delta>0$ topilsaki, (D) sohaning diametri $\lambda_p<\delta$ bo‘lgan har qanday bo‘linishi hamda har bir (D_k) bo‘lakdagi ixtiyoriy (ξ_k,η_k) nuqtalar uchun

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda funksiya integrallanuvchi va I songa $f(x,y)$ funksiyaning (D) soha bo‘yicha ikki karrali integrali (Riman itegrali) deyiladi va u

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD \qquad \left(\iint_{(D)} f(x,y)dxdy\right)$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$\iint_{(D)} xydD, \qquad (D)=\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$$

integralni yuqoridagi ta`rif yordamida hisoblang.

Ravshanki, $f(x,y)=xy$ funksiya (D) da uzluksiz, demak u (D) da integrallanuvchi bo‘ladi. (D) sohani $x=\frac{i}{n}$, $y=\frac{j}{n}$ $\left(i,j=\overline{1,n-1}\right)$ chiziqlar yordamida bo‘laklarga ajratamiz va har bir (D_{ij}) da $(\xi_i,\eta_i)=\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)$ deb qaraymiz. U holda

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_j)D_{ij}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=0}^{n-1} i\sum_{j=0}^{n-1} j=\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\sigma=\frac{1}{4}.$$

bo‘ladi.

19.2. Darbu yig`indilari

$f(x,y)$ funksiya $(D)\subset R^2$ sohada berilgan va chegaralangan bo‘lsin. (D) sohaning biror P bo‘linishini qaraylik.

$$m_k=\inf_{(x,y)\in D_k}\{f(x,y)\}, \quad M_k=\sup_{(x,y)\in D_k}\{f(x,y)\}$$

lar yordamida

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k D_k, \quad S=\sum_{k=1}^{n} M_k D_k$$

yig‘indilarni tuzamiz. Odatda bu yig‘indilar mos ravishda ***Darbuning quyi*** hamda ***yuqori yig‘indilari*** deb ataladi. (D) sohaning har bir bo‘linishiga nisbatan $\{s\}, \{S\}$ to‘plamlarning chegaralanganligini va $s \le \sigma \le S$ munosabat o‘rinliligini ko‘rish qiyin emas.

Ta`rif.

$$\sup\{s\}=\underline{I}, \quad \inf\{S\}=\bar{I}$$

miqdorlar mos ravishda $f(x,y)$ funksiyaning (D) sohadagi ***quyi ikki karrali*** hamda ***yuqori ikki karrali*** integrali deb ataladi.

Ta`rif. Agar $f(x,y)$ funksiyaning (D) sohada quyi hamda yuqori ikki karrali integrallari bir-biriga teng bo‘lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi, ularning umumiy qiymati

$$I=\underline{I}=\bar{I}$$

$f(x,y)$ funksiyaning (D) sohadagi ***ikki karrali integrali*** (***Riman integrali***) deyiladi va

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD \qquad \left(\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\right)$$

kabi belgilanadi.

19.3. Ikki karrali integralning mavjudligi

Teorema. $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $\delta>0$ topilib, (D) sohaning diametri $\lambda<\delta$ bo‘lgan har qanday bo‘linishga nisbatan Darbu yig‘indilari

$$S(f)-s(f)<\varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada chegaralangan va bu sohaning chekli sondagi nol yuzali chiziqlarida uzilishga ega bo‘lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘ladi.

19.4. Ikki karrali integralning xossalari

1^0. $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi va (D) sohaga tegishli bo‘lgan nol yuzali L chiziqdagi $(L\in(D))$ qiymatlarinigina o‘zgartirishdan hosil bo‘lgan $F(x,y)$ funksiya ham (D) sohada integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD=\iint\limits_{(D)} F(x,y)dD$$

bo‘ladi.

2^0**.** $f(x,y)$ funksiya (D) sohada berilgan bo‘lib, (D) nol yuzali L chiziq bilan (D_1) *va* (D_2) sohalarga ajratilgan bo‘lsin.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dD_1 + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dD_2$$

munosabat o‘rinli.

3^0. Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $cf(x,y)$ $(c = const)$ ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\iint\limits_{(D)} c \cdot f(x,y)dD = c\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD$$

formula o‘rinli.

4^0. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar (D) sohada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f(x,y) \pm g(x,y)$ funksiya ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\iint\limits_{(D)} [f(x,y) \pm g(x,y)]dD = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dD \pm \iint\limits_{(D)} g(x,y)dD$$

formula o‘rinli.

5^0. Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lib, ixtiyoriy $(x,y) \in (D)$ uchun $f(x,y) \geq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD \geq 0$$

bo‘ladi.

6^0. Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $|f(x,y)|$ funksiya ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\left|\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD\right| \leq \iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dD$$

tengsizlik o‘rinli.

7^0. *O‘rta qiymat haqida teorema.* Agar $f(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda shunday o‘zgarmas son

$$\mu\left(m \leq \mu \leq M, M = \sup_{(x,y)\in(D)}\{f(x,y)\}, m = \inf_{(x,y)\in(D)}\{f(x,y)\}\right)$$

mavjudki,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dD = \mu D$$

formula o‘rinli, bu yerda D (D) sohaning yuzi.

8^0. *O‘rta qiymat haqidagi umumlashgan teorema.* Agar $g(x,y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo‘lib, u shu sohada o‘z ishorasini saqlasa va $f(x,y)$ funksiya (D) sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda shunday $(a,b) \in (D)$ topiladiki,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)g(x,y)dD = f(a,b)\iint\limits_{(D)} g(x,y)dD$$

bo‘ladi.

19.5. Ikki karrali integrallarni hisoblash

(D) soha ushbu

$$(D)=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\},$$
$$(\varphi_i(x)\in C[a,b], i=1,2)$$

ko‘rinishda bo‘lsin.

Teorema. $f(x,y)$ funksiya (D) sohada berilgan va integrallanuvchi bo‘lsin. Agar $x\in[a,b]$ da o‘zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$I(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

integral mavjud bo‘lsa, u holda ushbu

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

integral ham mavjud bo‘ladi va

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

o‘rinli.

Agar $f(x,y)$ funksiya $(D)=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}$ sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsa,

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

o‘rinli bo‘ladi.

19.6. Ikki karrali integrallarda o‘zgaruvchilarni almashtirish

$f(x,y)$ funksiya (D) sohada berilgan va uning chekli karrali integrali

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$$

mavjud bo‘lsin. Bu integralda o‘zgaruvchini quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v), \end{cases} (u,v)\in\Delta\in R^2. \qquad (2)$$

(2) quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1°. (Δ) ni (D) ga o‘zaro bir qiymatli akslantiradi.

2°. $\varphi(u,v),\psi(u,v)$ funksiyalar (Δ) sohada uzluksiz, barcha xususiy hosilalarga ega va bu xususiy hosilalar ham uzluksiz.

$f(x,y)$ funksiya (D) sohada berilgan va uzluksiz bo‘lib, (2) akslantirish 1°-2° larni qanoatlantirsin. U holda

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint_{(\Delta)} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|I(u,v)|dudv \qquad (3)$$

formula o‘rinli, bu yerda $I(u,v)=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\ne 0$ (2) ning ***Yakobianidir.***

(3) formula ikki karrali integrallarda o‘zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Misol. Ushbu

$$I=\iint_{(D)}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}-\left(\frac{y}{b}\right)^{3}\right]dxdy$$

integralni hisoblang. Bu yerda

$$(D)=\left\{(x,y)\geq R^2: x\geq 0, y\geq 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}+\left(\frac{y}{b}\right)^{3}\leq 1\right\}$$

Quyidagi

$$\frac{x}{a}=u^{2/3}, \frac{y}{b}=v^{1/3}$$

almashtirishni bajaramiz. Qaralayotgan sohaning obrazi quyidagicha bo‘ladi:

$$(\Delta)=\{(u,v)\in R^2: u\geq 0, v\geq 0, u+v\leq 1\}$$

bo‘ladi. Yakobiani esa:

$$I(u,v)=\frac{2ab}{9}u^{1/3}v^{-2/3}$$

bo‘ladi.

$$I=\iint_{(D)}\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}-\left(\frac{y}{b}\right)^{3}\right)dxdy=\iint_{(\Delta)}\frac{2ab}{9}(1-u-v)\cdot u^{-1/3}v^{-2/3}dudv=$$

$$=\frac{2ab}{9}\int_0^1 u^{-1/3}du\int_0^{1-u}(1-u-v)\cdot v^{-2/3}dv=\frac{2ab}{9}\int_0^1\frac{9}{4}(1-u)^{4/3}u^{-1/3}du=$$

$$=\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi ab$$

19.7. Uch karrali integrallar

$f(x,y,z)$ funksiya R^3 fazodagi chegaralangan (V) sohada berilgan bo‘lsin. (V) sohaning p bo‘linishini qaraylik. Bu bo‘linishning har bir (V_k) ($k=1,2,3...,n$) bo‘lagida ixtiyoriy (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqta olib, quyidagi

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f\ (\xi_k,\eta_k,\zeta_k)V_k$$

integral yig‘indini tuzamiz.

Ta`rif. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $\delta>0$ topilsaki, (V) sohaning diametri $\lambda<\delta$ bo‘lgan har qanday bo‘linishda hamda har bir (V_k) bo‘lakdagi ixtiyoriy (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqtalar uchun

$$|\sigma-I|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda I ga $f(x,y,z)$ funksiyaning (V) bo‘yicha uch karrali integrali deyiladi va u

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV \qquad \left(\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz\right)$$

kabi belgilanadi.

Endi (V) soha-pastdan $z_1 = \psi_1(x,y)$, yuqoridan $z_2 = \psi_2(x,y)$ sirtlar bilan, yon tomondan Oz o‘qiga parallel silindrik sirt bilan chegaralangan soha bo‘lsin. Bu sohaning Oxy tekisligiga proyeksiyasi (D) bo‘lsin.

Agar $f(x,y,z)$ funksiya shunday (V) sohada uzluksiz bo‘lib, $z_i = \psi_i(x,y)$ ($i = 1,2$) funksiyalar (D) da uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(D)} \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

bo‘ladi.

Agar

$$(D) = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

bo‘lib, $\varphi_i(x)$ ($i = 1,2$) funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$$

sirtlar bilan chegaralangan soha hajmini toping.

Ma`lumki, izlanayotgan hajm

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

formula orqali topilib, bunda (V) yuqorida berilgan sirtlar bilan chegaralangandir.

Sferik koordinatalar sistemasidan foydalanamiz:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz \iiint\limits_{(\Delta)} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$$

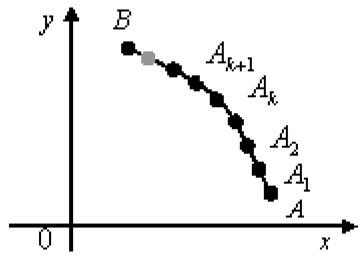
$$(\Delta) = \left\{ (\rho,\varphi,\theta) : 0 \le \varphi < 2\pi, \ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \ 0 \le r \le 2a\cos\theta \right\}$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho = 16\frac{\pi a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 16\frac{\pi a^3}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta d(\cos\theta) = \frac{5}{12}\pi \cdot a^3 (kub \quad bir)$$

20-§. EGRI CHIZIQLI INTEGRALLAR

20.1. Birinchi tur egri chiziqli integral



AB egri chiziqda $f(x,y)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin.

Bu egri chiziqning $P=\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ bo‘linishini va uning har bir $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoyida ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqta $(k=0,1,2,...,n-1)$ olamiz. So‘ng quyidagi

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k \qquad (1)$$

yig‘indini tuzamiz. ΔS_k $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoyning uzunligi. Odatda (1) ***integral yig‘indi*** deyiladi.

Ta`rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da σ yig‘indi chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziq bo‘yicha integrallanuvchi, bu limit esa $f(x,y)$ funksiyaning ***birinchi tur egri chiziqli integrali*** deyiladi va

$$\int_{AB} f(x,y)ds$$

kabi belgilanadi:

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

Integralning mavjudligi. Faraz qilaylik AB egri chiziq ushbu

$$x=x(s),\ y=y(s) \qquad (0\le s\le S) \qquad (2)$$

sistema bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $s-AQ$ yoyning uzunligi $Q=(x,y)\in AB$, S esa AB ning uzunligi.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning AB bo‘yicha birinchi tur egri chiziqli integrali mavjud va

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_0^s f(x(s),y(s))ds$$

bo‘ladi.

Endi AB egri chiziq ushbu

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \ (\alpha\le t\le\beta) \qquad (3)$$

sistema bilan (parametrik formada) berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya AB da berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning AB bo‘yicha birinchi tur egri chiziqli integrali mavjud va

$$\int_{AB} f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (4)$$

bo‘ladi.

20.2. Birinchi tur egri chiziqli integralning xossalari

1°. Agar $AB = AC \cup CB$ bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds$$

bo‘ladi.

2°. Ushbu

$$\int\limits_{AB} C \cdot f(x,y)ds = C \int\limits_{AB} f(x,y)ds \qquad \text{(C-const)}$$

tenglik o‘rinli.

3°. Quyidagi

$$\int\limits_{AB} [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds \pm \int\limits_{AB} g(x,y)ds$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

4°. Agar ixtiyoriy $(x,y) \in AB$ da $f(x,y) \geq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds \geq 0$$

bo‘ladi.

5°. $|f(x,y)|$ funksiya AB da integrallanuvchi va

$$\left| \int\limits_{AB} f(x,y)ds \right| \leq \int\limits_{AB} |f(x,y)|ds$$

bo‘ladi.

6°. Shunday $(c_1, c_2) \in AB$ nuqta topiladiki,

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = f(c_1, c_2) \cdot S$$

bo‘ladi, S bunda AB ning uzunligi.

Integralni hisoblash. Egri chiziqli integrallar Riman integrallariga keltirib hisoblanadi. Bunda ko‘pincha

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

formuladan hamda quyida keltirilgan formulalardan foydalaniladi.

Aytaylik, AB egri chiziq ushbu

$$y = y(x) \quad \left(a \leq x \leq b, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B \right)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lib, u holda

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx \qquad (6)$$

bo‘ladi.

Endi AB egri chiziq ushbu

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1)$$

tenglama bilan (qutb koordinata sistemasida) berilgan bo‘lib, $\rho(\theta)$ funksiya $[\theta_0,\theta_1]$ da uzluksiz $\rho'(\theta)$ hosilaga ega bo‘lsin. Agar $f(x,y)$ funksiya shu AB da berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \qquad (7)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int_{AB}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds$$

integralni hisoblang, bunda AB tekislikning $A=(-1;0)$, $\mathbf{B}=(0;1)$ nuqtalarini birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi.

Ravshanki, A va B nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y = x+1$$

bo‘lib, berilgan integral esa

$$y = x+1, \quad -1 \le x \le 0$$

kesma bo‘yicha olingan integral bo‘ladi.

Unda (6) formulaga ko‘ra

$$\int_{AB}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds = \int_{-1}^{0}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{1+(x+1)'^2}\,dx$$

bo‘ladi. Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int_{-1}^{0}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{2}dx = \sqrt{2}\left[3\cdot x^{\frac{4}{3}} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} = -5\sqrt{2}$$

Demak,

$$\int_{AB}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})ds = -5\sqrt{2}$$

20.3. Integralning ba`zi bir tatbiqlari

1°. Tekislikda to‘g‘rilanuvchi AB egri chiziq berilgan bo‘lsin. Uning uzunligi ushbu

$$S = \int_{AB} ds$$

formula bilan topiladi.

2°. Tekislikda to‘g‘rilanuvchi AB egri chizig‘i bo‘yicha massa tarqatilgan bo‘lib, uning zichligi $\rho=\rho(x,y)$ bo‘lsin. Bu egri chiziqning massasi

$$m = \int_{AB}\rho(x,y)ds,$$

og‘irlik markazining koordinatalari esa

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_{AB} x\cdot\rho(x,y)ds, \; y_0 = \frac{1}{m}\int_{AB} y\cdot\rho(x,y)ds$$

bo‘ladi.

20.4. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar

Integral ta`rifi. AB egri chiziqning $p=\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ bo‘linishini va uning har bir $\breve{A_k A_{k+1}}$ yoyida ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqta olib funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_k, \eta_k)$ ni $\breve{A_k A_{k+1}}$ ning OX (OY) o‘qidagi $\Delta x_k\,(\Delta y_k)$ proyeksiyasiga ko‘paytirib, quyidagi yig‘indini tuzamiz:

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \qquad (\sigma'' = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\,)$$

Ta`rif. Agar $\lambda_p \to 0$ da σ' yig‘indi (σ'' yig‘indi) chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziq bo‘yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu limit $f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi va

$$\int_{AB} f(x,y)dx \quad (\int_{AB} f(x,y)dy)$$

kabi belgilanadi.

Integralning mavjudligi. Faraz qilaylik, AB ushbu

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

sistema bilan berilgan bo‘lsin.

Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya AB egri chiziqda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning AB bo‘yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrali mavjud va

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \qquad \left(\int_{AB} f(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt\right)$$

bo‘ladi.

Teorema. Agar $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar AB da berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyalarning ikkinchi tur egri chiziqli integrallari mavjud va

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt$$

bo‘ladi.

20.5. Integralning xossalari

1°. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar integrallash egri chizig‘ining yo‘nalishiga bog‘liq bo‘ladi:

$$\int_{BA} f(x,y)dx = -\int_{AB} f(x,y)dx; \qquad \int_{BA} f(x,y)dy = -\int_{AB} f(x,y)dy.$$

2°. Agar AB egri chiziq OX (OY) o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq kesmasidan iborat bo‘lsa, u holda

$$\int_{AB} f(x,y)dx = 0 \quad \left(\int_{AB} f(x,y)dy = 0\right)$$

3°. Agar $f(x,y)$ funksiya AB da integrallanuvchi bo‘lib, $AB = AC \cup CB$ bo‘lsa,

$$\int_{AB} f(x,y)dx = \int_{AC} f(x,y)dx + \int_{CB} f(x,y)dx$$

bo‘ladi.

4°. Agar $f(x,y)$ funksiya AB da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_{AB} kf(x,y)dx = k\int_{AB} f(x,y)dx$$

bo‘ladi, bunda $k = const$.

5°. Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar AB da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_{AB} [f(x,y) \pm g(x,y)]dx = \int_{AB} f(x,y)dx \pm \int_{AB} g(x,y)dx$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int_{AB} y^2 dx + x^2 dy$$

integralni hisoblang, bunda AB egri chiziq $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning yuqori yarim tekislikdagi qismidan iborat.

Bu ellipsning parametrik tenglamasini yozamiz:

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

$A = (a, 0)$ nuqtaga parametrning $t = 0$ qiymati $B = (-a, 0)$ nuqtaga esa $t = \pi$ qiymati mos kelib, t parametr 0 dan π gacha o‘zgarganda (x,y) nuqta A dan B ga qarab ellipsning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizadi.

$$P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = x^2$$

funksiyalar esa AB da uzluksiz.

$$\int_{AB} y^2 dx + x^2 dy = \int_0^{\pi} [b^2 \sin^2 t \cdot (-a\sin t) + a^2\cos^2 t \cdot b\cos t]dt =$$

$$ab\int_0^{\pi} (a\cos^3 t - b\sin^3 t)dt = -\frac{4}{3}ab^2$$

20.6. Grin formulasi

Teorema. $P(x,y)$ funksiya $\overline{D}$ $(D = \overline{D} \cup \partial D)$ sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu funksiya D sohada uzluksiz $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$$

bo‘ladi.

$P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar D da berilgan va uzluksiz. Agar bu funksiyalar D da uzluksiz $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda quyidagi Grin formulasi o‘rinli.

$$\int\limits_{\partial F} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{F} (\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y})dxdy$$

bo‘ladi.

Teorema. $Q(x,y)$ funksiya $\overline{G}$ sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu funksiya G sohada uzluksiz $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_{\partial G} Q(x,y)dy = \iint\limits_{G} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

bo‘ladi.

Quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1°. Agar D sohada $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ bo‘lsa, u holda D sohaga tegishli bo‘lgan har qanday K yopiq chiziq bo‘yicha olingan integral

$$\oint\limits_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

bo‘ladi.

2°. Agar D da tegishli bo‘lgan har qanday K yopiq chiziq bo‘yicha olingan integral uchun

$$\oint\limits_{K} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (AB \subset D)$$

integral A va B nuqtalarni birlashtiruvchi egri chiziqqa bog‘liq bo‘lmaydi.

3°. Agar ushbu

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (AB \subset D)$$

integral A va B nuqtalarni birlashtiruvchi egri chiziqqa bog‘liq bo‘lmasa, u holda

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ifoda D sohada berilgan biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘ladi.

4°. Agar

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ifoda D sohada berilgan biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lsa, u holda

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\oint\limits_{\bar{k}} \left(3x^2 + y\right)dx + \left(x - 2y^2\right)dy = 0$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini isbotlang, bunda K egri chiziq uchlari $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak konturdan iborat.

Berilgan integralda

$$P(x,y)=3x^2+y,\quad Q(x,y)=x-2y^2$$

bo‘ladi.

Bu funksiyalar tekislikda uzluksiz hamda

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1,$$

uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

bo‘ladi. Unda yuqoridagi 1^0-tasdiqqa binoan $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ning yopiq kontur bo‘yicha (berilgan uchburchak konturi bo‘yicha) integrali nolga teng bo‘ladi:

$$\oint_k \left(3x^2+y\right)dx+\left(x-2y^2\right)dy=0$$

20.7. Sirt integrali

Fazoda ushbu

$$z=z(x,y) \qquad (1)$$

tenglama bilan aniqlangan (S) sirt berilgan bo‘lsin. Bunda $z(x,y)$ funksiya (D) sohada $\left((D)\subset R^2\right)$ berilgan funksiya bo‘lib, u shu sohada uzluksiz $z'_x(x,y),\, z'_y(x,y)$ hosilalarga ega.

Ma`lumki, bunday sirt yuzaga ega bo‘lib, u quyidagi

$$S=\iint_{(D)}\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}\,dxdy$$

formula orqali hisoblanadi.

20.8. Birinchi tur sirt integrallari

Integral ta’rifi. $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda $\left((S)\subset R^3\right)$ berilgan bo‘lsin. Bu sirtning p bo‘linishini va bu bo‘linishning har bir (S_k) bo‘lagida ($k=1,2,...,n$) ixtiyoriy (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqtani olaylik. Berilgan funksiyaning (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqtadagi qiymati $f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ ni (S_k) sirtning S_k yuziga ko‘paytirib, quyidagi yig‘indini tuzamiz :

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f\ (\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\, S_k \qquad (1)$$

Odatda (1) integral yig‘indi deyiladi.

Ta`rif. Agar $\lambda_p\to 0$ da $f(x,y,z)$ funksiyaning integral yig‘indisi σ chekli limitga ega bo‘lsa, $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirt bo‘yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu yig‘indining limiti I esa $f(x,y,z)$ funksiyaning ***birinchi tur sirt integrali*** deyiladi va

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)ds$$

kabi belgilanadi:

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\ (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, S_k$$

20.9. I tur sirt integralining mavjudligi

Teorema. Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning (S) sirt bo‘yicha birinchi tur sirt integrali

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds$$

mavjud va

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y)) \times \sqrt{1 + z_x'^2(x,y) + z_y'^2(x,y)}dxdy \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Teorema. Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning (S) sirt bo‘yicha birinchi tur sirt integrali

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds$$

mavjud va

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x(y,z),y,z) \times \sqrt{1 + x_x'^2(y,z) + x_y'^2(y,z)}dydz$$

bo‘ladi.

20.10. I tur sirt integralining xossalari

1^0. Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirt bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lib, $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ bo‘lsa, u holda

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y,z)ds$$

bo‘ladi.

2^0. Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirt bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $cf(x,y,z)$ ham ($c = const$) shu sirt bo‘yicha integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot f(x,y,z)ds = c \cdot \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3^0. Agar $f(x,y,z)$ va $g(x,y,z)$ funksiyalarning har biri (S) sirt bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f(x,y,z) \pm g(x,y,z)$ ham shu sirt bo‘yicha integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iint\limits_{(S)} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]ds = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \pm \iint\limits_{(S)} g(x,y,z)ds$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\iint\limits_{(S)} |xyz|ds$$

integralni hisoblang, bunda (S) sirt quyidagi $z = x^2 + y^2$ aylanma paraboloidning $z = 0, z = 1$ tekisliklar orasidagi qismi.

Ravshanki, bu (S) sirtning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi

$$(D)=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 1\}$$

doiradan iborat bo‘ladi.

(3) formuladan foydalanib topamiz:

$$\iint\limits_{(S)}|xyz|ds=\iint\limits_{(D)}|xy(x^2+y^2)|\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)|xy|\sqrt{1+4(x'^2+y'^2)}\,dxdy$$

Ikki karrali integralni hisoblashda quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \qquad (0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi)$$

Natijada

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)|xy|\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy=$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left(\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\right)\rho d\rho\right)d\varphi=2\int_0^1\rho^5\cdot\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

bo‘ladi. Demak,

$$\iint\limits_{(S)}|xyz|ds=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$$

20. 11. Integralning ba`zi bir tatbiqlari

1^0. (S) sirtning yuzi

$$S=\iint\limits_{(S)}ds$$

formula bilan topiladi.

2^0. Agar (S) sirt bo‘yicha zichligi $\rho(x,y,z)$ bo‘lgan massa tarqatilgan bo‘lsa, unda (S) sirtning massasi

$$m=\iint\limits_{(S)}\rho(x,y,z)ds$$

bo‘ladi.

3^0. (S) sirtning og‘irlik markazining koordinatalari

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}x\rho(x,y,z)ds\ ,\quad y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}y\rho(x,y,z)ds\ ,\quad z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{(S)}z\rho(x,y,z)ds$$

bo‘ladi.

4^0. (S) sirtning Ox, Oy, Oz koordinata o‘qlariga nisbatan inertsiya momentlari mos ravishda ushbu

$$I_x=\iint\limits_{(S)}(z^2+y^2)\rho(x,y,z)ds,\quad I_y=\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds,\quad I_z=\iint(z^2+x^2)\rho(x,y,z)ds$$

formulalar bilan topiladi.

(S) sirtning Ox, Oy, Oz koordinata tekisliklariga nisbatan inertsiya momentlari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$I_{xy}=\iint\limits_{(S)}z^2\rho(x,y,z)ds,\quad I_{xz}=\iint\limits_{(S)}y^2\rho(x,y,z)ds,\quad I_{yz}=\iint\limits_{(S)}x^2\rho(x,y,z)ds.$$

20.12. Ikkinchi tur sirt integrallari

Integral ta`rifi. $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan bo‘lsin. Bu sirtning p bo‘linishini va bu bo‘linishning har bir (S_k) bo‘ligida $(k=1,2,...,n)$ ixtiyoriy (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqtani olaylik. Berilgan funksiyaning (ξ_k,η_k,ζ_k) nuqtadagi $f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)$ qiymatini Oxy (Oyz, Ozx) tekislikdagi proyeksiyasi (D_k) $((D'_k),(D''_k))$ ning yuziga ko‘paytirib, quyidagi integral yig‘indini tuzamiz :

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\cdot D_k$$

$$\left(\sigma'=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\,D'_k,\ \sigma''=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\,D''_k\right)$$

Ta`rif. Agar $\lambda_p\to 0$ da $f(x,y,z)$ funksiyaning integral yig‘indisi σ (σ',σ'') chekli limitga ega bo‘lsa, $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtning tanlagan tomoni bo‘yicha integrallanuvchi deyiladi. Bu yig‘indining limiti I esa (I',I''), $f(x,y,z)$ funksiyaning (S) sirtning tanlangan tomoni bo‘yicha ikkinchi tur integrali deyiladi va u

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy \quad \left(\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz, \iint_{(S)} f(x,y,z)dzdx\right)$$

kabi belgilanadi:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\cdot D_k$$

$$\left(\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)D'_k,\quad \iint_{(S)} f(x,y,z)dzdx=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)D''_k\right)$$

20.13. II-tur sirt integralning mavjudligi

Teorema. Agar $f(x,y,z)$ funksiya (S) sirtda berilgan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning (S) sirt bo‘yicha olingan ikkinchi tur sirt integrali

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy$$

mavjud va

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz=\iint_{(D)} f(x(y,z),y,z)dydz$$

bo‘ladi.

20.14. Integralning xossalari

1^0. Funksiyaning (S) sirtning bir tomoni bo‘yicha olingan ikkinchi tur sirt integrali, funksiyaning shu sirtning ikkinchi tomoni bo‘yicha olingan ikkinchi tur sirt integralidan faqat ishorasi bilan farq qiladi.

2^0. $f(x,y,z)$ funksiyaning yasovchilari OZ o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik (S) sirt bo‘yicha ikkinchi tur sirt integrali

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy$$

uchun

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy = 0$$

bo‘ladi.

Integralni hisoblash. Ikkinchi tur sirt integrallari ikki karrali integrallarga keltirib hisoblanadi:

$$\iint_{(s)} f(x,y,z)dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z(x,y))dxdy, \quad (1)$$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz = \iint_{(S)} f(x(y,z),y,z)dydz, \quad (2)$$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dzdx = \iint f(x,y(z,x),z)dzdx. \quad (3)$$

Misol. Ushbu

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy$$

integralni hisoblang, bunda (S) sirt

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipsoidning $z=0$ tekislikdan pastda joylashgan qismi bo‘lib, integral shu sirtning pastki tomoni bo‘yicha olingan.

Ma’lumki, (S) sirtning tenglamasi

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

va uning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi

$$(D)=\left\{(x,y)\in R^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

bo‘ladi.

(1) formuladan foydalanib,

$$\iint_{(S)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy = -\iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$$

bo‘lishini topamiz. Integral (S) sirtning pastki tomoni bo‘yicha olinganligi sababli sirt integrali minus ishora bilan olinadi.

Endi

$$\iint_{(D)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy = \iint_{(D)} \left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

ikki karrali integralni hisoblaymiz. Bu integralda o‘zgaruvchilarni $x=a\rho\cos\varphi, y=b\rho\sin\varphi$ kabi almashtirib topamiz:

$$\iint_{(D)} \left(kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (kc\sqrt{1-\rho^2}-\rho^2)ab\rho d\rho\right)d\varphi =$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 kc\rho\sqrt{1-\rho^2} - \rho^3\right)d\rho d\varphi = 2\pi ab\left[-\frac{kc}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^4}{4}\right] = 2\pi ab\left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

Demak,

$$\iint_{(S)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + kz\right)dxdy = 2\pi\cdot ab\left(\frac{kc}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

20.15. Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallari orasidagi bog‘lanish

(S) sirtda $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin. Unda ushbu

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_{(S)} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

20.16. Stoks formulasi

Stoks formulasi sirt bo‘yicha olingan integral bilan shu sirtning chegarasi bo‘yicha olingan egri chiziqli integralni bog‘lovchi formuladir.

Fazoda ikki tomoni silliq (S) sirt berilgan bo‘lib, uning chegarasi $\partial(S)$ esa bo‘lakli-silliq egri chiziqdan iborat bo‘lsin. (S) sirtda $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funksiyalar aniqlangan. Bu funksiyalar (S) da uzluksiz hamda barcha argumentlari bo‘yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega. U holda ushbu

$$\oint_{\partial(S)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint_{(S)}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy + \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right]dydz + \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right]dzdx$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Odatda bu ***Stoks formulasi*** deyiladi.

Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallarini o‘zaro bog‘lovchi formuladan foydalanib, Stoks formulasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\oint_{\partial(S)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds \tag{1}$$

Misol. Ushbu

$$\oint_k (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

integralni hisoblang, bunda k yopiq chiziq.

$$x = a\sin^2 t,\, y = 2a\sin t\cos t,\, z = a\cos^2 t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

ellipsdan iborat.

Bu integralni Stoks formulasidan foydalanib hisoblaymiz.

Ma`lumki,

$$P = y + z\,,\quad Q = z + x\,,\quad R = x + y$$

bo‘lib,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial P}{\partial z} = 1, \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

bo‘ladi. (3) formulaga binoan

$$\oint_k (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz =$$

$$\iint_{(S)} [(1-1)\cos\alpha + (1-1)\cos\beta + (1-1)\cos\gamma]ds = 0$$

bo‘ladi.

20.17. Ostrogradskiy formulasi

Fazoda, pastdan $z = \varphi_1(x,y)$ tenglama bilan aniqlangan silliq (S_1), yuqoridan $z = \varphi_2(x,y)$ $(\varphi_1(x,y) \le \varphi_2(x,y))$ tenglama bilan aniqlangan silliq (S_2) sirtlar bilan, yon tomonlaridan esa Oz o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik (S_3) sirt bilan chegaralangan (V) sohani qaraylik. (V) da $R(x,y,z)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, (V) da uzluksiz

$$\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$$

xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \text{dxdydz} = \iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy \qquad (1)$$

bo‘ladi, bunda (S) sirt (V) jismni o‘rab turuvchi sirt.

Xuddi shunga o‘xshash (V) jism hamda $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ funksiyalar tegishli shartlarni qanoatlantirganda

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \iint_{(S)} P(x,y,z)dxdz, \quad (2)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \iint_{(S)} Q(x,y,z)dxdz \quad (3)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi

Aytaylik, (V) jism yuqoridagi (1), (2), (3) formulalarni o‘rinli bo‘lishida qo‘yilgan shartlarni bajarsin.

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

bo‘ladi. Bu ***Ostrogradskiy formulasi*** deyiladi.

Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallarini o‘zaro bog‘lovchi formuladan foydalanib, Ostrogradskiy formulasini quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_{(S)} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds \qquad (4)$$

Misol. Fazodagi (V) jismning hajmi

$$V = \frac{1}{3}\iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$$

bo‘lishini isbotlang, bunda (S) sirt (V) jismni o‘rab turgan sirt, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ lar (S) sirt tashqi normalining yo‘naltiruvchi kosinuslari.

Ostrogradskiy formulasining (4) ko‘rinishidan foydalanib topamiz:

$$\iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)dxdydz = 3\iiint_{(V)} dxdydz$$

Ma`lumki,

$$\iiint_{(V)} dxdydz = V$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib, yuqoridagi tenglikdan

$$V = \frac{1}{3}\iint_{(S)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)ds$$

bo‘lishini topamiz.

21-§. Furye qatorlari

21.1. Furye qatori tushunchasi

$f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan va shu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. Ravshanki, $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ $(n = 1,2,3,...)$ funksiyalar ham $[-\pi,\pi]$ da integrallanuvchi bo‘ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad (n = 1,2,3\cdots), \qquad (1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad (n = 1,2,3,\cdots).$$

Ta`rif. Ushbu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (2)$$

funksional qator $[-\pi,\pi]$da berilgan $f(x)$ funksiyaning ***Furye qatori*** deyiladi. $a_0, a_1, b_1, \cdots a_n, b_n, \cdots$ sonlar $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari deyiladi.

(2) qator $f(x)$ funksiyaning Furye qatori bo‘lishi quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Agar $f(x)$ juft funksiya bo‘lsa, u holda uning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx, \quad (n = 1,2,3,...)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,3,...)$$

bo‘lib, Furye qatori esa

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

bo‘ladi.

Agar $f(x)$ toq funksiya bo‘lsa, u holda uning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = 0, (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

bo‘lib, Furye qatori esa

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

bo‘ladi.

21.2. $[-l,l]$ **oraliqda berilgan funksiyaning Furye qatori**

$f(x)$ funksiya $[-l,l]$ da $(l > 0)$ va shu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 1,2,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 1,2,...).$$

Ta`rif. Ushbu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

funksional qator $[-l,l]$ da berilgan $f(x)$ funksiyaning ***Furye qatori*** deyiladi. $a_0, a_1, b_1, \cdots a_n, b_n, \cdots$ sonlar Furye koeffitsiyentlari deyiladi.

(2) qator $f(x)$ funksiyaning Furye qatori bo‘lishi quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^2 \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

juft funksiyaning Furye qatorini yozing.

Yuqoridagi (1) formulalardan foydalanib, berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nxdx = \frac{2}{\pi}x^2 \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{x} + \int_0^{\pi}\cos nxdx\right] == (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad (n = 1,2,3,...)$$

Demak, $f(x)=x^2$ funksiyaning Furye qatori

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$

bo‘ladi.

21.3. Furye qatorining yaqinlashuvchiligi

Teorema. 2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da bo‘lakli-differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyaning Furye qatori

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\pi}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$[-\pi,\pi]$ da yaqinlashuvchi bo‘lib, $x\in(-\pi,\pi)$ da

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\pi}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

bo‘ladi.

$x=\pm\pi$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya Furye qatorining yig‘indisi

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]$$

ga teng bo‘ladi.

Teorema. Agar 2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz, bo‘lakli-differensiallanuvchi va $f(-\pi)=f(\pi)$ bo‘lsa, bu funksiyaning Furye qatori $[-\pi,\pi]$ da yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$f(x)=\cos ax \qquad (0<a<1)$$

funksiyani Furye qatoriga yoying.

Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=2\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\,dx=(-1)^n\cdot\frac{2a}{a^2-\pi^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{\pi}$$

$$(n=1,2,3\cdots)$$

$$b_n=0 \quad (n=1,2,3\cdots)$$

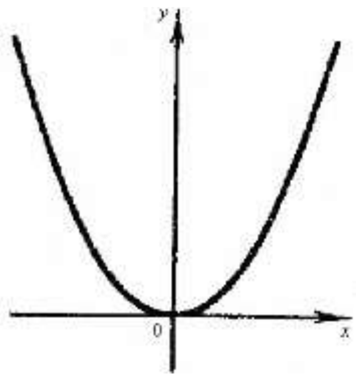
Demak, berilgan funksiyaning Furye qatori

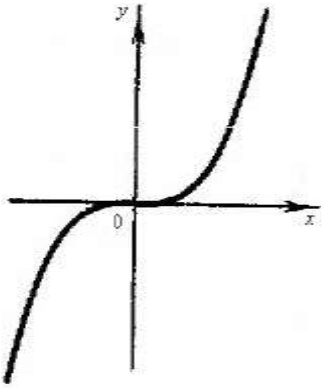
$$\cos ax\sim\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx$$

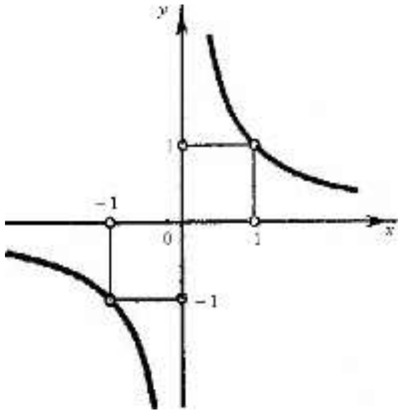
bo‘ladi. Qaralayotgan funksiya yuqoridagi teoremaning shartlarini bajaradi. Shuning uchun $f(x)=\cos ax$ funksiya Furye qatoriga yoyiladi:

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\frac{2a\sin a\pi}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx.$$

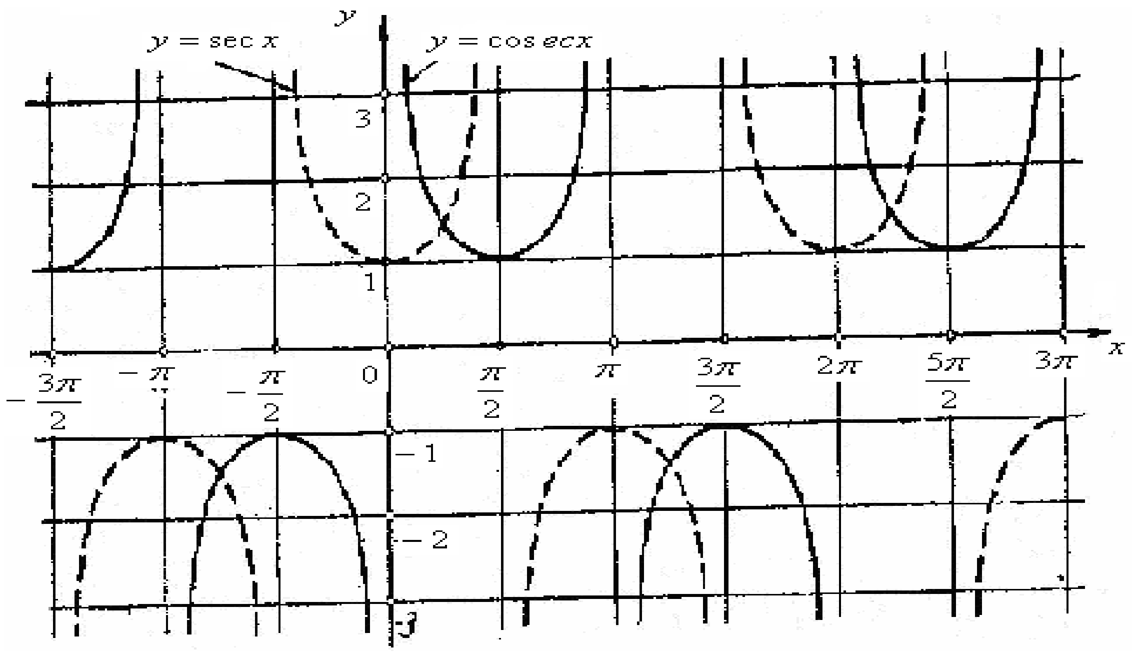
Ba'zi funksiyalar grafiklari



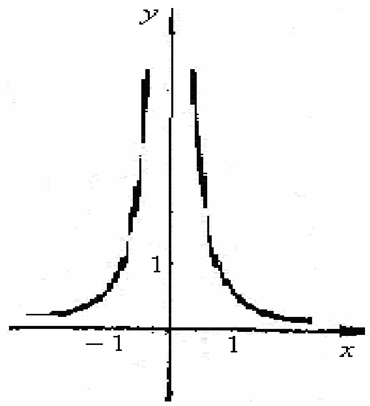




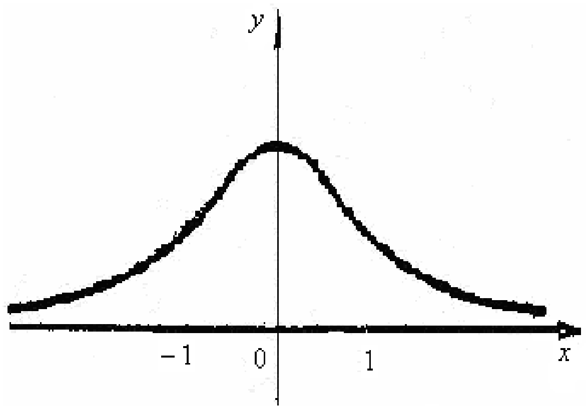
$y = x^2$ parabola. $y = x^3$ kubik parabola. $y = \frac{1}{x}$ giperbola.



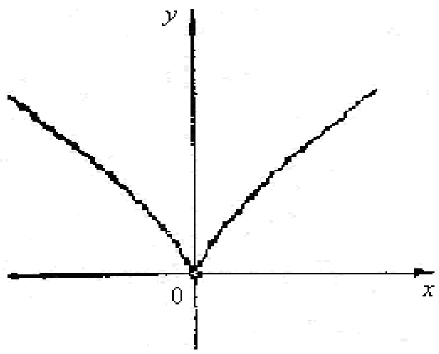
$y = \sec x$ va $y = \operatorname{cos}ec x$ funksiya grafiklari



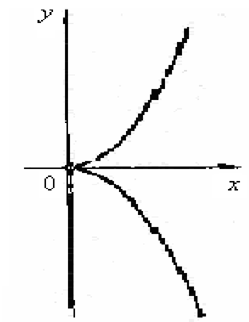
$y = \frac{1}{x^2}$ kasr funksiya grafigi



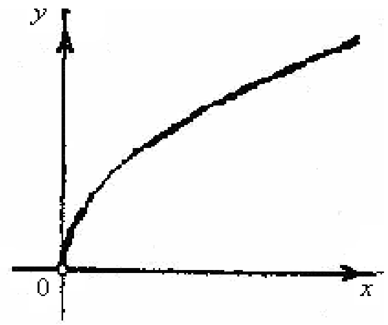
$y = \frac{1}{1+x^2}$ Anyezi zulfi



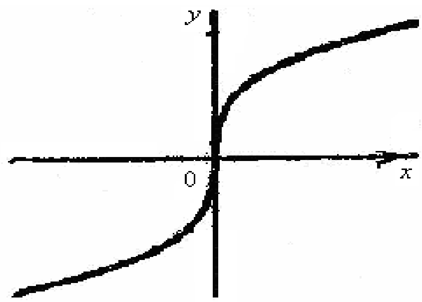
$y = x^{\frac{2}{3}}$ bunda $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases}$ Nelya parabolasi.



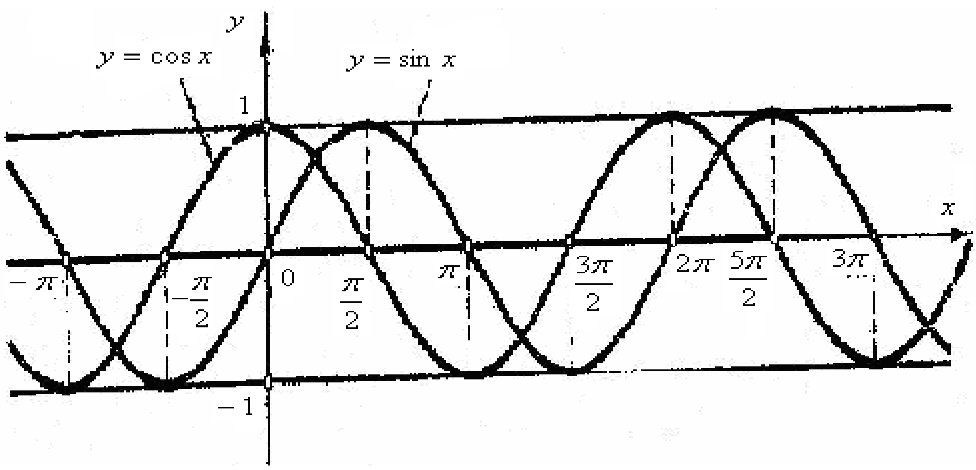
$y^2 = x^3$ bunda $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ yarim kubik parabola



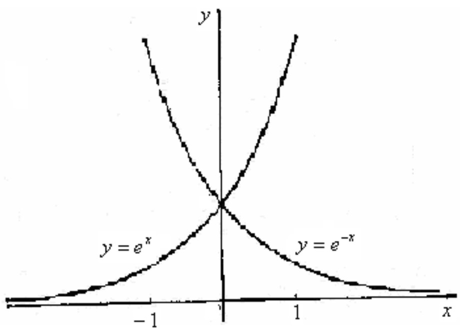
$y = \sqrt{x}$ parabola (yuqori bo‘lagi)



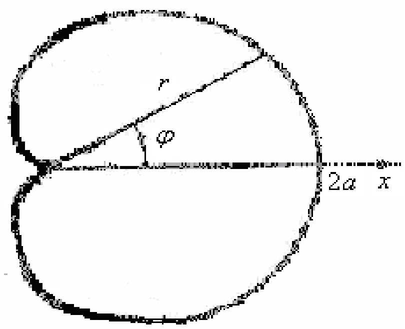
$y = \sqrt[3]{x}$ kubik parabola



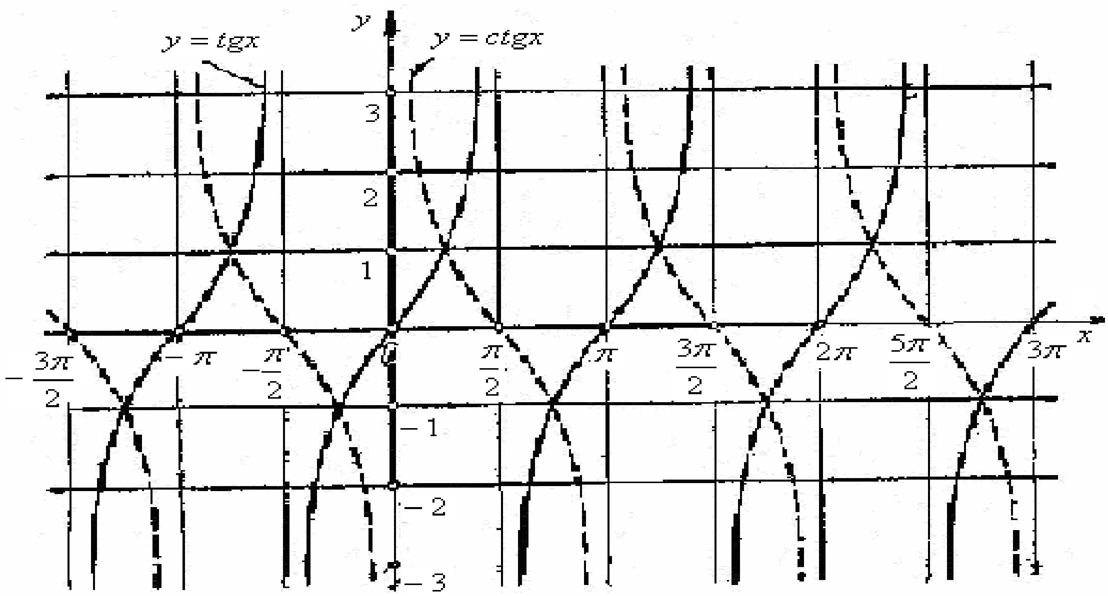
$y = \cos x$ va $y = \sin x$ kosinusoida va sinusoida



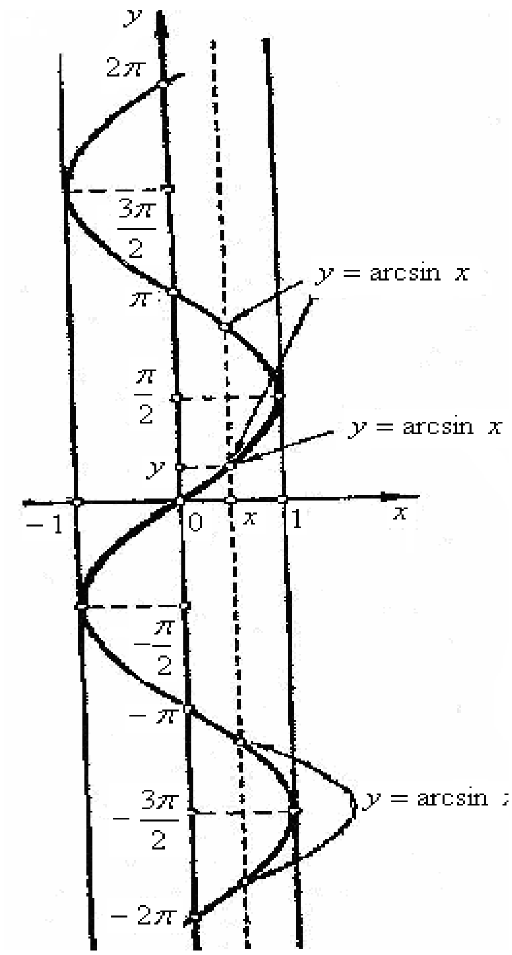
$y = e^x$ va $y = e^{-x}$ ko‘rsatkichli funksiyalar grafigi

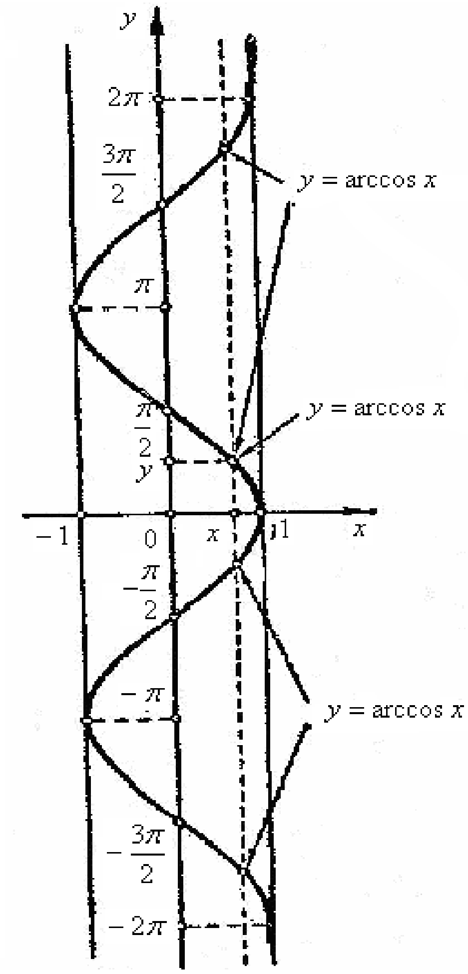


$r = a(1 + \cos\varphi)$ kardioida

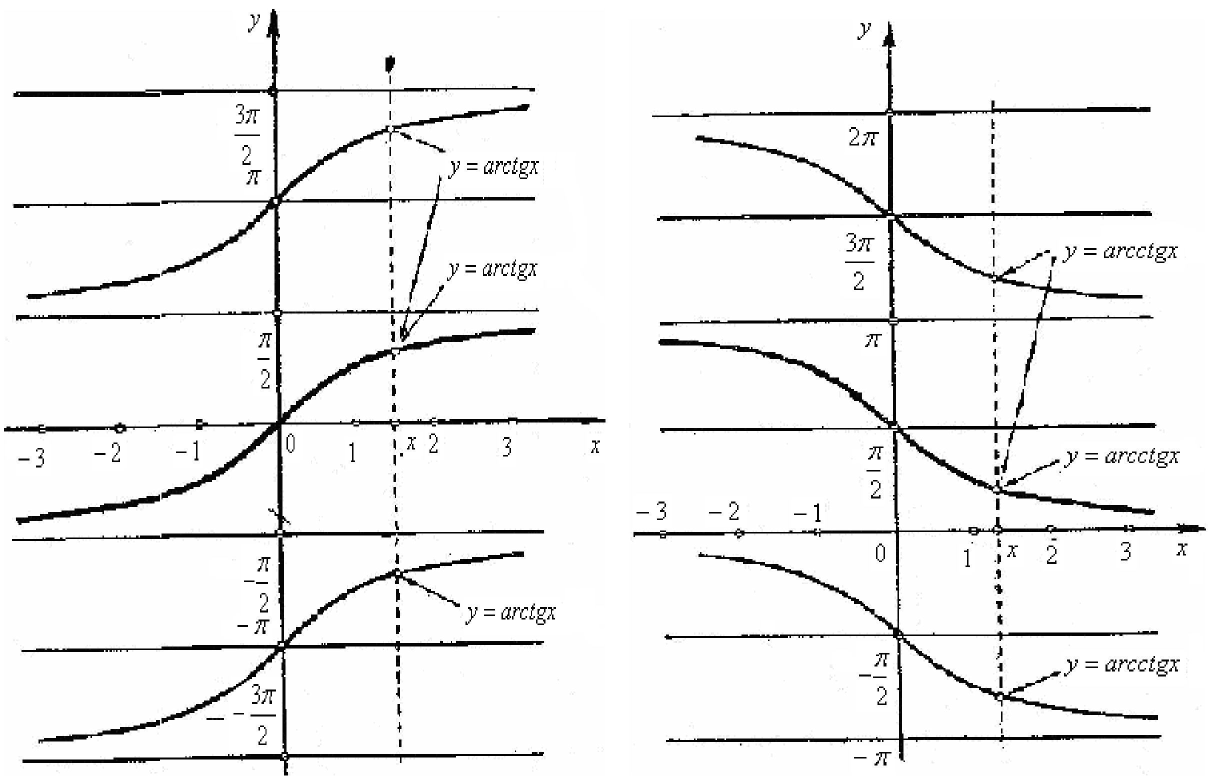


$y = tgx$ va $y = ctgx$ tangesoida va kotangensoida

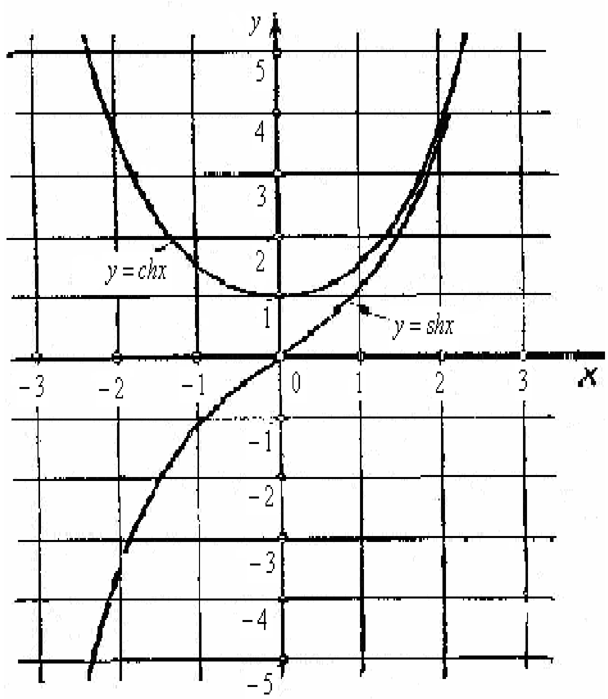




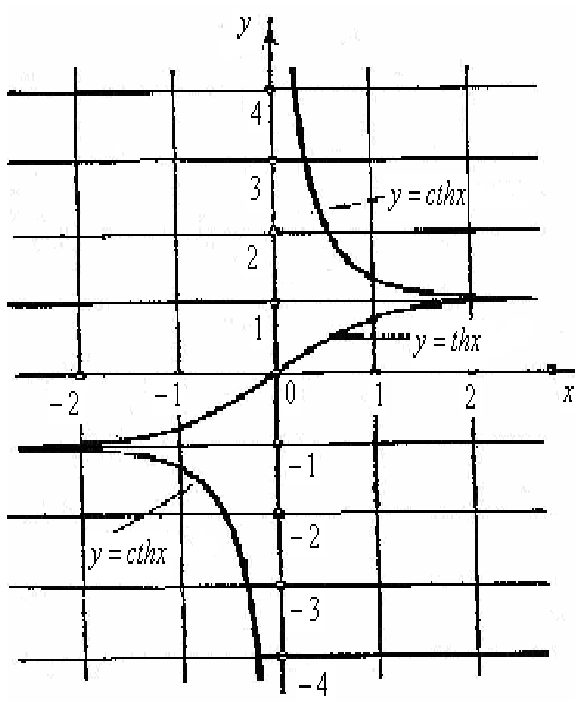
$y = \arcsin x$ va $y = \arccos x$ teskari trigonometrik funksiyalar grafiklari



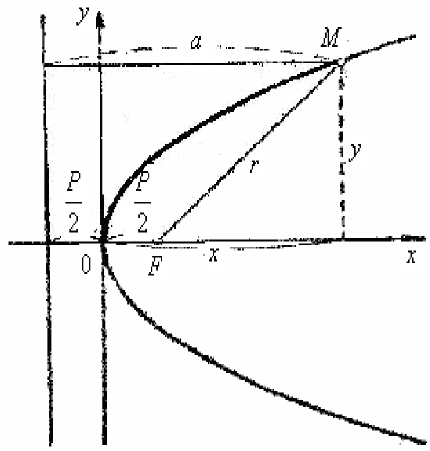
$y = arctgx$ va $y = arcctgx$ teskari trigonometrik funksiyalar grafiklari



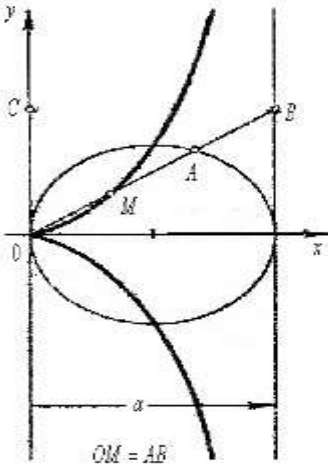
$y = chx$ va $y = shx$ giperbolik funksiyalar grafiklari



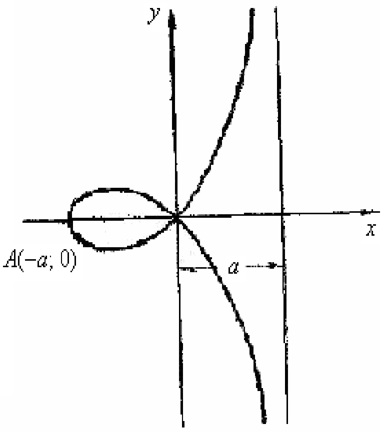
$y = cthx$ va $y = thx$ giperbolik funksiyalar grafiklari



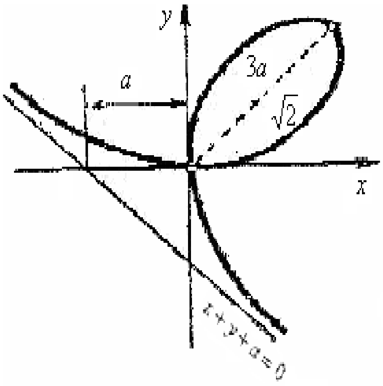
$y^2 = 2px$ parabola



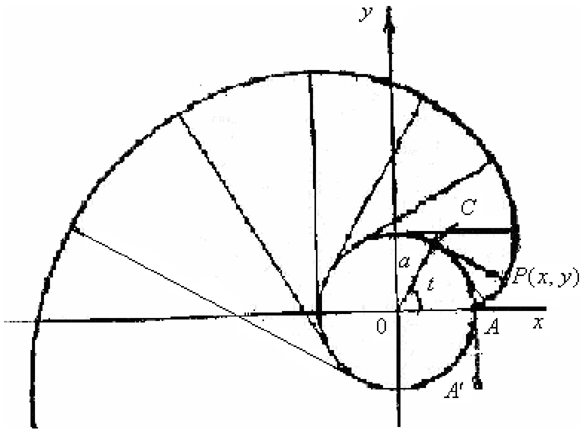
$y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ bunda $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$ Diokles sigsoidasi

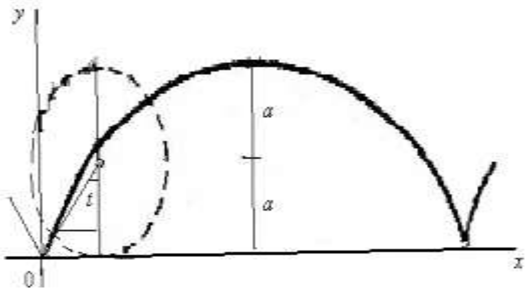


$y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$ Strofoida



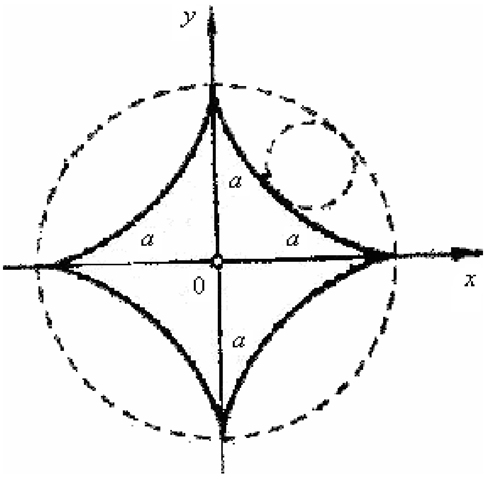
$x^2 + y^2 - 3axy = 0$ bunda $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ Dekart yaprog‘i

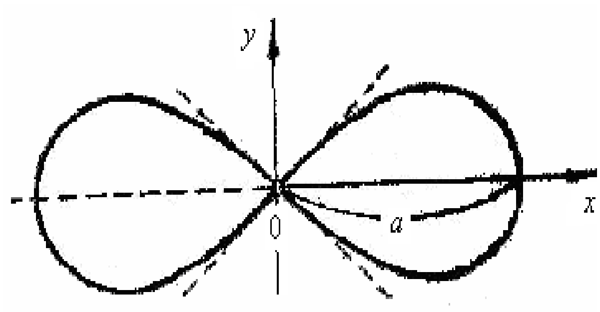




Aylana evolventasi $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

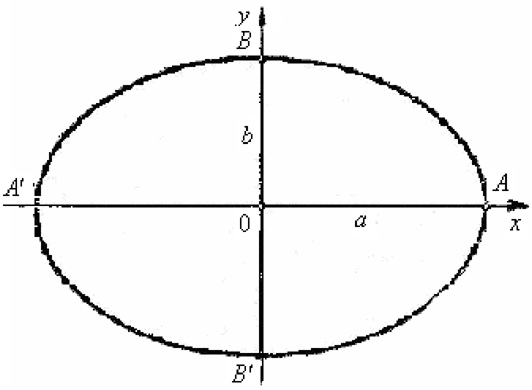
$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ sikloida

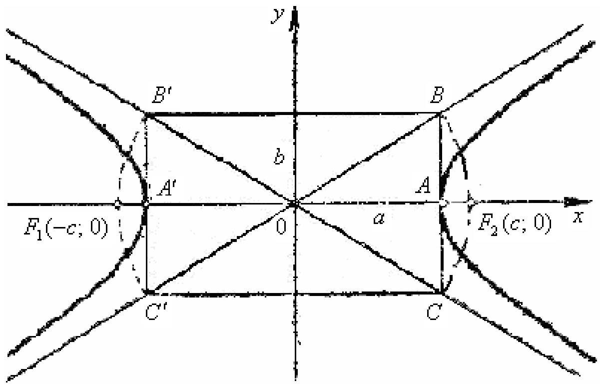




$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ bunda $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ Giposikloida (astroida)

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ bunda $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ Bernulli Lemniskatasi





$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bunda $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ ellips

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ bunda $\begin{cases} x = acht, \\ y = bsht \end{cases}$ giperbola

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Азларов Т. А., Мансуров Х. Т., Математик анализ. 1,2 к, Т. «Укитувчи» 1994, 1995 й.
2. Ильин В. А., Садовничий в. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. 1, 2 т. М., «Наука» 1979 г.
3. Саъдуллаев А., Мансуров Х. Т., Худойберганов Г., Варисов А. К., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар туплами. 1,2 к. Т. «Ўкитувчи» 1993. 1995 й.
4. Б. Д. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. Наука. 1977 ва бошқа йиллардаги нашриётлари.
5. Зорич В. А. Математический анализ. 1,2 т. М. «Наука» 1981
6. T. Azlarov, A Mansurov. Matematik analiz asoslari. I, II qism. T. “Universitet” 2005, 2007.
7. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчислений. М. физ. мат. чиз., 1963.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа. 1,2 т. М. «Висщая школа», 1975.
9. Ильин. В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 1,2. М. «Наука» 1980.
10. Кудрявцев А. Д. и др. Сборник задач по математического анализу. 1,2 т. М. «Наука» 1984, 1986.
11. Шокирова Х. Р. Каррали ва эгри чизикли интеграллар. Т. «Узбекистон» 1992.
12. Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализ. Т. 1,2 т. М. «Висщая шкала». 1973.
13. Т. Т. Туйчиев, Д. Х. Джумабоев. Математик анализ фанидан 1-2 курс талабалари учун лаборатория ишлари. Т. «Университет» 2003.

MUNDARIJA:

Qaydlar uchun

S.H. HODJIYEV
N.O. JO‘RAYEVA

MATEMATIK ANALIZNING ASOSIY TUSHUNCHALARI

(O‘quv qo‘llanma)

Muharrir:	*E.Eshov*
Tex.muharrir:	*D.Abduraxmonova*
Musahhih:	*M.Shodiyeva*
Badiiy rahbar:	*M.Sattorov*

Nashriyot litsenziyasi № 022853. 08.03.2022.
Original maketdan bosishga ruxsat etildi: 10.03.2023. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. “Times New Roman” garnitura 1/16. Ofset bosma usulida. Ofset bosma qog‘ozi.
Bosma tabog‘i 11 Adadi 20. Buyurtma № 45

KAMOLOT

“BUXORO DETERMINANTI” MCHJ
bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahar Namozgoh ko‘chasi 24 uy
Tel:. + 998 98 778 47 27