ISSN 2410-2881 (печатная версия)
ISSN 2413-8525 (электронная версия)

Проблемы педагогики

№ 6 (57), 2021

Москва
2021

ISSN 2410-2881 (печатная версия)
ISSN 2413-8525 (электронная версия)

Проблемы педагогики

№ 6 (57), 2021
Российский импакт-фактор: 1,95
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Подписано в печать:
25.10.2021
Дата выхода в свет:
27.10.2021

Формат 70х100/16.
Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,019
Тираж 1 000 экз.
Заказ №

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«Проблемы науки»

Территория распространения: зарубежные страны, Российская Федерация

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство
ПИ № ФС77 - 60219
Издается с 2014 года

Свободная цена

Содержание

13. *Расулова З.Д.* (2020). Наука и образование в период пандемии. Наука, техника и образование. № 11 (75). С. 101-104.
14. *Дилова Н.Г.* (2013). Требования к учителю по организации сотрудничества учащихся начальных классов в учебном процессе. Актуальные проблемы современной науки. № 4 (72). С. 55-57.
15. *Расулова З.Д.* (2021). Технологии развития творческих способностей будущего учителя. Наука, техника и образование. **77**:2-1. С. 34-37.
16. *Расулова З.Д.* (2021). Роль электронного учебно-методического комплекса в оптимизации учебных процессов. Academy. № 3 (66). С. 27-30.
17. *Дилова Н.Г.* (2021). Использование интерактивных методов в школьном обучении. Вестник интегративной психологии. № 21. С. 51-54.
18. *Расулова З.Д.* (2021). Технологии развития творческих качеств студентов. Наука и образование сегодня. 60:1. С. 34-37.
19. *Dilova N.G.* (2017). Activity Areas of Primary School Teachers. Eastern European Scientific Journal. № 6. Pp. 1-6.
20. *Расулова З.Д.* (2020). Программные инструменты - важный фактор развития творчества учащихся. Вестник науки и образования. № 21 (99), часть 2. С. 37-40.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПРИ РЕШЕНИИ СТЕПЕННО ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Ходжиев С.[1], Жураева Н.О.[2]

[1]Ходжиев Сафар - кандидат физико-математических наук, доцент;
[2]Жураева Наргиза Олтинбоевна – базовый докторант,
кафедра математического анализа, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет,
г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *в данной работе приводится ряд теоретических и логических основ, без которых правильно решить степенно показательные уравнения и неравенства невозможно. Приведены типичные варианты степенно показательных уравнений и неравенств, а также методические рекомендации по решению таких задач. Показаны решения многочисленных задач, сопровождающиеся полезными методическими советами, которые позволяют правильно преобразовать и решить такие уравнения и неравенства. Приводится минимум теоретических знаний, который необходим для решения конкретного уравнения (неравенства).*

Ключевые слова: *уравнения, неравенство, тест, минимум, множество, левая и правая часть.*

Практика показывают, что не все понимают те теоретические, логические основы, без которых правильно решить степенно показательные уравнения и неравенства невозможно.

Это и проявляется на экзамене и тестах: получить равносильные уравнения (неравенства), системы уравнения с помощью безошибочно проведенных выкладок и преобразования умеет большинство, но заметить, как и почему эти выкладки приводят к потере и приобретению дополнительных решений, может не каждый ученик. Некоторые знают теоретические основы положения, но знают их формально.

При решении задач, каждый должен владеть тем минимумом теоретических знаний, который необходим для решения конкретного уравнения (неравенства). Одна из основных является областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства) называются множество значений неизвестного, при котором имеют смысл его левая и правая часть [1, 2].

Чтобы подтвердить вышесказанные замечания, на основе 8-и задач, приведенных в конце работы, провели тест среди студентов колледжа и лицея. По результатам, если сделать выводы, и те, и другие допустили подобные ошибки. Некоторые при решении находили ОДЗ, но правильный ответ не смогли привести и результаты правильного и неправильного составляет 55 на 45 процентов. Это конечно не хороший результат.

В чем состоит суть правильного решения уравнения (неравенства) - после ряда преобразований следить, чтобы не допустить потерь и суметь отбросить лишние корни (решения). В данной работе рассматриваем некоторых навыки решения показательных уравнений и неравенств. Как известно, простейшим показательным уравнением является $a^{f(x)} = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ (когда $b < 0$ уравнения корней не имеет).

На основании определения нулевого показателя степени решением уравнении вида $a^{f(x)} = 1$ будет $f(x) = 0$.

Это утверждение верно при условии, основание отлично от 1, а если основание равно 1, то при любом показателе степень (в ОДЗ $f(x)$) будет равно 1.

Пример 1. Решить уравнение $1^{x^2-2x} = 1$. Иногда ученик (абитуриент) следуя из определения $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), решает уравнение $x^2 - x = 0$ и находит ответ $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Правильный ответ $x \in R$.

На экзаменах и тестах некоторые показательные уравнения (неравенства) содержат выражения вида $f(x)^{\varphi(x)}$ т.е. содержащее неизвестные и в основании и в показателе степени, обычно называется степенно показательным [3-5].

В приведенных вариантах часто такие уравнения имеет

$$f(x)^{\varphi(x)} = f(x)^{\psi(x)} \qquad (1)$$

$$f(x)^{\varphi(x)} = 1 \qquad (2)$$

I. Уравнение (1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующая смешанная система

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \ \cup f(x) = 1 \\ \varphi(x) = \psi(x). \end{cases} .$$

и при этом должны быть учтены ОДЗ $\varphi(x), \psi(x)$.

Если решения x удовлетворяет уравнение (1) и $f(x) \leq 0$, такие корни не считаются решением.

Пример 2. Решит уравнение $|x-3|^{x^2-5x} = |x-3|^{-3x+3}$

Решение. Показатели $x^2 - 5x$ и $-3x + 3$ определены при $\forall x \in R$.

Согласно указанию I, корнями уравнения являются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} |x-3|>0 \\ |x-3|\neq 1 \cup |x-3|=1 \\ x^2-5x=-3x+3 \end{cases}.$$

откуда имеем

$$\begin{cases} |x-3|>0, \\ |x-3|\neq 1, \\ x^2-5x=-3x+3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3, \\ x\neq 4, x\neq 2 \\ x=-1, x=3. \end{cases} \cup |x-3|=1,\ x=4;\ x=2.$$

Из двух корней уравнения $x^2-2x-3=0$ решением системы является только корень $x=-1$, а из требования равенства $|x-3|=1$ удовлетворяют $x=4$ и $x=2$. Также является решениями системы, поскольку при этих значениях x функции x^2-5x и $-3x+3$ определены. Ответ: $x=-1$, $x=2$, $x=4$.

Если показательно степенное уравнение имеет вид (2), т.е. $f(x)^{\varphi(x)}=1$ в этом случае рассуждать так: Если $f(x)=1$, степень будет равно 1, каков бы ни был показатель в области ОДЗ.

Если же $f(x)\neq 1$, то показатель должен быть равен нулю.

II. Решения уравнение $f(x)^{\varphi(x)}=1$. Рассмотреть два случая

$$\begin{cases} f(x)=1, \\ \varphi(x)\in R. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} f(x)\neq 1, \\ \varphi(x)=0. \end{cases}$$

Пример 3. $|\sin x|^{\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x}=1$. Согласно указанию II это уравнение можно решать следующим образом.

Если $|\sin x|=1$ то степень будет равна 1, каков бы ни был показатель. Отсюда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Если же $|\sin x|\neq 1$ показатель должен быть равен нулю, т.е. $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x=0$. Это уравнение верно при $\sin x=0$ и $\sin x=\frac{1}{2}$. Таким образом уравнение распадается на три уравнения: $|\sin x|=1$, $\sin x=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$.

Решения этих уравнений таковы $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x_2=\pi n$, $x_3=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, где n -любое целое число ($n\in Z$). Серии решения x_2 не входит в ОДЗ, так как левой части уравнения получается 0°, что не имеет смысла.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 4. Решить уравнение $x^{\sqrt[3]{x^2}}=(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Область допустимых значений данного уравнения определяется условием $x>0$.

1-способ: По определению функция $f(x)^{g(x)}$ имеет смысл лишь тогда, когда определены обе функции: $f(x)$, $\varphi(x)$ и $f(x)>0$, то

$$f(x)^{g(x)}=10^{g(x)\lg f(x)},$$

отсюда уравнение можно заменить на равносильное $10^{\sqrt[3]{x^2}\lg x}=10^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\lg x}$, т.е. уравнение $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)\lg x=0$.

Из последнего следует, что при $x>0$ уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\lg x=0,\ \sqrt[3]{x^2}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}=0,$$

решая которую, находим два корня уравнения $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{8}$.

2-способ: ОДЗ, уравнение $x>0$. Перепишем это уравнение в виде $x^{\sqrt[3]{x^2}}=(x)^{\frac{\sqrt[3]{x}}{2}}$ При $x=0$ уравнение не имеет смысла, напротив, $x=1$ является корнем. Будем искать корни, отличные от единицы. Приравнивая показатели, получим $\sqrt[3]{x^2}=\frac{\sqrt[3]{x}}{2}$, откуда находим второй корень уравнения $x=\frac{1}{8}$.

Как уже было сказано, некоторые показательные неравенства содержат выражения вида $f(x)^{\varphi(x)}$. По определению $f(x)^{\varphi(x)}=a^{\varphi(x)\log_a f(x)},\ a>0,\ a\neq 1$, т.е. $f(x)^{\varphi(x)}$ функция определена тогда, когда определены функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и, кроме того, $f(x)>0$.

Рассмотрим неравенства вида

$$f(x)^{\varphi(x)}>f(x)^{\psi(x)},\ \left(\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)\lg f(x)>0\right), \tag{3}$$

$$f(x)^{\varphi(x)}<f(x)^{\psi(x)},\ \left(\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)\lg f(x)<0\right). \tag{4}$$

Рассмотрим решения (3), из определения ($f(x)>0$) можно переписать равносильному неравенству

$$10^{\varphi(x)\lg f(x)}>10^{\psi(x)\lg f(x)}$$

или

$$\big(\varphi(x)-\psi(x)\big)\lg f(x)>0\Rightarrow\begin{cases}\varphi(x)-\psi(x)>0,\\ \lg f(x)>0.\end{cases}\cup\begin{cases}\varphi(x)-\psi(x)<0,\\ \lg f(x)<0.\end{cases}.$$

Пример 5. Решить неравенство $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}}\geq(x^2+x+1)^3$.

Решение. При любом $x\in R$ основание $x^2+x+1>0$ и показатель $\frac{x+5}{x+2}$ имеет смысл, при $x\neq 2$. Отсюда имеем равносильное неравенство

$$\left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)\lg(x^2+x+1)\ge 0,$$

или

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{x+2}\lg(x^2+x+1)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+2}\le 0, \\ \lg(x^2+x+1)\ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+2}\ge 0, \\ \lg(x^2+x+1)\le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;\,-1]\cup\left[-\frac{1}{2};\,0\right)$.

Неравенство вида $f(x)^{\varphi(x)} > f(x)^{\psi(x)}$ ($f(x)^{\varphi(x)} < f(x)^{\psi(x)}$) можно решать, если выражение $f(x)^{\varphi(x)} - f(x)^{\psi(x)}$ при $f(x)>1$ имеет тот же знак, что $\varphi(x)-\psi(x)$, и противоположный, если $0<f(x)<1$. Если оба варианта объединить, то выражение $f(x)^{\varphi(x)} - f(x)^{\psi(x)}$ и $\left(f(x)-1\right)\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)$ имеют один и тот же знак [5].

Отсюда неравенство вида $f(x)^{\varphi(x)} > f(x)^{\psi(x)}$ ($f(x)^{\varphi(x)} < f(x)^{\psi(x)}$) можно заменить равносильным ($\varphi(x)-\psi(x)$) $\left(f(x)-1\right)>0$ ($\left(f(x)-1\right)\left(\varphi(x)-\psi(x)\right)<0$). Это надо сделать только после определения ОДЗ исходного неравенства.

Данное неравенство (пример 5) перепишем в виде

$$\left(\frac{x+5}{x+2}-3\right)(x^2+x+1-1)>0\ .$$

Это неравенство легко решается решением является $(-2;\,-1]\cup\left[-\frac{1}{2};\,0\right)$.

На экзаменах и в тестах часто встречается неравенство вида:

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}>1, \qquad (5)$$

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}<1. \qquad (6)$$

Решение (5) и (6) неравенств сводится к решению двух систем, равносильному данному неравенству в ОДЗ неизвестного.

I. Для неравенства (5),

a) $\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$ $\cup$ b) $\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi(x)<0. \end{cases}$.

II. Для неравенства (6),

a) $\begin{cases} f(x)>1, \\ \varphi(x)<0. \end{cases}$ $\cup$ b) $\begin{cases} 0<f(x)<1, \\ \varphi(x)>0. \end{cases}$

Рассмотрим примеры, чтобы данные теории применять.

Пример 6. Решить неравенство $\left|\log_2 \frac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56} > 1$.

Решение: Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенства (I. a),

$$\begin{cases}\left|\log_2 \frac{x}{6}\right| > 1, \\ x^2 - 18x + 56 > 0.\end{cases} \cup \begin{cases}0 < \left|\log_2 \frac{x}{6}\right| < 1, \\ x^2 - 18x + 56 < 0.\end{cases}$$

Решим первую систему

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_2 \frac{x}{6} > 1, \\ \log_2 \frac{x}{6} < -1,\end{array}\right. \\ x^2 - 18x + 56 > 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x}{6} > 2, \\ \frac{x}{6} < \frac{1}{2},\end{array}\right. \\ (x-14)(x-4) > 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x > 12, \\ x < 3,\end{array}\right. \\ (-\infty,\ 4) \cup (14; +\infty).\end{cases} \Rightarrow (14; +\infty) .$$

С учетом ОДЗ ($x > 0$) решение $(0,\ 3) \cup (14; +\infty)$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}0 < \left|\log_2 \frac{x}{6}\right| < 1, \\ x^2 - 18x + 56 < 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1 < \log_2 \frac{x}{6} < 1, \\ \lg \frac{x}{6} \neq 0, \\ (x-14)(x-4) < 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3 < x < 12, \\ x \neq 6, \\ 4 < x < 14\end{cases}$$

С учётом ОДЗ решения $(4,\ 6) \cup (6; 12) \cup (14; +\infty)$: Объединив оба решения, получим ответ.

Ответ: $(0; 3) \cup (4,\ 6) \cup (6; 12) \cup (14; +\infty)$.

В случае нестрогих неравенств вида (5) и (6) нужно учесть и случай $f(x) = 1$.

Пример 7. Решить неравентсво $(2x^2 + 5x - 2)^{x+2} \leq 1$.

Решения. Это неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}(2x^2 + 5x - 2) \geq 1, \\ x + 2 \leq 0.\end{cases} \cup \begin{cases}(2x^2 + 5x - 2) \leq 1, \\ x + 2 \geq 0.\end{cases}$$

Первая из этих систем неравенств имеет решения $x \leq -2$. Вторая система иммет решения $\left[-3; \frac{-5-\sqrt{41}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{41}}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Все эти значения x и составляют множество решений исходного неравенства.

Примеры для самопроверки.

1. Решить уравнение: $1^{x^2-x} = 1$.

A) 0,1 B) $x \in R$ C) 0 D) 1

2. Решить уравнение: $1^{\frac{x^2-1}{\cos x}}=1$.

A) -1; 1 B) $x \in R$ C) $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z, x=1,\ x=-1$ D) $R \setminus \left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n \in Z$

3. Решить уравнение: $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

A) 1 B) 4 C) 1,4 D) 0,1

4. Решить уравнение: $|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

A) $2\pi n, n \in Z$ B) $\pi n;\ (-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$

C) $\pi n;\ (-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$ D) $2\pi n;\ (-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$

5. Решить неравенство: $|x|^{x^2-x-2}<1$.

A) $\{0\} \cup (1;2)$ B) (1; 2) C) $x<1$ D) правильный ответ не приведён

6. Решить неравенство: $x^{\frac{2x-1}{x-3}}>1$.

A) $x<1$ B) (0,5; 1), $x \neq 3$ C) $(0{,}5;1) \cup (3;+\infty)$ D) (1; 3)

7. Решить неравенство: $\left(2^x+3\cdot 2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

A) $x>0$ B) $x \in R$ C) $(0-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$ D) $(3;+\infty)$

8. Решить уравнение: $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$.

A) 2 B) $\frac{1}{10}$ C) 2; 1000 D) $\frac{1}{10}$; 2; 1000

Список литературы

1. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. М.: Наука, 1987. 240 с.
2. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики). М.: Наука, 1972. 528 с.
3. *Дыбов Т., Забоев А.И., Иванов А.С. и др.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие/ Под ред. А.И. Прилепко. 2-е изд. М.: Высш. шк., 1989. 271 с.
4. *Егерев В.К., Кордемский Б.А. и др.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Учеб. пособие / Под ред. М.И. Сканави. 5-е изд. М.: Высш. шк., 1986. 431 с.
5. *Шарыгин И.Ф.* Математика для поступающих в вузы. Учеб. пособие -6-е изд. М.: Дрофа, 2006. 479 с.