

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA  
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**Akramova D.I.**

# **OLIIY MATEMATIKA**

O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi  
Buxoro davlat universiteti tomonidan bakalavriatning Elektronika va  
asbobsozlik (elektronika sanoatida) ta'lim yo'nalishi talabalari uchun  
o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

**“Durdona” nashriyoti  
Buxoro – 2024**

**UO'K 51(075.8)**

**22.1ya73**

**A 40**

Akramova, D.I.

Oliy matematika [Matn] : o'quv qo'llanma / D.I. Akramova. – Buxoro: Sadridin Salim Buxoriy, 2024. – 300 b.

**KBK 22.1ya73**

Bugungi kunda mamlakatimizda amalga oshirilayotgan keng miqyosli islohotlar avvalo ta'limga qaratilgan bo'lib, talabalardan zamonaviy bilimlarni o'rganishni talab qilmoqda.

Manashu nuqtai nazardan, mazkur "Oliy matematika" o'quv qo'llanmasi oliy o'quv yurtlarining Elektronika va asbobsozlik talabalari hamda oliy o'quv yurtlarining texnika ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, undagi ma'lumotlar o'quvchilarga zarur bilim va ko'nikmalarni egallashga yordam beradi.

**Taqrizchilar:**

**Teshayev Muhsin Xudoyberdiyevich**, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti Buxoro bo'linmasi bosh ilmiy xodimi, f.-m.f.d. (DSc).

**Rasulov Haydar Raupovich**, Buxoro davlat universiteti "Matematik analiz" kafedrasi o'qituvchisi, f.-m.f.n, dotsent.

**Darslik O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 29-maydagi 194-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsat berildi. Ro'yxatga olish raqami 194-283.**

**ISBN 978-9910-04-717-6**

## MUNDARIJA

|                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Soʻz boshi.....</b>                                                                                                         | <b>7</b>  |
| <b>I bob. Matematika faniga kirish. Toʻplamlar va ular ustida amallar.....</b>                                                 | <b>8</b>  |
| 1.1-§. Matematika faniga kirish .....                                                                                          | 8         |
| 1.2-§. Toʻplam tushunchasi va uning elementlari .....                                                                          | 10        |
| 1.3-§. Toʻplamlar ustida amallar.....                                                                                          | 13        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                                                                | 18        |
| <b>II bob. Butun sonlar nazariyasi .....</b>                                                                                   | <b>19</b> |
| 2.1-§. Butun sonlarning boʻlinish nazariyasi. Qoldikli boʻlish .....                                                           | 19        |
| 2.2-§. Eng katta umumiy boʻluvchi va eng kichik umumiy boʻlinuvchi. Yevklid algoritmi.....                                     | 21        |
| 2.3-§. Tub va murakkab sonlar. Arifmetikaning asosiy teoremasi .....                                                           | 24        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                                                                | 27        |
| <b>III bob. Matritsa va determinantlar.....</b>                                                                                | <b>29</b> |
| 3.1-§. Matritsa va ular ustida amallar .....                                                                                   | 29        |
| 3.2-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar .....                                                                      | 32        |
| 3.3-§. Oʻrinlashtirishlar va oʻrin almashtirishlar .....                                                                       | 33        |
| 3.4-§. Determinantni satr yoki ustun boʻyicha yoyish.....                                                                      | 34        |
| 3.5-§. Minorlar va ularning algebraik toʻldiruvchilari. Laplas teoremasi .....                                                 | 38        |
| 3.6-§. $n$ -tartibli determinantlarni hisoblash usullari .....                                                                 | 40        |
| 3.7-§. Teskari matritsa .....                                                                                                  | 50        |
| 3.8-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi.....                                                                                     | 54        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                                                                | 57        |
| <b>IV bob. Kompleks sonlar .....</b>                                                                                           | <b>61</b> |
| 4.1-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar .....                                                                            | 61        |
| 4.2-§. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli .....                                                        | 64        |
| 4.3-§. Darajaga koʻtarish va ildiz chiqarish.....                                                                              | 65        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                                                                | 68        |
| <b>V bob. Vektorlar .....</b>                                                                                                  | <b>69</b> |
| 5.1-§. Vektorlar. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar. Vektorning moduli va yoʻnaltiruvchi kosinuslari..... | 69        |
| 5.2-§. Vektorlar ustida chiziqli amallar .....                                                                                 | 70        |
| 5.3-§. Vektorlarning skalyar koʻpaytmasi .....                                                                                 | 71        |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4-§. Vektorlarning vektor ko'paytmasi va aralash ko'paytmasi.....              | 73         |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 80         |
| <b>VI bob. Tekislikda to'g'ri chiziqlar.....</b>                                 | <b>81</b>  |
| 6.1-§. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari .....                              | 81         |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 86         |
| <b>VII bob. Tekisliklar.....</b>                                                 | <b>88</b>  |
| 7.1-§. Fazoda tekislik tenglamalari.....                                         | 88         |
| 7.2-§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari .....                                  | 90         |
| 7.3-§. Fazoda tekislik bilan to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati ....             | 93         |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 95         |
| <b>VIII bob. Ikkinchi tartibli chiziqlar: ellips, giperbola va parabola.....</b> | <b>98</b>  |
| 8.1-§. Ellips .....                                                              | 98         |
| 8.2-§. Giperbola .....                                                           | 99         |
| 8.3-§. Parabola .....                                                            | 102        |
| <b>Mustaqil yechish uchun misol va masalalar.....</b>                            | <b>103</b> |
| <b>IX bob. Sonlar ketma ketligi va uning limiti.....</b>                         | <b>106</b> |
| 9.1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi .....                                    | 106        |
| 9.2-§. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'tifi.....                                  | 106        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 108        |
| <b>X bob. Funktsiyalar.....</b>                                                  | <b>110</b> |
| 10.1-§. Funktsiya tushunchasi.....                                               | 110        |
| 10.2-§. Elementar funktsiyalar.....                                              | 118        |
| 10.3-§. Funktsiyaning limiti.....                                                | 127        |
| 10.4-§. Chekli limitga ega bo'lgan funktsiyalarning xossalari.....               | 136        |
| 10.5-§. Funktsiya limitining mavjudligi haqidagi teoremlar.....                  | 138        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 142        |
| <b>XI bob. Funktsiyaning uzluksizligi.....</b>                                   | <b>144</b> |
| 11.1-§. Funktsiya uzluksizligi ta'rifi.....                                      | 144        |
| 11.2-§. Funktsiyaning uzilishi. Uzilishning turlari.....                         | 147        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                  | 152        |
| <b>XII bob. Funktsiyaning hosilasi va differensialli .....</b>                   | <b>153</b> |
| 12.1-§. Funktsiyaning hosilasi .....                                             | 153        |
| 12.2-§. Teskari funktsiyaning hosilasi. Murakkab funktsiyaning hosilasi.....     | 156        |

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 12.3-§. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyalarning hosilalari.....     | 158        |
| 12.4-§. Funksiyaning differensialli .....                                                   | 166        |
| 12.5-§. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash.....                                   | 171        |
| <b>XIII bob. Aniqmas integral .....</b>                                                     | <b>173</b> |
| 13.1-§. Aniqmas integral tushunchasi.....                                                   | 173        |
| 13.2-§. Integrallash usullari .....                                                         | 177        |
| 13.3-§. Ratsional funksiyalarni integrallash .....                                          | 180        |
| 13.4-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash .....                                  | 190        |
| 13.5-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.....                                       | 198        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 199        |
| <b>XIV bob. Aniq integral .....</b>                                                         | <b>201</b> |
| 14.1-§. Aniq integral tushunchasi.....                                                      | 201        |
| 14.2-§. Aniq integrallarni hisoblash .....                                                  | 206        |
| 14.3-§. Aniq integralning ba'zi tadbiqlari .....                                            | 210        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 222        |
| <b>XV bob. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hususiy hosilalari va ekstremum.....</b>         | <b>223</b> |
| 15.1-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning hususiy hosilalari .....                            | 223        |
| 15.2-§. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.....                                            | 228        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 232        |
| <b>XVI bob. Sonli qatorlar .....</b>                                                        | <b>234</b> |
| 16.1-§. Asosiy tushunchalar.....                                                            | 234        |
| 16.2-§. Yaqinlashuvchi qatorlar. Koshi teoremasi .....                                      | 237        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 240        |
| <b>XVII bob. Funksional qatorlar .....</b>                                                  | <b>242</b> |
| 17.1-§. Funksional qator tushunchasi .....                                                  | 242        |
| 17.2-§. Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligi.....                                  | 243        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 248        |
| <b>XVIII bob. Sodda differensial tenglamalar .....</b>                                      | <b>249</b> |
| 18.1-§. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar .....                           | 249        |
| 18.2-§. Birinchi tartibli tenglamalar .....                                                 | 249        |
| 18.3-§. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar .....         | 251        |
| 18.4-§. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.....                          | 252        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                             | 253        |
| <b>XIX bob. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar. Bernulli va Rikkati tenglamasi.....</b> | <b>254</b> |

|                                                                                         |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 19.1-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar .....                       | 254        |
| 19.2-§. Bernulli tenglamasi.....                                                        | 255        |
| 19.3-§. Rikkati tenglamasi .....                                                        | 256        |
| 19.4-§. To'la differensialli tenglamalar va integrallovchi<br>ko'paytuvchi.....         | 257        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                         | 262        |
| <b>XX bob. Hodisalar fazosi, hodisalar ustida amallar. Hodisaning<br/>ehtimoli.....</b> | <b>263</b> |
| 20.1-§. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi.....                            | 263        |
| 20.2-§. Hodisalar ustida amallar .....                                                  | 264        |
| 20.3-§. Ehtimollikning statistik ta'rifi .....                                          | 266        |
| 20.4-§. Ehtimollikning klassik ta'rifi .....                                            | 267        |
| 20.5-§. Ehtimollikning geometrik ta'rifi .....                                          | 270        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                         | 272        |
| <b>XXI bob. Tasodifiy miqdorlar. taqsimot qonunlari .....</b>                           | <b>274</b> |
| 21.1-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari.....                                    | 274        |
| 21.2-§. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunlari .....                           | 275        |
| 21.3-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar                         | 277        |
| 21.4-§. Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot<br>funksiyalari.....               | 279        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                         | 289        |
| <b>XXII bob. Matematik statistika elementlari.....</b>                                  | <b>290</b> |
| 22.1-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti .....                                          | 290        |
| 22.2-§. Taqsimotning empirik funksiyasi.....                                            | 290        |
| 22.3-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari .....                              | 292        |
| 22.4-§. Bosh to'planning o'rtacha qiymat. O'rtacha tanlanma<br>to'planning qiymati..... | 293        |
| 22.5-§. Ishonchli ehtimol. Ishonchli interval.....                                      | 294        |
| Mustaqil yechish uchun misol va masalalar .....                                         | 296        |
| <b>Adabiyotlar .....</b>                                                                | <b>297</b> |

## SO'Z BOSHI

Respublikamizda olib borilayotgan demokratik islohotlar, iqtisodiyotning turli sohalariga bozor munosabatlarining jadal kirib kelishi, jahon bozorida raqobatlashgan mahsulotlarni ishlab chiqarish strategiyasi va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” asosida ta’lim sohasida ustivor yo’nalishlarni belgilash, chuqur bilimga ega barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarni o’z ustida mustaqil ishlashga o’rgatish va tashabbusini oshirish-eng muhim ahamiyatga ega bo’lgan vazifalardan biri sifatida qaralmoqda. Shu dolzarb masalaga oz bo’lsa ham o’z hissalarini qo’shish maqsadida Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrası dotsenti D.I.Akramova bir qancha yillar davomida universitet talabalariga o’qigan ma’ruzalari va olib borilgan amaliy mashg’ulotlari asosida to’plangan tajribalaridan foydalanib oliy matematika kursidan o’quv qo’llanma yozishga jazm etdi. Kitobxon e’tiboriga havola etilayotgan mazkur “Oliy matematika” qo’llanma universitetning Elektronika va asbobsozlik, Amaliy matematika, Kompyuter ilmlari, Axborot tizimlari va texnologiyalari, shuningdek texnika yo’nalishda tahsil olayotgan talabalari uchun mo’ljallangan. Unda keltirilgan mavzular oliy ta’limning barcha texnik yo’nalishlari uchun tasdiqlangan namunaviy o’quv dasturiga to’la mos keladi. O’quv qo’llanmada keltirilgan barcha mavzular mumkin qadar qat’iy matematik tilda va tushunarli bo’lishiga harakat qilindi, hamda har bir mavzu ko’plab misol va masalalar bilan ta’minlandi, shuningdek bob so’ngida mustaqil ishlash uchun masalalar yetarlicha keltirilgan. O’quv qo’llanma texnika ta’lim yo’nalishi talabalari uchun yozilganligi e’tiborga olinib ayrim teoremlar isbotsiz keltirildi. Bunday teoremlar isboti bilan qiziqqan kitobxon uni adabiyotlar ro’yxatidagi adabiyotlardan topish mumkin.

Muallif mushtariylardan bu nashr to’g’risidagi fikr-mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul qilib, bildirilgan fikrlar o’quv qo’llanmaning takomillashishiga yordam beradi deb umid qiladi.

Muallif.

# I BOB. MATEMATIKA FANIGA KIRISH. TO'PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

## 1.1-§. Matematika faniga kirish

Matematika fan sifatida eramizdan oldingi III asrda grek olimi **Yevklid** yozgan (to'plagan) 5 tomdan iborat va «Boshlang'ich» deb atalgan kitoblardan boshlanadi. To eramizning XVI asrigacha bu matematika taraqqiyoti yo'lida bizning bobolarimiz ham sezilarli darajada hissa qo'shishgan.

**Al-Xorazmiy (787-850) Abdullo Muhammad ibn Muso al Majusiy.** «Hind hisobi» kitobini yozib arifmetika fanining asoschisi bo'lgan. Unda hozirda siz-biz ya'ni butun dunyo foydalanadigan O'NLIK sanoq sistemasi taklif qilingan. *Algebra* atamasi Xorazmiyning «Al-kitob al muxtasar fi hisob al-jabr valmuqobala» (Al-jabr muqobala hisobi haqida qisqacha kitob) nomli risolasidagi «Al-jabr» so'zining lotincha yozilishidan olingan. Bizgacha yetib kelgan nusxasi 1342 yili ko'chirilgan arabcha nusxasidir. 1145 yili **Robert Gester** ingliz tiliga, 1160 yili italiyalik **Gerardo** lotinchaga tarjima qilgan, 1486 yilda Iogan Vidman Leypsig universitetida qilgan dokladida Xorazmiy kitobidan olinganligini keltirgan. «Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarni o'z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boylik bo'lish va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur» deb yozadi kitob muqaddimasida Al-Xorazmiy. «Hind hisobi» kitobi undan keyingi arifmetikadan asar yozuvchi barcha olimlarga qolip bo'lib xizmat qilgan bo'lsa, «Al-jabr va-l-muqobala kitob» asari algebraga asos soldi. Undan oldin hech kim algebra bo'yicha bunday kitob yozmagan edi.

**Abu Rayxon (Beruniy) Muhammad Ibn Ahmad (973-1048).** Evklidning «Boshlang'ich» ini, Ptolomeyning Al'magest asarlarini sanskritdan zamon tiliga aylantirgan «Astrolyabiya traktati», «Hindiston» asarlari bilan dunyoga mashhur geometr, faylasuf sifatida tanilgan.

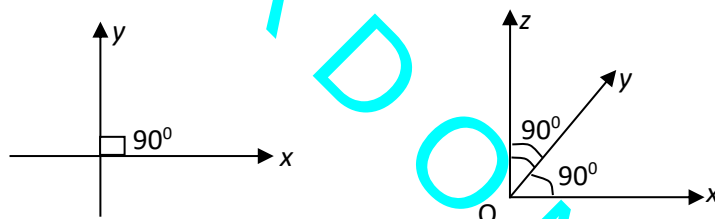
$$U \quad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a, \quad 2 \sin \frac{\alpha}{4} =$$

$\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cos a}}, \quad 2 \sin \frac{a}{8} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos a}}}, \dots$   
 formulalarning birinchi ijodkoridir.

**Umar Xayyom (1048-1131) (Xayyom Abul Fatx Omar Ibn-Ibroxim)** Sa-marqandda (Xurosondan haydalib) yashagan davrida «Algebra va-l-muqobala asarlarining davomi haqida traktat», 1077 yili «Evklid asosiy postulatlari haqida kommentariylar» traktatini yozgan. Bularda egri chiziqli trapetsiya tushunchalariga asos solingan.

**Al Koshi G'iyosiddin Jamshid ibn Masud (1394-1449)** Ulug'bek observatoriyasida ishlagan, 1427 yilda «Arifmetika kaliti» asarini yozgan.

XV asrlardan boshlab matematikaning yangi amallari vujudga kela boshladi va XVIII asrga kelib biz hozirgi vaqtda «Oliy matematika» deb ataydigan qismi, to'la o'z asosi va isbotiga ega bo'lib, shakllandi. Bunda «Dekart o'zgaruvchi miqdorlari matematikada burilish nuqtasi bo'ldi, keyinchalik u differensial va integral hisob taraqqiyotiga asos bo'ldi» -deb yozadi F.Engels.



Dekartning

matematikada olib borgan ishlari uni analitik geometriyaning buyuk asoschilaridan deb atashga imkon beradi. Juda ko'p tadbirlarga ega bo'lgan Dekart spirali ( $p = a$ ), Dekart qiyshiqligi, Dekart yaprog'i kabi chiziqlar matematikada anchagina bo'lib, uning nomi bilan ataladi.

Davrimiz (XX asr) da oliy matematika shunchalik zo'r taraqqiy etib ketdiki, u kirib bormagan fan, iqtisodiy yoki texnik soha yo'q. Unda ijod qilib, yangi-yangi sohalar ochayotgan olimlar besanoq. Bizning xalqimiz farzandlari ham bu ulkan fan oqimida o'z o'rinlariga ega. Masalan, T.A.Sarimsoqov, S.H.Sirojiddinovlar dunyoga tanikli, Toshkent ehtimollar nazariyasi maktabini vujudga keltirdilar.

Bugungi kunda biz, matematika zimmasiga tushgan barcha vazifalarga matematika tadbiriq etilayotgan barcha sohalarga nazar solib, «U qanday fan?» degan savolga yaxshigina javob olamiz. «Matematika bu borliqni shakliy ko'rinishini va miqdoriy munosabatlarini

o'rganuvchi fan». Ha borliqning **mazmunini** uning **shakli va miqdori** belgilaydi. Shakl va miqdor o'zgarishi **hodisalar** deb ataladi. Har bir hodisada bir va bir necha faktor ishtirok etadi. Har bir faktor o'z kattaligiga ega bo'lib, hodisa jarayonida yoki aktiv ishtirok etadi yoki shu hodisada namayon bo'ladi. Aynan bir hodisada ishtirok etayotgan barcha faktorlar o'zaro bog'liqdir. Ana shu bog'liklikni o'rganuvchi fan matematikadir.

## 1.2-§. To'plam tushunchasi va uning elementlari

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib, uni o'zidan soddaroq tushunchalar orqali ta'riflab bo'lmaydi. Turmushda ma'lum obyektlar majmuasini bir butun narsa deb qarashga to'g'ri keladi. To'plam ixtiyoriy tabiatli obyektlardan tashkil topgan bo'lishi mumkin. Masalan, Osiyo qit'asidagi barcha daryolar yoki lug'atdagi barcha so'zlar to'plam bo'la oladi. Bundan tashqari, maktabdagi o'quvchilar, o'qituvchilar to'plami va hokazo.

Majmualarning matematik tavsifini berish uchun to'plam tushunchasini taniqli nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) quyidagicha kiritgan: «To'plam fikrda bir butun deb qaraluvchi ko'plikdir».

To'plamni tashkil etgan obyektlar uning elementlari deyiladi. To'plam odatda, qulaylik uchun lotin alifbosining bosh harflari, ya'ni  $A, B, C, \dots$  orqali, uning elementlari esa kichik harflari, masalan,  $a, b, c, \dots$  bilan belgilanadi.

Elementlari  $a, b, c, \dots$  bo'lgan  $A$  to'plam qavslar yordamida  $A = \{a, b, c, \dots\}$  kabi yoziladi. Masalan,  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  - o'nlik sanoq sistemasidagi raqamlar to'plami,  $B = \{a, e, i, o, u\}$  - ingliz tilidagi unli harflar to'plami.

$x$  ning  $A$  to'plamning elementi bo'lsa  $x \in A$  kabi, elementi bo'lmasa esa  $x \notin A$  yoki  $x \bar{\in} A$  kabi yoziladi va birinchi holda “ **$x$  element  $A$  ga tegishli**”, ikkinchi holda “ **$x$  element  $A$  ga tegishli emas**” deb o'qiladi (1.1-chizma).

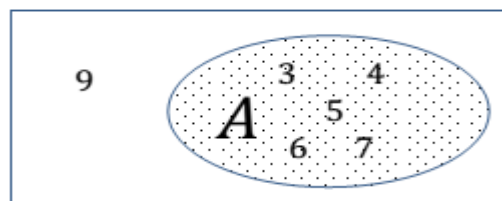
Masalan,  $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  to'plam uchun  $4 \in A$ , ammo  $9 \notin A$  1.2-chizma.



1.1-chizma



1.2-chizma



Agar to'plamni tashkil qilgan elementlar soni chekli bo'lsa, bunday to'plam **chekli to'plam**, aks holda **cheksiz to'plam** deyiladi. Masalan,  $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$  to'plam chekli,  $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  – barcha natural sonlar to'plami esa cheksiz to'plamdir. Cheksiz to'plamga yana bir misol sifatida 10 dan kichik bo'lmagan barcha natural sonlar to'plamini keltirsa bo'ladi.

$A$  to'plamning barcha elementlari soni  $n(A)$  orqali belgilanadi. Masalan, ushbu  $A = \{2, 5, 8, 10, 12\}$  to'plamning barcha elementlari soni 5 ta bo'lgani uchun,  $n(A) = 5$  bo'ladi.

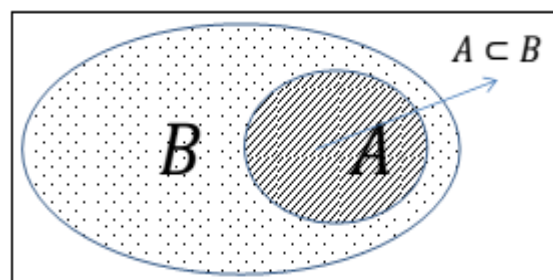
Elementlari cheksiz bo'lgan  $A$  to'plam uchun  $n(A) = \infty$  belgilash qabul qilingan.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam **bo'sh to'plam** deyiladi va  $\emptyset$  kabi belgilanadi.  $\emptyset$  to'plam ham chekli hisoblanib, uning uchun  $n(\emptyset) = 0$  tenglik o'rinli yani uning elementlar soni 0 ta. Odatda to'plam elementlari soni to'plamning quvvati deb yuritiladi.

Eslatma: a)  $A = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  to'plamning elementlar soni  $n(A) = m$  ta.

b)  $B = \{k, k + 1, k + 2, \dots, m\}$  to'plamning elementlar soni  $n(B) = m - (k - 1)$  ta bo'ladi, chunki agar  $B$  to'plamda  $\{1, 2, \dots, k - 1\}$  elementlar ham bor desak, unda uning elementlari soni  $m$  ta bo'lar edi. Bundan esa  $B$  to'plamda  $k - 1$  element yo'q ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun  $n(B) = m - (k - 1)$  bo'ladi.

**1.2.1-ta'rif.** Agar  $A$  to'plamning hamma elementlari  $B$  to'plamning ham elementlari bo'lsa,  $A$  to'plam  $B$  to'plamning qism to'plami deyiladi va  $A \subset B$  yoki  $A \subseteq B$  kabi yoziladi (1.3-chizma). Bunday holatda “ $A$  to'plam  $B$  da yotadi” yoki “ $A$  to'plam  $B$  ning qismi” ham deb yuritiladi.

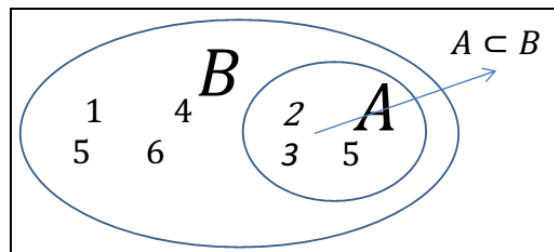


1.3-chizma

Bizga ikkita  $A = \{2, 3, 5\}$  va  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin. Osongina ko'rish mumkinki,  $A \subset B$  bo'ladi, chunki  $A$  to'plamning barcha elementlari  $B$  to'plamning ham elementlari bo'ladi.

$A$  to'plamning  $B$  to'plamga tegishli bo'lmagan elementlari mavjud bo'lsa,  $A$  to'plam  $B$  ning qism to'plami bo'la olmaydi va bu holat  $A \not\subset B$  kabi yoziladi.

Masalan,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  bo'lsin.  $1 \notin B$  bolgani uchun  $A$  to'plam  $B$  to'plamning qismi bo'la olmaydi  $A \not\subset B$ , o'z navbatida  $5 \notin A$  bo'lani uchun  $B$  to'plam ham  $A$  to'plamning qism to'plami bo'la olmaydi.



1.4-chizma

Agar bir vaqtning o'zida  $A \subseteq B$  va  $B \subseteq A$  bo'lsa, bu to'plamlar aynan bir xil elementlardan iborat bo'lib, ular teng (ustma-ust tushuvchi) to'plamlar deyiladi va  $A = B$  kabi yoziladi.

Masalan, muntazam uchburchaklar to'plami barcha burchaklari o'zaro teng bo'lgan uchburchaklar to'plami bilan ustma-ust tushadi. Buning sababi ixtiyoriy muntazam uchburchakning barcha burchaklari teng va aksincha, agar uchburchakda barcha burchaklar teng bo'lsa, u muntazam bo'ladi.

**1.2.2-ta'rif.**  $B$  to'plamning barcha elementlari  $A$  to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga  $A$  da  $B$  ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa  $B$  to'plam  $A$  to'plamning **xos qism** to'plami deyiladi.

**1.2.3-ta'rif.**  $A$  to'plamning o'zi va  $\emptyset$  to'plam shu  $A$  to'plamning **xosmas qism** to'plami deyiladi.

Masalan,  $A = \{a\}$  to'plam,  $\emptyset$  va  $\{a\}$  dan iborat ikkita qism to'plamga ega.  $A = \{a; b\}$  to'plam esa, to'rtta  $\emptyset, \{a\}, \{b\}$  va  $\{a; b\}$  qism to'plamlarga ega. Demak,  $\emptyset \subseteq A$ ;  $A \subseteq A$  munosabatlar o'rinli ekan.

**1.2.4-ta'rif.** Agar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar  $A$  to'plamning qism to'plami bo'lsa,  $A$  to'plam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  to'plamlar uchun **universal to'plam** deyiladi.

Odatda universal to'plam,  $U$  yoki  $J$  harflari bilan belgilanadi. Universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri  $U$  ning o'zi, ikkinchisi esa  $\emptyset$  bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi.

Masalan,  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  – barcha natural sonlar to'plami;  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  – barcha butun sonlar to'plami;  $Q = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N\right\}$  – barcha ratsional sonlar to'plami;  $R = (-\infty; +\infty)$  – barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, ular uchun

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

munosabat bajariladi. Bu holda  $R$  haqiqiy sonlar to'plami qolgan sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini bajaradi.

Ma'lumot uchun shuni aytish mumkinki, har qanday chekli  $A$  to'plamning qism to'plamlari soni  $2^n$  ta bo'ladi, bu yerda  $n$  –  $A$  to'plamning elementlar soni.

$R$  to'plamning qism to'plamlarini koordinatalar o'qida tasvirlash mumkin. Agar  $a, b \in R$  va  $a < b$  bo'lsa, quyidagi belgilashni kiritish mumkin.

| Sonli oraliq                              | Belgilanishi   | Tasvirlanishi | Nomlanishi                      |
|-------------------------------------------|----------------|---------------|---------------------------------|
| $A = \{x \mid x \in R; a < x < b\}$       | $(a; b)$       |               | Interval                        |
| $A = \{x \mid x \in R; a \leq x \leq b\}$ | $[a; b]$       |               | Kesma                           |
| $A = \{x \mid x \in R; a \leq x < b\}$    | $[a; b)$       |               | Yarim interval yoki yarim kesma |
| $A = \{x \mid x \in R; a < x \leq b\}$    | $(a; b]$       |               | Yarim interval yoki yarim kesma |
| $A = \{x \mid x \in R; x > a\}$           | $(a; +\infty)$ |               | Ochiq nur                       |
| $A = \{x \mid x \in R; x \geq a\}$        | $[a; +\infty)$ |               | Nur yoki yarim to'g'ri chiziq   |
| $A = \{x \mid x \in R; x < a\}$           | $(-\infty; a)$ |               | Ochiq nur                       |
| $A = \{x \mid x \in R; x \leq a\}$        | $(-\infty; a]$ |               | Nur yoki yarim to'g'ri chiziq   |

### 1.3-§. To'plamlar ustida amallar

Bizga bo'sh bo'lamagan ikkita  $A$  va  $B$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

**1.3.1-ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning kamida bittasining elementi bo'lgan elementlardan tashkil topgan to'plamga bu ikki  $A$  va  $B$  to'plamlarning **birlashmasi (yig'indisi)** deyiladi va  $A \cup B$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $A = \{1, 3, 4\}$  va  $B = \{2, 3, 5\}$  uchun ularning birlashmasi  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  to'plamdan iborat bo'ladi.

$x \in A \cup B$  ifoda, yoki  $x \in A, x \notin B$ , yoki  $x \notin A, x \in B$  yoki  $x \in A, x \in B$  ekanligini bildiradi. Boshqacha aytganda quyidagi munosabatlardan birining bajarilishini bildiradi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A, x \notin B \\ x \notin A, x \in B \\ x \in A, x \in B. \end{cases}$$

$A$  va  $B$  to'plamlarning birlashmasi kommutativlik xossasiga ega ya'ni ular uchun quyidagi tenglik har doim o'rinli;

$$A \cup B = B \cup A.$$

**1.3.2-ta'rif.**  $A$  va  $B$  to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plamga  $A$  va  $B$  to'plamlarning **kesishmasi** deyiladi va  $A \cap B$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $A = \{1, 3, 4\}$  va  $B = \{2, 3, 5\}$  to'plamlar uchun  $A \cap B = \{3\}$  bo'ladi, chunki  $3 \in A$  va  $3 \in B$ .

$x \in A \cap B$  degani,  $x$  element  $A$  hamda  $B$  to'plamga tegishli ekanligini bildiradi. Boshqacha aytganda quyidagi munosabat o'rinli;

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ va } x \in B.$$

Umumiy elementlarga ega bo'lmagan ikkita to'plam o'zaro kesishmaydigan to'plamlar deyiladi. Ikki  $A$  va  $B$  to'plamlarning kesishmasi kommutativlik xossasiga ega ya'ni ular uchun quyidagi tenglik har doim o'rinli;

$$A \cap B = B \cap A.$$

**1.3.3-ta'rif.**  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga kirmagan elementlariga  $A$  to'plamdan  $B$  to'plamning **ayirmasi** deyiladi va  $A \setminus B$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  va  $B = \{2, 3, 5\}$  to'plamlar uchun  $A \setminus B = \{1, 4\}$  bo'ladi, chunki, 1 va 4 elementlar  $A$  to'plamga tegishli bo'lib  $B$  to'plamga tegishli emas.

$x \in A \setminus B$  ifoda,  $x$  element  $A$  to'plamga tegishli bo'lib,  $B$  to'plamga tegishli bo'lmasligini bildiradi. Boshqacha aytganda quyidagi munosabat o'rinli;

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A, x \notin B.$$

To'plamlarning ayirmasi kommutativlik xossasiga ega emas;

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

**1.3.4-ta'rif.**  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga kirmagan hamda  $B$  to'plamning  $A$  to'plamga kirmagan elementlarining birlashmasidan tashkil topgan to'plamga  $A$  va  $B$  to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** deyiladi va  $A \Delta B$  kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra ikki to'plam simmetrik ayirmasi quyidagicha ekan;  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Masalan,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  va  $B = \{2, 3, 5\}$  to'plamlar uchun  $A \setminus B = \{1, 4\}$  va  $B \setminus A = \{5\}$  bo'lgani  $A \Delta B = \{1, 4, 5\}$  bo'ladi.

$x \in A \Delta B$  degani,  $x$  element yo  $A$  to'plamga yo  $B$  to'plamga tegishli bo'lishni anglatadi ya'ni

$$x \in A \Delta B \Rightarrow x \in A \text{ yo } x \in B.$$

Boshqacha aytganda quyidagi munosabat o'rinli;

$$x \in A \Delta B \Rightarrow \begin{cases} x \in A, x \notin B \\ x \notin A, x \in B. \end{cases}$$

$A$  va  $B$  to'plamlarning simmetrik ayirmasi kommutativlik xossasiga ega ya'ni ular uchun quyidagi tenglik har doim o'rinli;

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

1-misol.  $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$  va  $B = \{3, 4, 6, 9, 10\}$  to'plamlar uchun quyidagilarni aniqlang:

a) rost yoki yolg'on ekanini: 1)  $4 \in A$ ; 2)  $6 \notin A$ .  
b) to'plamlarni toping: 1)  $A \cap B$ ; 2)  $A \cup B$ , 3)  $A \setminus B$ , 4)  $A \Delta B$ .

c) rost yoki yolg'on ekanini: 1)  $A \subseteq B$ ; 2)  $\{9, 6, 3\} \subseteq B$ .

*Yechish.* a) 1) 4 soni  $A$  to'plamning elementi bo'lmagani uchun  $4 \in A$  munosabat yolg'on. 2) 6 soni  $A$  to'plamning elementi bo'lmagani uchun  $6 \notin A$  munosabat rost.

b) 1)  $A \cap B = \{3, 9\}$ , chunki faqat 3 va 9 sonlarigina ikkala  $A$  va  $B$  to'plamning ham elementlaridir.

2)  $A \cup B$  to'plamni topish uchun yoki  $A$  ga, yoki  $B$  yoki  $A$  va  $B$  to'plamlarga tegishli bo'lgan elementlarni yozamiz, natijada  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  to'plam hosil bo'ladi.

3)  $A \setminus B$  to'plam esa  $A$  ga tegishli bo'lib  $B$  ga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgani uchun  $A \setminus B = \{2, 5, 7, 8\}$  bo'ladi.

4)  $A \setminus B = \{2, 5, 7, 8\}$  va  $B \setminus A = \{4, 6, 10\}$  bo'lgani uchun

$$A \Delta B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

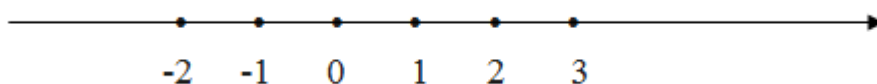
bo'ladi.

c)1)  $A \subseteq B$  munosabat yolg'on, chunki  $A$  to'plamda  $B$  ga tegishli bo'lmagan elementlar mavjud, masalan,  $5 \in A$  ammo  $5 \notin B$ .

2)  $\{9, 6, 3\} \subseteq B$  munosabat rost, chunki  $B$  da  $\{9, 6, 3\}$  to'plam elementlari bor.

Ayrim hollarda to'plamni berish uchun, uning elementlari uchun o'rinli, ammo, boshqa elementlar uchun o'rinli bo'lmagan xarakteristik xossa qaraladi. Agar  $x$  element  $P$  xossaga ega degan fikr qisqacha  $P(x)$  deb yozilgan bo'lsa,  $P$  xossaga ega bo'lgan barcha elementlar to'plami  $\{x | P(x)\}$  ko'rinishda belgilanadi.

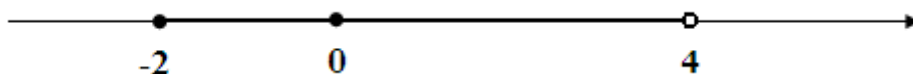
Masalan,  $A = \{x | -2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$  yozuv quyidagicha o'qiladi: “ $-2$  dan katta yoki teng hamda  $3$  dan kichik yoki teng bo'lgan barcha butun sonlar to'plami” yoki “ $-2$  dan kichik bo'lmagan va  $3$  dan oshmaydigan butun sonlar to'plami”. Bu to'plam sonlar o'qida quyidagicha tasvirlanadi:



1.5-chizma.

Ko'rinib turibdiki,  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  to'plamdan iborat va u chekli, shuning uchun uning elementlar soni  $n(A) = 6$ .

Xuddi shunday,  $B = \{x | -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$  yozuv “ $-2$  dan katta yoki teng hamda  $4$  dan kichik” yoki “ $-2$  dan oshmaydigan hamda  $4$  dan kichik” bo'lgan barcha haqiqiy sonlar to'plami deb o'qiladi. Bu to'plam sonlar o'qida quyidagicha tasvirlanadi:



1.6-chizma.

Ko'rinib turibdiki,  $B = [-2, 4)$  to'plamning elementlari cheksizta, bunday hollarda  $n(B) = \infty$  deb yoziladi.

2-misol.  $A = \{x | 3 < x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$  bo'lsin.

- 1) Bu yozuv qanday o'qiladi?
- 2) Bu to'plamning elementlarini nomma-nom yozib chiqing;
- 3) Bu to'plamning elementlar soni ya'ni  $n(A)$  ni toping.

*Yechish.* 1) “ $3$  dan katta hamda  $10$  dan kichik yoki teng bo'lgan barcha butun sonlar to'plami” yoki “ $3$  dan katta hamda  $10$  dan oshmaydigan barcha butun sonlar to'plami”

2) Bu to'plam elementlari quyidagiga teng;

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};$$

3)  $A$  to'plamning elementlar soni 7 ta bo'lgani uchun  $n(A) = 7$  bo'ladi.

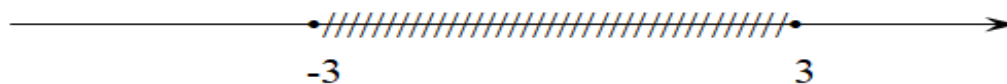
3-misol.  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x^2 - 9 \leq 0\}$ ,  $B = \{x|x \in \mathbb{Z}; x^2 - 9 \leq 0\}$  va  $C = \{x|x \in \mathbb{R}; x^2 - 9 \leq 0\}$  to'plamlarning elementlarini ko'rsating.

*Yechish.*  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x^2 - 9 \leq 0\}$  to'plam elementlari  $x^2 - 9 \leq 0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar to'plamidan iborat.

$x^2 \leq 9$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar  $\{1, 2, 3\}$ . Demak,  $A$  to'plam elementlari  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x^2 - 9 \leq 0\} = \{1, 2, 3\}$  dan iborat ekan.

$B = \{x|x \in \mathbb{Z}; x^2 - 9 \leq 0\}$  to'plam elementlari  $x^2 - 9 \leq 0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlardan iborat.  $x^2 \leq 9$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlar  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Demak,  $B$  to'plam elementlari  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  dan iborat ekan.

$C = \{x|x \in \mathbb{R}; x^2 - 9 \leq 0\}$  to'plam elementlari  $x^2 - 9 \leq 0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlardan iborat va uni  $C = \{x|x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3]$  kabi yozish mumkin. Bu to'plamni sonlar o'qida tasvirlasak, quyidagicha bo'ladi:



1.7-chizma.

4-misol. 12 dan katta 48 dan oshmaydigan 6 ga karrali ikki xonali sonlar to'plamini tuzing.

*Yechish.* Bu to'plam  $A = \{18, 24, 30, 36, 42\}$  bo'ladi.

5-misol.  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x^2 - x - 20 = 0\}$  va  $B = \{x|x \in \mathbb{Z}; x^2 - x - 20 = 0\}$  to'plamlarning elementlarini ko'rsating.

*Yechish.* Avvalo  $x^2 - x - 20 = 0$  (1.1) kvadrat tenglamani yechamiz.

$$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81,$$

$$x_1 = \frac{1 + 9}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{1 - 9}{2} = -4.$$

Shunday qilib, berilgan (1.1) tenglamani 5 va  $-4$  sonlari qanoatlantirar ekan. Masala shartiga ko'ra  $A$  to'plam (1.1) tenglikni qanoatlantiruvchi natural sonlardan iborat bo'lgani uchun  $A = \{5\}$  bo'ladi.  $B$  to'plam esa (1.1) tenglikni qanoatlantiruvchi  $\mathbb{Z}$  (butun) sonlardan tashkil topgani uchun  $B = \{5; -4\}$  bo'ladi.

## Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

### I. Quyidagi to'plamning elementlarini ko'rsating.

1.  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; -2 \leq x < 5\}$ .
2.  $A = \{x|x \in \mathbb{Z}; -2 \leq x < 5\}$ .
3.  $A = \{x|x(x-2) = 0\}$ .
4.  $A = \{x|x(x+2) = 0\}$ .
5.  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x(x+2) - 8 = 0\}$ .

### II. Ushbu to'plamlar uchun $A \cup B$ ; $A \setminus B$ ; $B \setminus A$ ; $A \cap B$ va $A \Delta B$ larni toping.

1.  $A = \{2; 4; 6; 8\}$ ,  $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ .
2.  $A = \{x|x \in \mathbb{N}; x^2 - 25 < 0\}$ ,  $B = \{0; 1; 2\}$ .
3.  $A = \{10 \text{ sonining bo'luvchilari}\}$ ,  $B = \{x|x \in \mathbb{N}; -5 \leq x < 15\}$ .
4.  $A = \{12 \text{ ning bo'luvchilari}\}$ ,  $B = \{15 \text{ ning bo'luvchilari}\}$ .
5.  $A = \{(-5; 4] \text{dagi natural sonlar}\}$ ,  $B = \{x|x \in \mathbb{Z}; x^2 - 25 \leq 0\}$ .
6.  $A = \{(-3; 5) \text{dagi butun sonlar to'plami}\}$ ,  $B = \{1; 2; 5; 8\}$ .
7.  $A = \{2; 4; 6; \dots; 20\}$ ,  $B = \{1; 3; 5; \dots; 17\}$ .
8.  $A = \{\text{matematika}\}$ ,  $B = \{\text{mexanika}\}$  so'zlaridagi harflar to'plami.
9.  $A = \{x|-5 \leq x \leq 10\}$ ,  $B = \{x|3 \leq x \leq 15\}$ .
10.  $A = \{x|-3 \leq x < 5\}$ ,  $B = \{x|5 < x \leq 8\}$ .

### III. Quyidagi to'plamlar tengligini isbotlang.

1.  $(A \cup B) \setminus B = A$
2.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
3.  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
4.  $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$
5.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
6.  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
7.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
8.  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
9.  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
10.  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B)$ .

## II BOB. BUTUN SONLAR NAZARIYASI

### 2.1-§. Butun sonlarning bo'linishnaryasi. Qoldikli bo'lish

Agar shunday  $q$  butun son mavjud bo'lib,  $a = bq$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $a$  butun son  $b$  butun songa ( $b \neq 0$ ) bo'linadi yoki  $b$  son  $a$  sonni bo'ladi deyiladi. Bu yerda  $q$  bo'linma,  $b$  bo'luvchi,  $a$  bo'linuvchi deb ataladi.  $a$  sonning  $b$  songa bo'linishini  $b|a$  shaklda belgilanadi, agar  $a$  son  $b$  songa bo'linmasa, uni  $b|a$  bilan belgilaymiz.

#### **Bo'linish xossalari:**

- a) bo'linish refleksiv, ya'ni  $a|a$ ;
- b) bo'linish tranzitiv, ya'ni agar  $b|a$  va  $c|b$  bo'lsa, u holda  $c|a$ ;
- c)  $c|a$  dan ixtiyoriy butun  $b$  son uchun  $c|ab$  o'rinli;
- d)  $c|a$  va  $c|b$  dan ixtiyoriy butun  $x$  va  $y$  sonlar uchun  $c|ax + by$  o'rinli (masalan,  $c|a \pm b$ ). Bu xossa ikkidan ko'p sonlar uchun ham o'rinli;
- e)  $b|a$  va  $a|b$  bo'lsa,  $a = \pm b$ ;
- f)  $b|a$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  dan  $b \leq a$  kelib chiqadi.

**2.1.1-teorema** (Qoldikli bo'lish haqidagi teorema):  $a$  – butun son,  $b$  – butun musbat son bo'lsin.  $a$  son hamma vaqt  $b$  songa bo'linmaydi, lekin hamma vaqt  $a$  son  $b$  songa qoldikli bo'linadi, ya'ni shunday yagona butun  $q$  va  $r$  sonlar topiladiki, ular uchun

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda  $q$  – to'liqmas bo'linma,  $r$  – soni  $a$  ni  $b$  ga bo'lgandagi qoldiq deyiladi.

1-misol.  $a$  sonni 13 ga bo'lganda to'liqmas bo'linma 17 ga teng bo'lsa,  $a$  ning eng katta qiymatini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra,  $a = 13 \cdot 17 + r, 0 \leq r < 13$ . Demak,  $r = 12$  bo'lganda  $a$  eng katta qiymatga erishadi, ya'ni  $13 \cdot 17 + 12 = 233$ .

2-misol. Bo'linuvchi 371, to'liqmas bo'linma 14 ga teng bo'lsa, bo'luvchi va unga mos qoldiqlarni toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra,  $371 = b \cdot 14 + r, 0 \leq r < b$ , bundan  $14b < 371, b \leq 26$ . Boshqa tomondan  $15b > 371$ , bundan  $b > 24$ . Demak,  $b = 25$ ; 26 va  $r = 21$ ; 7 bo'ladi.

3-misol.  $a$  sonni  $b$  songa bo'lganda bo'linma  $q$  va nolmas qoldiq  $r$  ga teng.  $a$  ni qanday natural  $n$  songa ko'paytirganda bo'linma  $n$  marta ortadi?

*Yechish.*  $an = bqn + rn$  dan  $rn < b$  va  $n < \frac{b}{r}$

4-misol. Uchta ketma-ket natural sonlardan bittasi 3 ga bo'linishini isbotlang.

*Yechish.* Natural sonni  $3k, 3k + 1, 3k + 2$  sonlarning bittasi shaklida ifodalash mumkin. Agar  $n = 3k$  bo'lsa, u holda  $3|n$ ; agar  $n = 3k + 1$  bo'lsa, u holda  $3|n + 2$ ; agar  $n = 3k + 2$  bo'lsa, u holda  $3|n + 1$ .

5-misol. Agar besh xonali son 41 ga bo'linsa, shu sonni tashkil qilgan raqamlarni aylanma almashtirish yordamida hosil bo'lgan har qanday sonning 41 ga bo'linishini isbotlang.

*Yechish.* Besh xonali son  $N = 104a + 103b + 102c + 10d + e$  bo'lsin va u 41 ga bo'linsin. Raqamlarni aylanma almashtirishdan (chapga bir raqamga) quyidagi sonni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} N_1 &= 104b + 103c + 102d + 10e + a = \\ &= 10(104a + 103b + 102c + 10d + e) - 105a + a = \\ &= 10N - 99999a. \end{aligned}$$

$41|N$  va  $41|99999$  dan  $41|N_1$  kelib chiqadi.

6-misol.  $2^{2^n} + 1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) ko'rinishdagi barcha sonlar 7 raqam bilan tugashini isbotlang.

*Yechish.*  $2^{2^2} + 1 = 17$ . Agar  $2^{2^n} + 1 = 10q + 7$ , bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} 2^{2^{n+1}} + 1 &= (2^{2^n})^2 + 1 = (10q + 6)^2 + 1 = (10Q + 6) + 1 = \\ &= 10Q + 7. \end{aligned}$$

7-misol.  $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$  ni bilgan holda 7, 11, 13 ga umumiy bo'linish alomatini keltirib chiqaring. Bu alomatni 368312 ga qo'llang.

*Yechish.*  $N = 1000q + r = 1001q + r - q$  dan  $N$  son 7, 11 va 13 ga bo'linishi uchun shu sondan uning 1000 ga bo'linganida hosil bo'lgan qoldiqdan ayirmasi 7, 11 yoki 13 ga bo'linishi zarur va yetarliligi kelib chiqadi, ya'ni agar  $7 \cdot 11 \cdot 13 / (1 - q)$  bo'lsa, yuqorida keltirilgan ayirma  $368 - 312 = 56$ .  $N = 368312$

56 faqat 7 ga bo'linganligi sababli 368312 7 ga bo'linadi, lekin 11 va 13 ga bo'linmaydi.

8-misol. To'rtta ketma-ket joylashgan butun sonlar ko'paytmasiga bir qo'shilganda to'liq kvadrat hosil bo'lishini isbotlang.

*Yechish.*  $n - 1, n, n + 1, n + 2$  - to'rtta ketma-ket keladigan butun sonlar bo'lsin. U holda

$$(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 1 = (n - 1)(n + 2)(n^2 + n) + 1 =$$

$$(n^2 + n - 1)^2.$$

9-misol.  $11^{10} - 1$  sonni 100 ga bo'linishini isbotlang.

*Yechish.* Nyuton binomini qo'llaymiz:

$$(1 + 10)^{10} = 1 + C_{10}^1 \cdot 10 + C_{10}^2 \cdot 10^2 + C_{10}^3 \cdot 10^3 + \dots + 10^{10}.$$

Bundan

$$(1 + 10)^{10} - 1 = 10 \cdot 10 + C_{10}^2 \cdot 10^2 + C_{10}^3 \cdot 10^3 + \dots + 10^{10}$$

har bir qo'shiluvchi 100 ga bo'linadi.

10-misol. Har bir butun  $n$  uchun  $n^5 - n$  son 5 ga bo'linishi isbotlang.

*Yechish.*  $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$ . Butun sonni 5 ga bo'lganda qoldiqlar 0, 1, 2, 3, 4 bo'ladi va bundan butun son  $5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ , ko'rinishdan biriga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Agar  $n = 5k$  bo'lsa,  $n$  son 5 ga bo'linadi; agar  $n = 5k + 2$  yoki  $n = 5k + 3$  bo'lsa,  $(n^2 + 1)$  son 5 ga bo'linadi; agar  $n = 5k + 1$  yoki  $n = 5k + 4$  bo'lsa,  $(n^2 - 1)$  5 ga bo'linadi.

## 2.2-§. Eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy bo'linuvchi. Yevklid algoritmi

**2.2.1-ta'rif:**  $a, b, \dots, l$  sonlarni bo'luvchi butun son shu sonlarni umumiy bo'luvchisi deyiladi.

**2.2.2-ta'rif:** Shu bo'luvchilarning eng kattasi *eng katta umumiy bo'luvchi* (EKUB) deyiladi va  $d = (a, b, \dots, l)$  kabi belgilanadi.

**2.2.3-ta'rif:** Agar  $(a, b, \dots, l) = 1$  bo'lsa,  $a, b, \dots, l$  sonlar o'zaro tub sonlar deyiladi. Agar  $a, b, \dots, l$  sonlarning har biri qolganlari bilan o'zaro tub bo'lsa, bu sonlar *juft-juft bilan o'zaro tub sonlar* deyiladi.

Yevklid algoritmini qo'llab, sonlarni EKUB ini topish mumkin, bu usul quyidagicha: agar  $a$  va  $b$  natural sonlar va  $a > b$  bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, & r_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Noldan farqli oxirgi  $r_n$  qoldiq  $a$  va  $b$  sonlarni EKUB ini beradi.

**2.2.4-ta'rif:** Har qanday  $a, b, \dots, l$  sonlarga bo'linadigan son berilgan sonlarni *umumiy karralisi* deyiladi. Umumiy karralilarning eng

kichigi eng kichik umumiy bo'linuvchi (EKUK) deyiladi va  $m = [a, b, \dots, l]$  bilan belgilanadi.  $a$  va  $b$  sonlarni umumiy karralisi

$$M = \frac{ab}{d}t, t \in \mathbb{Z}, d = (a, b)$$

tenglik yordamida topiladi. Agar  $t = 1$  bo'lsa, bu tenglikdan  $a$  va  $b$  sonlarning EKUK i kelib chiqadi, ya'ni

$$m = \frac{ab}{d}, \text{ yoki } [a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Juft-juft o'zaro tub sonlarning EKUK i shu sonlar ko'paytmasiga teng.

Agar  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  va  $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ , bu yerda  $p_1, p_2, \dots, p_k$  — turli tub sonlar,  $\alpha_i, \beta_j$  — butun musbat sonlar bo'lsin. U holda

$$(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)},$$

$$[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}.$$

quyidagi rekurrent formulalar yordamida bir nechta sonlarni EKUK va EKUB ini topish mumkin:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n),$$

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}], a_n]$$

Demak bu formulalardan bir nechta sonlarni EKUB va EKUK ini topish ikkita sonni EKUB va EKUK ini topish masalasiga keltiriladi.

11-misol.  $(1734, 822)$  va  $[1734, 822]$  ni toping.

*Yechish.* Bu sonlar uchun Yevklid algoritmini topamiz:

$$\begin{aligned} 1734 &= 822 \cdot 2 + 90; \\ 822 &= 90 \cdot 9 + 12; \\ 90 &= 12 \cdot 7 + 6; \\ 12 &= 6 \cdot 2. \end{aligned}$$

Demak,  $(1734, 822) = 6$ ,  $[1734, 822] = \frac{1734 \cdot 822}{6} = 237558$ .

12-misol. Ikkita ketma-ket juft sonlarning EKUB i 2 ga, toq sonlarning EKUB i esa 1 ga tengligini isbotlang.

*Yechish.*

$$\begin{aligned} (2n, 2n + 2) &= 2(n, n + 1) = 2 \\ 2n + 3 &= (2n + 1) \cdot 1 + 2 \\ 2n + 1 &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$2 = 1 \cdot 2$ , bundan  $(2n + 1, 2n + 3) = 1$ .

13-misol.  $(a, b) = 1$  dan  $(a + b, a - b)$  1 yoki 2 ga tengligi kelib chiqishini isbotlang.

*Yechish.*  $(a + b, a - b) = d$  bo'lsin, u holda  $d|2a$  va  $d|2b$ .  
 $(2a, 2b) =$

$= 2(a, b) = 2$  bo'lganligi sababli  $d|2$ .

Demak,  $d = 1$  yoki  $2$ .

14-misol. Agar  $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$  bo'lsa,  $(a, b) = (u_1a + v_1b, u_2a + v_2b)$  ni isbotlang.

*Yechish.*  $(a, b) = d$  va  $(u_1a + v_1b, u_2a + v_2b) = d_1$  bo'lsin.  $d_1|(u_1a + v_1b)$ ,  $d_1|(u_2a + v_2b)$  va  $u_1v_2 - u_2v_1 = 1$  dan  $d_1|a$ ,  $d_1|b$ , kelib chiqadi, demak,  $d_1|d$ .  $d|a$ ,  $d|b$  dan  $d_1|d$  kelib chiqadi. Demak,  $d = d_1$ .

15-misol.  $3 = (51, 21)$  ni  $51x + 21y$  shaklda ifodalang.

*Yechish.*  $51 = 21 \cdot 2 + 9$ ,  $21 = 9 \cdot 2 + 3$ . Bundan

$$3 = 21 - 2 \cdot 9 = 21 - 2(51 - 21 \cdot 2) = 21 \cdot 5 - 51 \cdot 2.$$

16-misol.  $ab$  va  $m = [a, b]$  sonlarni EKUB ini toping.

*Yechish.*  $(ab, m) = (dm, m) = m(d, 1) = m$ , bu yerda  $d = (a, b)$ .

17-misol. Uchta ketma-ket natural sonlarning EKUB va EKUK ini toping.

*Yechish.*  $(n, n + 1, n + 2) = ((n, n + 1), n + 2) = (1, n + 2) =$   
 $1.$

$$[n, n + 1, n + 2] = [[n, n + 1], n + 2] = [n(n + 1), n + 2]$$

$$= \frac{n(n + 1)(n + 2)}{(n(n + 1), n + 2)} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{(n, n + 2)},$$

$(n, n + 2)$   $n$  ning juft-toqligiga qarab  $2$  yoki  $1$  bo'ladi.

Demak, agar  $n$  toq bo'lsa,  $[n, n + 1, n + 2] = n(n + 1)(n + 2)$ ,  
 va agar  $n$  juft bo'lsa,  $n[n, n + 1, n + 2] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

18-misol. Ikkita sonning EKUB i shu sonlar ayirmasidan katta bo'lishi mumkinmi?

*Yechish.*  $a > b$  va  $(a, b) = d$  bo'lsin. Bundan  $a = dx$ ,  $b = dy$   
 va

$x - y > 0$  bo'ladi. Agar  $d > a - b = d(x - y)$  bo'lsa,  $1 > x - y$  va  $0 < x - y < 1$  ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik o'rinli emas, chunki  $x$  va  $y$  - butun sonlar. Demak,  $(a, b) \leq a - b$  ( $a > b$ ) bo'ladi.

19-misol.  $\begin{cases} x + y = 150 \\ (x, y) = 30 \end{cases}$  sistemani natural yechimlarini toping.

*Yechish.*  $(x, y) = 30$  quyidagi sistemaga teng kuchli.

$$\begin{cases} x = 30u \\ y = 30v \\ (u, v) = 1. \end{cases}$$

Bundan berilgan sistemaning birinchi tenglamasi  $u + v = 5$  ko'rinishga keladi va  $u = 1, 2, 3, 4$  qiymatlar qabul qiladi. Demak,  $x = 30, 60, 90, 120$  ga teng bo'lishi mumkin.  $y = 150 - x$  dan  $y = 120, 90, 60, 30$ .

20-misol. Agar  $(a, b) = 24, [a, b] = 2496$  bo'lsa,  $a$  va  $b$  larni toping.

*Yechish.*  $(a, b) = 24$  dan  $a = 24x, b = 24y$  va  $(x, y) = 1$  kelib chiqadi.  $x < y$  bo'lsin.  $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$  dan  $2496 = \frac{24x \cdot 24y}{24}$  yoki  $xy = 104 = 2^3 \cdot 13$ .

$(x, y) = 1$  dan  $xy = 1 \cdot 104$  yoki  $xy = 8 \cdot 13$  bo'lishi mumkin. Bu yerdan  $x = 1$  va  $y = 104$  bo'lganda  $a = 24 \cdot 1 = 24, b = 24 \cdot 104 = 2496$ ;  $x = 8$  va  $y = 13$  bo'lganda  $a = 24 \cdot 8 = 192, b = 24 \cdot 13 = 312$ .

## 2.3-§. Tub va murakkab sonlar. Arifmetikaning asosiy teoremasi

**2.3.1-ta'rif:** Agar natural son *tub son* deyiladi, u ikkita turli natural bo'luvchiga (bir va o'zi) ega bo'lsa va *murakkab son* deyiladi, agar uning bo'luvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lsa.

Bir son na tub, na murakkab songa tegishli emas. Tub sonlar (va ularning natural darajalari) o'zaro tubdir. Murakkab sonning birdan farqli natural bo'luvchisi  $\sqrt{a}$  dan katta emas. Bu shartdan foydalanib  $a$  sonning tub bo'luvchilarini faqat  $\sqrt{a}$  dan katta bo'lmagan tub sonlar orasidan izlash kerakligi kelib chiqadi.

$a$  sonidan katta bo'lmagan tub sonlarni jadvalini tuzish uchun *Eratosfen g'alviri* deb ataluvchi usul mavjud. Bu usul bo'yicha sonlar qatorida birinchi topilgan  $p_1$  tub songa karrali bo'lgan sonlarni o'chirish, so'ng ikkinchi  $r_2$  tub sonni topib, unga karrali sonlarni o'chirish va hokazo. Bu prosessni  $\sqrt{a}$  dan katta bo'lmagan tub songacha davom ettirib, 1 dan  $a$  gacha sonlar qatorida o'chirilmay qolgan sonlar  $a$  dan katta tub sonlarni beradi.

Birdan katta har qanday butun  $a$  sonni  $p_1 p_2 \dots p_n$  tub sonlar ko'paytmasi shaklida ko'paytuvchilar yozilishi tartibi aniqligida yagona ravishda yozish mumkin (*arifmetikaning asosiy teoremasi*):

$$a = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Ba'zi ko'paytuvchilar takrorlanib kelishi mumkin, shuning uchun ularni karralilarini mos ravishda  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$  lar bilan belgilab,  $a$  sonning *kanonik yoyilmasini* hosil qilamiz, ya'ni:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}.$$

Bundan  $a$  sonning har qanday bo'luvchisi

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

ko'rinishga ega bo'lishi kelib chiqadi, bu yerda  $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_n \leq \alpha_n$ .

21-misol. Tub sonlar ayirmasi shaklida yoziladigan barcha toq sonlarni toping.

*Yechish.* Tub sonlardan bittasi albatta juft bo'lishi kerak, shuning uchun  $N = p - 2$ , bu yerda  $p$  – juft bo'lmagan tub son.

22-misol.  $N = 3m + 2 (m = 1, 2, \dots)$  sonning kvadratini natural son kvadrati va tub son yig'indisi shaklida yozish mumkin emasligini isbotlang.

*Yechish.* Agar  $N^2 = n^2 + p$  bo'lsa, u holda  $p = (N - n)(N + n)$ , bundan  $N - n = 1, N + n = p$  va demak,  $2N = 1 + p$  yoki  $p = 2N - 1 = 6m + 3$ , bu esa mumkin emas.

23-misol. 127 tub yoki murakkab son ekanligini aniqlang.

*Yechish.*  $\sqrt{127}$  dan oshmaydigan 2, 3, 5, 7, 11 tub sonlar 127 ini bo'luvchilari emas, demak, bu son tub sonidir.

24-misol. 2320 va 2350 sonlari orasida joylashgan barcha tub sonlarni toping.

*Yechish.* Yechimni soddalashtirish maqsadida 2321 dan 2349 gacha bo'lgan sonlar qatorida juft, 0 va 5 bilan tugallanadigan sonlarni yozmaslik mumkin, chunki bu sonlar tub emas. Demak: 2321, 2323, 2327, 2329, 2331, 2333, 2337, 2339, 2341, 2343, 2347, 2349. Bu sonlar qatoridan 3 ga bo'linadiganlarni o'chiramiz (3 ga bo'linish alomatidan foydalanamiz). Bu sonlar:

$$2331, 2337, 2343, 2349$$

Qolgan sonlar:

$$2321, 2323, 2327, 2329, 2333, 2339, 2341, 2347.$$

Bu qatorda 5 ga karrali son bo'lmaganligi sababli 7 ga karrali sonlarni o'chiramiz. Bu quyidagicha amalga oshiriladi. Qatordagi birinchi sonni 7 ga bo'lamiz:

$$2321 = 7 \cdot 331 + 4.$$

Qoldiq 4 dan (7 gacha 3 yechishmaydi) 7 ga karrali son natural sonlar qatoridagi 2321 dan keyingi uchinchi sonligi kelib chiqadi, ya'ni

2324 va shu 2324 dan keyingi barcha 7 chi sonlar bo'ladi. Ya'ni: 2331, 2338, 2345. 11 ga karrali son 2321. Bundan keyin keladigan 11 ga karrali sonlar 2332, 2343 sonlar o'chirilgan. 13 ga karrali sonlarni topamiz: qolgan sonlardan birinchi son 2323 ni 13 ga bo'lamiz:

$$2323 = 13 \cdot 178 + 9.$$

Demak, 13 ga karrali son natural sonlar qatorida 2323 dan to'rtta keyin kelgan ( $9 + 4 = 13$ ) bo'ladi, ya'ni 2327. Bu sonni o'chiramiz. 13 ga bo'linadigan keyingi son 2340, bu son o'chirilgan.  $\sqrt{2350} < 49$  bo'lganligi sababli bu prosessni to 47 tub songacha davom ettirish kerak. 2329 – 17 ga karrali, 2323 – 23 ga karrali sonlar. Qolgan 2333, 2339, 2341, 2347 sonlar tub sonlar bo'ladi.

25-misol.  $2^{18} + 3^{18}$  yig'indini tub ko'paytuvchilarga ajrating.

*Yechish.*  $2^{18} + 3^{18} = (2^2 + 3^2)(2^4 - 2^2 3^2 + 3^4)(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = 13 \cdot 61(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}) = 13 \cdot 61 \cdot 488881 = 13 \cdot 61 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 181.$

26-misol. 3, 5 va 7 sonlar yagona uch egizak sonlar (ya'ni ayirmasi 2 ga teng bo'lgan arifmetik progressiya tashkil etuvchi 3 ta tub son) tashkil etishini isbotlang.

*Yechish.*  $p, p + 2$  va  $p + 4$  ( $p > 3$ ) sonlarni ko'ramiz.  $p = 3q + 1$  ( $q = 2, 4, \dots$ ) bo'lsa,  $p + 2$  – son murakkab son bo'ladi (3 ga bo'linadi). Agar  $p = q + 2$  ( $q = 1, 2, \dots$ ) bo'lsa,  $p + 4$  murakkab son bo'ladi.

27-misol.  $2^n - 1$  va  $2^n + 1$  ( $n > 2$ ) sonlar bir vaqtda tub sonlar bo'la olmasligini isbotlang.

*Yechish.*  $2^n = 3q + 1$  yoki  $2^n = 3q + 2$  ko'rinishga ega. Birinchi holda  $2^n - 1 = 3q$  – murakkab son, chunki  $n > 2$  da  $q > 1$  bo'lishi kerak. Ikkinchi holda  $2^n + 1 = 3q + 3$  – yana murakkab son.

28-misol.  $3n + 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ko'rinishdagi eng katta tub son mavjud emasligini isbotlang.

*Yechish.*  $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots p + 2$  ko'rinishdagi sonni qaraymiz, bu yerda  $p = 3n + 2$  ko'rinishdagi son ( $N$  soni ham shu ko'rinishdagi son).  $N$  ning kanonik yoyilmasida  $p$  dan katta tub sonlar mavjud va bular orasida  $3n + 2$  ko'rinishdagi tub son mavjud.  $3n + 1$  ko'rinishdagi tub sonlar ko'paytmasi yana shu shaklga ega bo'lganligi sababli u  $N$  ga teng bo'la olmaydi. Demak,  $p$  qanday bo'lishidan qat'iy nazar  $3n + 2$  ko'rinishdagi  $p$  dan katta tub son mavjud.

29-misol.  $n > 2$  sondan katta bo'lmagan barcha tub sonlar ko'paytmasi  $n$  dan katta bo'lishini isbotlang.

*Yechish.*  $p$  – tub son  $p \leq n$  shartni qanoatlantiruvchi eng katta tub son bo'lsin.  $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (p-1)$  sonning kanonik yoyilmasi faqat  $n$  dan katta tub sonlardan iborat. Demak,  $N > n$  va bundan  $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p > n$ .

30-misol.  $p$  va  $8p^2 + 1$  – tub sonlar bo'lsa,  $8p^2 + 2p + 1$  tub son bo'lishini isbotlang.

*Yechish.*  $p$  va  $8p^2 + 1$  – tub sonlar bo'lganligi sababli  $p = 3$  bo'lishi kerak, chunki  $p = 3k + 1$  yoki  $3k + 2$  bo'lganda  $8p^2 + 1$  tub bo'lmaydi. Demak,  $8p^2 + 2p + 1 = 79$  – bu tub son.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Agar bo'linuvchi va bo'linma berilgan bo'lsa, bo'luvchi va qoldiqni toping: a) 25 va 3; b) – 30 va – 4.

2. Isbotlang:

a) toq natural sonning kvadratini 8 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi;

b) ketma-ket ikki natural son kvadratlari yig'indisini 4 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi.

3. 15 soni har qanday natural darajaga ko'tarilib, 7 ga bo'linsa 1 qoldiq qolishini isbotlang.

4. Agar  $mn + pq$   $m-p$  ga bo'linsa, u holda  $mq + np$  ham  $m-p$  ga bo'linishini ko'rsating, bu yerda  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ .

5.  $a, b, c, d, n$  – butun sonlar.  $ad - bc, a - b$  sonlar  $n$  ga bo'linadi va  $b, n$  sonlar birdan farqli natural bo'luvchilarga ega emas.  $c - d$  ni  $n$  ga bo'linishini isbotlang.

6. Ixtiyoriy butun  $n$  son uchun isbotlang:

a)  $n^3 - n$  son 3 ga bo'linadi; b)  $n^7 - n$  son 7 ga bo'linadi;

c)  $n^5 - n$  son 30 ga bo'linadi.

7. Olti raqamli son 5 bilan tugaydi, agar bu sonni chap tomonga birinchi o'ringa o'tkazsak, u holda berilgan sondan 4 marta katta son hosil bo'ladi. Shu sonni toping.

8.  $n(n+1)(2n+1)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sonni 6 ga bo'linishini isbotlang.

9. Kasr sonning surati ikki toq sonning kvadatlari ayirmasi, maxraji esa shu sonlar kvadratlari yig'indisiga teng. Shu kasr surat va maxrajini ikkiga qisqartirish mumkin, 4 ga esa qisqarmasligini ko'rsating.

10. To'la kvadrat bo'lgan to'rt xonali sonning minglar va o'nlar xonasidagi raqamlari bir xil, yuzlar xonasidagi raqam birlik raqamdan

1 ga katta. Shu sonni toping.

**11.** Ketma-ket joylashgan beshta butun sonlar kvadratlarining yig'indisi to'la kvadrat bo'lmasligini isbotlang.

**12.** Agar biror sonni 9 ga bo'lganda qoldiq 2, 3, 5, 6, 8 sonlardan birortasi bo'lsa, shu son to'la kvadrat bo'la olmasligini ko'rsating.

**13.**  $S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{n\text{-ta}}$  ketma-ketlikning  $n$  ta

hadlari yig'indisini toping.

**14.** 16 sonning raqamlari o'rtasiga 15 soni yozilgan, 1156 son o'rtasiga yana 15 yozilgan va hokazo. Shu sonlar to'la kvadrat bo'lishini ko'rsating.

**15.** Har qanday natural  $m$  va  $n$  lar uchun  $mn(m^4 - n^4)$  sonni 30 ga bo'linishini isbotlang.

**16.** Hech qanday butun  $x$  uchun  $3x^2 + 2$  son to'la kvadrat bo'laolmasligini ko'rsating.

**17.**  $3^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ta bir xil raqamlardan tuzilgan natural sonni  $3^n$  ga bo'linishini isbotlang.

**18.** Yevklid algoritmi yordamida sonlarning EKUB va EKUK ini toping:

a) 546 va 231; b) 1001 va 6253; c) 2737, 9163 va 9639;

d) 420, 126 va 525; e) 529, 1541 va 1817.

**19.** Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratib sonlarning EKUB ini toping:

a) 360 va 504; b) 220 va 6600; c) 187 va 533;

d) 420, 126 va 525; e) 529, 1541 va 1817.

**20.** Agar  $a = cq + r$ ,  $b = cq_1 + r_1$  bo'lib,  $a, b, q, q_1, r, r_1$  – butun nomanfiy sonlar;  $c$  – butun musbat son bo'lsa,

$$(a, b, c) = (c, r, r_1)$$

tenglikni isbotlang. Bu tenglikdan  $(a, b, c)$  ni topish qoidasini keltirib chiqaring va shu qoidani  $n$  ta son uchun umumlashtiring.

## III BOB. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

### 3.1-§. Matritsa va ular ustida amallar

**3.1.1-ta'rif.**  $a_{ij}$  sonlardan tuzilgan quyidagi to'g'ri burchakli jadvalga (tablisaga) *matritsa* deb aytiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsaning gorizontal qatoridagi sonlari uning *satrlari*, vertikal qatoridagi sonlari uning *ustunlari* deb aytiladi.  $a_{ij}$  sonlar *matritsaning elementlari* deb aytiladi. Matritsa  $m$  ta satrlarga va  $n$  ta ustunlarga ega bo'lsa, uni  $m \times n$  *matritsa* deb aytiladi. Agar  $m = 1, n > 1$ , bo'lsa, unga bir satrli matritsa deyiladi ya'ni,  $(a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$  ga *qator matritsa* deyiladi. Agar  $m > 1, n = 1$  bo'lsa, bir ustunli matritsa yoki *ustun matritsa* deyiladi. Agar  $m = n$  bo'lsa, bunday matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deb aytiladi, uning qatorlari yoki ustunlari soni matritsaning *tartibi* deyiladi. Masalan,  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  matritsa ikkinchi tartibli kvadrat matritsa deyiladi,  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Matritsalar qisqacha bitta harf bilan belgilanadi. Masalan,  $A$  harfi bilan.

Agar  $A$  va  $B$  matritsalarining tartibi va ularning mos elementlari teng bo'lsa, bu matritsalar teng deyiladi. Ya'ni agar  $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}$  bo'lsa,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

matritsalar teng deyiladi.

Bir xil tartibli matritsalarini qo'shish mumkin.  $A$  va  $B$  matritsalar mos elementlarining yig'indisidan tuzilgan  $C$  matritsaga bu ikki matritsaning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:  $A + B = C$ . Ya'ni, agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

bo'lsa, ularning yig'indisi

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

ga teng bo'ladi.

1-misol.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  yig'indini toping.

*Yechish.*  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Matritsalarini qo'shish o'rin almashtirish va assotsiativlik guruhlash qonunlariga bo'ysunadi:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

**3.1.2-ta'rif.** Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, unga nol matritsa deyiladi va (0) yoki shunchaki 0 bilan belgilanadi.

Faraz qilaylik,  $m \times n$  -o'lchovli  $A = (a_{ij})$  va  $n \times p$  -o'lchovli  $B = (b_{ij})$  matritsalar berilgan bo'lsin. Bu matritsalarining ko'paytmasi deb shunday  $C = AB = (c_{ik})$  matritsaga aytiladiki, uning elementlari quyidagi formula bilan beriladi:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

**3.1.3-ta'rif.**  $B$  matritsa  $A$  matritsaga nisbatan *transponirlangan matritsa* deb aytiladi va  $B = A^T$  deb belgilanadi, agar  $B$  matritsaning ustunlari  $A$  matritsaning mos satrlari bo'lsa, ya'ni hamma  $i, j$  indekslar uchun  $b_{ij} = a_{ji}$ .  $A$  matritsadan  $A^T$  matritsaga o'tish amali  $A$  matritsani *transponirlash* deb aytiladi. Agar  $A$  matritsa  $m \times n$  o'lchovli bo'lsa,  $A^T$  matritsa  $n \times m$  o'lchovli bo'ladi.

**3.1.4-ta'rif.**  $B$  matritsa  $A$  kompleks matritsaga nisbatan *qo'shma kompleks matritsa* deb ataladi va  $B = \bar{A}$  deb belgilanadi, agar hamma  $i, j$  indekslar uchun  $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$  tenglik bajarilsa.  $B$  matritsa  $A$  matritsaga nisbatan *qo'shma ermit matritsa* deb aytiladi va  $B = A^H$  deb belgilanadi, agar hamma  $i, j$  lar uchun  $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$  tenglik bajarilsa.

**3.1.5-ta'rif.**  $A$  matritsa *nol matritsa* deb aytiladi, agar uning hamma elementlari 0 ga teng bo'lsa va  $A = 0$  deb belgilanadi.  $A$  matritsa  $i_0, j_0$  indeksli *birlik matritsa* deb aytiladi, agar  $a_{i_0 j_0} = 1$  bo'lib, qolgan elementlari nolga teng bo'lsa.

**3.1.6-ta'rif.**  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  elementlar  $n$  tartibli  $A = (a_{ij})$  kvadrat matritsaning bosh dioganalini tashkil qiladi va uning *diagonal*

*elementlari* deb aytiladi. Matritsaning diagonal elementlari yig'indisi  $A$  matritsaning *izi* deb aytiladi va  $trA$  deb belgilanadi. Shunday qilib,  $trA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

Kvadrat matritsa diagonal matritsa deb aytiladi, agar uning diagonalida bo'lmagan elementlari 0 ga teng bo'lsa, ya'ni  $a_{ij} = 0, i \neq j$ .  $n$ -tartibli diagonal matritsa  $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$  deb belgilanadi. Diagonal elementlari 1 ga teng bo'lgan  $n$ -tartibli diagonal matritsa birlik matritsa deb aytiladi va  $E$  yoki  $E^n$  deb belgilanadi. Birlik matritsaning elementlari  $\delta_{ij}$  deb belgilanadi:  $E = (\delta_{ij})$ ,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**3.1.7-ta'rif.** Bizga  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$  –ko'phad berilgan bo'lsin.  $B = a_0E + a_1A + \dots + a_kA^k$  matritsa  $A$  matritsadan *ko'phad* deb aytiladi va  $B = f(A)$  deb belgilanadi.

2-misol. Matritsalarining chiziqli kombinatsiyasi topilsin:

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 5 - 5 \cdot 1 & 2 \cdot 7 - 4 - 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) - 2(-2) - 5 \cdot 0 & 2 \cdot 3 - 1 - 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 0 & -35 \end{pmatrix}$$

3-misol. Matritsalarining ko'paytmasi topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Yechish.* Matritsalarini ko'paytmasi formulasiga asosan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$AB$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + (-4) \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) + (-4) \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + (-5) \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) + (-5) \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + (-5) \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + (-3) \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + (-3) \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}.$$

4-misol. Quyidagi matritsa bilan o'rin almashinuvchi hamma matritsalar topilsin.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Yechish.* Shunday  $X$  matritsa topishimiz  $AX = XA$  bo'lsin.  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$  deb belgilaymiz. U holda

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\begin{pmatrix} 7x_1 - 3x_3 & 7x_2 - 3x_4 \\ 5x_1 - 2x_3 & 5x_2 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 5x_2 & -3x_1 - 2x_2 \\ 7x_3 + 5x_4 & -3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_3 = 7x_1 + 5x_2 \\ 7x_2 - 3x_4 = -3x_1 - 2x_2 \\ 5x_1 - 2x_3 = 7x_3 + 5x_4 \\ 5x_2 - 2x_4 = -3x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 9x_2 - 5x_4 = 0 \\ 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:  $x_1 = \alpha$ ;  $x_2 = 3\beta$ ;  $x_3 = -5\beta$ ;  $x_4 = \alpha + 9\beta$ , bu yerda  $\alpha$  va  $\beta$  -ixtiyoriy sonlar. Izlanayotgan matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ -5\beta & \alpha + 9\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

5-misol.  $f(A)$  ni hisoblang, agar:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Yechish.* Matritsaviy ko'phad ta'rifiga asosan quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.2-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Quyidagi:  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  jadvalga ikkinchi tartibli determinant deyiladi. Bu yerda  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  uning elementlari,  $a_{11}, a_{12}$  - birinchi satr,  $a_{21}, a_{22}$  - ikkinchi satr,  $a_{11}, a_{21}$  - birinchi ustun,  $a_{12}, a_{22}$  - ikkinchi ustun elementlari,  $a_{11}, a_{22}$  va  $a_{12}, a_{21}$  diagonal elementlari.

II-tartibli determinant ta'rifiga ko'ra asosan quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3.1)$$

va uni

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ko`rinishdagi sxemada tasvirlash mumkin.

III-tartibli determinant uchun unga mos formula

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (3.2)$$

ko`rinishda bo`ladi. III-tartibli determinantni hisoblashda Sarrus (uchburchak) qoidasidan, ya`ni simvolik tarzda

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

qoidadan foydalanish mumkin

6-misol. Uchburchak qoidasidan foydalanib, quyidagi determinantni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = -37$$

### 3.3-§. O`rinlashtirishlar va o`rin almashtirishlar

$n$  ta  $1, 2, \dots, n$  sonlar (yoki  $n$  ta har xil  $a_1, a_2, \dots, a_n$  simvollar) ning ma`lum tartibda mumkin bo`lgan ixtiyoriy joylashuviga shu sonlarning (yoki simvollarining) *o`rin almashtirishi* deyiladi. Berilgan  $n$  ta simvollarini  $1, 2, \dots, n$ , sonlar bilan tartiblash mumkin bo`lganligi sababli ixtiyoriy  $n$  ta simvollarining o`rin almashtirishlarini o`rganish  $1, 2, \dots, n$  larning o`rin almashtirishlarini o`rganishga keltiradi.  $n$  ta sonlarning barcha o`rin almashtirishlari soni  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$  («*n-faktorial*» deb o`qiladi) ga teng. Masalan,  $a_1, a_2, a_3$  simvollarining

barcha o'rin almashtirishlari quyidagilardir:  $a_1a_2a_3$ ,  $a_1a_3a_2$ ,  $a_2a_1a_3$ ,  $a_3a_1a_2$ ,  $a_2a_3a_1$ ,  $a_3a_2a_1$ . Ularning soni  $3! = 6$  ta.

Agar o'rin almashtirishda ikki sondan kattasi kichigidan oldin kelsa bu sonlar *inversiyani* tashkil etadi, agar kichigi kattasidan oldin kelsa, *tartib* deyiladi.

### 3.4-§. Determinantni satr yoki ustun bo'yicha yoyish

To'g'ri to'rtburchak ko'rinishidagi sonlar jadvaliga *matritsa* deyiladi. Matritsani belgilashda qavslardan foydalanamiz, masalan,

$$\begin{pmatrix} -1 & 23 \\ 5 & 46 \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil etuvchi sonlarni uning *elementlari* deyiladi. Matritsa elementlarining gorizontal qatoriga uning *satrlari*, vertikal qatoriga *ustunlari* deyiladi. Agar matritsadagi satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, undagi satrlar soni – *matritsa tartibi* deb ataladi. Umumiy ko'rinishda yozilganda matritsaning elementlari ikkita indeksli bitta harf orqali belgilanib, birinchi indeks satrning tartib raqamini (nomerini), ikkinchi indeks ustun tartib raqamini ifodalaydi. Masalan,  $n$  – tartibli  $A$  matritsaning umumiy ko'rinishi quyidagicha yoziladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_1^n.$$

Kvadrat matritsaning yuqori chap burchagini quyi o'ng burchagi bilan tutushtiruvchi kesmada yotuvchi elementlar qatori matritsaning *bosh dioganali*, yuqori o'ng burchagini quyi chap burchagi bilan tutashtiruvchi kesmadagi elementlar qatori *yordamchi dioganali* deyiladi.

$n$  – tartibli determinant yoki  $n > 1$  da  $A$  matritsaning *determinanti* deb, shu matritsaning elementlaridan quyidagi formula yordamida hosil qilingan songa aytiladi:

$$|A| = \det A = |a_{ij}|_1^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} = \sum (-1)^k a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

Bunda birinchi to'rtta ifoda determinantning belgtlanishi; birinchi summa o'zaro teng bo'lmagan barcha

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}, \quad (*)$$

o'rniga qo'yishlar bo'yicha olinib, bunda  $s$  – yuqori satrdagi inversiyalar soni,  $t$  – quyi satrdagi inversiyalar soni, ikkinchi summa barcha  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  o'rin almashtirishlar bo'yicha olinib,  $k$  – bu o'rin almashtirishdagi inversiyalar soni. Bu ikki summa aynan tengdir. Summalardagi qo'shiluvchilar *determinantning hadlari* deyiladi; determinantning har bir hadi – matritsaning har bir satridan bittadan, har bir ustunidan bittadan olingan  $n$  ta elementlar ko'paytmasiga teng bo'lib, agar (\*) o'rniga qo'yish juft bo'lsa, bu ko'paytma o'z ishorasi bilan, agar o'rniga qo'yish toq bo'lsa, teskari ishora bilan olinadi. Birinchi tartibli determinant o'zining yagona elementiga teng.  $n$  – tartibli determinantning barcha elementlari soni  $n!$  ga teng. A matritsaning elementlari, satrlari, ustunlari mos determinantning *elementlari, satrlari, ustunlari* deb ataladi.

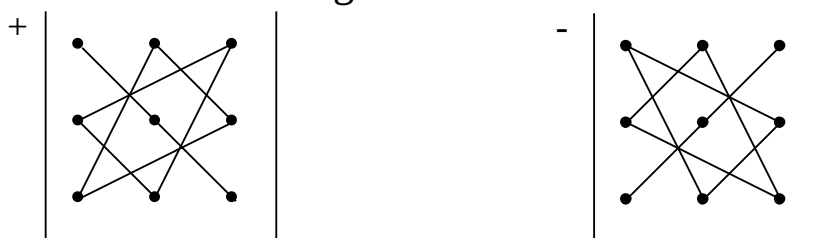
7-misol. Ikkinchi tartibli determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

8-misol. Uchinchi tartibli determinant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Bu ifoda uchburchaklar qoidasi (*Sarryus qoidasi*) bo'yicha topiladi. Uni quyidagi jadvallar orqali tasvirlash mumkin bo'lib, bir xil ishora bilan bitta ko'paytmada ishtirok etuvchi elementlar kesmalar bilan birlashtirilib ko'rsatilgandir:



Matritsa (yoki determinantlar) ning barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishga *transponirlash* deyiladi. Demak, berilgan

matritsaning satrlari transponirlangan matritsaning o'sha tartibda yozilgan ustunlaridan iborat, va aksincha. Kvadrat matritsa (yoki determinant) bo'lgan holda transponirlash matritsani (yoki determinantni) bosh diogonal atrofida  $180^0$  burishdan iborat bo'ladi.

*Bir nechta bir xil uzunlikdagi satrlar yig'indisi deganda*, har bir elementi berilgan satrlardan mos elementlar yig'indisidan iborat satrga aytiladi. *Satrni songa ko'paytirish* deganda quyidagi satr tushuniladiki, uning har bir elementi shu songa ko'paytirishdan hosil bo'ladi.

Bir xil uzunlikdagi satrlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb, berilgan satrlarni *chiziqli kombinatsiya koeffitsiyentlari* deb ataluvchi sonlarga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi.

Agar biror satr boshqalarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, u holda berilgan satr bu satrlar orqali *chiziqli bog'langan* deyiladi. Agar bir xil uzunlikdagi satrlarning hech biri qolganlari orqali chiziqli bog'lanishda bo'lmasa, bunday satrlar *chiziqli bog'lanmagan* deyiladi.

Masalan,  $(-1, -7, 5, -3) = 2(1, -1, -2, -3) - 3(1, 2, -3, -1)$  tenglik birinchi satr qolgan ikki satrning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatadi.

### **Determinantning asosiy xossalari.**

1. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, ya'ni transponirlanganda, determinantning qiymati o'zgarmaydi.
2. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlar nolga teng bo'lsa, bunday determinant nolga teng bo'ladi.
3. Determinantda istalgan ikki satrni (yoki ikki ustunni) o'zaro almashtirsak, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi.
4. Ikki satri (yoki ikki ustuni) teng bo'lgan determinant nolga tengdir.
5. Determinantning biror satridagi (yoki ustunidagi) barcha elementlarni aynan bitta songa ko'paytirilsa, u holda determinant ham shu songa ko'paytiriladi. Boshqacha aytganda, satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisi ostidan chiqarish mumkin.
6. Biror satridagi barcha elementlari boshqa bir satrining mos elementlariga proporsional bo'lgan determinant nolga tengdir. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinli.

7. Agar determinantni  $i$  –chi satridagi barcha elementlar  $k$  ta qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinantni  $k$  ta determinantlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lib, bunda ularning  $i$  –chidan farqli barcha satrlari berilgan determinantdagidek,  $i$  –satri esa birinchi determinantda birinchi qo'shiluvchilardan ikkinchisida -ikkinchilaridan va h.k. tuzilgandir. Xuddi shunday, ustunlar uchun ham o'rinlidir. Xususiyl holda bitta satrga boshqa bir satrni (ustunni) qo'shish (yoki undan ayirish) mumkin.
8. Agar determinantning hyech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli bog'langan bo'lsa, bu determinant nolga tengdir. Aksincha, agar  $n$  –tartibli ( $n \geq 2$ ) determinant nolga teng bo'lsa, u holda uning hyech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'ladi. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinlidir.

9-misol.  $n$  tartibli determinantning birinchi ustunini oxiriga qo'yib, qolgan ustunlarni esa joylashish tartibini saqlagan holda chap tomonga siljitsak, determinant qanday o'zgaradi?

*Yechish.* Agar determinantda birinchi va ikkinchi ustunlarni, so'ng ikkinchi va uchinchi ustunlarni, va h.k.  $(n - 1)$  –chi va  $n$  –chi ustunlar o'rinlarini almashtirib qo'ysak, natijada masala shartidagi almashtirishni hosil qilamiz. Hammasi bo'lib determinant ustunlarining  $(n - 1)$  ta almashtirishini bajargan bo'lamiz. Demak, determinant  $(-1)^{n-1}$  ga ko'paytirilgan bo'ladi.

10-misol. Bosh diogonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari qo'shma kompleks sonlardan iborat determinant haqiqiy sondan iboratligini ko'rsating.

*Yechish.* Faraz etaylik, determinant  $d = a + b_i$  bo'lsin.  $d$  da transpozitsiya bajarib, mos elementlari  $d$  determinantning elementlariga qo'shma bo'lgan  $d^1$  determinantni hosil qilamiz. Determinant o'zining elementlari ko'paytmalarining (ma'lum ishoralar bilan olingan) yig'indisiga teng bo'lganligi sababli, va bir nechta kompleks sonlarning yig'indisi va ko'paytmasiga qo'shma bo'lgan kompleks sonlarning xossasiga ko'ra:  $d^1 = a - b_i$  bo'ladi.  $d = d^1$  bo'lganligi sababli,  $a + b_i = a - b_i$  tenglik bajariladi. Bundan  $b = 0$  ni va  $d = a$  - haqiqiy son ekanligini ko'ramiz.

### 3.5-§. Minorlar va ularning algebraik to'ldiruvchilari. Laplas teoremasi

$n$ -tartibli  $d$  determinantning  $k$ -tartibli ( $1 \leq k \leq n$ ) *minori* deb  $d$  determinantning  $k$  ta ixtiyoriy satrlari va  $k$  ta ixtiyoriy ustunlarning kesishgan joyida turgan elementlardan tuzilgan  $M$  determinantga aytiladi. Xususiyl holda  $d$  ning  $n$ -tartibli minori  $d$  ning o'ziga teng. Nolinchi tartibli minor ta'rifiga ko'ra 1 ga teng deb qabul qilinadi.  $d$  determinantning  $M$  minorida turgan  $k$  ta satr va  $k$  ta ustunlarni o'chirish natijasida hosil bo'lgan  $M'$  minorga  $d$  determinantning  $M$  minorining *to'ldiruvchi minori* deyiladi.  $d$  determinantning  $M$  minorining *algebraik to'ldiruvchisi* deb,  $M$  minor turgan satr va ustun nomerlari yig'indisi juft bo'lganda plyus ishora bilan toq bo'lganda minus ishora bilan olinadigan to'ldiruvchi  $M'$  minorga aytiladi.

**Laplas teoremasi.**  $d$  determinantning qandaydir  $k$ -ta satri (yoki qandaydir  $k$  ta ustuni) tanlangan bo'lsin.  $n$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ). Agar shu satrlarda (yoki ustunlarda) joylashgan barcha  $k$ -tartibli minorlarni ularning algebraik to'ldiruvchilariga mos ravishda ko'paytirib, bu ko'paytmalar qo'shilsa,  $d$  determinant hosil bo'ladi.

12-misol. Determinantni hisoblang:  $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$

*Yechish.* Ikkinchi va beshinchi satrlardagi ikkinchi tartibli o'nta minorlardan faqat uchta noldan farqli. Shu satrlar bo'yicha yoyamiz:

$$\begin{aligned} d &= (-1)^{10} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{12} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{18} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + 2(-1) = -4. \end{aligned}$$

Xususiyl holda, agar  $d$  determinantning bosh diagonalini umumiy elementlarga ega bo'lmagan kvadrat matritsalar yordamida qoplash mumkin bo'lib, ularning determinantlari  $d_1$  va  $d_2$  bo'lsa, va ularning

bir tomonida hamma elementlar nolga teng bo'lsa, u holda  $d = d_1 d_2$  bo'ladi.

$$13\text{-misol. } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 26 \cdot (-28) = -728.$$

*Zinapoyali determinantlar* deb ataluvchi umumiy holda, ya'ni  $d$  determinantning bosh diagonalida determinantlari  $d_1, d_2, \dots, d_k$ , ga teng bo'lgan kvadrat matritsalar ketma-ket turgan bo'lib, bu ketma-ket matritsalar bir tomonidagi barcha elementlar nolga teng bo'lsa, u holda  $d = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k$  bo'ladi.

14-misol.

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & -2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = 9 \cdot 8 \cdot 18 \cdot (-13) = -14848.$$

Ba'zi hollarda avval determinantda almashtirishlar bajarib, so'ng Laplas teoremasini qo'llash qulaydir.

15-misol.

Determinantni

hisoblang:

$d =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

*Yechish.* Ikkinchi satrdan ikkilangan birinchi satrni ayiramiz, uchinchi satrga ikkilangan to'rtinchi satrni qo'shamiz. Natijada,

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

ni hosil qilamiz.

Determinantni ikkinchi va uchinchi satrlar bo'yicha yoyib, quyidagini hosil qilamiz:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} (-1)^{2+3+3+5} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 42 = -84.$$

### 3.6-§. $n$ -tartibli determinantlarni hisoblash usullari

Sonli determinantlarni hisoblashda qo'llaniladigan ma'lum usullar juda ko'p hisoblashlarni bajarishni talab qiladi. Harfiy va sonli determinantlarning ma'lum bir ko'rinishlari uchun ularni hisoblashning ba'zi bir usullari ishlab chiqilgan.

#### 1. *Determinantni uchburchak ko'rinishiga olib kelish usuli.*

Bu usulning asosiy g'oyasi – diagonalidan bir tomonda turgan barcha elementlar elementar almashtirishlarni bajarib nolga keltiriladi. Agar bosh diagonalidan bir tomonda yotgan elementlar nolga teng bo'lsa, bunday determinant bosh diagonalidagi barcha elementlar ko'paytmasiga teng bo'ladi. Agar determinantning yordamchi diagonalidan bir tomonda yotgan barcha elementlar nolga teng bo'lsa, u holda bunday determinant  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$  ishora bilan olingan diagonalidagi barcha elementlar ko'paytmasiga teng.

16-misol.  $n$ -tartibli determinantni hisoblang:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

*Yechish.* Birinchi satrni qolgan satrlariga qo'shib chiqamiz. Natijada bosh diagonalning pastida turgan barcha elementlari nolga teng bo'lgan determinant hosil bo'ladi:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Demak,  $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$

17-misol.  $n$ -tartibli

$$d = \begin{vmatrix} a & a \dots a & a+x \\ a & a \dots a+x & a \\ \dots & \dots & \dots \\ a+x & a \dots a & a \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

*Yechish.* Oxirgi ustunga oldingi barcha ustunlarni qo'shamiz:

$$d = \begin{vmatrix} a & a \dots a & na+x \\ a & a \dots a+x & na+x \\ \dots & \dots & \dots \\ a+x & a \dots a & na+x \end{vmatrix}.$$

Determinant belgisi ostidan oxirgi ustundagi umumiy ko'paytuvchi -

$na+x$  ni chiqaramiz. Oldingi ustunlarning har biridan  $a$  ga ko'paytirilgan oxirgi ustunni ayiramiz. Natijada yordamchi diagonalidan yuqorida turgan barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan uchburchak ko'rinishidagi determinantga kelamiz:

$$d = (na+x) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x & \dots & 0 & 1 \\ x & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Demak,

$$d = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (x+na) x^{n-1}.$$

## 2. Chiziqli ko'paytuvchilarni ajratish usuli.

Bu usulning asosiy g'oyasi  $n$ -tartibli determinantga bir yoki bir necha o'zgaruvchilarning  $m$ -tartibli ko'phadi sifatida qaraydi. Bevosita yoki ma'lum almashtirishlarni bajarib determinant bo'linadigan  $m$  ta o'zaro tub bo'lgan chiziqli ko'paytuvchilar topiladi. U holda determinant o'zgarvas ko'paytuvchi  $S$  aniqligida shu chiziqli ko'paytuvchilarning ko'paytmasiga teng bo'ladi. O'zgarvas  $S$  soni mos ravishda determinantning hadi va chiziqli ko'paytuvchilar ko'paytmasidagi hadini solishtirish natijasida topiladi.

18-misol.  $n$ -tartibli determinantni hisoblang.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+a & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+a & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+a \end{vmatrix}.$$

*Yechish.* Determinantning diagonalidagi elementlari ko'paytmasi  $x$  ni eng katta -  $(n-1)$ -darajada saqlaydi. Demak, bu determinant  $x$  ning  $(n-1)$  darajali ko'phadidir.  $x$  ning  $x = 2 - a, x = 3 - a, \dots, x = n - a$  qiymatlarida bu determinantning mos holda 1- va 2-, 1- va 3-, .., 1- va  $n$ -satrlari bir xil bo'ladi va natijada determinant nolga teng bo'ladi. Shunday qilib,  $d$  determinant  $x + a - 2, x + a - 3, \dots, x + a - n$  ga bo'linadi va demak,

$$d = c(x + a - 2)(x + a - 3) \dots (x + a - n) \quad (**)$$

$c$  sonni topish uchun bosh diagonalidagi elementlarini ko'paytirishda hosil bo'lgan  $x^{n-1}$  hadni  $(**)$  ning o'ng tomonidagi  $c x^{n-1}$  had bilan solishtiramiz. Bu hadlar teng bo'lishi shartidan  $s = 1$  ni va natijada

$$d = (x + a - 2)(x + a - 3) \dots (x + a - n)$$

ni hosil qilamiz.

19-misol. 
$$\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$$
 determinantni hisoblang.

*Yechish.* 1-ustunga qolgan ustunlarni qo'shamiz; natijada birinchi ustunning barcha elementlari  $(x - a - b - c)$  ga teng bo'ladi. Demak,  $d$  determinant  $(x - a - b - c)$  ga bo'linadi. Agar 1-ustundan 2-ustunni ayirib, 3-ustunni qo'shib va 4-ustunni ayirsak, u holda 1-ustunning barcha elementlari  $\pm 1$  aniqligida  $x + a - b + c$  ga teng bo'ladi. Demak,  $d$  determinant  $x + a - b + c$  ga bo'linadi. Agar 1-ustundan 2-va 3-ustunlarni ayirsak, va 4-ustunni qo'shsak, u holda  $\pm 1$  aniqligida 1-ustun elementlari  $x + a + b - c$  ga teng bo'ladi, demak,  $d$  determinant  $x + a + b - c$  ga bo'linadi. Natijada

$d = m(x - a - b - c)(x + a - b + c)(x - a + b + c)(x + a + b - c)$  ga ega bo'lamiz. Bu ifodada  $m$  soni  $x, a, b, c$  sonlardan bog'liq emas.  $m$  sonini aniqlash uchun  $d$  determinantning bosh diagonali elementlarni ko'paytirishdan hosil bo'ladigan  $x^4$  hadni o'ng tomonda hosil bo'ladigan  $mx^4$  bilan solishtirib,  $m = 1$  ni hosil qilamiz. Shunday qilib,  $d = (x - a - b - c)(x + a - b + c)(x - a + b + c)(x + a + b - c)$ .

### 3. Rekurrent munosabatlar usuli.

Bu usulda berilgan determinant xuddi shu ko'rinishdagi tartibi kichik bo'lgan bitta yoki bir nechta determinantlarga keltiriladi. Buning uchun determinant biror satr yoki ustun bo'yicha yoyiladi. Ba'zi hollarda

ma'lum almashtirishlar bajarib determinant qulay ko'rinishga keltiriladi va so'ng satr yoki ustun bo'yicha yoyiladi. Determinantni xuddi shu ko'rinishla pastki tartibli bitta yoki bir nechta determinant orqali ifodalovchi tenglikka rekurrent yoki qaytish munosibatlari deyiladi. Rekurrent munosibatdan matematik induksiya usulidan foydalanib berilgan determinantning umumiy ifodasi keltirib chiqariladi.

Bu usul quyidagi o'zgartirilgan shaklda ham qo'llanilishi mumkin:  $n$ -tartibli determinantlar orqali ifodalovchi rekurrent munosibatda, shu rekurrent munosibatdagi  $n$  ni  $(n - 1)$  bilan almashtirgandagi ifodasi keltirib qo'yiladi; xuddi shunday  $(n - 2)$  -tartibli ifodasi va h.k. qo'yib chiqiladi. Natijada  $n$ -tartibli determinantning umumiy ko'rinishi hosil bo'ladi. Bu ifodalashning to'g'riligi matematik induksiya usuli yordamida tekshirib ko'riladi.

20-misol.  $(n + 1)$  -tartibli

$$d_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{determinantni}$$

hisoblang.

*Yechish.*  $d_{n+1}$  ni oxirgi satr bo'yicha yoyib chiqamiz.

$$d_{n+1} = a_n(-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} +$$

$$x \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

O'ng tomondagi 1-determinant uchburchak shakliga ega. 2-determinant berilgan  $d_{n+1}$  determinant ko'rinishiga ega bo'lib, tartibi  $n$ -ga teng va  $a_n$  ni saqlamaydi. Natijada  $d_{n+1} = a_n + d_n$  (1) rekurrent munosabat hosil bo'ladi.

$d_{n+1}$  determinantning umumiy ko'rinishini keltirib chiqarish uchun  $d_1$  va  $d_2$  larni qaraymiz:

$$d_1 = a_0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix} = a_0x + a_1.$$

$d_1 - x$  ga nisbatan nolinch darajali, koeffitsiyenti  $a_0$  ga teng bo'lgan ko'phad,  $d_2$  - birinchi darajali, koeffitsiyenti  $a_0$  va  $a_1$  ga teng bo'lgan ko'phad.

$d_{n+1}$  uchun xuddi shu kabi:  $d_{n+1} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik,  $d_n = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$  o'rinli bo'lsin.  $d_n$  ning bu ifodasini (\*\*) ga qo'ysak,  $d_{n+1} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  hosil bo'ladi.

21-misol.  $n$ -tartibli

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \theta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \theta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

*Yechish.*  $d_n$  ni 1-ustun bo'yicha yoyamiz.

$$d_n = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot d_{n-1}$$

$$- \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$$

O'ng tomondagi ikkinchi determinantni birinchi satri bo'yicha yoyamiz. Natijada  $d_n = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot d_{n-1} - \cos \theta \cdot d_{n-1}$  rekurrent

munosabat hosil bo'ladi. Bunda  $2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$  ni  $1 + \cos \theta$  bilan almashtirib,

$$d_n = (1 + \cos \theta) d_{n-1} - \cos \theta \cdot d_{n-2} \quad (3.3)$$

ga kelamiz. (3.3) rekurrent munosabatda  $n$  ni  $n-1$  bilan almashtiramiz. U holda  $d_{n-1} = (1 + \cos \theta) d_{n-2} - \cos \theta \cdot d_{n-3}$  ga teng bo'ladi.  $d_{n-1}$  ning bu ifodasini (3.3) ga qo'ysak,

$$d_n = (1 + \cos \theta + \cos^2 \theta) d_{n-2} - (1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot d_{n-3} \quad (3.4)$$

ga ega bo'lamiz. (3.3) da  $n$  ni  $n-2$  bilan almashtirib,

$$d_{n-2} = (1 + \cos \theta) d_{n-3} - \cos \theta \cdot d_{n-4}$$

va uni (3.4) ga qo'yib,

$$d_n = (1 + \cos \theta + \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) d_{n-3} - (1 + \cos \theta + \cos^2 \theta) \cos \theta \cdot d_{n-4}$$

ifodani topamiz va h.k.

$$d_n = (1 + \cos \theta + \dots + \cos^{n-2} \theta) d_2 - (1 + \cos \theta + \dots + \cos^{n-3} \theta) \cos \theta \cdot d_1, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \cos \theta \\ 1 & 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{vmatrix} = 1 + \cos \theta + \cos^2 \theta, \quad d_1 = 1 + \cos \theta$$

ifodasini va natijada  $d_n = 1 + \cos \theta + \dots + \cos^n \theta$  ni hosil qilamiz.  $d_n$  ning bu ifodasini matematik induksiya usuli yordamida tekshiramiz.

Rekurrent munosabatlar usuli determinantning umumiy ko'rinishidagi qonuniyatni topish talab etadi. Bu usulning qiyinchiligi ham shunda.

$$d_n = p d_{n-1} + q d_{n-2}, \quad n > 2, \quad (3.5)$$

ko'rinishdagi  $p$  va  $q$  ning munosabatni qanoatlantiruvchi determinantlarni o'rganish bilan chegaralanamiz. (3.5) dagi  $p$  va  $q$  lar  $n$  dan bog'liq bo'lmagan o'zgarmas kattaliklar.

$q = 0$  bo'lganda,  $d_n$  progressiyasining hadini hisoblagan kabi hisoblanadi:  $d_n = p^{n-1} d_1$ , bunda  $d_1$  — 1-tartibli determinant, ya'ni  $d_n$  ning chap yuqori burchagida turgan element.

$q \neq 0$  bo'lsin.  $\alpha, \beta$  — lar  $x^2 - px - q = 0$  kvadrat tenglamaning ildizlari bo'lsin. U holda  $p = \alpha + \beta$ ,  $q = -\alpha\beta$  bo'lib, (3.5) tenglikni quyidagi ikki xil ko'rinishda yozish mumkin:

$$d_n - \beta d_{n-1} = \alpha (d_{n-1} - \beta d_{n-2}), \quad (3.6)$$

$$d_n - \alpha d_{n-1} = \beta(d_{n-1} - \alpha d_{n-2}), \quad (3.7)$$

$\alpha \neq \beta$  bo'lsin. Geometrik progressiyaning  $(n-1)$ -hadini toppish formulasidan (3.6) va (3.7) larga ko'ra  $d_n - \beta d_{n-1} = \alpha^{n-2}(d_2 - \beta d_1)$  va  $d_n - \alpha d_{n-1} = \beta^{n-2}(d_2 - \alpha d_1)$ , bundan esa,  $d_n = \frac{\alpha^{n-1}(d_2 - \beta d_1) - \beta^{n-1}(d_2 - \alpha d_1)}{\alpha - \beta}$  yoki  $d_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n$ , bunda

$$\alpha \neq \beta \quad c_1 = \frac{d_2 - \beta d_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad c_2 = \frac{d_2 - \alpha d_1}{\beta(\alpha - \beta)} \quad (3.8)$$

ni hosil qilamiz.  $d_n$  ning bu ifodasi  $n > 2$  uchun hosil qilingan bo'lib,  $n = 1$  va  $n = 2$  lar uchun bevosita tekshiriladi.  $c_1$  va  $c_2$  larning (3.8) munosibatdan emas, balki boshlang'ich  $d_1 = c_1 \alpha + c_2 \beta$ ,  $d_2 = c_1 \alpha^2 + c_2 \beta^2$  shartlardan toppish mumkin.

$\alpha = \beta$  bo'lsin. (3.6) va (3.7) tengliklar bitta  $d_n - \alpha d_{n-1} = \alpha(d_{n-1} - \alpha d_{n-2})$ , tenglikka aylanadi. Bundan

$$d_n - \alpha d_{n-1} = A \alpha^{n-2}, \quad (3.9)$$

hosil qilamiz. Bunda  $A = d_2 - \alpha d_1$ .

(3.9) da  $n$  ni  $n-1$  bilan almashtirib,  $d_{n-1} - \alpha d_{n-2} = A \alpha^{n-3}$  ni, va undan esa  $d_{n-1} = \alpha d_{n-2} + A \alpha^{n-2}$  ni hosil qilamiz. Bu ifodani (3.6) tenglikka qo'yib:  $d_n = \alpha^2 d_{n-2} + 2A \alpha^{n-2}$  ni topamiz. Bu usulni bir necha marta qo'llab,  $d_n = \alpha^{n-1} d_1 + (n-1)A \alpha^{n-2}$  yoki  $d_n = \alpha^n [(n-1)c_1 + c_2]$ , bunda  $c_1 = \frac{A}{\alpha^2}$ ,  $c_2 = \frac{d_1}{\alpha}$  ( $\alpha \neq 0$  bo'lganligi uchun  $\alpha \neq 0$ ) ni hosil qilamiz.

22-misol.  $n$ -tartibli  $d_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}$

determinantni hisoblang.

*Yechish.* Birinchi satr bo'yicha yoyib,  $d_n = 7d_{n-1} - 12d_{n-2}$  ni hosil qilamiz. Bu rekurrent munosabatga muvofiq keluvchi  $x^2 - 7x + 12 = 0$  kvadrat tenglama  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 4$  ( $\alpha \neq \beta$ ) ildizlarga ega. Demak,  $d_n = c_1 3^n + c_2 4^n$ .  $c_1$  va  $c_2$  koeffitsiyentlarni  $c_1 = \frac{d_2 - \beta d_1}{\alpha(\alpha - \beta)}$ ,

$c_2 = -\frac{d_2 - \alpha d_1}{\beta(\alpha - \beta)}$  formulalardan topamiz.  $d_2 = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 37$ ,  $d_1 = 7$ ,

bo'lganligidan  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 4$  bo'ladi. Demak,  $d_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$  bo'ladi.

#### 4. Determinantni determinantlar yig'indisiga yoyish usuli

Ba'zida  $n$ -tartibli harfli determinantni ikki yoki bir nechta determinantlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash orqali oson yo'l bilan hisoblash mumkin.

23-misol.  $n$ -tartibli 
$$d = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

*Yechish.* Determinantni birinchi ustun bo'yicha yoyamiz:

$$d = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

Ikkita determinant ham uchburchak ko'rinishiga ega.

#### 24-misol.

$n$ -tartibli

$d_n =$

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x + a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

*Yechish.* Berilgan determinantni:

$$d = \begin{vmatrix} x + a_1 & 0 + a_2 & 0 + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ 0 + a_1 & x + a_2 & 0 + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ 0 + a_1 & 0 + a_2 & x + a_3 & \dots & 0 + a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 + a_1 & 0 + a_2 & 0 + a_3 & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

ko'rinishda

yozamiz.

Determinantning har bir ustun elementini ikkita qo'shiluvchining yig'indisi ko'rinishida ifodalab, determinantning ma'lum xossasiga ko'ra  $d$  ni  $n$ -tartibli  $2^n$  ta determinantlar yig'indisiga yoyish mumkin. Bunda hosil bo'lgan determinantlarning ba'zilarida bir xil ustunlar hosil bo'ladi va bunday determinantlar qiymati nolga teng bo'lganligi

sababli ularni tashlab, qolganlarini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$d = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_i & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & a_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i & \dots & x \end{vmatrix}$$

(bunda  $a_i$  lar  $i$ -ustunda).

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_i & \dots & 0 \\ 0 & x & \dots & a_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i & \dots & x \end{vmatrix} \text{ determinantni oxirgi ustun bo'yicha}$$

yoyib, hosil bo'lgan  $(n-1)$ -tartibli determinant yana oxirgi ustun bo'yicha yoyib va h.k. oxirgi ustuni  $a_i$  larga teng bo'lgan uchburchak ko'rinishidagi  $i$ -tartibli determinant hosil bo'lguncha qadar davom ettiramiz. Natijada

$$d_i = x^{n-i} \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_i \\ 0 & x & \dots & a_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_i \end{vmatrix} = x^{n-i} \cdot x^{i-1} \cdot a_i = x^{n-1} a_i.$$

$$n\text{-tartibli } \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} x^n \text{ ga teng bo'lganligi sababli}$$

quyidagi ifodani hosil qilamiz:  $d = x^n + \sum_{i=1}^n x^{n-1} a_i = x^{n-1}(x + a_1 + \dots + a_n)$ .

### 5. Determinantning elementlarini o'zgartirish usuli

Bu usulda determinantning barcha elementlarini bitta songa o'zgartirish yo'li bilan barcha elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini hisoblash qulay bo'lgan holga keltiriladi. Bu usul quyidagi xossaga asoslangandir: agar  $d$  determinantning barcha elementlariga aynan bitta  $x$  sonini qo'shsak, u holda, determinant  $x$  sonini  $d$ .

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad d' = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} \text{ bo'lsin.}$$

$d'$  ni 1-satrga nisbatan ikkita determinantga, ularning har birini esa 2-satrga nisbatan ikkitadan determinantlarga va h.k. yozamiz. Barcha

elementlari  $x$  ga teng bo'lgan satrlari bittadan ko'p bo'lgan determinantlar nolga teng, elementlari  $x$  ga teng bo'lgan satrlar soni bitta bo'lgan determinantlarni shu satr bo'yicha yoyamiz. U holda isbot qilinishi kerak bo'lgan  $d' = d + x \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$  tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib,  $d'$  determinantni hisoblash  $d$  determinantni va uning algebraik to'ldiruvchilari yig'indisini hisoblashga olib kelinadi.

25-misol.  $n$ -tartibli

$$d = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

*Yechish.* Bosh diagonalda yotmagan elementlarning algebraik to'ldiruvchilari nolga teng, bosh diagonalda elementlarniki esa bosh diagonalda boshqa elementlarning ko'paytmasiga teng. Shuning uchun,

$$\begin{aligned} d_n &= (a_1 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i=1}^n (a_1 - x) \dots (a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x) \dots (a_n - x) \\ &= x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) \cdot \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right) \end{aligned}$$

6.  $n$ -tartibli determinantni Vandermond determinantiga olib kelib hisoblash

Vandermond determinanti deb,

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ko'rinishidagi determinantga aytiladi.

U quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\begin{aligned} V_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) = \\ &= \prod_{n \geq i \geq k \geq 1} (x_i - x_k). \end{aligned}$$

Ba'zi determinantlarni Vandermond determinantiga olib kelish yo'li bilan hisoblash mumkin.

26-misol. Vandermond determinantiga keltirish yo'li bilan determinantni hisoblang.

$$d = \begin{vmatrix} \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \beta_1 & \dots & \beta_1^n \\ \alpha_2^n & \alpha_2^{n-1} & \beta_2 & \dots & \beta_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1} & \beta_{n+1} & \dots & \beta_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

*Yechish.* Determinant belgisi ostidan  $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_{n+1}^n$  ko'paytuvchilarni mos ravishda  $1, \dots, (n+1)$  -satrlardan chiqaramiz. Natijada Vandermond determinantini hosil qilamiz:

$$d = \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \alpha_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{\alpha_1} & \dots & \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^n \\ 1 & \frac{\beta_2}{\alpha_2} & \dots & \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} & \dots & \left(\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix} = \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \alpha_{n+1}^n \cdot \prod_{i>j} \left[ \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) - \left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right) \right] = \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \alpha_{n+1}^n \prod_{i>j} \frac{\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j}{\alpha_i \alpha_j} = \prod_{i>j} (\alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j).$$

27-misol. Vandermond determinantiga

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{p-1} & x_1^{p+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{p-1} & x_2^{p+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{p-1} & x_n^{p+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

ko'rinishdagi determinantni ham keltirish mumkin.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  elementlarning  $n-p$  tadan olingan barcha ko'paytmalaridan tuzilgan yig'indini  $S_{n-p}$  bilan,  $d_n$  bilan shu elementlardan tuzilgan Vandermond determinantini belgilasak,  $d = S_{n-p} d_n$  tenglik o'rinlidir.

### 3.7-§. Teskari matritsa

$A$  – matritsa  $n$ -chi tartibli kvadrat matritsa bo'lsin.  $A$  matritsa uchun  $AB = BA = E$  tenglikni qanoatlantiruvchi  $B$  matritsa  $A$  ga *teskari matritsa* deyiladi va u  $B = A^{-1}$  ko'rinishda belgilanadi. Teskari matritsa elementlarini

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

formula yordamida topish mumkin, bunda  $A_{ji}$ lar  $a_{ji}$  elementlarning algebraik to'ldiruvchisidir.  $A$  matritsa *teskarilantuvchi* deb aytiladi, agar  $\det A \neq 0$ , ya'ni  $A$  matritsa xosmas bo'lsa.

Har qanday xosmas  $A$  matritsani faqat satrlar (yoki faqat ustunlar) elementar almashtirishlari yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin. Elementar almashtirishlarni xuddi shunday ketma-ketlikda  $E$  birlik matritsaga tadbiiq qilsak, teskari matritsa  $A^{-1}$  ni hosil qilamiz.  $A$  va  $E$  matritsalarini chiziq yordamida qo'shni yozib ular ustida elementar almashtirishlarni bir vaqtda bijarish juda qulaydir.

Teskari matritsani hisoblash  $AX = B$ ,  $YA = B$  matritsaviy tenglamalarni yechish bir-biri bilan bog'langandir, bunda  $A, B$ —berilgan matritsalar,  $X, Y$  — izlanayotgan noma'lum matritsalar. Agar  $A$  matritsa to'g'ri burchakli matritsa yoki xosmas matritsa bo'lsa, matritsaviy tenglamalarni yechish  $X$  matritsaning har bir ustuni yoki  $Y$  matritsaning har bir satri elementlari uchun hosil bo'ladigan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Bu tenglamalarni hosil qilish uchun tenglamaning har ikkala tomonidagi matritsalarining mos elementlarini bir-biriga tenglashtirish lozim. Agar  $A$  matritsa xosmas bo'lsa, matritsaviy tenglamalarning yechimlari quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$X = A^{-1}B, \quad Y = BA^{-1}.$$

28-misol. Berilgan matritsa uchun teskari matritsa topilsin  $A =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Yechish.*  $\det A = -1$  bo'lganligi uchun teskari matritsa  $A^{-1}$  mavjud. Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 8, & A_{21} &= -29, & A_{31} &= 11, \\ A_{12} &= 5, & A_{22} &= -18, & A_{32} &= 7, \\ A_{13} &= -1, & A_{23} &= 3, & A_{33} &= -1. \end{aligned}$$

Teskari matritsani topish formulasiga asosan bu algebraik to'ldiruvchilarni  $(-1)$  ga bo'lib, teskari matritsani hosil qilamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

29-misol. Satrlarning elementar almashtirishlari yordamida teskari matritsa  $A^{-1}$ ni toping  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ .

*Yechish.* Quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \\
 & \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \\
 & \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_3} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + 7R_3} \\
 & \xrightarrow{R_2 + 7R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 11 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2} \\
 & \xrightarrow{(-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Bunda  $R_i$  matritsaning  $i$ -satri. Shunday qilib, teskari matritsa quyidagi ko'riniga ega bo'ladi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

30-misol. Quyidagi tenglamalardan  $X$  matritsani toping:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Yechish.*  $\det A = -1 \neq 0$  va  $\det B = -4 \neq 0$  bo'lgani uchun  $A^{-1}$  va  $B^{-1}$  teskari matritsalar mavjud. Tenglamaning chap va o'ng tomonlarini chapdan  $A^{-1}$  ga, o'ngdan  $B^{-1}$  ga ko'paytirsak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}. A^{-1}(AXB) = (A^{-1}A)X(BB^{-1}).$$

$A^{-1}A = E, BB^{-1} = E$  va  $EXE = X$  bo'lganligi uchun  $X = A^{-1}CB^{-1}$  kelib chiqadi. Bu tenglikka asosan  $X$  matritsani hisoblaymiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

31-misol. Har qanday qanday elementar almashtirishlar xosmas matritsalarining ko'paytmasidan iborat ekanligini isbotlang.

*Yechish.*  $A$  matritsa satrlarining har qanday elementar almashtirishlari  $A$  matritsani chapdan elementar matritsaga ko'paytirishdan iborat bo'lib, bu elementar matritsani birlik matritsadan o'shanday elementar almashtirish yordamida hosil qilish mumkin. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin. Shuning uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_k \cdots S_1 A = E,$$

bundan esa  $S_k \cdots S_1 = A^{-1}$ ,  $A = S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \cdot S_1^{-1}, \dots, S_k^{-1}$  matritsalar hamda  $S_1, \dots, S_k$  matritsalar ham elementar matritsalar, ularni birlik matritsadan satrlarning «teskari» elementar almashtirishi yordamida hosil qilish mumkin.

32-misol. Berilgan matritsani elementar matritsalarining ko'paytmasiga yoying:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

*Yechish.* To'rtinchi misolning yechimiga asosan bunda  $A = S_1^{-1} \cdots S_k^{-1}$  matritsalar  $A$  matritsa satrlarining elementar almashtirishlariga mos keladiki, uni birlik matritsaga keltiradi.  $S_1, \dots, S_k$  matritsalarini tanlab keyin  $S_1^{-1}, \dots, S_k^{-1}$  larni topamiz. Bu jarayonni bitta qadamga kamaytirish mumkinligini ko'rsatamiz.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  matritsani soddalashtiramiz. Matritsaning ikkinchi satrini  $\left(-\frac{1}{2}\right)$  ga ko'paytirish  $A$  ni chap tomondan  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  matritsaga ko'paytirish bilan teng kuchlidir. Quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = S$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = SB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ko'p tadbqiqiy masalalar shu jumladan iqtisodiy masalalar chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Shuning uchun bunday sistemalarni o'rganish muhim ahamiyatga ega. Chiziqli tenglamalar sistemasi ikki turli bo'ladi:

Avvalo bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemalarini o'rganamiz. Bunday sistemalar quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \quad (3.11)$$

bunda  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sonlar sistema koeffitsiyentlari  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  sonlar ozod hadlar yoki sistemaning o'ng tomoni deb ataladi. (3.11) sistemani qisqacha ushbu

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.12)$$

ko`rinishda yozish mumkin. (3.11) sistemaning yechimi deb  $n$  ta sonlarning shunday majmuasiga aytiladiki, ularni (3.11) sistemaga qo`yganda har bir tenglama to`g`ri tenglikka aylanadi.

Agar tenglamalar sistemasi hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, bu sistema birgalikda, yechimga ega bo'lmasa, birgalikda emas deyiladi. Agar tenglamalarning ikkita sistemasi bir xil yechimga ega bo'lsa, ular teng kuchli yoki ekvivalent sistemalar deyiladi. Tenglamalar sistemasini yechish deyilganda uning barcha

**Gauss usuli (Noma'lumlarni ketma-ket yo`qotish usuli).** Bu usul noma'lumlarni ketma-ket yo`qotish yordamida berilgan sistemaga ekvivalent bo`lgan zinapoyasimon (xususiyl holda uchburchak) shaklidagi sistemaga keladi. Zinapoyasimon sistema deb,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = y_k \end{cases} \quad (3.13)$$

Agar  $k = n$  bo'lsa, u holda (3.13) sistema uchburchak shaklida bo'ladi.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

*Yechish:* Sistemaning 1- tenglamasidan  $x_1$ ni topib, sistemaning 2- va 3- tenglamalariga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 11x_2 + 16x_3 = 70 \\ \frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Bu sistemaning ikkinchisidan  $x_2$  ni topib, uchinchi tenglamaga qo'yib, qo'yidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8 \\ 11x_2 + 16x_3 = 70 \\ 29x_3 = 87 \end{cases}$$

Bu yerdan  $x_3 = 3; x_2 = 2; x_1 = 1$

**Kramer usuli.** Uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3.14)$$

berigan bo'lsin. Sistemaning asosiy determinanti  $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ va yordamchi determinantlari.}$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta x_3 =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

ni tuzamiz.

Agar sistemaning determinanti  $\Delta \neq 0$  bo'lsa, u holda (3.14) sistema

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \quad (3.15)$$

yagona yechimga ega bo'ladi.

(3.14) sistemaning yechimini (3.15) ko'rinishda topish Kramer qoidasi deb ataladi.

Agar  $\Delta = 0$  bo'lib,  $\Delta x_1; \Delta x_2; \Delta x_3$  lardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda sistemaning yechimi mavjud bo'lmaydi va sistema birgalikda bo'lmagan sistema deb ataladi. Agar  $\Delta = 0$ ,  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$  bo'lsa, u holda (3.14) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

34-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi Kramerning (3.15) formulasi bilan yechilsin.

*Yechish.* Noma'lumlar oldida turgan koeffitsentlardan tuzilgan asosiy determinantni tuzib, hisoblaymiz:

$$1) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-4 - 3 + 12 + 8 + 9 - 8) = 14$$

So'ngra yordamchi determinantlarni ham hisoblaymiz:

$$2) D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$3) D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$4) D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42$$

U holda Kramer formulasiga asosan tenglamalar sistemasini yechimini hosil qilamiz:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{14} = 1; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{28}{14} = 2; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{42}{14} = 3$$

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi binar munosabatlardan qaysilari o'rniga qo'yish bo'ladi:

$$a) \begin{pmatrix} 2134 \\ 2321 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 4213 \\ 4312 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 21324 \\ 23421 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 13423 \\ 43123 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 123453 \\ 43213 \end{pmatrix}.$$

2. Matritsalarining chiziqli kombinatsiyasi topilsin:

$$a) 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$c) 2 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$f) 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Matritsalarining ko'paytamsi hisoblansin:

a)  $(2 \ -3 \ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \ -3 \ 0)$ ; c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ ;

d)  $(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; e)  $(0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ;

f)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; g)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

h)  $(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ; i)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

4. Determinantlarni hisoblang:

a)  $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$ ; b)  $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$ ; c)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{vmatrix}$ ;

d)  $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$ ; e)  $\begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}$ ;

f)  $\begin{vmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{vmatrix}$ .

5. Determinantlarni hisoblang:

a)  $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ ; b)  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ ; c)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ;

d)  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ ; e)  $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ ; f)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}$ ;

g)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 + i \\ 0 & 1 & i \\ 1 - i & -i & 1 \end{vmatrix}$ ; h)  $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} (\varepsilon = -\frac{1}{2} +$

$i \frac{\sqrt{3}}{2})$ ;

i)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} (\varepsilon = \cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi)$ .

6. Determinantlarni yoymasdan turib, quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

7. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 4x_2 + 11x_3 = 1 \\ 7x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 27 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 70 \\ 3x_1 - x_3 = -2 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 21 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}; \quad 6) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 43 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}; \quad 8) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 23 \end{cases};$$

$$9) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}; \quad 10) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases};$$

$$11) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}; \quad 12) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 19 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -10 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases};$$

8. Ushbu tenglamalar sistemalarini Kramer qoidasi bilan yeching:

$$1) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 19 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 16 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -10 \\ 2x_1 - 3x_3 = 4 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3; \\ x_1 - 2x_2 = -7 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7; \\ x_1 - 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 ; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 ; \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 ; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -10 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 ; \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 38 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -10 \\ 4x_1 + 3x_3 = -7 ; \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 38 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -13 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$$

DURDONA

## IV BOB. KOMPLEKS SONLAR

### 4.1-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

**4.1.1-ta’rif.** *Kompleks son* deb haqiqiy sonlarning tartiblangan juftligiga aytiladi.  $(a, o)$  kompleks sonni haqiqiy son dan farqlamaydilar. Barcha kompleks sonlar to’plamini  $S$  orqali belgilanadi.  $(a, b)$  va  $(c, d)$  juftliklar ularning mos koordintalari teng bo’lgandagina *teng* deyiladi, ya’ni

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

Kompleks sonlarni qo’shish va ko’paytirish amallari quyidagi tengliklar yordamida kiritiladi

$$(a, v) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$(0, 1)$  kompleks soni  $i$  harfi orqali belgilash va uni *mavhum bir* deb atash qabul qilingan.  $i^2 + 1 = 0$  bo’lishini ko’rsatish qiyin emas, ya’ni  $i$  soni  $x^2 + 1 = 0$  tenglamaning ildizi bo’ladi.

**4.1.2-ta’rif.** Har qanday  $z$  kompleks sonni  $a + bi$  algebraik shaklda yozish mumkin. Agar  $z = a + bi$  bo’lsa,  $a$  son  $z$  kompleks sonning *haqiqiy qismi* deyiladi va  $Re\ z$  orqali belgilanadi,  $b$  son esa  $z$  kompleks sonning *mavhum qismi* deyiladi va  $Im\ z$  orqali belgilanadi.  $z = a - bi$  kompleks son,  $z = a + bi$  kompleks sonning *kompleks qo’shmasi* deyiladi. Agar  $a = c$ ,  $b = d$  bo’lsa  $a + bi$  va  $c + di$  kompleks sonlar teng deyiladi.

Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida arifmetik amallar quyidagi tengliklar yordamida aniqlanadi:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

Boshqacha aytganda, agar  $i^2 = -1$  ekanligini hisobga olinsa, kompleks sonlar ustida barcha arifmetik amallar haqiqiy sonlar ustidagi xuddi shunday amalar kabi bajaradi.

Agar kompleks sonlarning yig’indisi, ayirmasi, ko’paytmasi va bo’linmasidagi barcha sonlarni ularning kompleks-qo’shmasiga almashtirilsa, natija ham o’zining qo’shmasiga almashadi:

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}, \quad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}, \quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}, \quad \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Kompleks sonni darajaga ko'tarish amali quyidagicha aniqlanadi:

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n, & \text{agar } n \geq 2 \\ z, & \text{agar } n = 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Agar  $z \neq 0$  bo'lsa:  $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$  deb qabul qilinadi. Kompleks sonning butun ko'rsatkichli darajasi quyidagi xossalarga ega:

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{pq}, \quad (z_1 \cdot z_2)^p = z_1^p \cdot z_2^p, \\ \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p = \frac{z_1^p}{z_2^p}, \quad \text{bunda } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Kompleks son  $z$  ning  $n$ -darajali ildizi deb shunday  $\omega, \omega = \sqrt[n]{z}$ , kompleks songa aytiladiki,  $\omega^n = z$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ).

1-misol. Quyidagi tenglamadan  $x$  va  $y$  haqiqiy sonlarni toping:

$$(5x - 3y) + (x - 2y)i = 6 + (8 - x + y)i.$$

*Yechish.* Kompleks sonlarning tenglik shartidan foydalanib,

$$\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ x - 2y = 8 - x + y \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadan  $x$  va  $y$  noma'lumlarni topamiz:

$$x = -\frac{2}{3}, \quad y = -\frac{28}{9}.$$

2-misol.  $i$  ning darajalarini toping.

*Yechish.* Ta'rifga ko'ra  $i^0 = 1, i^1 = i$  va  $i^2 = -1$ . Shuning uchun

$$i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^3 i = 1, \quad i^5 = i^4 i = i.$$

Umuman olganda:  $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, n \in \mathbb{N}$ .

3-misol. Darajaga ko'taring:  $(1 + i)^{20}, (1 - i)^{21}$ .

*Yechish.* Bu masalani Nyuton binomi formulasidan foydalanib hal qilsa bo'ladi, lekin uni quyidagicha yozish qulayroq:  $(1 + i)^2 = 2i, (1 - i)^2 = -2i$ . U holda

$$(1 + i)^{20} = [(1 + i)^2]^{10} = (2i)^{10} = -2^{10}, \\ (1 - i)^{21} = [(1 - i)^2]^{10} (1 - i) = (-2i)^{10} (1 - i) = -2^{10} (1 - i).$$

Kompleks koeffisiyentli istagan kvadrat tenglamani yechish uchun, avvalo kompleks sonning kvadrat ildizini topa olish kerak. Ta'rifga ko'ra  $x+yi$  son  $a+bi$  sonning kvadrat ildizi bo'lishi:

$$(x + yi)^2 = a + bi \quad (*)$$

tenglikning bajarilishiga teng kuchli.

(\*) tenglik quyidagi formulalar yordamida topiladigan ikkita har xil yechimlarga ega bo'ladi:

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}; \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

bu yerda radikal arifmetik ildizni bildiradi, agar  $b > 0$  bo'lsa,  $x$  va  $y$  larning ishoralari bir xil qilib,  $b < 0$  bo'lganda esa har xil qilib tanlanadi.

4-misol.  $\sqrt{24 - 10i}$  ildizning qiymatlari  $5 - i$  va  $-5 + i$  bo'ladi. Kvadrat ildizni to'g'ridan to'g'ri topish ham mumkin.

5-misol. Ildizdan chiqaring:  $\sqrt{5 + 12i}$

Yechish.  $\sqrt{5 + 12i} = x + yi$  bo'lsin. Ildizning ta'rifiga ko'ra

$$(x + yi)^2 = 5 + 12i \quad \text{yoki} \quad (x^2 - y^2) + 2xyi = 5 + 12i,$$

bundan  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$  sistemani hosil qilamiz.

Bu sistemadagi ikala tenglikni kvadratga ko'tarib va ularni qo'shib,  $(x^2 + y^2)^2 = 25 + 144$  va  $x^2 + y^2 = 13$  larni hosil qilamiz.

U holda  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$  sistemadan  $x$  va  $y$  noma'lumlarni topamiz:  $x = \pm 3, y = \pm 2$ .

Oldingi sistemaning ikkinchi tenglamasidan  $x$  va  $y$  larning bir xil ishorali bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun  $x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = -3, y_2 = -2$ . Shunday qilib,  $\sqrt{5 + 12i}$  ildiz ikkita  $3 + 2i$  va  $-3 - 2i$  qiymatlarga ega.

Endi kompleks sonning kvadrat ildizini topishni bilgan holda aynan maktab matematika kursidekdagi kompleks koeffisiyentli

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tenglamaning ildizlari  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  formula yordamida topilishini ko'rsatish mumkin.

## 4.2-§. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli

Tekislikdagi nuqtalar bilan kompleks sonlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatamiz. Buning uchun tekislikda biror to'g'ri burchakga Dekart koordinatalar sistemasi kiritamiz. Natijada, tekislikdagi har bir nuqtaga haqiqiy sonlarning  $(a, b)$  tartiblangan juftligi, ya'ni  $(a, b) \in \mathbb{C}$  element mos qo'yiladi va aksincha har bir  $(a, b)$  kompleks songa tekislikdagi koordinatalari  $a$  va  $b$  ga teng nuqta mos keladi. Shu munosabat bilan tekislikning o'zini kompleks deb ataladi. Bunda haqiqiy sonlarga  $(a, 0)$  ko'rinishdagi, ya'ni absissalar o'qida yotuvchi nuqtalar mos keladi. Ordinatalar o'qidagi nuqtalarga esa  $(0, b)$  mavhum sonlar mos keladi. Shuning uchun kompleks tekislikning absissalar o'qini *haqiqiy o'q*, ordinatalar o'qini esa *mavhum o'q* deb ataladi.

Odatda,  $z = (a, b)$  kompleks son tekislikdagi koordinatalari  $a$  va  $b$  sonlardan iborat nuqta orqali yoki absissa va ordinatalar o'qidagi proyeksiyalari mos ravishda  $a$  va  $b$  ga teng bo'lgan vektor orqali tasvirlanadi. Ko'pincha  $z$  nuqta yoki  $z$  vektor ham deb aytiladi. Kompleks son  $z = a + bi$  ning absolyut qiymati deb  $z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  haqiqiy songa aytiladi. Absissalar o'qining musbat yo'nalishi va  $z$  vektorning yo'nalishi orasidagi  $\phi$  burchak  $z$  kompleks sonning argumenti deyiladi va *arg*  $z$  orqali belgilanadi. 0 sonning argumenti aniqlanmagan.

Ixtiyoriy noldan farqli  $z = (a, b)$  kompleks sonni va tekislikda unga mos keluvchi vektorni qaraymiz.  $z$  nuqtaning tekislikdagi holatini uning qutb koordinatalari: koordinatalar boshidan  $z$  nuqtagacha bo'lgan masofa  $r$ , ya'ni  $|z|$  va absissa o'qining musbat yo'nalishi bilan  $z$  vektor yo'nalishi orasidagi  $\phi = \arg z$  burchaklar to'liq aniqlaydi.

**4.2.1-ta'rif.** Agar  $z = a + bi$  bo'lsa, u holda  $\cos\phi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin\phi = \frac{b}{r}$ . Bundan har bir  $z$  kompleks son uchun  $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$  kelib chiqadi. Kompleks sonning bunday ko'rinishi uning *trigonometrik shakli* deyiladi.

Trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish amallari quyidagicha amalga oshiriladi:

$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$   
bo'lsin. U holda

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)). \quad z_2 \neq 0.$$

6-misol.  $|z|$  – son tekislikda  $z$  ni tasvirllovchi nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofadan iborat. Boshqacha aytganda  $|z|$  son  $z$  kompleks sonni ifodalovchi vektorning uzunligidir.

7-misol. Kompleks tekislikda  $|z| = 3$  shartni qanoatlantiruvchi  $z$  nuqtalar to'plami markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylanadan iborat.

8-misol. Kompleks tekislikda  $|z| \leq 3$  shartni qanoatlantiruvchi  $z$  nuqtalar to'plami markazi koordinatalar boshida va radiusi 3 ga teng bo'lgan yopiq dioradan iborat.

9-misol. Kompleks tekislikda  $|z - 1 + 2i| = 3$  shartni qanoatlantiruvchi  $z$  nuqtalar to'plami markazi  $(1, -2)$  nuqtada va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylanadan iborat.

10-misol. Kompleks tekislikda  $|z - 1 + 2i| \leq 3$  shartni qanoatlantiruvchi  $z$  nuqtalar to'plami markazi  $(1, -2)$  nuqtada va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylanadan iborat.

#### 4.3-§. Darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish

$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$  bo'lsin. U holda har qanday  $n$  butun son uchun

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

*Muavr formulasi o'rinli.*

Muavr formulasi kompleks sondan istalgan darajali ildiz chiqarish masalasini hal qilishga imkon beradi.  $w$  kompleks son  $z$  kompleks sonning  $n$ -darajali ( $n \in \mathbb{N}$ ) ildizi deyiladi, agar  $w^n = z$  bo'lsa.  $z$  ning  $n$ -darajali ildizini  $\sqrt[n]{z}$  orqali belgilaymiz.

Berilgan  $z$  kompleks sonning  $n$ -darajali ildizi bir nechta qiymatlarga ega, shuning uchun  $\sqrt[n]{z} = w$  yozuv  $w$  son shu qiymatlardan biri ekanligini bildiradi. Bitta mulohaza davomida  $\sqrt[n]{z}$  ifoda  $z$  kompleks son  $n$ -darajali ildizining faqat bitta qiymatini bildiradi.

Agar tekstdan ildizning aynnan shu qiymati haqida gapirilayotganligi ma'lum bo'lsa, bu haqida alohida eslatilmaydi, masalan, kompleks son modulini hisoblashda.

Agar  $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$  bo'lsa,  $z$  ning  $n$ -darajali ildizi uchun

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin \frac{\phi+2k\pi}{n}),$$

bu yerda  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , formula o'rinli. Bu formula  $z$  kompleks son  $n$ -darajali ildizining  $n$  ta har xil qiymatlarini beradi.

11-misol. Hisoblang:  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}$ .

*Yechish.*

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}), \quad 1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i\sin \frac{7}{4}\pi),$$

bo'lganligi sababli

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{20} &= \left(\frac{2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}\right)^{20} \\ &= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{20} = \\ &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12}\pi + i\sin \frac{7}{12}\pi\right)\right)^{20} = 2^{10} \left(\cos \frac{140}{12}\pi + i\sin \frac{140}{12}\pi\right) = \\ &= 2^{10} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i\sin \frac{7}{4}\pi\right) = 2^{10} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2^9 \sqrt{2}(1 - i). \end{aligned}$$

12-misol. Hisoblang:  $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ .

*Yechish.*

$$1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$= \begin{cases} 2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i\sin \frac{\alpha}{2}\right), & \text{agar } 0 \leq \alpha \leq \pi \text{ bo'lsa} \\ -2\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi}{2} + i\sin \frac{\alpha + 2\pi}{2}\right), & \text{agar } \pi \leq \alpha \leq 2\pi \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

(28 (r) mashqqa qarang) bo'lganligi uchun  $0 \leq \alpha < \pi$  bo'lganda

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha n}{2} + i\sin \frac{\alpha n}{2}\right),$$

$\pi \leq \alpha \leq 2\pi$  bo'lganda esa

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (-2)^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha n}{2} + n\pi\right) + i\sin \left(\frac{\alpha n}{2} + n\pi\right)\right).$$

13-misol.  $\sqrt[4]{-16}$  ildizning barcha qiymatlarini toping.

*Yechish.*  $z = -16$  ni trigonometrik shaklga keltiramiz:

$$z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

U holda ildiz chiqarish formulasiga ko'ra

$$w_k = 2 \left( \cos \frac{\pi+2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi+2\pi k}{4} \right), k = 0,1,2,3.$$

Natijada,

$$w_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad w_1 = 2 \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$w_2 = 2 \left( \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad w_3 = 2 \left( \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

14-misol.  $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$  to'plam elementlarining trigonometrik shaklini yozing.

*Yechish.*  $-1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$  va

$1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$  bo'lganligi uchun

$$\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \left( \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{13}{12}\pi + i \sin \frac{13}{12}\pi \right).$$

Natijada,

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}} \left( \cos \frac{13\pi+24k\pi}{48} + i \sin \frac{13\pi+24k\pi}{48} \right), k = 0,1,2,3.$$

Muavr formulasi ba'zi trigonometrik ifodalarni almashtirishda qulayliklar yaratadi.

15-misol.  $\operatorname{tg} 5\phi$  ni  $\operatorname{tg} \phi$  orqali ifodalang.

*Yechish.* Darajaga ko'tarish formulasiga ko'ra

$$\cos 5\phi + i \sin 5\phi = (\cos \phi + i \sin \phi)^5.$$

Nyuton binom formulasini qo'llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\cos 5\phi + i \sin 5\phi = \cos^5 \phi + 5i \cos^4 \phi \sin \phi - 10 \cos^3 \phi \sin^2 \phi - 10i \cos^2 \phi \sin^3 \phi + 5 \cos \phi \sin^4 \phi + i \sin^5 \phi$$

chunki  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ ,  $i^5 = i$ . Mos ravishda haqiqiy va mavhum qismlarini tenglashtirib,

$$\cos 5\phi = \cos^5 \phi - 10 \cos^3 \phi \sin^2 \phi + 5 \cos \phi \sin^4 \phi, \sin 5\phi = 5 \cos^4 \phi \sin \phi - 10 \cos^2 \phi \sin^3 \phi + \sin^5 \phi$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bulardan

$$tg5\phi = \frac{5\cos^4\phi\sin\phi - 10\cos^2\phi\sin^2\phi + \sin^5\phi}{\cos^5\phi - 10\cos^3\phi\sin^2\phi + 5\cos\phi\sin^4\phi} = \frac{5tg\phi - 10tg^3\phi + tg^5\phi}{1 - 10tg^2\phi + 5tg^4\phi}.$$

Bu yerda biz kasrning surat va maxrajini  $\cos^5\phi$  ga bo'ldik.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Hisoblang: a)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ; b)  $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$ ;  
c)  $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$ ; d)  $\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; e)  $z = (tg1 - i)^4$ ;  
f)  $(tg2 - i)^4$ ; g)  $\left(\sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$ .
2. Isbotlang:  $\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n = \frac{1+itgan}{1-itgan}$ .
3. Agar  $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$  bo'lsa,  $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\alpha$  bo'lishini isbotlang.
4.  $(1 + \omega)^n$  ifodani soddalashtiring, bu yerda  $\omega = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$ .
5. Ildizning qiymatlarini trigonometrik shaklda yozing:  
a)  $\sqrt[6]{i}$ ; b)  $\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})}$ ; c)  $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1 - i)}$ .
6. Ildizning qiymatlarini algebraik shaklda yozing:  
a)  $\sqrt[3]{1}$ ; b)  $\sqrt[4]{1}$ ; c)  $\sqrt[6]{1}$ ; d)  $\sqrt[3]{i}$ ; e)  $\sqrt[4]{-4}$ ; f)  $\sqrt[6]{64}$ ; g)  $\sqrt[8]{16}$ ;  
h)  $\sqrt[6]{-27}$ ; i)  $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$ ; j)  $\sqrt[4]{-72(1 - i\sqrt{3})}$ ; k)  $\sqrt[3]{1+i}$ ; l)  $\sqrt[3]{2-2i}$ ;  
m)  $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$ ; n)  $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$ ; o)  $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$ ; p)  $\sqrt[4]{\frac{-32}{9(1-i\sqrt{3})}}$ .
7. Tenglamani yeching: a)  $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$ ; b)  $z^6 + 64 = 0$ .
8.  $\sqrt{5+12i}$  va  $\sqrt{5-12i}$  sonlarning haqiqiy qismlari manfiy bo'lgan holda  $z = \frac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}$  sonning algebraik shaklini yozing.
9.  $z^{10} - z^5 - 992 = 0$  tenglamaning haqiqiy qismlari manfiy bo'lgan yechimlarini toping.

## V BOB. VEKTORLAR

### 5.1-§. Vektorlar. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar. Vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari

Matematika, fizika, texnika, radiotexnika va shunga o'xshash fanlarda ikki xil miqdorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bu miqdorlarning biri o'zining son qiymatlari bilan to'la aniqlanadi. Masalan, yuza, hajm, temperatura, zichlik kabi miqdorlar. Bunday miqdorlar skalyar miqdorlar deyiladi. Ikkinchi bir miqdorlar o'zining son qiymatidan tashkari to'la aniqlanishi uchun yo'nalishlari ham berilgan bo'lishi kerak. Misol uchun, kuch, tezlik, tezlanish kabi miqdorlar.

**5.1.1-ta'rif.** O'zining son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan miqdorlar vektorlar deyiladi.

Bu ta'rifdan geometriyadagi yo'nalgan kesma ham vektor ekanligi kelib chiqadi. Shu tufayli biz vektorni yo'nalgan kesma sifatida o'rganamiz. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, yo'nalgan kesma uchun o'rinli bo'lgan barcha xossalari va bajariladigan amallar vektorlar uchun ham o'rinli ekan. Shuning uchun biz vektorni aniq ma'nosiga e'tibor bermasdan yo'nalgan kesma sifatida o'rganamiz. Bundan keyin vektor deganda yo'nalgan kesmani tushunamiz. Endi vektorlarga tegishli asosiy tushunchalar bilan tanishamiz. Vektorlar  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  kabi harflarni ustiga chiziq quyib belgilanadi (bosmada  $\vec{a}$  quyruq rangda). Agar vektor yo'nalgan kesma bilan tasvirlangan bo'lib  $A$  uning boshi,  $B$  uning keyingi uchi bo'lsa  $\overline{AB}$  simvol bilan belgilanadi. Vektorning boshidan oxirigacha bo'lgan masofa vektorning uzunligi (yoki moduli) deyiladi va  $|\vec{a}|$ ,  $|\overline{AB}|$  ko'rinishda belgilanadi.

**5.1.2-ta'rif.** Vektorlar bir-biriga parallel yoki bir to'g'ri chiziqda yotsa bunday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.

Ikki  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektor teng deyiladi, agar: 1)  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 2) kollinear, 3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa. M:  $\vec{AB} = \vec{AB}$ , chunki uchala shart bajariladi. Vektorlarning tengligi ta'rifidan parallel vektorlarning boshini bir nuqtadan boshqa nuqtaga ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi. Boshlang'ich nuqtasini tekislikning yoki fazoning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirish mumkin bo'lgan vektorlar ozod vektorlar deyiladi.

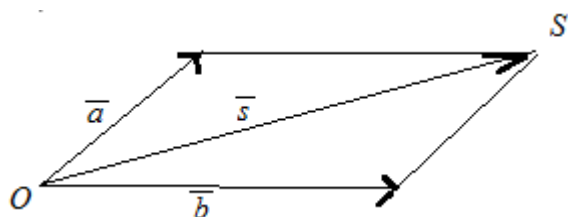
**5.1.3-ta'rif.** Uch vektor *komplanar* deyiladi, agar uchala vektor bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa. Uzunligi, birga teng vektorga

birlik vektor deyiladi va  $\overline{a_0}$  ko'rinishda belgilanadi, ya'ni  $|\overline{a_0}| = 1$ .

Uzunligi (moduli) nolga teng vektorga nol vektor deyiladi, ya'ni  $|\overline{0}| = 0$ , nol vektorni yo'nalishi aniqlanmagan bo'ladi.

## 5.2-§. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda ularni qo'shish, ayirish va biror o'zgarma  $\lambda$  songa ko'paytirish tushuniladi.  $\overline{a}$  va  $\overline{b}$  ozod vektorlar berilgan bo'lsin.



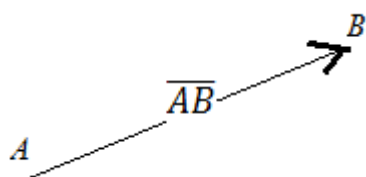
**5.2.1-ta'rif:** Ikki  $\overline{a}, \overline{b}$  vektorlar yig'indisi deb  $\overline{a}$  va  $\overline{b}$  qo'shiluvchi vektorlardan yasalgan parallelogramning umumiy uchi  $O$  dan chiqqan  $\overline{s} = \overline{OS}$  diagonalidan

iborat  $s$  vektorga aytiladi va  $\overline{s} = \overline{a} + \overline{b}$  ko'rinishda yoziladi.

$\overline{OB} = \overline{AS}$  bo'lganidan  $\overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OS}$ . Bu tenglik vektorlarni qo'shishda uchburchak qoidasidan foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

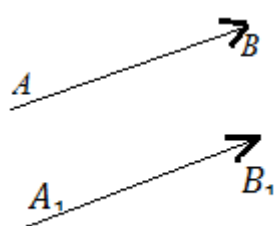
**Uchburchaklar qoidasi:** ikki  $\overline{a}, \overline{b}$  vektorlarni qo'shish uchun  $\overline{a}$  vektorning oxiriga  $\overline{b}$  vektorni boshlang'ich nuqtasini qo'yib  $\overline{a}$  vektorni boshini  $\overline{b}$  vektorning oxiri bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan  $\overline{OS} = \overline{c}$  vektor  $\overline{a} + \overline{b}$  ga teng. Vektorlarni qo'shish o'rin almashtirish va gruppash qonuniga bo'ysinadi:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}; \quad (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$$



Vektorlarni qo'shishda vektorlar soni ikkitadan ziyod bo'lsa, ularni qo'shishning quyidagi ko'pburchaklar qoidasi mavjud:

Bir necha vektorni qo'shish uchun qo'shiluvchi birinchi vektorning oxirgi uchiga qo'shiluvchi ikkinchi vektorning boshlang'ich uchini keltiramiz, yasalgan qo'shiluvchi ikkinchi vektorning oxirgi uchiga uchinchi vektorni qo'yamiz va h.k. Hosil bo'lgan siniq chiziqning boshlang'ich nuqtasi bilan oxirgi nuqtasini tutashtiruvchi vektor (yopuvchi vektor), berilgan hamma vektorlarning yig'indisi bo'ladi.



Vektorlar algebrasida ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal deb qaraladi.

**5.2.2-ta’rif.**  $\vec{a}$  vektordan  $\vec{b}$  vektorni ayirmasi deb shundan  $\vec{c}_1$  vektorga aytiladiki, uni  $\vec{b}$  vektorga qo’shganda  $\vec{a}$  vektor, hosil bo’ladi,  $\vec{c}_1 + \vec{b} = \vec{a}$  yoki  $\vec{c}_1 = \vec{a} - \vec{b}$ . Bundan ko’rinadiki  $\vec{a} - \vec{b}$  vektor  $\overline{BA}$  vektordir. Demak  $\vec{a}$  vektordan  $\vec{b}$  vektorni ayirmasi  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar ko’rilgan parallelogramning O uchidan chiqmagan diagonalidan iborat  $\overline{BA}$  vektordir.

$a$  vektor  $Ox$ ,  $Oy$  va  $Oz$  o’qlari bilan tashkil qilgan burchaklarni mos ravishda  $\alpha$ ,  $\beta$  va  $\gamma$  lar bilan belgilaymiz.

$\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  va  $\cos \gamma$  sonlar  $a$  vektorning yo’naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Ko’rinib turibdiki,

$$x = |a| \cos \alpha, y = |a| \cdot \cos \beta, z = |a| \cdot \cos \gamma.$$

To’g’ri burchakli parallelopiped diagonalining kvadrati uning tomonlari kvadratlarining yig’indisiga teng bo’lganligi uchun  $OA = x$ ,  $OB = y$ ,  $OC = z$  tengliklardan  $a$  vektorning uzunligi uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

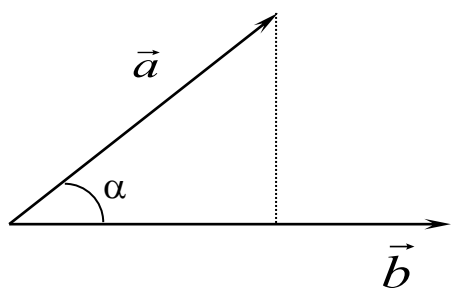
$a$  vektor yo’naltiruvchi kosinuslarining shu vektorning koordinatalari orqali ifodalaridan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma \\ &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

### 5.3-§. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi

**5.3.1-ta’rif.**  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning skalyar ko’paytmasi deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo’lgan ko’paytmasiga aytamiz, ya’ni

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$



5-rasm.

Vektorning proyeksiyasini ta'rifiga ko'ra,  $|\vec{a}| \cdot \cos \alpha$  (bu yerda  $\alpha = (\vec{a}, \vec{B})$ )  $\vec{a}$  vektorning  $\vec{B}$  vektordagi proyeksiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a} \circ \vec{B} = |\vec{B}| \cdot \text{pp}_{\vec{B}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \text{pp}_{\vec{a}} \vec{B}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (5-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

$$1^0. \vec{a} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{a},$$

$$2^0. \vec{a} \circ (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{a} \circ \vec{B} + \vec{a} \circ \vec{C},$$

$$3^0. (\lambda \vec{a}) \circ (\mu \vec{B}) = (\lambda \mu) \cdot (\vec{a} \circ \vec{B}), \quad (\lambda, \mu - \text{ixtiyoriy sonlar})$$

$$4^0. \vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

5<sup>0</sup>.  $\vec{a} \circ \vec{B} = 0$  bo'lishi uchun  $\vec{a}$  va  $\vec{B}$  lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va etarlidir.

1<sup>0</sup>-xossaning isboti.

$$\vec{a} \circ \vec{B} = |\vec{a}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha = |\vec{B}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = \vec{B} \circ \vec{a}$$

2<sup>0</sup>-, 3<sup>0</sup>- va 4<sup>0</sup>-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5<sup>0</sup>- xossaning isboti. Zarurligi.  $\vec{a} \circ \vec{B} = 0$  bo'lsin. U holda,  $0 = \vec{a} \circ \vec{B} = |\vec{a}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$  dan  $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{B}| \neq 0$  bo'lgani uchun  $\cos \alpha = 0$ , o'z navbatida bundan  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ya'ni  $\vec{a} \perp \vec{B}$  ekanligi kelib chiqadi.

Etarligi. Agar  $\alpha = (\vec{a}, \vec{B}) = \frac{\pi}{2}$  bo'lsa, u holda  $\cos \alpha = 0$ , shu sababli  $\vec{a} \circ \vec{B} = |\vec{a}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$  bo'ladi.

5<sup>0</sup>-xossa vektorlarning perpendikulyarlik sharti deb ataladi.

4<sup>0</sup>- va 5<sup>0</sup>-xossalarga asosan

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1, \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0.$$

Endi agar  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{B} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \circ (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\ &= x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 \vec{i} \circ \vec{j} + \\ &+ x_1 z_2 \vec{i} \circ \vec{k} + y_1 x_2 \vec{j} \circ \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 \vec{j} \circ \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \circ \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \circ \vec{j} \\ &+ \\ &+ z_1 z_2 \vec{k}^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

Xususan, agar  $\vec{a} = \vec{B}$  bo'lsa,

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

yoki

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib, fazoning ixtiyoriy  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalari orasidagi masofa  $d_{AB}$  ni quyidagicha topsa bo'ladi:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1-misol.  $(1,1,1)$  va  $(1,2,3)$  vektorlarning uzunligini toping.

*Yechish.*

$$|(1,1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |(1,2,3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2-misol.  $\vec{a} = (1,0,1)$  va  $\vec{B} = (1,2,2)$  vektorlar orasidagi burchakni toping.

*Yechish.* Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \\ \vec{a} \circ \vec{B} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3.$$

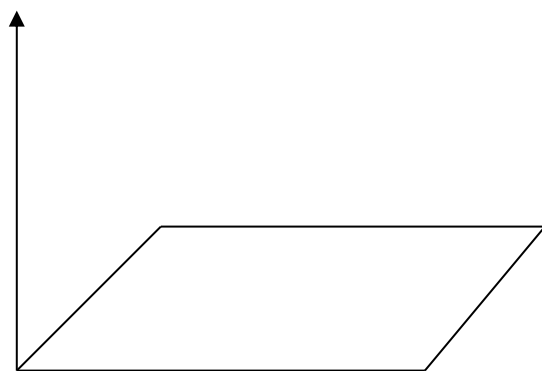
Demak,

$$\cos \alpha = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

#### 5.4-§. Vektorlarning vektor ko'paytmasi va aralash ko'paytmasi

Ikki  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorni bir-biriga skalyar ko'paytirish natijasida son (skalyar) hosil bo'lishini biz ko'rdik. Endi  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorning bir-biriga ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lishi mumkinligini ko'rib chiqamiz.

Ikki  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorning vektorial ko'paytmasi deb shunday  $\vec{c}$  vektorga aytiladiki, bu vektor  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlarga perpendikulyar bo'lib, uning moduli  $\vec{a}, \vec{b}$  vektorlardan yasalgan parallelogramm yuziga teng,  $\vec{c}$  vektorning  $C$  uchidan qaraganda  $\vec{c}$  vektor atrofida  $\vec{a}$  vektordan  $\vec{b}$  vektorga eng kichik burchak bilan aylanishi soat strelkasiga teskari bo'lishi kerak.



$\bar{a}$  vektor bilan  $\bar{b}$  vektorning vektorial ko'paytmasi  $\bar{a} \times \bar{b}$  yoki  $[\bar{a}\bar{b}]$  shaklda yoziladi va  $\bar{a}$  bilan  $\bar{b}$  vektorning vektorial ko'paytmasi deb o'qiladi. Ta'rifga ko'ra bu ko'paytma

$$\bar{c} = [\bar{a}\bar{b}]$$

Bu vektorning uzunligi  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlardan yasalgan parallelogramning yuziga teng, ya'ni

$$|\bar{c}| = |[\bar{a}\bar{b}]| = ab \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}).$$

Bundan  $\bar{a} \wedge \bar{b} < \pi$

Bu tenglikdan  $\bar{a}$  vektor bilan  $\bar{b}$  vektor kolleniar bo'lganida yoki bu vektorlarning kamida bittasi nol vektor bo'lgan holdagina  $\bar{a}, \bar{b}$  ning vektorial ko'paytmasi nolga teng bo'lishi lozim. Haqiqatan, agar  $\bar{a} \parallel \bar{b}$  bo'lsa  $\bar{a} \wedge \bar{b} = 0$  va  $\sin(a \wedge b) = 0$ , bu holda

$$c = ab \sin 0^\circ = ab \cdot 0 = 0$$

Agar  $\bar{a} = 0$  yoki  $\bar{b} = 0$  bo'lsa, aytilgan xossa ravshan. Aksincha, agar

$$c = ab \sin(a \wedge b) = 0$$

bo'lsa, bundan yo

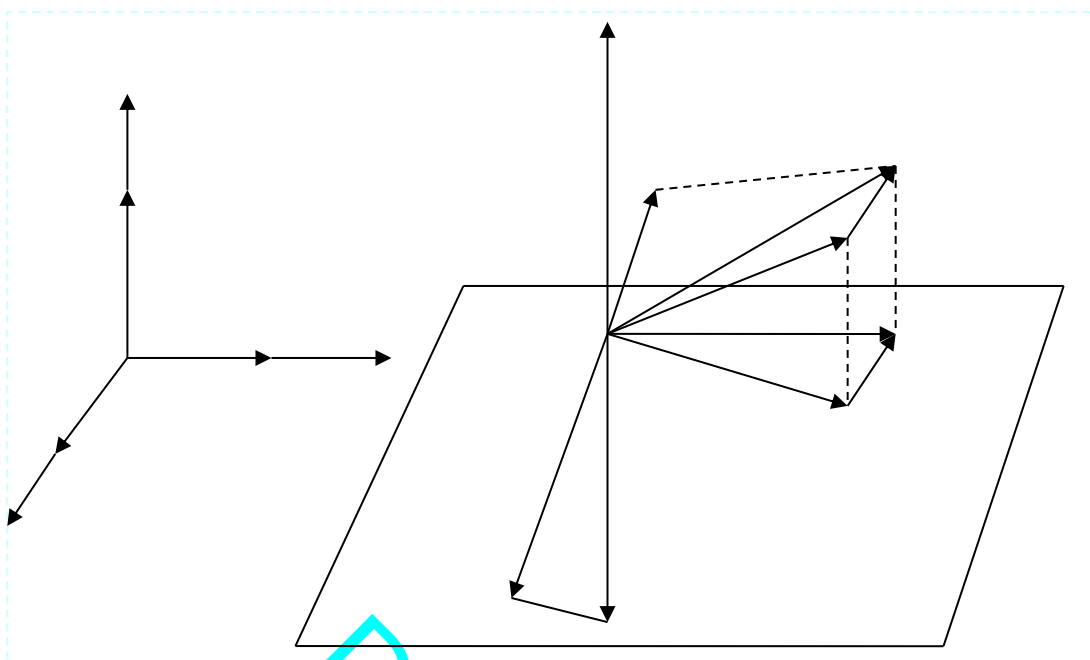
$$\sin(a \wedge b) = 0; \bar{a} \parallel \bar{b}$$

yo  $\bar{a} = 0$  yoki  $\bar{b} = 0$  bo'lishi chiqadi.

Agar  $\bar{a}$  vektor bilan  $\bar{b}$  vektor o'zaro perpendikulyar bo'lsa, u holda ular vektor ko'paytmasining son qiymatlari ko'paytmasiga teng chunki bu holda  $\sin(a, b) = 1$  bo'ladi.

Hususiyl holda

$$[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}, [\bar{j}\bar{k}] = \bar{i}, [\bar{k}\bar{i}] = \bar{j}.$$



Vektorial ko'paytma quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

1. Vektorial ko'paytmadagi ko'paytuvchilar o'rnini almashtirsa, vektorial ko'paytma  $(-1)$  ga ko'payadi;

$$[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$$

Haqiqatan, agar  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  vektorial bir-biriga kollinear bo'lsa,  $[\bar{a}\bar{b}] = 0$ ,  $[\bar{b}\bar{a}] = 0$ , bu holda  $[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$ .

Endi  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  vektorial bir-biriga kollinear emas deb faraz qilaylik. Bu holda ikki vektorning vektorial ko'paytmasi ta'rifiga ko'ra  $[\bar{a}\bar{b}]$  hamda  $[\bar{b}\bar{a}]$  vektorlarning son qiymati  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng bo'lgani uchun bir xil; ikki vektorning vektorial ko'paytmasini tasvirllovchi vektorial yo'nalishini aniqlash shartiga ko'ra  $[\bar{a}\bar{b}]$  va  $[\bar{b}\bar{a}]$  vektorlar bir-biriga qarama-qarshi yo'nalgan. Demak,

$$[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}].$$

2. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan vektorial ko'paytma qonuniga bo'ysinadi, ya'ni

$$[\bar{a}\lambda, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = \lambda[\bar{a}\bar{b}]$$

Haqiqatan  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektroni  $\lambda$  ga ko'paytirish  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlardan yasalgan parallelogrammning  $\bar{a}$  yoki  $\bar{b}$  tomonini  $\lambda$  marta "cho'zish" demakdir. Bu esa parallelogramm yuzining  $\lambda$  marta "kattalashganini" bildiradi.

3.  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  vektorlar yig'indisi bilan  $\bar{c}$  vektorning vektorial ko'paytmasi taqsimot qonuniga bo'ysunadi, ya'ni

$$[(\bar{a} + \bar{b})\bar{c}] = [\bar{a}\bar{b}] + [\bar{b}\bar{c}]$$

Haqiqatan ham  $\bar{c}$  nol vektorial bo'lsa, bu tenglikning bajarilishi ravshan. Shuning uchun  $\bar{c} \neq 0$  deb faraz qilamiz. Bu holda  $\bar{c} = c \times \bar{c}^\circ$  deb yozish mumkin.

$\bar{a}, \bar{b}$  va  $\bar{c}^\circ$  vektorlarning umumiy  $O$  nuqtaga keltiramiz hamda  $\bar{c}^\circ$  vektorga perpendikulyar  $q$  tekislik o'tkazamiz.  $\bar{a}, \bar{b}$  vektorlardan parallelogramm chizib,  $\bar{a} + \bar{b}$  yig'indi vektorni topamiz.

Endi  $\bar{a}$  hamda  $\bar{a} + \bar{b} = \vec{Od}$  vektorlarning  $q$  tekislikka proyeksiyalarini olamiz.

$$\Pi P_q \bar{a} = Oa_1, \Pi P_q (\bar{a} + \bar{b}) = \vec{Od}_1$$

$\vec{Oa}_1$  va  $\vec{Od}_1$  vektorlarni  $O$  nuqta atrofida soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha  $90^\circ$  buramiz. Natijada  $\vec{Oa}_1$  vektorial  $q$  tekislikdagi  $\vec{Oa}_2$  vektorning  $\vec{Od}_1$  vektorni umumiy  $O$  nuqtaga keltiramiz hamda  $c^\circ$  vektorga perpendikulyar  $q$  tekislik o'tkazamiz.  $\bar{a}, \bar{b}$  vektorlardan parallelogramm chizib,  $\bar{a} + \bar{b}$  yig'indi vektorni topamiz.

Endi  $\bar{a}$  hamda  $\bar{a} + \bar{b} = \vec{Od}$  vektorlarning  $q$  tekislikka proyeksiyalarini olamiz.

$$\Pi P_q \bar{a} = Oa_1, \Pi P_q (\bar{a} + \bar{b}) = Od_1,$$

$\vec{Oa}_1$  va  $\vec{Od}_1$  vektorlarni  $O$  nuqta atrofida soat strelkasi yo'nalishi bo'yicha  $90^\circ$  buramiz. Natijada  $\vec{Oa}_1$  vektorial  $q$  tekislikdagi  $\vec{Oa}_2$  vektorning,  $\vec{Od}_1$  vektorial esa  $\vec{Od}_2$  vektorning vaziyatini olib ularning uzunliklari o'zaro teng bo'ladi.

$$Oa_2 = Oa_1, Od_2 = Od_1$$

Agar  $\vec{Oa}$  bilan  $\bar{c}^\circ$  orasidagi burchakni  $\phi$  bilan belgilasak,

$$Oa_2 = Oa_1 = Oa \cos(90^\circ - \phi) = Oa \sin \phi = [ac^\circ]$$

chunki  $Oa_2$  vektorial  $[\bar{a}\bar{c}^\circ]$  vektorial ko'paytma ta'rifining shartlarining qanoatlantiradi; uch perpendikulyar haqidagi teorema asosan:

$$\angle a_2 Oc^\circ = \angle a_2 Oa = \frac{\pi}{2}$$

shuning uchun  $\vec{Oa}_2$  vektorial  $\vec{Oa}, \vec{Oc}^\circ$  vektorlar tekisligiga perpendikulyar va  $a_2$  dan qaraganda  $\bar{a}$  dan  $\bar{c}^\circ$  ga eng kichik burchak

bilan burulish soat strelkasiga teskari yo'nalishda bo'ladi. Shunday qilib  $\vec{Oa_2} = [\vec{a}\vec{c}^\circ]$ . Shunga o'xshash

$$\vec{Od_2} = [\vec{d}\vec{c}^\circ] = [(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}^\circ] \vec{a_2} \vec{d_2} = [\vec{a}\vec{d}\vec{c}^\circ] = [\vec{b}\vec{c}^\circ]$$

Ammo shakldan

$$\vec{Od_2} = \vec{Oa_2} + \vec{ad_2}$$

ekanini ko'ramiz, ya'ni

$$[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}^\circ] = [\vec{a}\vec{c}^\circ] + [\vec{b}\vec{c}^\circ]$$

bu tenglikning ikkala tomonini c skalyarga ko'paytiramiz:

$$[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{c}^\circ] = [\vec{a}\vec{c}\vec{c}^\circ] + [\vec{b}\vec{c}\vec{c}^\circ]$$

$$[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$$

taqsimot qonunining to'g'ri ekanini isbot bo'ldi. Shunga o'xshash

$$[\vec{c}(\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{c}\vec{a}] + [\vec{c}\vec{b}]$$

ekanini isbot qilish qiyin emas.

Faraz qilaylik, kishi oyog'i bilan yuqoriga aytilgan parallelogramm tekisligi ustida tikka turgan holda uning boshi haligi  $\vec{c}$  vektor tomonidan bo'lsin. Bu holda  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlar orasidagi burchakning bissektrisasi qaralsa,  $\vec{a}$  vektor uning o'ng tomonida va  $\vec{b}$  vektor chap tomonida bo'ladi yoki  $\vec{a}$  yo'nalishdan  $\vec{b}$  yo'nalishiga qarab (eng qisqa yo'l bilan) aylantirilsa, bu harakat soat strelkasining yurish harakatiga teskari bo'lib ko'rinadi. Bunday sistema o'ng sistema deyiladi.

1-misol.  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  o'zaro perpendikulyar.  $|a| = 3$ ;  $|b| = 4$ ;  $|[(a+b)(a-b)]| = ?$

*Yechish.*  $|[(a+b)(a-b)]| = |a+b||a-b| \sin((a+b)^\wedge(a-b))$

$$\begin{cases} |a+b| = x^2 \\ |a-b| = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = x^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 + 16 = x^2 \\ 9 + 16 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = 5 \\ |x| = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a+b| = 5 \\ |a-b| = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = ab \\ S = \frac{d^2}{2} \sin \phi \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{d^2}{2} \sin \phi \Rightarrow 12 = \frac{25}{2} \sin \phi \sin \phi = \frac{24}{25}$$

$$\begin{aligned} |[(a+b)(a-b)]| &= |a+b||a-b| \sin((a+b)^\wedge(a-b)) \\ &= 25 \cdot \frac{24}{25} = 24 \end{aligned}$$

2-misol.  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vector  $\phi = \frac{2}{3}\pi$  burchakni hosil qiladi.  $|a| = 1$ ;  $|b| = 2$ ;  $[ab]^2 = ?$

*Yechish.*  $[ab]^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 \phi = 1 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

3-misol.  $a = \{3, -1, -2\}$ ;  $b = \{20, 4, 28\}$ ;  $[(2a - b)(2a + b)] = ?$

*Yechish.*  $\begin{cases} 2a - b = c \\ 2a + b = d \end{cases} \bar{c} = 2(3, -1, -2) - (20, 4, 28) = \{5, -4, -3\}$

$\bar{d} = 2(3, -1, -2) + (20, 4, 28) = \{7, 0, -5\}$

$[cd] = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = \{20, 4, 28\}$

$[(2a - b)(2a + b)] = [cd] = \{20, 4, 28\}$

4-misol.  $A = (2, -1, 2)$ ;  $B(1, 2, -1)$ ;  $C(3, 2, 1)$ ;  $[\overline{AB} \cdot \overline{BC}] = ?$

*Yechish.*  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = d$ ,  $[\overline{AB} \cdot \overline{BC}] = [cd] = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \{6, -4, -6\}$

$c = \{-1, 3, -3\}$

$d = \{2, 0, 2\}$ .

5-misol.  $\bar{P} = \{3, 2, -4\}$ ;  $\bar{Q} = \{2, -1, 1\}$  vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

$[PQ] = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (2, 11, 7)$

Ixtiyoriy  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  vektorlar berilgan bo'lsin. Agar  $\bar{a}$  vektorni  $\bar{b}$  vektorga vektorial ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan  $[\bar{a}\bar{b}]$  vektor  $\bar{c}$  vektorga skalyar ko'paytirilsa,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlarning *aralash ko'paytmasi* deb atalgan  $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$  son hosil bo'ladi.

$[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$  aralash ko'paytma, agar berilgan  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  uchlik o'ng bo'lsa, musbat ishora bilan, aks holda, manfiy ishora bilan, boshlari umumiy nuqtaga keltirilgan  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng. Ko'rinib turibdiki, agar  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng. Osongina ko'rinib turibdiki,  $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = \bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$ , chunki har ikki son kattaligi bo'yicha bir xil parallelepipedning hajmiga teng va ikkala uchlik bir xil yo'nalishli, ya'ni ikkalasi ham o'ng, yoki chap bo'lsa.

Shuning uchun  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlarning aralash ko'paytmasi aynan qaysi ikkita vektor vektorial ko'paytirilayotganligi (birinchi ikkitasi yoki oxirgi ikkitasi) ko'rsatilmadan oddiy  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  ko'rinishda yoziladi.

Uchta vektor komplanarligining yetarli va zaruriy sharti ularning aralash ko'paytmasi nolga tengligidir.

Agar  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlar o'zlarining to'g'ri burchakli dekart koordinatalari  $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ ,  $\bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$  bilan aniqlangan bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  satrlari mos ravishda ko'paytirilayotgan vektorlarning koordinatalari (komponentalari) dan iborat determinantga teng, ya'ni

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Haqiqatan,  $[\bar{a}\bar{b}] = \{y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; z_1y_2 - z_2y_1\}$  va  $\bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$  ekanligidan  $[\bar{a}\bar{b}]$  va  $\bar{c}$  vektorlarning  $[\bar{a}\bar{b}]\bar{c}$  skalyar ko'paytmasi

$$[\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$
  

$$= x_3(y_1z_2 - y_2z_1) + y_3(z_1x_2 - z_2x_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$$
 ga teng. Demak,  $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ ,  $\bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$  vektorlarning komplanarligining yetarli va zaruriy sharti quyidagicha:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Agar  $\bar{b}$  vektorni  $\bar{c}$  vektorga vektorial ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan vektor  $\bar{a}$  vektorga yana vektorial ko'paytirilsa, hosil bo'lgan  $[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]]$  vektor *ikki karrali vektorial* ko'paytma deyiladi. Ixtiyoriy  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlar uchun quyidagi formula o'rinli:

$$[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

Bu formulani isbot qilish uchun to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha tanlab olamiz: bu vektorlar boshlarini umumiy nuqtaga – koordinatalar boshi O ga keltirilganda Oz o'q  $\bar{c}$  vektor bo'ylab yo'nalgan, Oy o'q esa  $\bar{b}$  va  $\bar{c}$  vektorlar bilan aniqlangan tekislikda joylashgan bo'lsin. U holda, ko'rinib turibdiki,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  quyidagi koordinatalarga ega bo'ladi:  $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{0; y_2; z_2\}$ ,  $\bar{c} = \{0; 0; z_3\}$ .  $[\bar{b}\bar{c}] = \{y_2z_3; 0; 0\}$  va xuddi shu formuladan  $[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] = \{0; z_1y_2z_3; -y_1y_2z_3\}$  tenglikka ega bo'lamiz. Boshqa tarafdin, ko'rinib turibdiki,  $\bar{a}\bar{c} = z_1z_3$ ,  $\bar{a}\bar{b} = y_1y_2 + z_1z_2$ , shuning uchun  $\bar{b}(\bar{a}\bar{c}) = \{0; y_2z_1z_3; z_2z_1z_3\}$ ,  $\bar{c}(\bar{a}\bar{b}) =$

$\{0; 0; y_1 y_2 z_3 + z_1 z_2 z_3\}$ . Bu tengliklarni solishtirib,  $[\bar{a} [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{b} (\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b})$  tenglikni osongina hosil qilamiz.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1.  $ABCD$  parallelogrammning ikki qo'shni tomoni  $\overline{AB} = a$  va  $\overline{AD} = b$ . Diagonallarning kesishish nuqtasi  $M$  bilan belgilangan.  $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$  vektorlar  $a$  va  $b$  vektorlar bilan ifodalansin.
2.  $a$  va  $b$  vektorlarga yasalgan parallelogrammdan foydalanib, quyidagi ayniyatlarning to'g'riligi chizmada tekshirilsin:
  - a.  $(a + b) + (a - b) = 2a$
  - b.  $(a + b) - (a - b) = 2b$
  - c.  $a + (b - a) = b$
  - d.  $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$
  - e.  $\frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$
  - f.  $\left(a + \frac{b}{2}\right) - \left(b + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}(a - b)$
  - g.  $\left(a + \frac{b}{2}\right) + \left(b + \frac{a}{2}\right) = \frac{3}{2}(a + b)$
3. Bir necha vektorning bitta o'qdagi proyeksiyalari ma'lum:  $pr. a = 5$ ,  $pr. b = -3$ ,  $pr. c = -8$ ,  $pr. d = 6$ . Bu vektorlar yopiq siniq chiziqlik tuzadi degan xulosa chiqarish mumkinmi?
4. Skalyarlar uchun to'g'ri bo'lgan quyidagi ayniyat
 
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
 nega vektorlar uchun noto'g'riligini tushuntirib bering.
5.  $|a| = 2$ ,  $|b| = 5$  va  $(\widehat{ab}) = \frac{2\pi}{3}$  ma'lum bo'lsa,  $\alpha$  ning qanday qiymatlarida  $p = \alpha a + 17b$  va  $q = 3a - b$  vektorlarning bir biriga perpendikulyar bo'lishi aniqlansin.
6. Ushbu skalyar  $\alpha = [ab]^2 + (ab)^2$  hisoblansin.
7. Ikkitasi kollinear bo'lgan uch vektorning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi isbotlansin.
8. Uchta komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga tengligi algebratik yo'l bilan isbotlansin.
9. Ushbu tenglikning to'g'riligini tekshirib ko'rilsin:
 
$$[[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0.$$
10. Agar  $A \perp B$  va  $A \perp C$  bo'lsa,  $[A[BC]] = 0$  bo'lishi isbotlansin.

## VI BOB. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQLAR

### 6.1-§. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari

Tekislikda chiziq berilgan bo'lishi uchun uning nuqtalari holatini aniqlab beruvchi biror qoida maolom bo'lishi kerak. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida chiziqning tenglamasi

$$F(x, y) = 0 \quad (6.1)$$

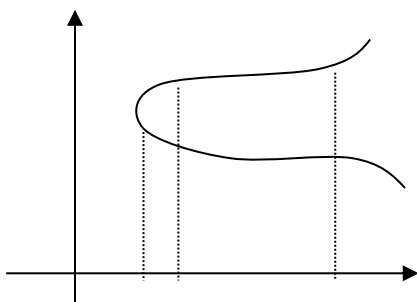
yoki

$$y = f(x), a \leq x \leq b \quad (6.2)$$

ko'rinishda bo'ladi. (6.2) funktsiya  $x$  argument  $[a, b]$  kesmada o'zgarganda  $f(x)$  funktsiya uzluksiz o'zgaradi deb, faraz qilamiz. Ko'pincha  $f(x)$  funktsiyani bir qiymatli funktsiya deb,  $x$  va  $y$  larni esa, dekart koordinatalar tekisligidagi biror  $M$  nuqta koordinatalari deb faraz qilinadi. U holda  $x$  ning har bir qiymati uchun (6.2) tenglamadan u ning yagona qiymati aniqlanadi.

Demak,  $x$  ning har bir qiymatiga tekislikning (koordinatalari  $x, f(x)$  bo'lgan) bir dona nuqtasi mos keladi. Agar  $x$  uzluksiz o'zgarib, turli qiymatlar qabul qilsa, u holda  $M$  nuqta koordinatalar tekisligida biror nuqtalar to'plamini tasvirlaydi. Bu nuqtalar to'plami esa, biror chiziqni ifodalaydi. Agar  $f(x)$  funktsiya ko'p qiymatli bo'lsa, yaoni  $x$  ning har bir qiymatiga koordinatalar tekisligida  $M_1, M_2, \dots, M_s$  nuqtalar mos keladi.

Masalan,  $y = f(x)$  funktsiya ikki qiymatli bo'lsin. Bu holda  $x$  ning har bir  $x_1$  qiymatiga  $y$  ning  $y_1 = f(x_1)$  va  $y_2 = f(x_2)$  qiymatlari mos kelib, koordinatalar tekisligida ikkita  $M_1(x_1, y_1)$  va  $M_2(x_2, y_2)$  nuqtalar aniqlanadi.  $x$  o'zgaruvchi  $[a, b]$  kesmada uzluksiz o'zgarganda,  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalar ham o'rinlarini uzluksiz o'zgartiradi va bu nuqtalar chiziqni tasvirlaydi.



**6.1.1-ta'rif.** Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining  $x$  va  $y$  koordinatalari (6.1) tenglamani qanoatlantirsa, va aksincha, bu tenglamani qanoatlantiradigan har bir juft  $(x, y)$  qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, (6.1) tenglama *chiziqning oshkormas tenglamasi* deyiladi.

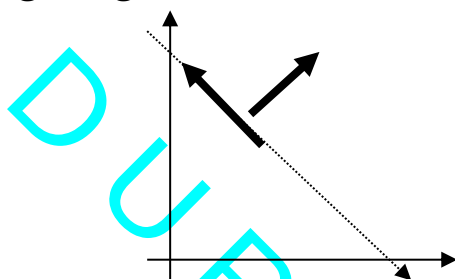
Analitik geometriyada asosan ikkita masala bilan shug'ullaniladi:

1)chiziq nuqtalarning geometrik o'rni sifatida berilgan bo'lib, uning tenglamasini tuzish talab qilinadi;

2)tenglama berilgan, uning grafisini yasash talab qilinadi.

Tekislikdagi chiziqlardan eng soddasi to'g'ri chiziq bo'lib, uning tenglamalari bilan tanishib chiqaylik.

Dekart koordinatalar tekisligida biror  $l$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Shuningdek  $l$  to'g'ri chiziqda yotuvchi  $M_1(x_1, y_1)$  nuqta va  $l$  to'g'ri chiziqqa perpendikular  $\vec{n} = \{A, B\}$  vektor yoki unga parallel -  $\vec{S} = \{m, n\}$  vektorlar berilgan bo'lsa,  $l$  to'g'ri chiziqning tekislikdagi turli ko'rinishdagi tenglamalarini keltirib chiqaramiz.



$Oxy$  tekislikda  $l$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Unda yotuvchi  $M_1(x_1, y_1)$  nuqta va  $l$  to'g'ri chiziqqa perpendikular  $\vec{n}$  ( $l \perp \vec{n}$ ) vektor olamiz.  $\vec{n}$  vektorni  $l$  to'g'ri chiziqning *normal vektori* deyiladi.

$M_1(x_1, y_1)$  nuqta va  $\vec{n}$  normal vektor  $l$  to'g'ri chiziqning  $Oxy$  tekislikdagi holatini to'la aniqlaydi.  $M(x, y)$  nuqta  $l$  to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bulsin, u holda  $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1\}$  vektor  $l$  to'g'ri chiziq ustida yotadi va  $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{n}$  bo'ladi. Shuning uchun  $\overrightarrow{M_1M}$  va  $\vec{n}$  vektorlarning skalyar ko'paytmasi 0 ga teng.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$$

yoki

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad (6.3)$$

(6.3) tenglama  $M_1$  nuqta orqali o'tib,  $\vec{n}$  vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini ifodalaydi.

$x$  va  $y$  koordinatalarga nisbatan istalgan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \quad (6.4)$$

ko'rinishdagi tenglama  $Oxy$  tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini ko'rsataylik.

Haqiqatan (6.3) tenglamada  $A$  yoki  $V$  koeffitsientlardan biri 0 dan farqli deb faraz qilamiz (aks holda  $A = V = 0$  bo'lib,  $S = 0$  bo'lib qoladi). Masalan,  $B \neq 0$  bo'lsin. U holda (6.4) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:  $A(x - 0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0$ .

(6.2) tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama  $M_1\left(0; -\frac{C}{B}\right)$  nuqtadan o'tuvchi va  $\vec{n}$  vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Demak, (6.4) tenglama to'g'ri chiziqning *umumiy tenglamasi* bo'ladi.

Bu to'g'ri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvini tekshiraylik.

a) agar  $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$  bo'lganda, to'g'ri chiziq tenglamasi  $Ax + By = 0$  bo'lib, u koordinatalar boshidan o'tadi;

b)  $A = 0, C \neq 0, B \neq 0$  bo'lganda, tenglama  $By + C = 0$  bo'lib, to'g'ri chiziq  $Ox$  o'qiga parallel bo'ladi;

v)  $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$  bo'lganda, tenglama  $Ax + C = 0$  bo'lib, to'g'ri chiziq  $Oy$  o'qiga parallel bo'ladi;

g)  $B = 0, C = 0, A \neq 0$  bo'lganda, tenglama  $Ax = 0$  bo'lib,  $Oy$  o'qni ifodalaydi;

d)  $A = 0, C = 0, B \neq 0$  bo'lganda, tenglama  $By = 0$  bo'lib, to'g'ri chiziq  $Ox$  o'qni ifodalaydi.

**6.1.2-ta'rif.** To'g'ri chiziqqa parallel yoki shu to'g'ri chiziqda yotuvchi har qanday  $\vec{S} = \{m, n\}$  vektor bu to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.

Parametrik tenglama  $l$  to'g'ri chiziq va shu to'g'ri chiziqqa tegishli  $M_0(x_0, y_0)$  nuqta va yo'naltiruvchi  $\vec{S} = \{m, n\}$  vektor bilan to'la aniqlanadi. Bu berilganlarga ko'ra  $l$  to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaramiz.

$M_0$  nuqtadan boshqa  $l$  to'g'ri chiziqda ixtiyoriy  $M(x, y)$  nuqta olamiz. U holda  $\overrightarrow{M_0M}$  vektor  $\vec{S}$  vektor bilan kollinear bo'ladi. Demak, shunday  $t$  son topiladiki,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}, \quad (t \in R) \quad (6.5)$$

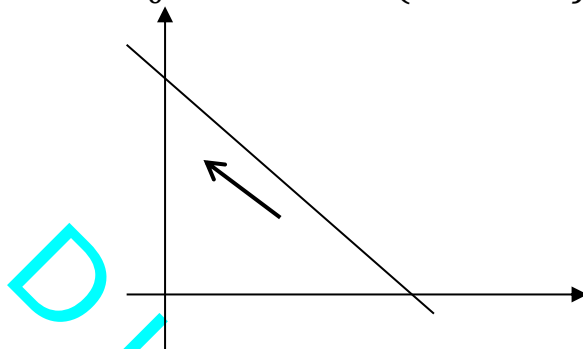
bo'ladi.  $M, M_0$  nuqtalarning radius vektorlarini mos ravishda  $\vec{r}, \vec{r}_0$  orqali belgilasak, ya'ni  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ , bo'lsa, u holda  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ . (6.5) tenglikdan

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}. \quad (6.6)$$

(6.6) tenglama  $l$  to'g'ri chiziqlarning *vektorli tenglamasi* deyiladi. (6.6) tenglamadagi  $t$  ga turli qiymatlar berib,  $l$  to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarning radius-vektorlarini topamiz. (6.6) tenglamadagi  $t$  o'zgaruvchi *parametr* deyiladi. Endi (6.6) ni koordinatalarda yozamiz:

$$\vec{r} = \vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j},$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = \vec{OM}_0 &= x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \\ \vec{M_0M} = t \vec{S} &= t(m \vec{i} + n \vec{j}) \end{aligned}$$



Bularni (6.6) ga qo'yib, so'ngra ikki vektorning tengligiga ko'ra ushbu tenglamalarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (6.7)$$

(6.7) tenglamani  $l$  to'g'ri chiziqlarning *parametrik tenglamasi* deyiladi. Agar  $l$  to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan birortasiga ham parallel bo'lmasa, (yaoni  $\vec{m}, \vec{n} \neq 0$  shart bajarilsa) u holda (6.7) dan ushbu

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{m} \\ t = \frac{y - y_0}{n} \end{cases}$$

yoki

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (6.8)$$

tenglamani hosil qilamiz. (6.8) tenglamani esa to'g'ri chiziqlarning *kanonik tenglamasi* deyiladi.

Bizga ma'lumki,  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalardan yagona to'g'ri chiziq o'tadi.  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalarning koordinatalari ma'lum deb faraz qilib, shu nuqtalar orqali o'tuvchi  $l$  to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik.

$M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  nuqtalar izlanayotgan  $l$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsin. Shuningdek bu to'g'ri chiziqda  $M(x, y)$  ixtiyoriy nuqtani olamiz. Natijada bu nuqtalar yordamida to'g'ri chiziqda o'zaro kollinear bo'lgan  $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$  va  $\vec{M_1M}$  vektorlarga ega

bo'lamiz. Bu vektorlar kollinear bo'lganligi uchun  $\overrightarrow{M_1M} = t \overrightarrow{M_1M_2}$  tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan vektorlarning tengligiga asosan

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \quad \text{va} \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1)$$

ga ega bo'lamiz. Oxiridan

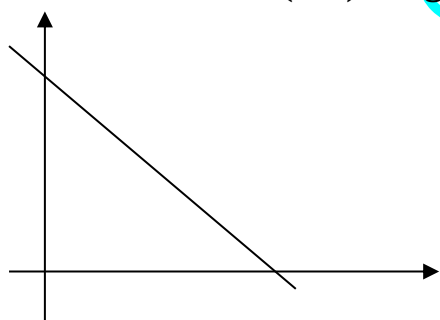
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \quad (6.9)$$

(6.9) tenglama berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini uchinchi tartibli determinant yordamida ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$l$  to'g'ri chiziqni aniqlovchi  $M_1$  va  $M_2$  nuqtalar koordinata o'qlari  $Ox$  va  $Oy$  da yotsin. Aniqrog'i  $M_1(a; 0)$   $Ox$  o'qda,  $M_2(0; b)$  esa  $Oy$  o'qda yotsin. Bu holda (6.9) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-0}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6.10)$$

(6.10) tenglama to'g'ri chiziqning *kesmalar bo'yicha tenglamasi* deyiladi.

**6.1.3-ta'rif.**  $\vec{S}$  vektor  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  bazisda

$m, n$  koordinatalarga ega bo'lib,  $m \neq 0$  bo'lsa,  $\frac{n}{m} = k$  son  $\vec{S}$  vektorning *burchak koeffitsienti* deyiladi.

Agar  $l$  to'g'ri chiziq  $Oy$  o'qiga parallel bo'lsa, u holda bunday to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi mavjud emas. Shuning uchun  $Oy$  o'qqa parallel bo'lgan  $l$  to'g'ri chiziq  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tsin va  $k$  burchak koeffitsientiga ega bo'lsin deb faraz qilamiz. (2.6) dan  $m \neq 0$  deb quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \Rightarrow y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \quad (\text{chunki } \frac{n}{m} = k)$$

yoki

$$y = kx + b \quad (6.11)$$

bunda

$$b = y_0 - kx_0$$

(6.11) ni to'g'ri chiziqlarning *burchak koeffitsientli tenglamasi* deyiladi.

Bundan tashqari to'g'ri chiziq tenglamalariga oid quyidagi ma'lumotlarni keltirib chiqaramiz:

1)  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  va  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$  formula bilan topiladi.

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$  parallellik sharti,  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  esa perpendikulyarlik sharti bo'ladi.

2) Uch nuqtaning bir to'g'ri chiziqda yotish sharti:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi.

3)  $\rho = \frac{p}{\cos(\phi - \alpha)}$  to'g'ri chiziqlarning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.

4) Nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa  $d = \rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  formula bilan topiladi.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi  $2x - 5y - 10 = 0$  berilgan. Uning parametrik tenglamalarini yozing.
2. To'g'ri chiziqlarning  $x = 2 - t, y = 3 + 2t$  parametrik tenglamasi bo'yicha uning umumiy tenglamasini yozing.
3.  $A(-3, 5)$  nuqtadan o'tib,  $\vec{p} = \{1, -2\}$  vektorga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
4. Koordinata o'qlaridan mos ravishda  $a = 2, b = -5$  kesmalarni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
5.  $A(7, -5)$  nuqtadan o'tib,  $Ox$  o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
6.  $N(-8, 1)$  nuqtadan o'tib,  $Oy$  o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
7.  $M(0, -2)$  va  $N(3, -4)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.
8. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlarini toping:

1)  $6x - 7y + 5 = 0$ ;      2)  $3x + 7y + 8 = 0$ ;      3)  
 $x - 9 = 0$ ;

4)  $-2x + 3y - 4 = 0$ ;      5)  $-x + 3y - 7 = 0$ .

9.  $A(3, -4)$  nuqtadan o'tib,  $2x - 3y + 5 = 0$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

10. Uchburchakning uchlari berilgan:  $A(4; 6)$ ,  $B(-4; 0)$  va  $C(-1; -4)$ . Uning  $C$  uchidan  $AB$  tomoniga tushirilgan balandligining tenglamasi tuzilsin.

DURDONA

## VII BOB. TEKISLIKLAR

### 7.1-§. Fazoda tekislik tenglamalari

Tekislik tenglamalarini qanday usullarda berilishini o'rganamiz.

1. Nokollinear ikki  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  vektor va bitta  $M_0$  nuqta  $P$  tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi.

$\forall M \in \Pi$  nuqtani olaylik. U holda  $\overline{M_0M}$  vektor va  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  vektorlar bilan komplanar bo'ladi, demak, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, bundan ularning koordinatalaridan tuzilgan uchinchi tenglamaning determenanti nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. Shuni koordinatalarda yozaylik.

$$M_0(x_0, y_0, z_0), \bar{p}_1\{a_1, b_1, c_1\}, \bar{p}_2\{a_2, b_2, c_2\} \quad (7.1)$$

bo'lsin.  $M$  ning koordinatalarini  $x, y, z$  deb olaylik.  $\overline{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$  bo'lib, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.2)$$

Aksincha, (7.2) shart bajarilsa,  $M$  nuqta albatta  $P$  tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, (7.2)  $P$  ning tenglamasi. Bu tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan (nokollinear) ikki vektorga parallel bo'lgan tekislikning *tenglamasi* deb yuritiladi.

Bundan tashqari  $\overline{M_0M}, \bar{p}_1, \bar{p}_2$  vektorlar bir tekislikda yotgani uchun ular chiziqli bog'liqdir, ya'ni :

$$\overline{M_0M} = u\bar{p}_1 + \vartheta\bar{p}_2, u, \vartheta \in R, \quad (7.3)$$

bu yerda  $u, \vartheta$  sonlar parametrlardir. (7.3) dan

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + \vartheta a_2, \\ y - y_0 = ub_1 + \vartheta b_2, \\ z - z_0 = uc_1 + \vartheta c_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ua_1 + \vartheta a_2 + x_0, \\ y = ub_1 + \vartheta b_2 + y_0, \\ z = uc_1 + \vartheta c_2 + z_0. \end{cases} \quad (7.4)$$

(7.4) *tekislikning parametrik tenglamalari* deb ataladi. ( $u$  va  $\vartheta$  ga istalgan qiymatlar berib, tekislikning shu parametrlarga mos nuqtalarini topish mumkin).

Endi (7.2) tenglamani quyidagicha yozaylik:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (7.5)$$

$$A = \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} c_1 a_1 \\ c_2 a_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \quad (7.6)$$

(7.5)  $\Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$  bunda  $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$   
demak,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7.7)$$

tenglama hosil bo`ladi. (7.2) bilan (7.7) teng kuchli bo`lgani uchun (7.7) ham tekislik tenglamasi bo`ladi. (7.6) da  $A, B, C$  larning kamida bittasi noldan farqli, aks holda  $A = B = C = 0$  bo`lsa, (7.6) dan:  $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2 \Rightarrow \bar{p}_1 \parallel \bar{p}_2$ , bu esa  $\bar{p}_1, \bar{p}_2$  larning berilishiga zid. Shunday qilib tekislikning affin reperida teskarisi ham o`rinlidir. Ya`ni (7.7) ko`rinishdagi har qanday chiziqli tenglama fazodagi biror affin reperga nisbatan tekislikni aniqlaydi.

Haqiqatan ham,  $Ax + By + Cz + D = 0$  ( $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ) tenglama biror affin reperda biror nuqtalar to`plamini aniqlasin. Uch o`zgaruvchini bog`lagan bu tenglamani yechimi cheksiz ko`pdir. ularning biri  $(x_0, y_0, z_0)$  bo`lsa, u holda  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$  bundan va (7.7) dan:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  tekislik tenglamasi bo`ladi. (7.7) tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

2. Bir to`g`ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Shu ma`lumotlarga ko`ra uning tenglamasini tuzaylik. Berilgan nuqtalar  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ , bo`lsin. Biz  $M_0 = M_1, \bar{p}_1 = \overrightarrow{M_1 M_2}, \bar{p}_2 = \overrightarrow{M_1 M_3}$  desak, hamda

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}, \overrightarrow{M_1 M_3} \\ &= \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} \end{aligned}$$

ni etiborga olsak, (7.2) tenglama quyidagi ko`rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.8)$$

Uch nuqtadan o`tgan tekislik tenglamasi shudir.

Agar tekislikga koordinatalar boshidan o`tmasa, u  $(O_x), (O_y), (O_z)$  o`qlarni uchta  $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$  nuqtada kesadi, bu yerda  $a, b, c$  tekislikning shu o`qlarning ajratgan kesmalari bo`ladi.

Bunga (7.8) ko`rinishli tenglamani tatbiq qilamiz:

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (7.9)$$

bu tenglama tekislikning koordinata o'qlarining ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi deyiladi.

Biz bu mavzuda tekislikning 6 xil ko'rinishidagi (7.2), (7.3), (7.4), (7.7), (7.8), (7.9) tenglamalarini ko'rdik.

$\vec{n}(A, B, C)$  vektor ushbu  $Ax + By + Cz + D = 0$  tekislikning normal vektori deyiladi. Normal vektor tekislikga perpendikulyar bo'ladi.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Bu tenglama  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nuqtadan o'tib,  $\vec{n}(A, B, C)$  vektorga perpendikulyar tekislikning tenglamasi deyiladi.

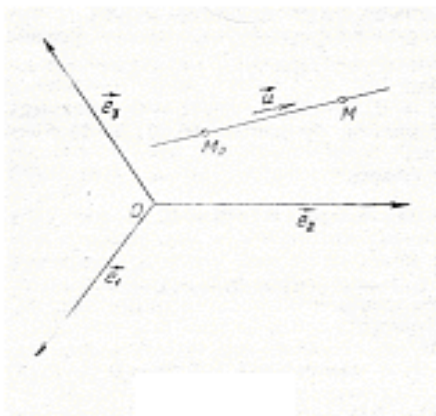
**7.1.1-ta'rif.** Berilgan  $M_1$  nuqtaning berilgan  $\Pi$  tekislikkacha bo'lgan masofa deb, shu nuqtaning tekislikga tushirilgan perpendikulyar to'g'ri chiziqlarini tekislik bilan kesishgan nuqtasi orasidagi masofaga aytiladi.

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ikki tekislik orasidagi burchak:

$$\cos \phi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

## 7.2-§. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari



1. Fazodagi to'g'ri chiziq o'zining nuqtasi va shu chiziqqa parallel biror  $\vec{u} \neq \vec{0}$  vektor bilan to'la aniqlanadi (1-chizma).

$O(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  reperda  $M_1(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{u}(l, m, n)$  bo'lsin. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy  $M(x, y, z)$  nuqtasini olaylik:

$$\overrightarrow{M_0 M} // \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{M_0 M} = t\vec{u} (t \in \mathbb{R}). \quad (7.10)$$

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0, \overrightarrow{OM} = \vec{r} \text{ desak hamda}$$

1-chizma

$\overrightarrow{M_0 M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$  ni hisobga olsak, (7.10) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}. \quad (7.11)$$

(7.11) tenglama to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deb ataladi,  $t$  ga har xil qiymatlar berish bilan to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning radius-vektori topiladi.

$\overrightarrow{MM_0}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  va (7.11) dan

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot l, \\ y - y_0 = t \cdot m, \\ z - z_0 = t \cdot n, \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = x_0 + t \cdot l, \\ y = y_0 + t \cdot m, \\ z = z_0 + t \cdot n. \end{cases} \quad (7.12)$$

Bu (7.12) tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqlarning *parametrik* tenglamalari deb yuritiladi.  $M_0$  - berilgan nuqta,  $\vec{u}$  esa  $u$  ning *yo'naltiruvchi vektori* deb ataladi.

Agar  $l \cdot m \cdot n \neq 0$  bo'lsa, u holda (7.12)  $\Rightarrow t = \frac{x-x_0}{l}, t = \frac{y-y_0}{m}, t = \frac{z-z_0}{n}$ , bulardan

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (7.13)$$

Bu tenglamalar *to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalari* deb ataladi.

2. To'g'ri chiziqlarning ikki nuqtasi uning fazodagi vaziyatini to'la aniqlaydi: faraz etaylik,  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  nuqtalardan  $u$  to'g'ri chiziq o'tsin ( $M_1 \neq M_2$ ). Oldingi bandedagi  $M_0$  nuqta o'rniga  $M_1$  va

$\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  olinsa, (7.13) ga asosan:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}. \quad (7.14)$$

Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqlarning tenglamalari (7.14) dir.

3. Fazodagi har bir to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i deb qarash mumkin. Shungamuvofiq.

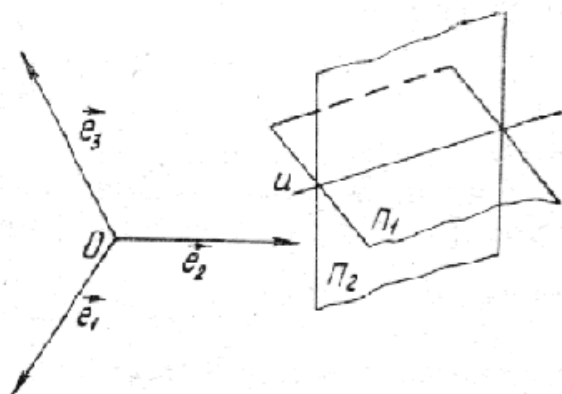
$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (7.15)$   
tenglamalar sistemasi  $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$  shart bajarilganda to'g'ri chiziqni aniqlaydi (2-chizma).

To'g'ri chiziqlarning Yuqorida ko'rilgan (7.11)-(7.14) tenglamalarining biridan qolganlariga o'tish mumkin. Lekin u (7.15) ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilsa, kanonik ko'rinishga bevosita o'tish mumkin ekanligi ochiqdan-ochiq ravshan emas. Biz hozir shu masalaga to'xtalamiz. Kanonik tenglamalarni yozish uchun to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektorini bilish kerak. (7.15) uch noma'lumli ikki tenglama, demak, o'zgaruvchilardan biriga, masalan,  $z$  ga  $z = z_0$  qiymat berib va hosil qilingan ikki noma'lumli ikkita tenglamani echib,  $x = x_0, u = u_0$  qiymatlarni topamiz (bunda biz  $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$  deb faraz qildik). Natijada  $(x_0, u_0, z_0)$  nuqta (7.15) to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi, u holda (7.15) ni quyidagicha yozib olsak bo'ladi.

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0,$$

$$A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0.$$

Bu sistemadan quyidagilarni topamiz:



$$x - x_0 = \left| \frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} \right| t,$$

$$y - y_0 = \left| \frac{C_1 A_1}{C_2 A_2} \right| t,$$

$$z - z_0 = \left| \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} \right| t.$$

2-chizma

Bulardan

$$\frac{x-x_0}{\left| \frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} \right|} = \frac{y-y_0}{\left| \frac{C_1 A_1}{C_2 A_2} \right|} = \frac{z-z_0}{\left| \frac{A_1 B_1}{A_2 B_2} \right|}. \quad (7.16)$$

Agar (7.15) tenglamalarni dekart reperida qarasak,  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  vektor  $P_1$  tekislikning  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  vektor  $P_2$  tekislikning normal vektori bo'ladi. (7.16) tenglamalardagi maxrajlarda turgan ifodalar  $P_1, P_2$  tekisliklar normal vektorlarining vektor ko'paytmasining mos koordinatalaridan iborat, ya'ni  $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ .

1-misol.  $M_0(1, 0, -4)$  nuqtadan o'tadigan va  $\vec{u} = \{1, -3, 2\}$  vektorga parallel to'g'ri chiziqlarning parametrik va kanonik tenglamalarini yozib, uning uchta nuqtasini toping.

**Yechish.** Bu yerda  $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = -4$ , va  $l = 1, m = -3, n = 2$ ;

tegishli tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = 1 + t,$$

$$y = -3t,$$

$$z = -4 + 2t;$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{2}.$$

Endi shu to'g'ri chiziqlarning  $M_0$  dan tashqari yana ikki nuqtasini topish uchun  $t$  ga ikkita qiymat beramiz:

$$t = 1 \Rightarrow x = 2, y = -3, z = -2, M_1(2, -3, -2),$$

$$t = -1 \Rightarrow x = 0, y = 3, z = -6, M_2(0, 3, -6).$$

2-misol.

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0, \\ x + y + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini yozing.

**Yechish.** Bu to'g'ri chiziqlarning biror nuqtasini topamiz,  $z=0$  deb faraz qilish bilan hosil qilingan

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

sistemadan  $x = 2, y = 0 \Rightarrow M_0(2, 0, 0)$ .

Endi yo'naltiruvchi vektorning koordinatalarini topamiz. Bu yerda

$$A_1 = 2, B_1 = -1, C_1 = 1, A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow l = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6, m = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -9, n = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Bu qiymatlarni (7.16) ga qo'yamiz:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{3} \quad \text{yoki} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}.$$

### 7.3-§. Fazoda tekislik bilan to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati

Dekart reperida  $u$  to'g'ri chiziq parametrik tenglamalari bilan,  $\Pi$  tekislik umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

$$u: \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad \vec{u}(l, m, n), \quad (7.17)$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n}(A, B, C). \quad (7.18)$$

Avvalo, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasiga to'xtalaylik: buning uchun berilgan tenglamalarni sistema deb qarash kerak. (7.17) va (7.18) dan

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Al + Bm + Cn) = 0. \quad (7.19)$$

$Al + Bm + Cn \neq 0$  shartda

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \quad (7.20)$$

bo'ladi.  $t$  ning bu qiymatini (7.17) ga qo'ysak, izlangan nuqta topiladi. Lekin

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad (7.21)$$

shart bajarilsa, ya'ni  $\vec{u} \perp \vec{n}$  bo'lsa,  $u$  to'g'ri chiziq  $\Pi$  ga parallel bo'ladi. Aksincha,  $u // \Pi \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ .

Demak,  $\vec{u} \cdot \vec{n} = Al + Bm + Cn = 0$  shart to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallelligini bildiradi.

$$u \perp \Pi \Rightarrow \vec{u} // \vec{n} \Rightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}, \quad (7.22)$$

bu (7.22) shart to'g'ri chiziqlarning tekislikka perpendikularligini bildiradi.

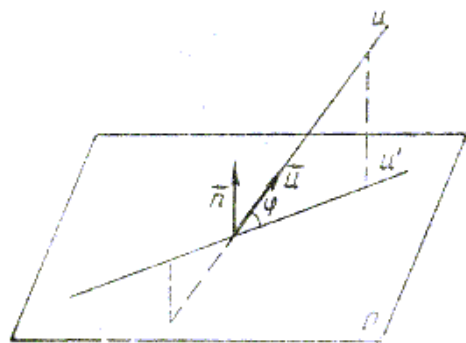
$u \in \Pi$  bo'lgan hol uchun to'g'ri chiziq bilan tekislik o'zaro vaziyatining xususiy holidir. Bu vaqtda (7.21) shart bajarilib, undan tashqari  $M_0 \in \Pi$  bo'lishi lozim, ya'ni

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (7.23)$$

Demak,  $u \subset \Pi \Leftrightarrow (7.21), (7.23)$ .

Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini beramiz.

### 3-chizma



**7.3.1-ta'rif.** To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi ortogonal proektsiyasi orasidagi burchakka aytiladi (3-chizma). Biz  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  deb faraz qilamiz.

3-chizmadan ko'rinadiki,  $\phi$  ning o'rniga  $(\vec{n}, \vec{u})$  burchakni qabul qilish mumkin. Bu burchak  $\frac{\pi}{2} - \phi$  ga yoki  $\frac{\pi}{2} + \phi$  ga teng. Demak,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin \phi$ , shuning uchun

$$\sin \phi = |\cos(\vec{n}, \vec{u})| = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \quad (7.24)$$

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

to'g'ri chiziq bilan  $2x - y + z + 1 = 0$  tekislikning kesishish nuqtasini toping.

**Yechish.** To'g'ri chiziq tenglamalaridagi  $x, y, z$  ning qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'yamiz:

$$2(1 + 2t) - 3t + (-2 + t) = 0 \text{ yoki } t = \frac{1}{2}.$$

U holda  $x = 1 + 2(-\frac{1}{2}) = 0, y = -\frac{3}{2}, z = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ ;

izlangan nuqta  $(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ .

2-misol.  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$  to'g'ri chiziq bilan  $4x + 2y + 2z - 5 = 0$  tekislik orasidagi burchakni toping.

**Yechish.**  $\vec{u}(1, -2, 2), \vec{n}(4, 2, 2)$ ,

$$\sin \phi = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \phi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

3-misol.  $R(7, 9, 7)$  nuqtadan  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

**Yechish.** Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish uchun biz formula berganimiz yo'q, bunday masala quyidagicha oson hal qilinadi:

a) berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqa perpendikular tekislik tenglamasi tuziladi;

b) shu tekislik bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi topiladi;

v) bu topilgan nuqta bilan berilgan nuqta orasidagi masofa topiladi.

Shu yo'sinda masalani echishga kirishamiz.

a)  $P(7, 9, 7)$  nuqtadan utib,  $\vec{n} = \vec{u}(4, 3, 2)$  vektorga perpendikulyar tekislikning tenglamasini tuzamiz:  $4(x - 7) + 3(y - 9) + 2(z - 7) = 0$  yoki

$$4x + 3y + 2z - 69 = 0 \quad (*)$$

b) berilgan eugri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz:  $x = 2 + 4t, y = (1 + 3t), z = 2t$  va bularni (\*) tenglamaga kuyamiz:

$$4(2 + 4t) + 3(1 + 3t) + 2 \cdot 2t - 69 = 0,$$

$$29t - 58 = 0,$$

$$t = 2$$

$$x = 2 + 4 \cdot 2 = 10,$$

$$y = 1 + 3 \cdot 2 = 7,$$

$$z = 2 \cdot 2 = 4$$

$\Rightarrow Q(10, 7, 4)$  nuqta to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasidir.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Oy o'qdan va  $x - y = 0, x + y - 2z - 1 = 0, 2x + z - 4 = 0$  tekisliklarning umumiy  $M_0$  nuqtasidan o'tuvchi tekislik tenglamasini toping.
2.  $z$  o'qidan va  $(4, -7, 5)$  nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.
3.  $x$  o'qiga parallel va  $(4, 0, -2), (5, 1, 7)$  nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

4. Ushbu  $3x - 5y + z + 15 = 0$  tekislikning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari hisoblansin.
5.  $(-2, 7, 3)$  nuqtadan o'tuvchi va  $x - 4y + 5z - 1 = 0$  tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.
6.  $15x - 10y + 6z - 190 = 0$  tekislikning koordinatalar boshidan masofasi topilsin.
7. Koordinatalar boshidan 6 birlik masofada o'tib, koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari  $a:b:c = 1:3:2$  munosabat bilan bog'langan tekislikning tenglamasi tuzilsin.
8.  $2x - y + 2z + 9 = 0$  tekislikka perpendikular to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.
9. Ushbu  $3x - y + 2z + 15 = 0$  va  $5x + 9y - 3z - 1 = 0$  tekisliklar orasidagi burchak topilsin.
10. Koordinata tekisliklarining  $2x - 3y + 5z - 2 = 0$  tekislik bilan kesishish chiziqlari yasalsin.
11. a)  $M_0(-4, -2, 3)$  nuqtadan o'tib,  $\vec{u}(-5, 4, -7)$  vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning parametrik va kanonik tenglamalarini tuzing.  
 b) Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni hisoblang:  

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$
12. a)  $A(7, -2, 0)$  nuqtadan o'tib,  $Oz$  o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalarini tuzing.  
 b) Uchlari  $A(3, -1, 0)$ ,  $B(0, -7, 3)$ ,  $C(-2, 1, -1)$  va  $D(3, 2, 6)$  nuqtalarda yotgan tetraedrning qarama-qarshi qirralari orasidagi burchakni toping.
13. a) Koordinatalar o'qlarining parametrik tenglamalarini tuzing.  
 b)  $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$  to'g'ri chiziqlarning koordinatalar o'qi bilan hosil qilgan burchaklarining kosinuslarini toping.
14. a)  $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{3}$  to'g'ri chiziqda abstsissasi ikkiga teng bo'lgan nuqtaning koordinatalarini toping.  
 b) Kubning diagonallari orasidagi burchakning kosinusini hisoblang.
15. a)  $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$  to'g'ri chiziqdagi abstsissasi 5 bo'lgan  $M_1$  nuqta va  $M_2(-1, 3, 5)$  nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamalarini toping.

b) Quyidagi to'g'ri chiziqlarning parametrik va kanonik tenglamalarini toping.

$$u: \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

16. a) Berilgan  $M_1(1, -2, -5)$  va  $M_2(3, -1, 0)$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini toping.

b) Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniqlang:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{x+3}{3} = \frac{z-1}{-2} \quad va \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

17. a) Absstissa va ordinata o'qlaridan bir birlikdagi kesma kesuvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini toping.

b)  $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{3}$  to'g'ri chiziqda applikasi beshga teng bo'lgan nuqtaning koordinatalarini toping.

18. a)  $2x - 3y + z + 5 = 0$  tekislikning koordinatalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlarining tenglamalarini yozing.

b) To'g'ri chiziqning quyidagi tenglamalari kanonik shaklga keltirilsin:

$$\begin{cases} 5x - 6y + 2z + 21 = 0, \\ x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

19. a)  $2x - y + z + 1 = 0$  tekislik bilan  $M_1(3, 2, 0)$ ,  $M_2(1, -1, 1)$  va  $M_3(1, -3, 2)$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik kesishishidan hosil bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalarini toping.

b) Quyidagi to'g'ri chiziqlarni kesishishini isbot qiling va kesishgan nuqtasining koordinatalarini toping:

$$v_1: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases} \quad v_2: \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

20. a) Quyidagi to'g'ri chiziqlarning parametrik va kanonik tenglamalarini toping.

$$u: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

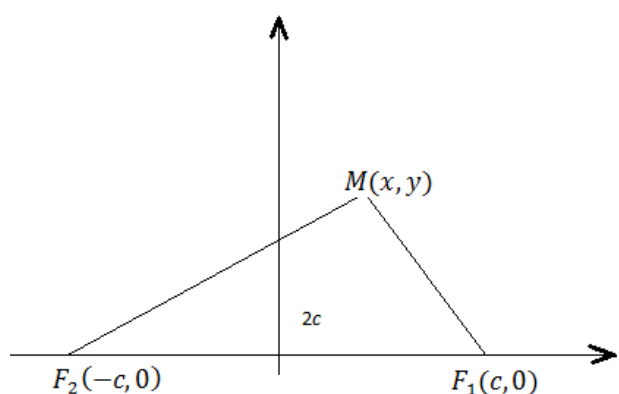
b)  $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{3}$  to'g'ri chiziqda bu to'g'ri chiziqning tenglamalarini ikki tekislikning kesishish chizig'i sifatida ifodalang.

## VIII BOB. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR: ELLIPS, GIPERBOLA VA PARABOLA

### 8.1-§. Ellips

**8.1.1-ta'rif.** Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqttagacha (fokuslargacha) masofalarning yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

Bu ikki berilgan nuqta ellipsning fokuslari, nuqtalar orasidagi masofa esa fokal masofa deyiladi. Endi ellips tenglamasini keltirib chiqaraylik.



Buning uchun koordinatalar sistemasini shunday joylashtiramiz: ya'ni  $Ox$  abstsissa o'qi fokuslar orqali o'tsin, ordinata o'qi esa fokuslar orasidagi masofani teng ikkiga bo'lib,  $Ox$  o'qqa perpendikulyar ravishda o'tsin.

Shartga ko'ra

$$F_1 M + F_2 M = 2a \quad (8.1)$$

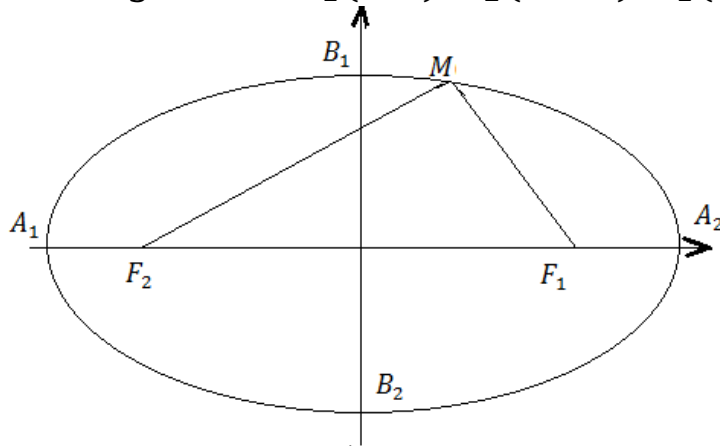
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (8.2)$$

bu ellips tenglamasidir.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{xc}{a} \\ (x-c)^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{x^2 c^2}{a^2} \\ \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$a^2 - c^2 = b^2$  desak, ( $a > c$ )  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  bu ellipsning *kanonik tenglamasi*,  $A_1(a, 0), A_2(-a, 0), B_1(0, b), B_2(0, -b)$  nuqtalar



ellipsning uchlari,  $\overrightarrow{AA_1} = 2a$  ga ellipsning katta o'qi,  $\overrightarrow{BB_1} = 2b$  ellipsning kichik o'qi deyiladi ( $a > b$ ).  $a$  va  $b$  sonlar ellipsning yarim o'qlari deyiladi.

### 8.1.2-ta'rif.

Ellipsning *ekstsentrisseti* ( $e$ ) deb, fokuslari orasidagi ( $2c$ ) masofaning katta o'qi ( $2a$ ) ga bo'lgan nisbatiga aytiladi,

ya'ni

$$e = \frac{c}{a}, \text{ bunda } e < 1.$$

**8.1.3-ta'rif.** Ellipsdagi nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofalar uning *fokal radius – vektorlari* ( $r_1$  va  $r_2$ ) deyiladi. Ellipsning ixtiyoriy  $M(x, y)$  nuqtasi uchun

$$r_1 = a - ex, r_2 = a + ex,$$

va ellipsning tarifiga asosan

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

ya'ni ellipsning har qanday nuqtasining fokal radius – vektorlarining yig'indisi uning katta o'qiga teng.

**8.1.4-ta'rif.** Ellipsning kichik o'qiga parallel va undan  $\frac{a}{e}$  masofadan o'tgan ikki to'g'ri chiziq ellipsning *direktrisalari* deyiladi. Direktrisalar tenglamalari quyidagichadir:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{va} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

## 8.2-§. Giperbola

**8.2.1-ta'rif.** Giperbola deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtaga (fokuslarga) masofalarning ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lgan tekislik nuqtalarining o'rniga aytiladi.

Berilgan nuqtaning giperbolaning fokuslari, ular orasidagi masofa esa fokal masofa deb ataladi. Giperbola tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Buning uchun koordinatalar sistemasini shunday joylashtiramizki, abstsissa o'qi giperbolaning fokuslaridan o'tsin,  $F_1 F_2$  fokal masofani, ya'ni  $F_1 F_2 = 2c$  deymiz. Ordinatalar o'qini  $F_1$  va  $F_2$  ni o'rtasidan perepdikulyar qilib o'tkazamiz.  $F_1 M$  va  $F_2 M$  lar orasidagi ayirma modulini  $2a$  bilan belgilaymiz. U holda giperbola quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

yoki

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = \pm 2a$$

Tenglamaning chap tomoni musbat bo'lsa (+), manfiy bo'lsa (-) olinadi.

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\frac{cx}{a} - a = \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ta'rifga ko'ra  $a < c$ ,  $c^2 - a^2 = b^2$  musbat bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(8.3)

giperbolaning kanonik tenglamasi.

1-misol.  $M(8\sqrt{5}; 12)$  nuqtadan o'tuvchi giperbolani kanonik tenglamasi tuzilsin, agar fokal oraliq 20 ga teng bo'lsa.

Shartga ko'ra  $2c = 20, c = 10$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(8\sqrt{5})^2}{a^2} - \frac{12^2}{b^2} = 1 \quad \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1 \\ a^2 = 64b^2 = 36 \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases} \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

2-misol.  $21x^2 - 43y^2 = 903$  giperbola tenglamasi berilgan. Fokuslarning koordinatasi topilsin.

$$\frac{21x^2}{903} - \frac{43y^2}{903} = 1 \quad \frac{x^2}{43} - \frac{y^2}{21} = 1$$

$$a^2 = 43, b^2 = 21, c^2 = a^2 + b^2 = 64 \quad c = 8$$

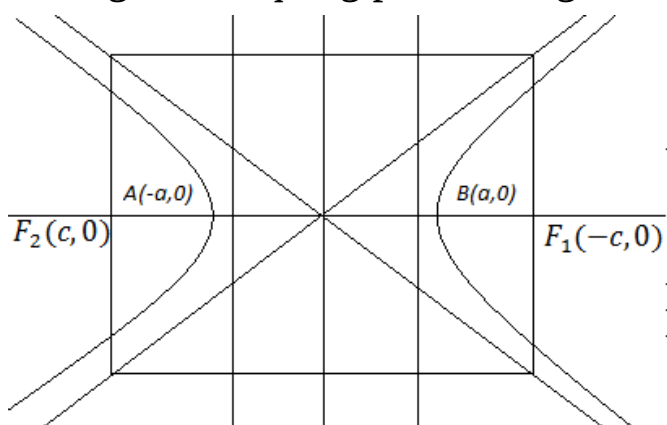
Demak,  $F_1 = (-8; 0)$ ,  $F_2 = (8; 0)$  ekan.

(8.3) tenglamadan ma'lumki, giperbola  $Ox$ ,  $Oy$  o'qlariga nisbatan va koordinatalarning boshi  $O$  ga nisbatan simmetrikdir.

Giperbola abstsissalar o'qini  $A(-a, 0)$ ,  $B(a, 0)$  nuqtada kesib o'tadi.  $A$  va  $B$  nuqtalar giperbolaning uchlarini deyiladi.  $AB$  kesma giperbolaning haqiqiy o'qi deyiladi. Uning uzunligi  $2a$  ga teng.

$$y = \frac{bx}{a} \text{ va } y = -\frac{bx}{a}$$

to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.



$$y = \frac{b}{a}x \text{ va } y = -\frac{b}{a}x$$

Giperbolaning eksentrisiteti:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ bunda } e > 1.$$

(1) giperbola cheksizlikka cho'zilgan ikkita (o'ng va chap) tarmoqdan iborat:

O'ng tarmoqning nuqtalari uchun fokal radius – vektorlar quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\begin{cases} r_1 = ex - a, \\ r_2 = ex + a, \\ r_2 - r_1 = 2a. \end{cases}$$

Chap tarmoqning nuqtalari uchun:

$$\begin{cases} r_1 = ex - a, \\ r_2 = ex + a, \\ r_2 - r_1 = 2a \end{cases}$$

formulalar o'rinli.

Giperbolaning direktrisalari uchun:  $x = \frac{a}{e}$  va  $x = -\frac{a}{e}$  tengliklar o'rinli.

Asimptotaning tenglamalari:

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

## 8.3-§. Parabola

**8.3.1-ta'rif.** Parabola deb, har bir nuqtasidan berilgan bir nuqttagacha (fokusgacha) va berilgan bir to'g'ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofa fokal parametri deyiladi va  $R$  bilan belgilanadi. Koordinatalar sistemasini shunday joylashtiramizki,  $Ox$  o'q  $F$  fokusdan o'tib direktrisaga perpendikular bo'lsin. Direktrisasi bo'lgan  $O$  o'q kesishish nuqtasini  $D$  bilan, koordinatalarning boshini  $O$  nuqta bilan belgilaymiz.  $DF$  ni o'rtasi  $O$  nuqta bo'ladi. U holda  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  bo'ladi. Direktrissa esa  $x = -\frac{p}{2}, x + \frac{p}{2} = 0$  tenglamaga ega bo'ladi.  $M(x, y)$  parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Parabolaning ta'rifiga ko'ra

$$FM = MN, \quad FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \quad (8.4)$$

parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

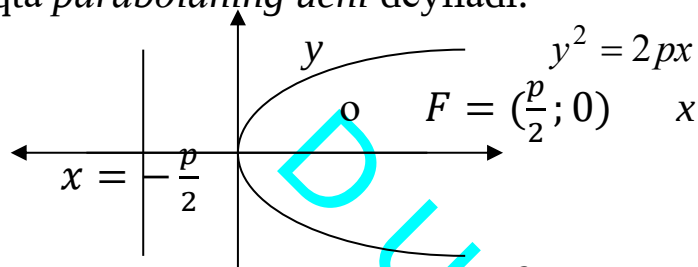
3-misol.  $y^2 = 3x$  parabola berilgan. Parabolaning shunday nuqtasini topaylikki, shu nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofa 1 ga teng bo'lsin.

**Yechish:** Shartga ko'ra  $2r = 3$ ,  $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ ,  $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$   $M(x, y)$  noma'lum

$$\begin{cases} \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + y^2 = 1x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + 3x = 1\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = 1 \\ y^2 = 3x - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 1 \quad x + \frac{3}{4} = 1 \quad x = \frac{1}{4} \\ y^2 = 3x = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

tenglamadan ko'rinadiki, parabola  $x \geq 0$  sohada yotadi va  $Ox$  o'qiga nisbatan simmetrik  $M(x_0, y_0)$  bo'lsa, u holda  $M_1(x_0, -y_0)$  bo'ladi.

Parabola koordinatalarning o'qini  $O(0; 0)$  nuqtada kesadi. Bu  $O(0; 0)$  nuqta *parabolaning uchi* deyiladi.



Parabolaning  $x^2 = 2py \Rightarrow y = \frac{x^2}{2p}$  tenglamasi ham mavjud.

## MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOL VA MASALALAR

1.  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  ellipsning  $2x - y + 17 = 0$

to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalari topilsin.

2.  $A(-6; +3)$  nuqtadan  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$

ellipsga o'tkazilgan urinmalarning tenglamasi tuzilsin.

3.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$  ellipsga ichki chizilgan

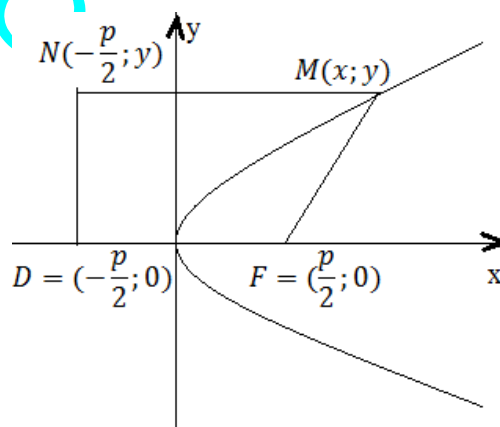
kvadrat tomonining uzunligi hisoblansin.

4.  $A(2, \frac{3}{2}), B(2, \frac{2\sqrt{5}}{3}), C(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}), D(0, 5), E(\frac{3\sqrt{5}}{2}, 1)$  nuqtalar  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  ellipsga

nisbatan qanday joylashganini aniqlang.

5.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  ellipsning  $F(c, 0)$  fokus nuqtasidan o'tib, katta o'qiga

perpendikular bo'lgan vatarining uzunligini toping.



6. Quyidagi ellipslarning markazi va yarim o'qlarini toping.

1)  $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

2)  $9x^2 + 16y^2 + 18x - 96y + 9 = 0$

3)  $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y = 11$

7. Quyidagi giperbolalarning markazini va yarim o'qlarini toping:

1)  $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$

2)  $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$

3)  $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$

4)  $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0.$

8.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$  giperbolaning:

1) yarim o'qlarini;

2) fokuslarini;

3) eksentrisitetini;

4) asimptota tenglamalarini;

5) direktrisalar tenglamalarini toping.

9. Quyidagi har bir hol uchun giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

1)  $a=2, b=3;$

2)  $a=\frac{1}{4}, b=\frac{2}{5};$

3) fokuslari orasidagi masofa  $2c=12$  bo'lib, eksentrisiteti  $e=\frac{6}{5}$

4)  $A_1(4,3), A_2(-5, \frac{3}{2}\sqrt{7})$  nuqtalardan o'tadi;

5) giperbola  $M(\frac{9}{2}, -1)$  nuqtadan o'tadi, uning asimptotalari tenglamasi  $y = \pm \frac{2}{3}x;$

6) asimptotalari  $y = \pm \frac{3}{4}x;$  bo'lib, direktrisalari orasidagi masofa  $12\frac{4}{5}$  ga teng;

7) giperbola  $M_1(4,6)$  nuqtadan o'tib, uchlari orasidagi masofa 4 ga teng.

10.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  giperbolaning fokusidan o'tgan vatari haqiqiy o'qiga perpendikular bo'lsa, bu vatarning uzunligi  $2r$  ni toping.

11. Quyidagilarga asoslanib, parabolaning kanonik tenglamasini tuzing:

- 1) fokusdan parabolaning uchigacha bo'lgan masofa 2 ga teng;
- 2) fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofa 6 ga teng.

12. Quyidagi parabolalarning tenglamalarini soddaroq ko'rinishga keltiring va uning uchlarini toping. Parabolalarni yasang:

a)  $y^2 - 2y - 2x - 5 = 0$ ; b)  $y = 2x - x^2$ ;

c)  $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ ; d)  $x^2 + 3x = y$ .

13. Quyidagi shartlarda parabolaning tenglamasi tuzilsin:

- a) parabolaning uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 4 ga teng;
- b) fokusining koordinatalari (3, 0) bo'lib, ordinatalar o'qi direktrisa xizmatini qiladi.

14.  $y^2 = 8x$  parabolada fokal radius – vektori 20 teng bo'lgan nuqta topilsin.

15.  $y^2 = 4,5x$  parabolada direktrisadan  $d=9,125$  masofada turuvchi  $M(x, y)$  nuqta olingan. Parabola uchidan bu nuqtagacha bo'lgan masofa hisoblansin.

## IX BOB. SONLAR KETMA KETLIGI VA UNING LIMITI

### 9.1-§. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bu holda funksiya argumenti natural son bo'ladi. Shuning uchun funksiyaning *natural argumentli funksiya* deyiladi va  $f(n)$  kabi yoziladi.

Bu funksiyaning qiymatlari

$$x_n = f(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

lardan tashkil topgan ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (9, 1)$$

to'plam *sonlar ketma-ketligi* deyiladi, to'plamning elementlari esa ketma-ketlikning *hadlari* deyiladi.

Odatda, (9, 1) sonlar ketma-ketligi uning umumiy hadi  $x_n$  ( $n$ -hadi) orqali belgilanadi. Masalan,

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{n}: & \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \\ x_n = n!: & \quad 1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots, \\ x_n = q^n: & \quad q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots, \\ x_n = (-1)^n: & \quad -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots, \\ x_n = 1: & \quad 1, 1, 1, \dots, 1, \dots \end{aligned}$$

ifodalar sonlar ketma-ketliklari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki,  $x_n$  sonlar ketma-ketlikning ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) hadlari soni cheksiz bo'lgan holda bu ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam cheksiz yoki chekli to'plam bo'lishi mumkin. Masalan,  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  to'plam cheksiz,  $1, -1, 1, -1, \dots$  ketma-ketlikning hadlaridan tuzilgan  $\{-1, 1\}$  to'plam esa chekli to'plamdir.

### 9.2-§. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'tifi

Bizga biror

$$x_n: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (9.2)$$

ketma-ketlik hamda  $a \in R$  son berilgan bo'lsin.

**9.2.1-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  olinganida ham natural son  $n_0 \in N$

mavjud bo'lsaki,  $n > n_0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (9.3)$$

tengsizlik bajarilsa,  $a$  son  $x_n$  ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Limit uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ yoki } \lim x_n = a, \text{ yoki } n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow a$$

belgilashlardan foydalaniladi.

Bu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \quad \forall n > n_0: |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ma'lumki,  $|x_n - a| < \varepsilon$  tengsizlik  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  tengsizliklarga ekviva-lentdir.

Odatda,  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  interval, ya'ni

$$U_\varepsilon(a) = \{x: x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam  $a$  nuqtaning atrofi ( $\varepsilon$ -atrofi) deyiladi.

Keltirilgan ta'rifdan (9.3) ketma-ketlik hadlari uchun (9.4) tengsizlikning bajarilishi shu hadlarning  $a$  nuqtaning  $\varepsilon$ -atrofi  $U_\varepsilon(a)$  to'plamga tegishliligi kelib chiqadi.

Demak, (9.3) ketma-ketlik limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

**9.2.2-ta'rif.** Agar  $a$  nuqtaning ixtiyoriy  $U_\varepsilon(a)$  atrofi olinganida ham  $x_n$  ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa,  $a$  son  $x_n$  ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ketma-ketlik limiti ta'rifidagi  $\varepsilon$  ixtiyoriy musbat son bo'lib, unga mos natural son  $n_0$  ni qanday topish ta'rifda oshkora aytilmasada uni ayni (9.4) tengsizlikni yechib  $\varepsilon$  ga va qaralayotgan ketma -ketlikka bog'liq ravishda topiladi.

1-misol.  $x_n = \frac{1}{n}$ :  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lishi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Ixtiyoriy musbat  $\varepsilon$  sonni olaylik. Shu  $\varepsilon$  ga ko'ra  $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$  ni topamiz. U holda barcha  $n > n_0$  sonlar uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

munosabat o'rinli. Demak, ta'rifga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

2-misol. Ushbu  $x_n = (-1)^n$ :  $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$  ketma-ketlikning limiti mavjud emasligi ko'rsatilsin.

*Yechish.*  $\forall a \in R$  sonni olaylik. Agar  $a = 1$  bo'lib, uning  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  atrofi ( $0 < \varepsilon < 1$ ) olinsa, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha had-lari shu atrofiga tegishli bo'lmaydi, chunki  $-1 \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ . Binobarin,  $a = 1$  ketma-ketlikning limiti emas. Xuddi shunday vaziyat  $\forall a \in R$  uchun ham yuz beradi.

Demak, berilgan ketma-ketlik limitga ega emas.

3-misol. Ushbu  $0,3, 0,33, 0,333, \dots, 0,33 \dots 3, \dots$  ketma-ketlikning limiti  $\frac{1}{3}$  ga teng bo'lishi ko'rsatilsin.

*Yechish.*  $\forall \varepsilon > 0$  son olib,  $\left|0,33 \dots 3 - \frac{1}{3}\right|$  ni qaraymiz. Ravshanki,

$$0,33 \dots - 3 \frac{1}{3} = \frac{33 \dots 3}{100 \dots 0} - \frac{1}{3} = \frac{99 \dots 9 - 10^n}{3 \cdot 10^n} = \frac{-1}{3 \cdot 10^n}, \quad \left|0,33 \dots 3 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n}$$

Endi  $\varepsilon > 0$  ga ko'ra shunday  $n_0 \in R$  son topish kerakki, natijada  $n > n_0$  lar uchun  $\frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlikni yechib  $n > -\lg(3\varepsilon)$  ekanligini aniqlaymiz. U holda biz  $n_0$  sifatida  $[-\lg(3\varepsilon)]$  sonni olishimiz yetarli. Bu esa qaralayotgan ketma-ketlik limitining  $\frac{1}{3}$  ga teng bo'lishini ko'rsatadi.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, tenglikni isbotlang.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1;$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0;$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0;$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4};$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{1+n} = 2;$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n} = 3;$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1-2n} = -\frac{3}{2};$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{1-2n} = -\frac{3}{2};$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-5}{2n^2} = \frac{1}{2};$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{2-n^2} = -3;$
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^n}\right) = 3;$
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1;$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1;$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{1-3n} = -\frac{2}{3};$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{3x-1} = \frac{2}{3}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{2+n} = -1;$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1;$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot 0.999^n = 0;$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1;$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0;$$

$$21\text{-misol. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+4n^2+2}{n^3-7n-10} = 3 \text{ ekanligini ketma-ketlik limiti}$$

ta'rifidan foydalanib isbotlang.

*Yechish.* Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $N(\varepsilon)$  nomer topiladiki,  $\forall n > N(\varepsilon)$  lar uchun  $|\frac{3n^3+4n^2+2}{n^3-7n-10} - 3| < \varepsilon$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikning chap tomonini

$$|\frac{3n^3+4n^2+2}{n^3-7n-10} - 3| = |\frac{3n^3+4n^2+2-3n^3+21n-30}{n^3-7n-10}| = |\frac{4n^2+21n-28}{n^3-7n-10}| <$$

$$< \frac{4n^2+21n-28}{n^3} < \frac{4n^2+21n}{n^3} = \frac{4n+21}{n^2} < \varepsilon.$$

kabi yozamiz, bundan  $|\frac{3n^3+4n^2+2}{n^3-7n-10} - 3| < \frac{4n+21}{n^3} < \varepsilon$ . Agar  $N(\varepsilon)$

nomerni  $\forall n > N(\varepsilon)$  uchun,  $\frac{4n+21}{n^3} < \varepsilon$  tengsizlik bajariladigan qilib

tanlansa, bu  $n$  lar uchun  $|\frac{3n^3+4n^2+2}{n^3-7n-10} - 3| < \varepsilon$  tengsizlik ham bajariladi.

$\frac{4n+21}{n^3} < \varepsilon$  tengsizlik,  $n$  natural son bo'lganligidan

$n > \frac{4 + \sqrt{16 + 4 \cdot \varepsilon \cdot 21}}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{4 + \sqrt{16 + 84\varepsilon}}{2\varepsilon}$  uchun o'rinli bo'ladi.  $N(\varepsilon)$  nomer

uchun  $\frac{4 + \sqrt{16 + 84\varepsilon}}{2\varepsilon}$ , ( $\varepsilon > 0$ ) sonning butun qismini olamiz va demak,

ta'rifni qanoatlantiradigan  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{4 + \sqrt{16 + 84\varepsilon}}{2\varepsilon} \right]$ ,  $\varepsilon > 0$ , mavjudligidan

tenglik isbotlanadi.

## X BOB. FUNKSIYALAR

### 10.1-§. Funksiya tushunchasi

**1. Funksiya ta'rifi.**  $X$  va  $Y$  lar haqiqiy sonlarning biror to'plamlari ( $X \subset R, Y \subset R$ ) bolib,  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin:  $x \in X, y \in Y$ .

**10.1.1-ta'rif.** Agar  $X$  to'plamdagi har bir  $x$  songa biror  $f$  qoidaga ko'ra  $Y$  to'plamdan bitta  $y$  son mos qo'yilgan bo'lsa,  $X$  to'plamda *funksiya berilgan* deb aytiladi.

Ba'zan funksiya  $X$  to'plamda berilgan deyish o'rniga funksiya  $X$  to'plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funksiya  $f: x \rightarrow y$  yoki  $y = f(x)$  kabi belgilanadi.

Bunda  $X$  funksiyaning *aniqlanish to'plami (sohasi)*,  $Y$  esa funksiyaning *o'zgarish to'plami (sohasi)* deb ataladi,  $x$  erkli o'zgaravchi yoki funksiyaning argumenti,  $y$  esa *erksiz o'zgaruvchi* yoki  $x$  o'zgaruvchining *funksiyasi* deyiladi.

Funksiyaga misollar keltiramiz:

1).  $X = (-\infty, +\infty), Y = (0, +\infty)$  bo'lsin,  $f$  qoida sifatida

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

ni olaylik. Bu holda, ravshanki, har bir  $x \in X$  uchun bitta  $x^2 + 1$  topiladi va  $x^2 + 1 \in Y$  bo'ladi. Demak,  $X$  da  $y = x^2 + 1$  funksiya aniqlangan.

2).  $X = R, Y = Z$  va  $f$  – har bir haqiqiy  $x$  songa uning butun qismi  $[x]$  ni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Demak,

$$f: x \rightarrow [x] \text{ yoki } y = [x]$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

3). Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Bu Dirixle funksiyesi deyiladi va  $D(x)$  kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Funksiya ta'rifida  $X, Y$  to'plamlarning hamda  $f$  qoidaning berilishi muhimdir. Ko'pincha, amaliyotda funksiyaning aniqlanish sohasi  $X$  ham shu qoidaga ko'ra, ya'ni funksional bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi.

Masalan, ushbu

$$y = \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi, tabiiyki  $x=2, x=3$  nuqtalarni o'z ichiga olmasligi kerak.

Ushbu

$$\{f(x): x \in X\}$$

to'plam funksiyaning *qiymatlari to'plami* deyiladi va  $Y_f$  kabi belgilanadi:

Ravshanki,

$$Y_f \subset Y.$$

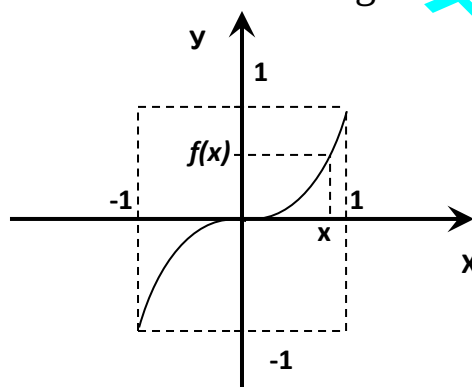
keltirilgan 1-misolda  $Y_f = [1, +\infty]$ , 2-misolda  $Y_f = Z$ , 3-misolda esa  $Y_0 = \{0,1\}$  bo'ladi.

Biror  $X$  to'plamda  $y = f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lsin.  $x_0 \in X$  ga mos keluvchi  $y_0$  miqdor  $y = f(x)$  funksiyaning  $x = x_0$  nuqtadagi xususiy qiymati deb ataladi va uni  $f(x_0) = y_0$  kabi belgilanadi. Masalan, 2-misolda  $x_0 = \pi$  bo'lganda  $y_0 = [\pi] = 3$  bo'ladi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikning  $(x, f(x))$  nuqtalaridan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)): x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam  $y = f(x)$  funksiyaning grafigi deb ataladi. Ravshanki,  $\{(x, f(x))\} \subset X \times Y$  bo'ladi. Masalan,  $y = x^3$  funksiyani  $X = [-1, 1]$  to'plamda qaraylik. Bu funksiyaning grafigi 1-chizmada ifodalangan. Bunda  $X \times Y$  to'plam shtrixlar bilan ko'rsatilgan kvadratni bildiradi.



**2. Funksiyaning berilish u** 1-chizma funksiya ta'rifidagi har bir  $x$  ga bitta  $y$  ni mos qo'yadigan qoida yoki qonun turli usulda berilishi mumkin. Biz ularni qisqacha qarab o'tamiz.

Ko'pincha  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument  $x$  ning har bir qiymatiga mos

kela-digan  $y$  funksiyaning qiymatini  $x$  ustida turli amallar–qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va h.k. amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul funksiyaning *analitik usulda berilishi* deyiladi.

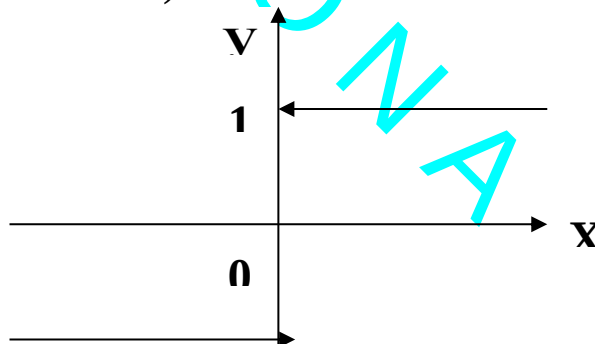
Misollar keltiraylik: 1).  $x$  va  $y$  o‘zgaruvchilar ushbu  $y = \sqrt{1 - x^2}$  formula yordamida bog‘langan bo‘lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi  $X = \{x: x \in R, -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$  to‘plamdan iborat. Bunda har bir  $x$  ga mos keladigan  $y$  ning qiymati avvalo  $x$  ni kvadratga ko‘tarish, so‘ngra uni 1 dan ayirish va bu ayirmadan kvadrat ildiz chiqarish kabi amallarni bajarish natijasida topiladi.

2).  $x$  va  $y$  o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo‘lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi  $X = R \setminus \{0\}$  bo‘lib, uning qiymatlari sohasi  $Y = \{-1, 1\}$  to‘plamdan iborat. Odatda bu funksiya

$y = \operatorname{sign} x$  kabi belgilanadi. Bunda *sign* lotincha signum so‘zidan olingan bolib, "belgi", "ishora" degan ma‘noni anglatadi. Bu  $y = \operatorname{sign} x$  funksiyaning  $x = 0$  nuqtadagi qiymati nolga teng deb qabul qilsak, u  $R$  to‘plamda aniqlangan bo‘ladi (2– chizma).



Ba‘zi hollarda  $x$  ( $x \in X$ ) va  $y$  ( $y \in Y$ ) o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamidan yoki jadval orqali berilgan bo‘lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda,  $t_1$  vaqtda havo harorati  $T_1$ ,  $t_2$  vaqtda havo harorati  $T_2$  va h.k. bo‘lsin. Natijada quyidagi jadvalga kelimiz:

|              |       |       |       |       |       |       |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Vaqt, $t$    | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | ..... | $t_k$ |
| Harorat, $T$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | ..... | $T_k$ |

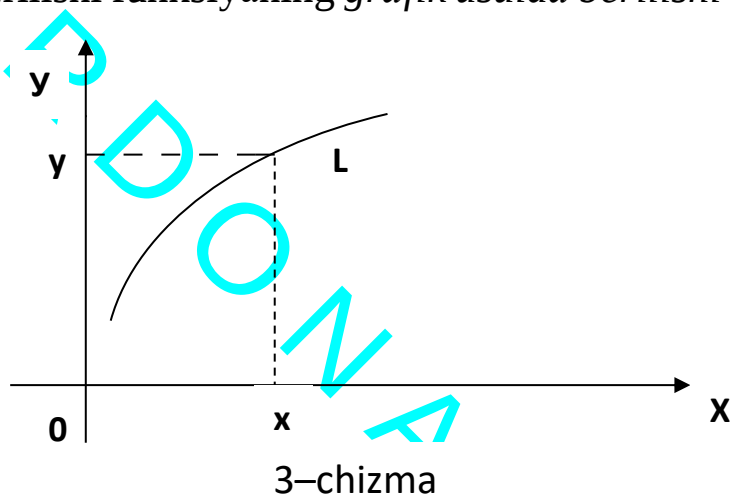
Bu jadval  $t$  vaqt bilan ayni paytdagi havoning harorati  $T$  orasidagi funksional bog'lanishni ifodalaydi, bunda  $t$  argument,  $T$  esa funksiya bo'ladi. O'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishning bunday berilishi *funksiyaning jadval usulida berilishi* deb ataladi.

$XOY$  tekislikdagi shunday  $L$  chiziq berilgan bo'lsinki,  $OX$  o'qida joylashgan nuqtalardan shu o'qqa o'tkazilgan perpendikulyar bu  $L$  chiziqni faqat bitta nuqtada kesib o'tsin.

$OX$  o'qidagi bunday nuqtalardan iborat to'plamni  $X$  orqali belgilaylik.  $X$  to'plamdan ixtiyoriy  $x$  ni olib, bu nuqtadan  $OX$  o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarning  $L$  chiziq bilan kesishgan nuqtasining ordinatasini  $y$  bilan belgilaymiz va olingan  $x$  ga bu  $y$  ni mos qo'yamiz. Natijada  $X$  to'plamdan olinga har bir  $x$  ga yuqorida ko'rsatilgan qoidaga ko'ra bitta  $y$  mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish  $L$  chiziq yordamida berilgan bo'ladi (3-chizma).

Odatda  $f$  ning bunday berilishi funksiyaning *grafik usulda berilishi* deb ataladi.

Shunday qilib, biz funksiyaning analitik, jadval, grafik usullarda berilishini ko'rib o'tdik.  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi funksional bog'lanish yuqoridagi uchta usul bilangina berilib



qolmasdan, boshqacha, faqatgina iboralar bilan ham berilishi mumkin. Masalan, har bir natural  $n$  songa uning bo'luvchilari sonini mos qo'yaylik. Bu moslikni  $\phi$  orqali belgilaymiz. Xususan,

$\phi(1) = 1, \phi(2) = 2, \phi(3) = 2, \phi(4) = 3, \phi(5) = 2, \dots, \phi(12) = 6$ . Odatda bu funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi.

Matematik analiz kursida asosan analitik usulda berilgan funksiyalar o'rganiladi.

$X$  to'plamda  $y = f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar bu funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$Y_f = \{f(x): x \in X\}$$

to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plam-da yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi, aks holda esa funk-siya yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan deyiladi. Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya  $X$  to'plamda *chegaralangan* deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

funksiyaning chegaralanganligi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Bu funksiya  $R = (-\infty, \infty)$  da aniqlangan bo'lib,  $\forall x \in R$  da  $f(x) > 0$  bo'ladi. Demak, berilgan funksiya quyidan chegaralangan.

Ravshanki,

$$(1 - x^2)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^4 \geq 2x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}.$$

Unda  $\forall x \in R$  uchun

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4} = \frac{1}{1 + x^4} + \frac{x^2}{1 + x^4} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya yuqoridan ham chegaralangan.

$X$  to'plamda aniqlangan ikki  $f(x)$  hamda  $\phi(x)$  funksiyalarni qaraylik.

Agar  $\forall x \in X$  da  $f(x) = \phi(x)$  bo'lsa, bu funksiyalar  $X$  to'plamida *bir-biriga teng funksiyalar* deyiladi.

$X$  to'plamda aniqlangan  $F(x) = f(x) + \phi(x)$  funksiya  $f(x)$  va  $\phi(x)$  funksiyalarning yig'indisi deb aytiladi. Ikki funksiya *ayirmasi*, *ko'paytmasi*, va *nisbati* shunga o'xshash ta'riflanadi.

**3. Juft va toq funksiyalar.** Agar  $\forall x \in X$  uchun  $-x \in X$  bo'lsa  $X$  to'plam 0 nuqtaga nisbatan *simmetrik to'plam* deyiladi.

0 nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan  $X$  to'pamda  $y = f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar  $\forall x \in X$  uchun

$$f(-x) = f(x)$$

bo'lsa,  $f(x)$  *juft funksiya* deb ataladi. Agar  $\forall x \in X$  uchun

$$f(-x) = -f(x)$$

bo'lsa,  $f(x)$  *toq funksiya* deb ataladi.

Masalan,  $y = \cos x$ ,  $y = |x|$  funksiyalar uchun

$$\cos(-x) = \cos x, |-x| = |x|$$

bo'lganligi sababli ular juft funksiyalardir.

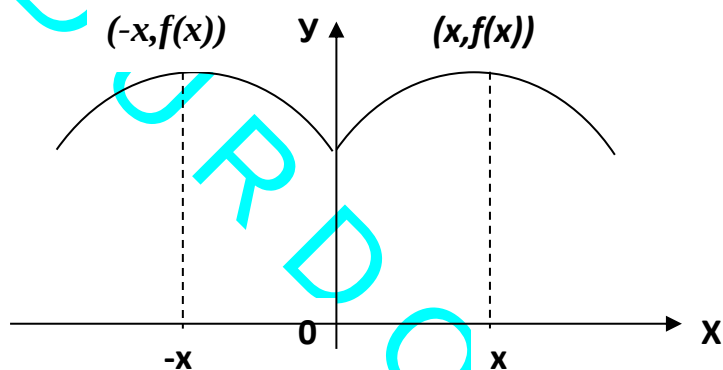
Ushbu  $y = \sin x, y = x^3$  funksiya uchun

$$\sin(-x) = -\sin x, (-x)^3 = -x^3$$

bo'lganligi sababli ular toq funksiyalardir.

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya har doim juft yoki toq funksiya bo'lavermaydi. Bunday funksiyalarga  $f(x) = x^2 - x, \phi(x) = \sin x - \cos x$  lar misol bo'la oladi. Bu funksiyalar juft ham emas, toq ham emas.

Juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik joylash-gandir. Haqiqatan, bunday funksiyalar uchun  $(x, f(x))$  nuqta funksiya grafigida yotgan bo'lsa,  $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$  nuqta ham shu grafikda joylashgan bo'ladi (4-chizma).



Toq funksiyaning grafigi  $Ox$  ga nisbatan simmetrik joy-lashadi. Haqiqatan, bu funksiya uchun  $(x, f(x))$  nuqta bilan birga har doim  $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$  nuqta ham yotadi.

**4. Davriy funksiyalar.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan va  $T \in R$  bo'lib,  $T \neq 0$  bo'lsin.

**10.1.2-ta'rif.** Agar

$$1) \forall x \in X \text{ da } x - T \in X, x + T \in X;$$

$$2) f(x + T) = f(x) \quad (10.1)$$

bo'lsa,  $f(x)$  davriy funksiya,  $T$  soni esa funksiyaning davri deyiladi.

Agar  $f(x)$  davriy funksiya bo'lib, uning davri  $T$  ga ( $T \neq 0$ ) teng bo'lsa,  $kT$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) ko'rinishdagi sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.  $f(x)$  funksiyaning musbat davrlari to'plamini  $M$  deb belgilaylik. Agar

$$T_0 = \inf M$$

ham  $f(x)$  funksiyaning davri, ya'ni  $T_0 \in M$  bo'lsa, uni eng kichik musbat davr (asosiy davr) deyiladi. Eng kichik musbat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Misollar ko'raylik. 1).  $f(x) = \sin x$  funksiya davriy funksiya. Uning davrlari to'plami  $\{2\pi k: k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$  bo'lib, eng kichik musbat davri  $T_0 = 2\pi$  bo'ladi.

2).  $f(x) = \{x\}$  funksiya ko'raylik, bunda  $\{x\}$  – qaralayotgan  $x$  ning kasr qismi:  $\{x\} = x - [x]$  bu davriy funksiya. Uning davrlari to'plami  $\{m: m = \pm 1, \pm 2, \dots\}$  bo'lib, eng kichik musbat davri  $T_0 = 1$  bo'ladi.

3).  $f(x) = C$  bo'lsin, bunda  $C = \text{const}$ . Bu holda eng kichik musbat davr mavjud emas.

4). Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ni qaraylik. Aytaylik,  $T$  – biror ratsional son ( $T \neq 0$ ) bo'lsin.

U holda

$$x + T = \begin{cases} \text{ratsional son,} & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ \text{irratsional son,} & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Demak,

$$D(x + T) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib,  $\forall x$  uchun  $T$  ratsional son bo'lganda

$$D(x + T) = D(x) \quad (*)$$

bo'ladi. Demak, Dirixle funksiyasi davriy funksiya, ixtiyoriy  $T \neq 0$  ratsional son bu funksiyaning davri bo'ladi.

Endi biror  $T$  irratsional sonni olaylik. Unda  $\forall x$  uchun  $f(x+T) = f(x)$  munosabat o'rinli bo'lmaydi, chunki  $x$  ratsional son bo'lganda  $x + T$  irratsional son bo'lib,  $D(x) = 1$ ,  $D(x + T) = 0$ . Demak, irratsional sonlar Dirixle funksiyasi uchun davr emas. Binobarin, Dirixle funksiyasining davrlari to'plami  $Q \setminus \{0\}$  dan iborat. Eng kichik musbat davr esa mavjud emas – barcha musbat ratsional sonlar to'plamining infimumi nol bo'lib, nol esa  $Q \setminus \{0\}$  ga tegishli emas.

## 5. Monoton funksiya. Teskari funksiya. Murakkab funksiya.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**10.1.3–tarif.** Agar  $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$  uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda *o'suvchi*,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda *qat'iy o'suvchi* deyiladi.

**10.1.4–ta'rif.** Agar  $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X$  uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda *kamayuvchi*,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda *qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar *monoton funksiyalar* deb ataladi.

2–misol.  $f(x) = x^3$  funksiya  $X = R$  da qat'iy o'suvchi bo'lishi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Darhaqiqat,  $\forall x_1 \in R, \forall x_2 \in R$  nuqtalar olib,  $x_1 < x_2$  bo'lsin deb qaraylik.

U holda

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\ &= (x_2 - x_1)\left[\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2\right] > 0 \end{aligned}$$

bo'lib,

$$f(x_2) > f(x_1)$$

bo'ladi. Damak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lishi topildi.

$X \subset R$  to'plamda  $y = f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lib,  $Y_f$  esa funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin:  $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$ . Endi  $Y_f$  to'plamdan olingan har bir  $y$  ga  $X$  to'plamdan faqat bitta ( $f(x) = y$  bo'lgan)  $x$  ni mos qo'yish mumkin bo'lsin. Bu holda  $Y_f$  to'plamdan olingan har bir  $y$  ga  $X$  to'plamda bitta  $x$  mos qo'yilishini ifodalaydigan funksiyaga kelamiz. Odatda, bu funksiya  $y = f(x)$  ga nisbatan *teskari funksiya* deyiladi va uni  $x = f^{-1}(y)$  kabi belgilanadi. Demak,  $x = f^{-1}(y)$  shunday funksiyaki,  $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$  bo'ladi.

Agar  $x = f^{-1}(y)$  funksiya  $y = f(x)$  ga nisbatan teskari funksiya bo'lsa,  $y = f(x)$  funksiya  $x = f^{-1}(y)$  ga nisbatan teskari bo'ladi. Shuning uchun ham  $y = f(x)$ ,  $x = f^{-1}(y)$  funksiyalar *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi.

Ravshanki, quyidagi

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

xossalar o'rinli bo'ladi.

Masalan,  $f(x) = 2x + 1$  funksiyaning  $[0; 1]$  oraliqdagi qiymatlari  $[1; 3]$  oraliqni tashkil etadi va  $[1; 3]$  oraliqda aniqlangan  $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$  funksiya berilgan  $y = 2x - 1$  funksiya teskari funksiya bo'ladi.

Endi murakkab funksiya tushunchasi bilan tanishamiz.

$y = f(x)$  funksiya  $X$  sohada aniqlangan bo'lib,  $Y_f$  esa funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin:  $Y_f = \{f(x): x \in X\}$ . So'ngra  $Y_f$  to'plamda o'z navbatida biror  $z = \phi(y)$  funksiya berilgan bo'lsin. Natijada  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  ga  $Y_f$  to'plamdan bitta  $y$  ( $f: x \rightarrow y$ ) son va  $Y_f$  to'plamdan olingan bunday  $y$  songa bitta  $z$  ( $\phi: y \rightarrow z$ ) son mos qo'yiladi:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\phi} z.$$

Demak,  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  ga bitta  $z$  son mos qo'yiladi.

Odatda, bunday holda  $f$  va  $\phi$  funksiyalarning *murakkab funksiyasi* berilgan deyiladi va  $z = \phi(f(x))$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $z = \sqrt{x+1}$  funksiyaning qaraylik. Bu funksiya  $z = \sqrt{y}$ ,  $y = x+1$  funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.  $y = x+1$  funksiya  $R = (-\infty, +\infty)$  da aniqlangan bo'lib,  $z = \sqrt{y}$  funksiya esa  $y \geq 0$  ya'ni  $x+1 \geq 0$  da mavjud bo'ladi. Demak,  $z = \sqrt{x+1}$  murakkab funksiya ushbu  $X = \{x: x \in R, x \geq -1\}$  to'plamda aniqlangan.

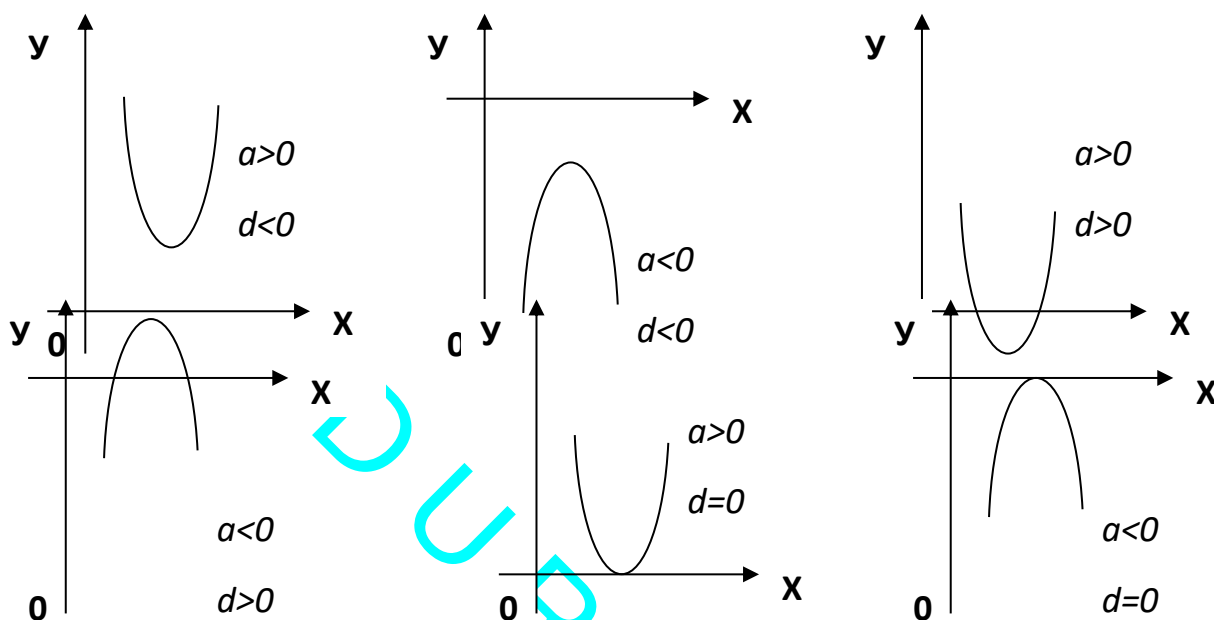
## 10.2-§. Elementar funksiyalar

Ma'lumki, o'rta maktab matematika kursida elementar funksiyalar va ularning ba'zi bir xossalari o'rganiladi.

Funksiya–matematik analizda o'rganiladigan asosiy obyekt bo'lgani uchun biz ushbu paragrafda elementar funksiyalarga to'xtalamiz.

*Elementar funksiyalar* sinfi asosan erkli o'zgaruvchi  $x \mapsto (x \in R)$  hamda o'zgarmas sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish hamda logarifmlash amallarini chekli

sonda bajarish natijasida hosil bo'ladi. Bu hosil bo'lgan ifodalarning mavjudligi haqiqiy sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati, shuningdek, haqiqiy sonning haqiqiy darajasi, haqiqiy son logarifmining mavjudligidan kelib chiqadi.



5-chizma

### 1. Butun va kasr ratsional funksiyalar.

Ushbu

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

ko'rinishidagi funksiya (bunda  $n \in \mathbb{N}$  va  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  o'zgarmas sonlar) butun ratsional funksiya deb ataladi. Butun ratsional funksiya ko'pxad deb

ham yuritiladi. Butun ratsional funksiya  $R = (-\infty, +\infty)$  da aniqlangan. Xususan,  $y = ax + b$  chiziqli funksiya va  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat uchhadlar butun ratsional funksiyalardir. Ma'lumki, chiziqli funksiyaning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni, kvadrat uchhadning grafigi esa parabolani ifodalaydi. Kvadrat uchhad grafigining holati  $a$  koeffitsient hamda diskriminant  $d = b^2 - 4ac$  ning ishoralariga bog'liq bo'ladi. 5-chizmada parabolaning tekislikda turlicha joylanish holatlari ko'rsatilgan.

Ikki butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

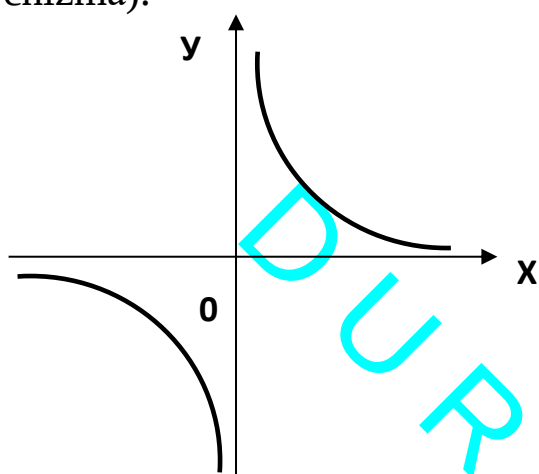
$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

funksiya kasr ratsional funksiya deb ataladi. Kasr ratsional funksiya

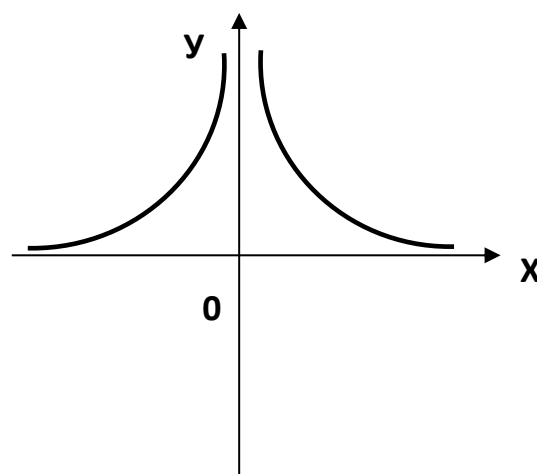
$X = R \setminus \{x: x \in R, b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m = 0 \leftrightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow\}$  to'plamda, ya'ni maxrajini nolga aylantiruvchi nuqtalardan farqli bo'lgan barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamda aniqlangan.

Xususan,  $y = \frac{1}{x}$  va  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  lar kasr ratsional funksiyalar bo'ladi.

Ma'lumki,  $y = \frac{1}{x}$  funksiya grafigi teng yonli giperboladan iborat (6-chizma).



6-chizma



7-chizma

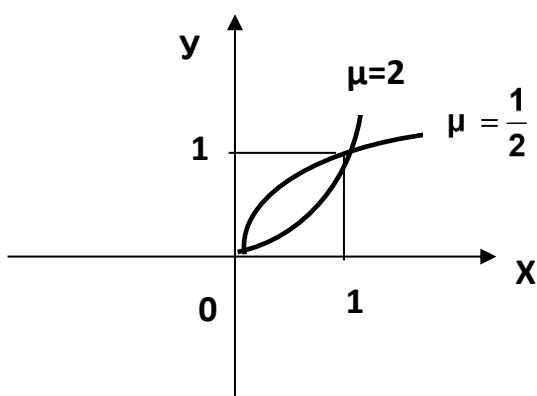
$y = \frac{1}{x^2}$  funksiyaning grafigi 7-chizmada tasvirlangan.

**2. Darajali funksiya.** Ushbu

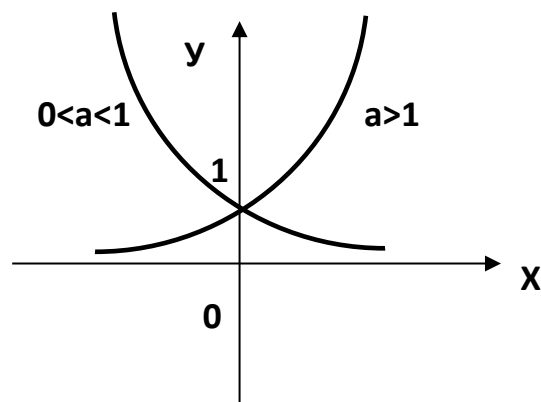
$$y = x^\mu$$

ko'rinishdagi funksiya *darajali funksiya* deb ataladi, bunda  $\mu$  ixtiyoriy o'z-garmas haqiqiy son. Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi  $\mu$  ga bog'liq.  $\mu$  butun son bo'lganda ratsional funksiya ega bo'lamiz.

Agar  $\mu$  ratsional, masalan  $\mu = \frac{1}{m} > 0$ . bo'lsa,  $m$  juft bo'lganda  $x^\mu = x^{\frac{1}{m}}$  funksiyaning aniqlanish sohasi  $X = [0, +\infty)$ , toq bo'lganda esa funksiyaning aniqlanish sohasi  $R = (-\infty, +\infty)$  oraliqdan iborat bo'ladi.  $\mu$  irratsional bo'lganda  $x > 0$  deb olinadi. Darajali funksiyaning grafigi  $\mu > 0$  bo'lganda har doim tekislikning  $(0,0)$  hamda  $(1,1)$  nuqtalaridan o'tadi (7-chizma).



8-chizma



9-chizma

Darajali funksiya  $y = x^\mu$  ushbu  $(0, \infty)$  oraliqda  $\mu > 0$  bo'lganda o'suvchi,  $\mu < 0$  bo'lganda esa kamayuvchi bo'ladi.

### 3. Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

$$y = a^x$$

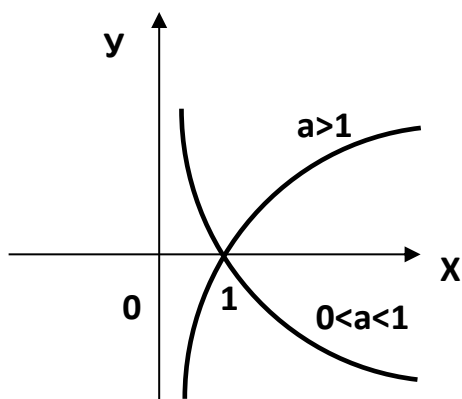
ko'rinishdagi funksiya *ko'rsatkichli funksiya* deb ataladi, bunda  $a > 0$  va  $a \neq 1$ . Ko'rsatkichli funksiyaning aniqlanish sohasi  $R$  to'plamdan iborat bo'lib, funksiya qiymatlari esa har doim musbat bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi  $OX$  o'qidan yuqorida joylashgan va doim tekislikning  $(0,1)$  nuqtasidan o'tadi (8-chizma).

### 4. Logarifmik funksiya. Ushbu

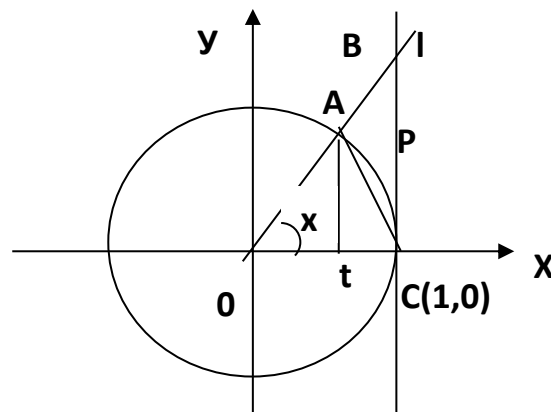
$$y = \log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya *logarifmik funksiya* deb ataladi, bunda  $a > 0$  va  $a \neq 1$ . Logarifmik funksiya  $X = (0, +\infty)$  intervalda aniqlangan. Bu funksiyaning grafigi  $OY$  o'qini o'ng tomonida joylashgan va doim tekislikning  $(1,0)$  nuqtasidan o'tadi (9-chizma).

**5. Trigonometrik funksiyalar.**  $tOY$  tekislikda, markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng bo'lgan  $t^2 + y^2 = 1$  aylanani olaylik (11-chizma). Bu aylaning  $C(1,0)$  nuqtasidan unga  $CP$  urinma o'tkazaylik. Koordinata boshidan chiqqan va  $Ot$  o'q bilan  $x$  burchak tashkil etgan  $Ol$  nur aylanani  $A$  nuqtada,  $CP$  urinmani  $B$  nuqtada kesadi. Bu  $A$  va  $B$  nuqtalarning koordinatalari mos ravishda  $(t, y_1)$ ,  $(1, y_2)$  bo'lsin. Ravshanki,  $A$  va  $B$  nuqtalarning o'ri  $x$  burchakka bog'liq.



10-chizma



11-chizma

Demak, har bir  $x \in R$  son uchun  $Ot$  o'q bilan  $x$  burchak tashkil etadigan  $Ol$  nur o'tkazilsa, bu nurning aylana va urinma bilan kesishgan nuqtalarining koordinatalari  $t, y_1, y_2$  lar  $x$  ga bog'liq. Har bir  $x$  ga shu koordinatalarini mos qo'yaylik:

$$f: x \rightarrow t,$$

$$\phi: x \rightarrow y_1,$$

$$\varphi: x \rightarrow y_2.$$

Odatda,  $\phi: x \rightarrow y_1$  ga  $\sin x$ ,  $f: x \rightarrow t$  ga  $\cos x$ ,  $\varphi: x \rightarrow y_2$  ga  $\tan x$  funksiya deb ataladi:

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \tan x, \quad t = \cos x.$$

Bunda  $y_1 = \sin x$ ,  $t = \cos x$  funksiyalar  $R$  da aniqlangan  $2\pi$  davrli funksiya-lar bo'lib, ular uchun  $\forall x \in R$  da

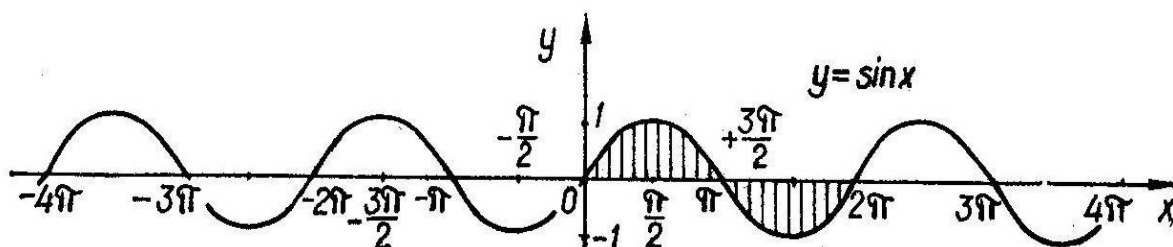
$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.  $y_2 = \tan x$  funksiya  $X = R \setminus \{x: x \in R, x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots\}$  to'plamda aniqlangan.

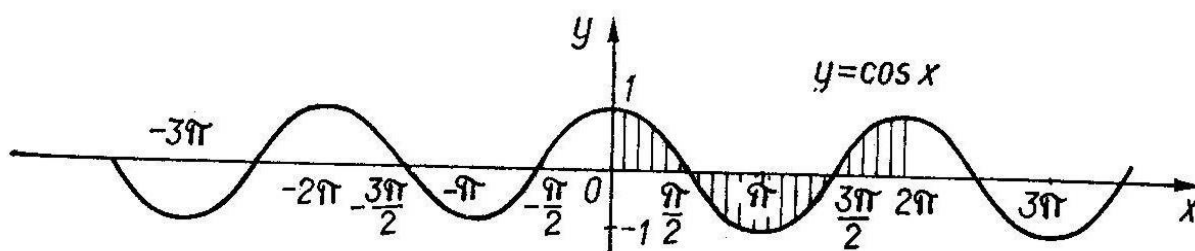
Asosiy  $\sin x, \cos x, \tan x$  va  $\cot x$  funksiyalarning grafiklari 11-chizmada tasvirlangan.

Odatda  $\cot x, \sec x, \csc x$  funksiyalar  $\sin x, \cos x, \tan x$  funksiyalar o'rqali quyidagicha aniqlanadi:

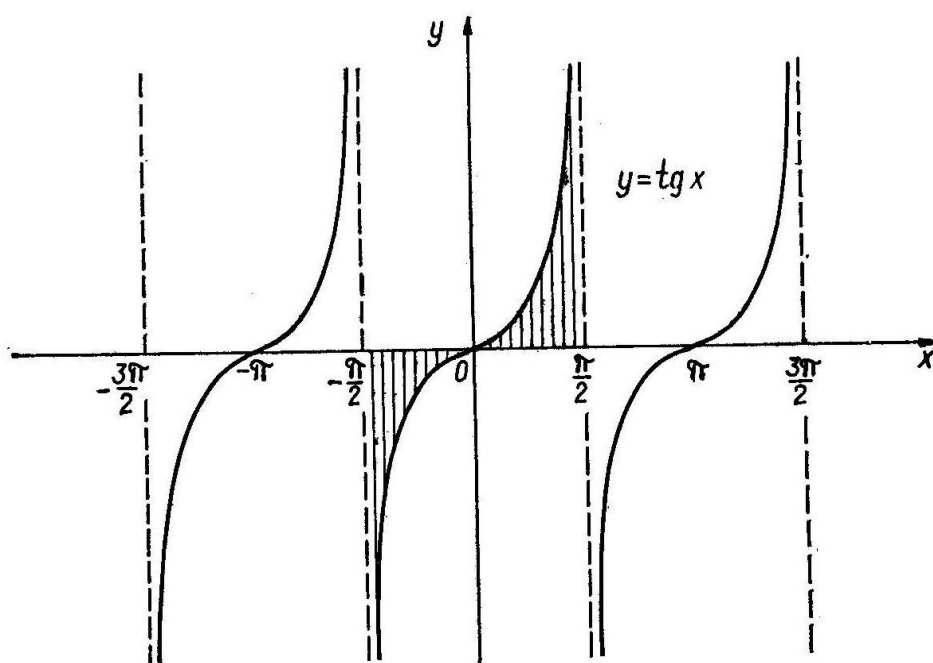
$$a) \cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$



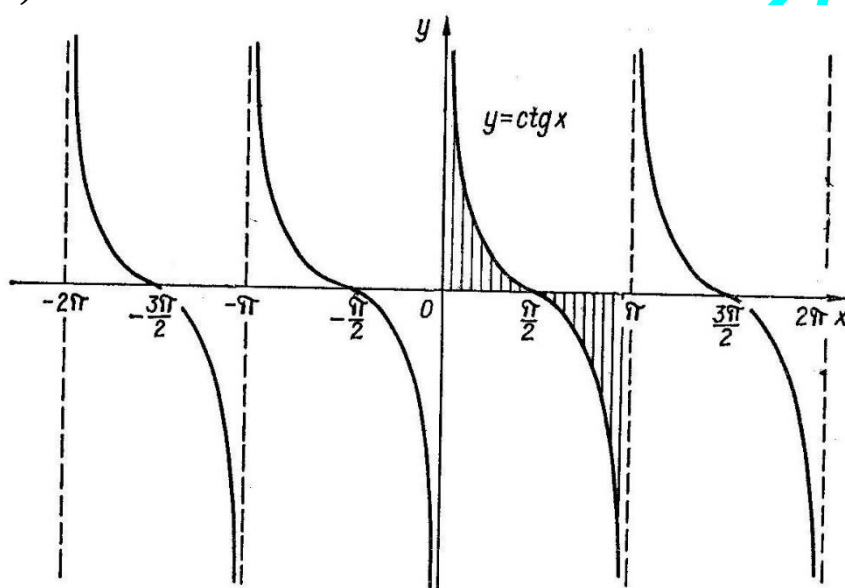
b)



e)



d)



///  
A

12-chizma

**6. Giperbolik funksiyalar.** Ushbu  $y = e^x$  ko'rsatkichli funksiya yordamida tuzilgan quyidagi

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

funksiyalar *giperbolik* (mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik cosinus, giperbolik tangens, giperbolik kotangens) *funksiyalar* deb ataladi va ular  $shx, chx, thx, ctgx$  kabi belgilanadi:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad ctgx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$shx, thx, chx$  funksiyalar  $R$  da,  $ctgx$  funksiya esa  $X = R \setminus \{0\}$  to'plamda aniqlangan.

Giperbolik funksiyalar orasida ham trigonometrik funksiyalar orasidagi bog'lanishga o'xshash munosabatlar mavjud. Masalan,

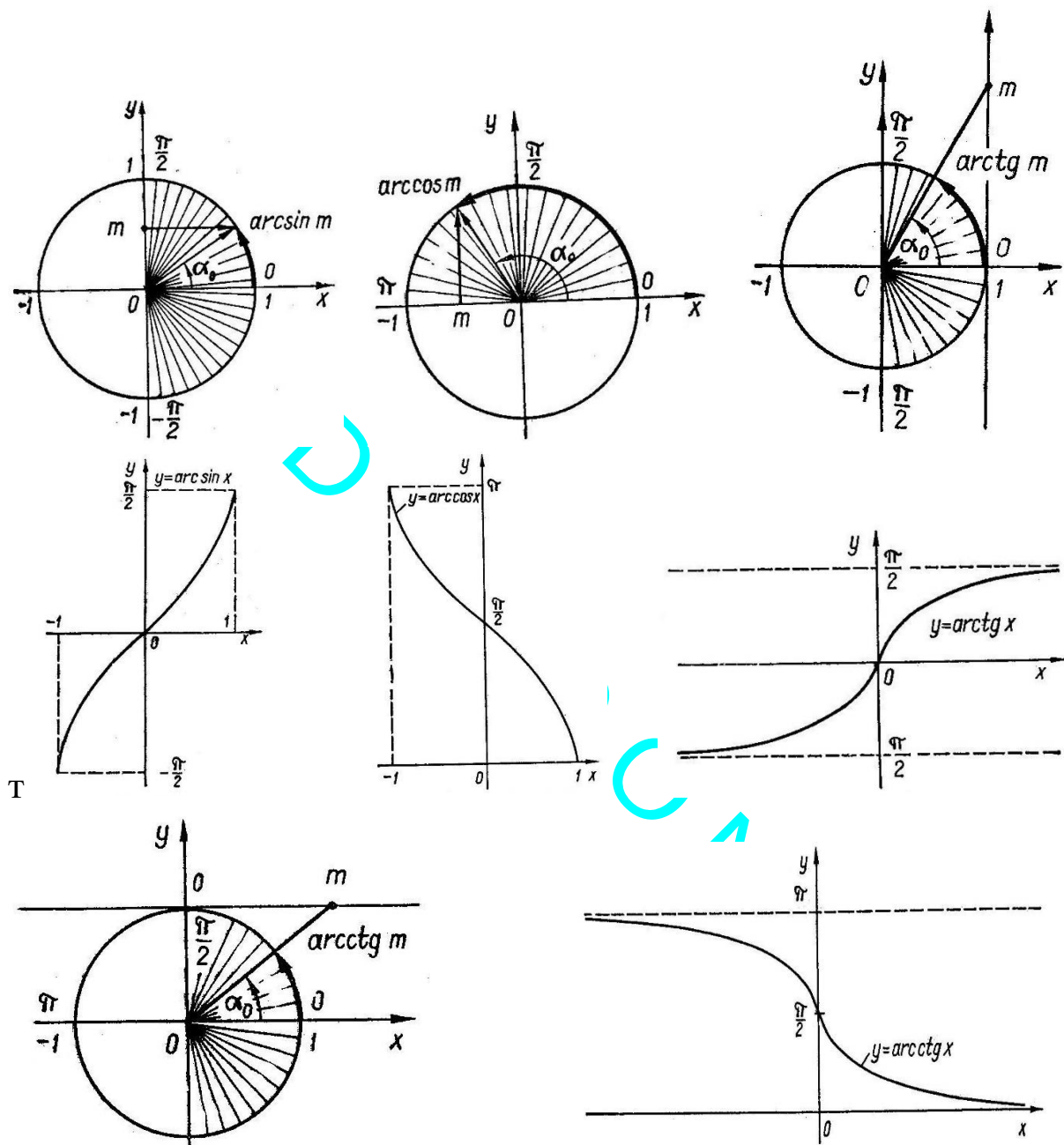
$$thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}, \quad sh2x = 2shxchx$$

**7. Teskari trigonometrik funksiyalar.** Ma'lumki,  $y = \sin x$  funksiya  $R$  da aniqlangan bo'lib, uning qiymati  $\{y: y \in R, -1 \leq y \leq 1\}$  to'plamni tashkil etadi. Agar biz argument  $x$  ning  $x \in X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  segmentdagi qiy-matlarini qarasak,  $y = \sin x$  funksiyaning qiymatlari ham  $Y = [-1, 1]$  segment-da o'zgarib, bunda  $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  to'plamning elementlari  $Y = [-1, 1]$  to'plam-ning elementlari bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Bu hol  $y = \sin x$  funksiyaga nisbatan teskari funksiyaning qarash imkonini beradi.  $y = \sin x$  funksiyaga teskari funksiya  $y = \arcsin x$  kabi belgilanadi. Demak,  $y = \arcsin x$  funksiya  $X = [-1, 1]$  to'plamda aniqlangan bo'lib, o'zgarish sohasi  $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  to'plamni tashkil etadi.

Xuddi shunga o'xshash,  $y = \cos x, y = \lg x, y = ctgx$  funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar ham teskari trigonometrik funksiyalar deyilib, ular mos ravishda  $y = \arccos x, y = \arctg x, y = \text{arcctg} x$  kabi belgilanadi.

$y = \arccos x$  funksiya  $X = [-1, 1]$  da aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari  $Y = [0, \pi]$  to'plamdan iborat.  $y = \arctg x, y = \text{arcctg} x$  funksiyalar  $R$  da aniqlangan. Bu funksiyalarning o'zgarish sohalari mos ravishda  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  va  $(0, \pi)$  to'plamdan iborat.

13–chizmalarda teskari trigonometrik funksiyalarning grafigi tasvirlangan.



13–chizma

Endi funksiya tushinchasiga doir ba’zi misollarni ko’rsatamiz.

3–misol. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{[x] - x}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

*Yechish.* Ravshanki,  $\forall x \in \mathbb{R}$  uchun

$$[x] \leq x$$

bo'ladi. Demak,  $\sqrt{[x] - x}$  ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun  $[x] = x$  ya'ni  $x = k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) bo'lishi kerak. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi  $X = \mathbb{Z}$  bo'ladi.

4-misol. Ushbu

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

funksiyaning  $(0, +\infty)$  oraliqdagi qiymatlari orasida eng kichigi topilsin.

*Yechish.* Berilgan funksiya uchun

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{(x-1)^2 + 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2,$$

$$f(1) = 2$$

bo'lib  $\forall x \in (0, +\infty)$  da  $f(x) \geq 2$  bo'ladi. Demak,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  funksiyaning  $(0, +\infty)$  dagi eng kichik qiymati 2 ga teng.

5-misol. Ushbu

$$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (a > 0, a \neq 1)$$

funksiyaning toq funksiya ekani ko'rsatilsin.

*Yechish.* Bu funksiya  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  da aniqlangan. Berilgan funksiyaning  $-x$  nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

Demak,  $f(x)$  toq funksiya.

6-misol. Ushbu  $f(x) = a \sin(bx + c)$ ,  $a, b, c$ —o'zgarmas sonlar ( $b \neq 0$ )

funksiyaning davri topilsin.

*Yechish.* Davriy funksiya ta'rifidan foydalanib,

$$a \sin[b(x + T) + c] = a \sin(bx + c)$$

deymiz. Unda

$$2 \sin \frac{bT}{2} \cos(bx + c + \frac{bT}{2}) = 0$$

bo'lib,

$$\sin \frac{bT}{2} = 0$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikdan topamiz:

$$\frac{bT}{2} = k\pi \text{ ya'ni } T = \frac{2k\pi}{b} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Topilgan  $T$  ning qiymatlari orasida eng kichik musbati

$$T_0 = \frac{2\pi}{b}$$

bo'lib,  $T_0$  berilgan funksiyaning davri bo'ladi.

7-misol. Agar

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

bo'lsa,  $f(f(f(x)))$  topilsin.

*Yechish.* Ravshanki,  $f$  funksiya  $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  to'plamda aniqlangan.

Murakkab funksiya tushunchasidan foydalanib topamiz:

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x}$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x$$

Bu funksiya  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$  to'plamda aniqlangan.

### 10.3-§. Funksiyaning limiti

Biz yuqorida natural argumentli funksiya – sonlar ketma-ketligi va uning limitini o'rgandik. Endi argumenti haqiqiy son bo'lgan funksiya limitini qaraymiz. Avvalo sonli to'plamning limit nuqtasi tushunchasi bilan tanishamiz.

#### 1. To'plamning limit nuqtasi. Ma'lumki,

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam  $a$  nuqtaning atrofi ( $\varepsilon$ -atrofi) deb atalar edi. Shunga o'xshash ushbu

$$U_\varepsilon^+(a) = \{x : x \in R, a < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam  $a$  nuqtaning o'ng atrofi,

$$U_\varepsilon^-(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a\}$$

to'plam  $a$  nuqtaning chap atrofi,

$$U_c(\infty) = \{x : x \in R, |x| > c\},$$

$$U_c(+\infty) = \{x : x \in R, x > c\},$$

$$U_c(-\infty) = \{x : x \in R, x < -c\}$$

to'plamlar esa mos ravishda  $\infty$ ,  $+\infty$  va  $-\infty$  "nuqta" larning *atrofi* deb ataladi. Yuqorida keltirilgan  $\varepsilon$  va  $c$  lar ixtiyoriy musbat haqiqiy sonlar.

$X$  biror sonli to'plam,  $a$  biror nuqta bo'lsin.

**10.3.1–ta'rif.** Agar  $a$  nuqtaning har bir atrofida  $X$  to'plamning  $a$  dan farqli kamida bitta nuqtasi mavjud, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq a, : |x - a| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $a$  nuqta  $X$  to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Misollar qaraylik. 1). Ushbu  $[0,1] = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$  to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2). Ushbu  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  to'plam limit nuqtaga ega emas.

3). Ushbu  $(0,1) = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$  to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi va yana  $x=0, x=1$  nuqtalar ham  $(0,1)$  uchun limit nuqtalardir.

4).  $F = [0,1]$  segment hamda 2 sonidan iborat to'plam bo'lsin, ya'ni  $F = [0,1] \cup \{2\}$ . Bu to'plam uchun  $x=2$  limit nuqta emas.

Agar  $a$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsa,  $x$  to'plam nuqta-laridan  $a$  ga intiluvchi  $x_n$  ( $x_n \in X, x_n \neq a, n = 1, 2, \dots$ ) ketma–ketlik tuzish mumkin.

To'plamning limit nuqtasi ta'rifiga binoan:

$$\varepsilon = 1 \quad \text{uchun} \quad \exists x_1 \in X, x_1 \neq a : |x_1 - a| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{uchun} \quad \exists x_2 \in X, x_2 \neq a : |x_2 - a| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \quad \text{uchun} \quad \exists x_3 \in X, x_3 \neq a : |x_3 - a| < \frac{1}{3},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \text{uchun} \quad \exists x_n \in X, x_n \neq a : |x_n - a| < \frac{1}{n},$$

bo'ladi. Natijada  $x_n$  ketma–ketlik hosil bo'lib,  $\forall n \in N$  uchun

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bu mulohazalardan ko'rinadiki,  $a$  ga intiluvchi ketma–ketliklarni ko'plab tuzish mumkin.

**10.3.2–ta’rif.** Agar  $a$  nuqtaning har bir o’ng (chap) atrofida  $x$  to’p- lamning  $a$  dan farqli kamida bitta nuqtasi bo’lsa,  $a$  nuqta  $x$  ning o’ng (chap) *limit nuqtasi* deb ataladi.

**10.3.3–ta’rif.** Agar har bir  $U_\varepsilon(\infty)$  atrofida  $x$  to’plamning kamida bitta nuqtasi bo’lsa,  $\infty$  “nuqta”  $x$  to’plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Shuningdek,  $+\infty$ ;  $-\infty$  “nuqta” larning limit nuqta bo’lishi ham yuqoridagi singari ta’riflanadi.

Masalan,  $+\infty$  “nuqta”  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  to’plamning limit nuqtasi bo’ladi.

**2. Funksiya limitining ta’rifi.**  $X \subset R$  to’plam berilgan bo’lib,  $a$  nuqta uning limit nuqtasi bo’lsin. Bu to’plamda  $f(x)$  funksiya aniqlangan deylik. Modomiki,  $a$  nuqta  $x$  ning limit nuqtasi ekan,  $x$  to’plamning nuqtalaridan  $a$  ga intiluvchi turli,  $(x_n \in X, x_n \neq a, n=1, 2, 3, \dots)$  ketma–ketliklar tuzish mumkin:  $\lim x_n = a$ . Ravshanki,  $x_n \in X$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Shuning uchun bu nuqtalarda ham  $f(x)$  funksiya aniqlangan. Natijada  $\{x_n\}$  ketma–ketlik bilan birga  $f(x_n)$  :

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

sonlar ketma–ketligiga ham ega bo’lamiz.

**10.3.4–ta’rif.** Agar  $x$  to’plamning nuqtalaridan tuzilgan,  $a$  ga intiluvchi har qanday  $x_n$  ( $x_n \neq a, n=1, 2, 3, \dots$ ) ketma–ketlik olganimizda ham mos  $f(x_n)$  ketma–ketlik hamma vaqt yagona  $b$  (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu  $b$  ga  $f(x)$  funksiyaning  *$a$  nuqtadagi limiti* deb ataladi. Funksdiya limiti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  kabi belgilanadi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta’rifni *Geyne ta’rifi* deb ataladi.

Bazan  $b$  ni  $f(x)$  ning  $x \rightarrow a$  dagi limiti deyiladi va

$$x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow b$$

kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta’rifning ushbu muhim tomoniga o’quvchining etiborini jalb qilaylik:  $a$  ga intiluvchi har qanday  $x_n$  ( $x_n \neq a, n=1, 2, 3, \dots$ ) ketma–ketlik uchun  $x_n \rightarrow a$  da  $f(x_n)$  ketma–ketlikning limiti olingan  $x_n$  ketma–ketlikka bog’liq bo’lmasligi kerak.

8–misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti 1 ga teng ekani ko'rsatilsin.

Nolga intiluvchi ixtiyoriy  $x_n$  ketma-ketlik olaylik:  $\lim x_n = 0$ .

U holda funksiya qiymatlaridan iborat ketma-ketlik

$$f(x_n) = \frac{1}{1+x_n^2}$$

bo'ladi. Ravshanki,  $x_n \rightarrow 0$  da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

9-misol. Quyidagi

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

funksiyaning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti mavjud emasligi ko'rsatilsin.

Haqiqattan, nolga intiluvchi ikkita turli

$$x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}, \quad x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$$

ketma-ketlikni olaylik. Bunda

$$f(x'_n) = \sin \frac{4n-1}{2} \pi = -1, \quad f(x''_n) = \sin \frac{4n+1}{2} \pi = 1$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = 1$$

bo'ladi. Bu esa  $\sin \frac{1}{x}$  funksiyaning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti mavjud emasligini ko'rsatadi.

Funksiya limitini boshqacha ham ta'riflash mumkin.

**10.3.5-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argu-ment  $x$  ning  $0 < |x-a| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x)-b| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtadagi limiti deb ataladi.

**10.3.6-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argu-ment  $x$  ning  $0 < |x-a| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x)| > \varepsilon$  ( $f(x) > \varepsilon$ ,  $f(x) < -\varepsilon$ ) bo'lsa,  $f(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtadagi limiti  $\infty$  ( $+\infty$ ;  $-\infty$ ) deyiladi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta'rifni *Koshi ta'rifi* deb ataladi.

10–misol. Ushbu  $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$  funksiyaning  $x \rightarrow 5$  dagi limiti  $\frac{1}{10}$  bo'lishi isbot qilinsin.

$\forall \varepsilon > 0$  son olaylik. Bu  $\varepsilon$  ga ko'ra  $\delta$  ni  $\delta = \frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$  deb olsak, u holda  $0 < |x-5| < \delta$  bo'lganda

$$\left| \frac{x-5}{x^2-25} - \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} \left| \frac{x-5}{x+5} \right| \leq \frac{|x-5|}{10(10-|x-5|)} \leq \frac{\delta}{10-\delta} < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$$

kelib chiqadi.

11–misol. Ushbu  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  funksiya uchun  $x \rightarrow 1$  da  $f(x) \rightarrow \infty$  bo'lishi ko'rsatilsin.

$\forall \varepsilon > 0$  son uchun  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$  deb olinsa, u holda  $0 < |x-1| < \delta$  tengsizlikning bajarilishidan

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{x-1} \right| > \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ .

**3. Funksiyaning bir tomonli limitlari.**  $X$  biror haqiqiy sonlar to'plami bo'lib,  $a$  uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda  $f(x)$  funksiya aniqlangan deylik.

**10.3.7–ta'rif (Geyne).** Agar  $X$  to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi  $a$  dan katta (kichik) bo'lib,  $a$  ga intiluvchi har qanday  $x_n$  ketma-ketlik olganimizda ham mos  $f(x_n)$  ketma-ketlik hamma vaqt yagona  $b$  ga intilsa, shu  $b$  ni  $f(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

**10.3.8–ta'rif (Koshi).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argument  $x$  ning  $a < x < a + \delta$  ( $a - \delta < x < a$ ) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x) - b| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

Funksiyaning o'ng (chap) limiti quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \text{ yoki } f(a+0) = b \quad \left( \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \text{ yoki } f(a-0) = b \right).$$

Agar  $a=0$  bo'lsa,  $x \rightarrow 0+0$  ( $x \rightarrow 0-0$ ) o'rniga  $x \rightarrow +0$  ( $x \rightarrow -0$ ) deb yoziladi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari, uning *bir tomonli limitlari* deyiladi.

12-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

funksiyaning o'ng va chap limitlari topilsin.

Har biri nolga intiluvchi ikkita

$$\begin{aligned} x'_n : x'_n &\rightarrow 0 \quad (x'_n > 0, n=1, 2, 3, \dots), \\ x''_n : x''_n &\rightarrow 0 \quad (x''_n < 0, n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

ketma-ketlikni olaylik. Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x'_n) = \frac{x'_n}{x'_n} = 1 \rightarrow 1, \quad f(x''_n) = \frac{x''_n}{-x''_n} = -1 \rightarrow -1$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = -1.$$

Endi  $x \rightarrow \infty$  da funksiya limiti tushunchasini keltiramiz.

$X$  to'plam berilgan bo'lib,  $\infty$  ( $+\infty; -\infty$ ) uning limit "nuqta"si bo'lsin. Bu to'plamda  $f(x)$  funksiya aniqlangan deylik.

**10.3.7'-ta'rif (Geyne).** Agar  $X$  to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta (musbat cheksiz katta, manfiy cheksiz katta)  $x_n$  ketma-ketlik olganimizda ham mos  $f(x_n)$  ketma-ketlik hamma vaqt yagona  $b$  ga intilsa, shu  $b$  ni  $f(x)$  funksiyaning  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty$ ) *dagi limiti* deb ataladi.

**10.3.8'-tarif (Koshi).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argument  $x$  ning  $|x| > \delta$  ( $x > \delta; x < -\delta$ ) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida  $|f(x) - b| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty$ ) *dagi limiti* deb ataladi. Funksiya limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \right)$$

kabi belgilanadi.

Biz funksiya limitining ikki hil, Geyne va Koshi ta'riflarini keltirdik. Ularning teng kuchliligini isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

13-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (10.1)$$

tenglik isbotlansin.

Ushbu

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

tengsizliklar o'rinli. Bu maktab matematikasidan ma'lum. Qaralayotgan oralik-da  $\sin x > 0$  bo'lgani uchun bu tengsizliklarni

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Undan

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad (10.2)$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Biz (10.2) tengsizliklarni ixtiyoriy  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  uchun isbot qildik.

Ushbu  $\frac{\sin x}{x}$  ( $x \neq 0$ ) va  $\cos x$  funksiyaning juftligidan bu tengsizliklarning barcha  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$  uchun to'g'riligini topamiz.

Shu bilan birga  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  da  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \frac{|x|}{2} = |x|$  tengsizlikning o'rinli bo'lishini e'tiborga olsak, yuqoridagi (10.2) tengsizliklar quyidagi

$$0 < \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|$$

ko'rinishga kelishini topamiz.

Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son berilganda ham  $\delta > 0$  deb  $\varepsilon$  va  $\frac{\pi}{2}$  sonlarning kichigi olinsa, argument  $x$  ning  $0 < |x| < \delta$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa funksiya limitining Koshi ta'rifiga ko'ra (10.1) limitning to'g'riligini anglatadi.

14-misol. Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (10.3)$$

tenglik isbotlansin (bunda  $e = 2,71\dots$ ).

Buning uchun  $+\infty$  ga intiluvchi ixtiyoriy  $x_n$  ketma-ketlikni olaylik. Bu holda barcha  $k=1,2,3,\dots$  lar uchun  $x_k > 1$  deb qarash mumkin. Har bir  $x_k$  ning butun qismini  $n_k$  orqali belgilab, ushbu  $[x_k] = n_k \quad (k=1,2,\dots)$   $+\infty$  ga intiluvchi  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  natural sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

Ma'lumki,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bu munosabatdan

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

ekani kelib chiqadi.

Endi ushbu

$$[x_k] = n_k \Rightarrow n_k \leq x_k < n_k + 1 \Rightarrow \frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + \frac{1}{x_k} \leq 1 + \frac{1}{n_k}$$

munosabatlar o'rinli bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} \quad (10.4)$$

Biroq

$$\begin{aligned} \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} &= \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{-1} \right) = e, \\ \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} &= \lim_{n_k \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \right) = e \end{aligned}$$

limitlar o'rinli bo'lgani uchun (10.4) tengsizliklarda (bunda  $x_k \rightarrow +\infty$ ) limitga o'tsak, izlangan (10.3) limit kelib chiqadi.

Endi  $-\infty$  ga intiluvchi ixtiyoriy  $x_n$  ketma-ketlikni olaylik. Bunda  $x_k < -1 \quad (k=1,2,\dots)$  deb qarash mumkin. Agar  $y_k = -x_k$  deb belgilasak, unda  $y_k \rightarrow +\infty$  va  $y_k > 1 \quad (k=1,2,\dots)$  bo'ladi.

Ravshanki,

$$\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1 - \frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k - 1}\right)^{y_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k}.$$

Undan

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \lim_{y_k \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k - 1} \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right) \right) = e.$$

Shunday qilib,  $-\infty$  ga intiluvchi har qanday  $x_k$  ketma-ketlik olinganda ham  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$f(x_k) = \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k}$$

ketma-ketlik hamma vaqt  $e$  limitga ega ekani isbotlandi. Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

limit ham o'rinli bo'ladi.

**4. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar.** Faraz qilaylik,  $\alpha(x)$  va  $\beta(x)$  funksiyalar  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $a$  shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**10.3.9-ta'rif.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

bo'lsa,  $\alpha(x)$  funksiya  $x \rightarrow a$  da *cheksiz kichik funksiya* deyiladi. Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $\alpha(x) = \sin x$  funksiya cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda berilgan bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bo'lsin. U holda

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

funksiya  $x \rightarrow a$  da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham, funksiya limiti ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

bo'aldi.

Demak, bu holda

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

bo'ladi.

**10.3.10-ta'rif.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa,  $\beta(x)$  funksiya  $x \rightarrow a$  da cheksiz katta funksiya deyiladi. Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $\beta(x) = \frac{1}{x}$  funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

#### 10.4–§. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklar singari qator xossalarga ega. Ularning isbotlari ham yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning mos xossalari isbotlari kabidir.

**1. Tengsizlik belgisi bilan ifodalanadigan xossalar.**  $X \subset R$  to'plam berilgan bo'lib,  $a$  esa uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda  $f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lsin.

1). Agar ushbu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  limit mavjud bo'lib,  $b > p$  ( $b < q$ ) bo'lsa,  $a$  ning yetarli kichik atrofidan olingan  $x$  ( $x \neq a$ ) ning qiymatlarida  $f(x) > p$  ( $f(x) < q$ ) bo'ladi.

Agar ushbu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  limit mavjud bo'lib,  $b > 0$  ( $b < 0$ ) bo'lsa,  $a$  ning yetarli kichik atrofidan olingan  $x$  ( $x \neq 0$ ) ning qiymatlarida  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ) bo'ladi.

2). Agar ushbu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  limit mavjud bo'lsa,  $a$  ning yetarli kichik atrofidan olingan  $x$  ( $x \neq a$ ) ning qiymatlarida  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'ladi.

**1–eslatma.** Funksiya chegaralanganligidan uning chekli limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  funksiya chegaralangan ammo  $x \rightarrow 0$  da bu funksiya limitga ega emas.

$X$  to'plamda  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funksiyalar aniqlangan bo'lib,  $a$  esa  $X$  ning limit nuqtasi bo'lsin.

3). Agar argument  $x$  ning  $a$  nuqtaning biror  $\overset{\circ}{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$  atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  limitlar mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4). Agar argument  $x$  ning  $a$  nuqtaning biror  $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$  atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa va  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  limitlar mavjud bo'lib

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

bo'lsa u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

bo'ladi.

15–misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0)$$

limit topilsin.

Ravshanki, bir tomondan  $x \cdot \cos \frac{1}{x}$  funksiya uchun

$$-|x| \leq x \cdot \cos \frac{1}{x} \leq |x|$$

tengsizliklar bajariladi., ikkinchi tomondan,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Demak, yuqoridagi 4)–xossaga ko'ra  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$

## 2. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar.

$X$  to'plam berilgan bo'lib,  $a$  uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda aniqlangan  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarni ko'raylik.

1). Agar  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar limitga ega bo'lsa,  $f(x) \pm g(x)$  funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2). Agar  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar limitga ega bo'lsa,  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

**Natija.** Agar  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  funksiya limitga ega bo'lsa, unda  $kf(x)$  funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad (k = \text{const})$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3). Agar  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar limitga ega bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

bo'lsa,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

**2-eslatma.** 1) Yuqorida keltirilgan 1) va 2)-chi xossalar qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli bo'lai.

2).  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har birining limitga ega bo'lishi doim kelib chiqavermaydi. Masalan,  $f(x) = 1 - \sin \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$  funksiyalar yig'indisi  $f(x) + g(x) = 1$  bo'lib,  $x \rightarrow 0$  da  $f(x) + g(x) \rightarrow 1$  bo'ladi. Ammo  $x \rightarrow 0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning har biri limitga ega emas.

16-misol. Quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

limit hisoblansin.

Sodda almashtirishlar yordamida topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \dots + (x^n-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)]}{x-1} = \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - 1}{x - 1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## 10.5-§. Funksiya limitining mavjudligi haqidagi teoremlar

**1. Monoton funksiya limitining mavjudligi.**  $X$  to'plam berilgan bo'lib,  $a$  (chekli yoki  $\infty$ ) esa shu to'plamning limit

nuqtasi va barcha  $x \in X$  lar uchun  $x \leq a$  bo'lsin. Bu  $X$  to'plamda aniqlangan  $f(x)$  funksiyani ko'raylik.

**10.5.1–teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, funksiya  $a$  nuqtada chekli limitga ega, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti  $+\infty$  bo'ladi.

$X$  to'plam berilgan bo'lib,  $a$  (chekli yoki  $-\infty$ ) esa shu to'plamning limit nuqtasi va barcha  $x \in X$  lar uchun  $x \geq a$  bo'lsin. Bu  $X$  to'plamda aniqlangan  $f(x)$  funksiyani ko'raylik.

**10.5.2–teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada chekli limitga ega, quyidan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti  $-\infty$  bo'ladi.

Bu teoremlar monoton ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi teoremlar kabi isbotlanadi.

**2. Koshi teoremasi.** Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

$X \subset R$  to'plam berilgan bo'lib,  $a$  uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda berilgan  $f(x)$  funksiyani ko'raylik.

**10.5.1–ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argument  $x$  ning  $0 < |x' - a| < \delta$ ,  $0 < |x'' - a| < \delta$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x'$  va  $x''$  qiymatlarida

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $f(x)$  funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi sharti bajariladi deyiladi.

17–misol. Ushbu  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  funksiya uchun  $x = 0$  nuqtada Koshi shartining bajarilishi ko'rsatilsin.

Haqiqatan  $\forall \varepsilon > 0$  son olib,  $\delta$  ni  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  deb qaralsa, u holda  $x$  ning

$$0 < |x' - 0| = |x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| = |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x'$  va  $x''$  qiymatlari uchun quyida-giga ega bo'lamiz:

$$|f(x'') - f(x')| = \left| x'' \sin \frac{1}{x''} - x' \sin \frac{1}{x'} \right| \leq \left| x'' \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| x' \sin \frac{1}{x'} \right| \leq |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Bu berilgan funksiya uchun  $x=0$  nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi.

$f(x)$  funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi shartining bajarilmasligi quyidagini anglatadi:

$\forall \delta > 0$  son olganimizda ham shunday  $\varepsilon > 0$  va

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi  $x', x''$  ( $x' \in X, x'' \in X$ ) qiymatlar topiladiki,

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

bo'ladi.

Masalan,  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$  funksiya uchun  $x=0$  nuqtada Koshi sharti bajarilmaydi. Haqiqatan,  $\forall \delta > 0$  olganimizda ham  $\varepsilon = 1$  va

$$x' = \frac{1}{2k\pi}, \quad x'' = \frac{1}{(2k+1)\pi}$$

nuqtalar uchun  $k > \left\lceil \frac{1}{2\pi\delta} \right\rceil$  bo'lganda  $|x'| < \delta, |x''| < \delta$  bo'lishi ravshan, ammo

$$|f(x') - f(x'')| = |\cos(2k\pi) - \cos(2k+1)\pi| = 2 > \varepsilon$$

bo'ladi.

**10.5.3–teorema (Koshi).**  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarli.

**Isbot. Zarurligi.**  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  funksiya chekli limitga ega bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga ko'ra  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham  $\frac{\varepsilon}{2}$  ga asosan shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, argument  $x$  ning  $0 < |x - a| < \delta$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xususan, ushbu

$$0 < |x' - a| < \delta \Rightarrow |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 < |x'' - a| < \delta \Rightarrow |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bundan

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa  $f(x)$  funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi.

**Yetarliliigi.**  $f(x)$  funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi sharti bajarilsin, yani  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $x$  ning  $0 < |x' - a| < \delta$ ,  $0 < |x'' - a| < \delta$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x', x''$  qiymatlarida  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu holda  $f(x)$  funksiya  $x \rightarrow a$  da chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz.

$a$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasiligi sababli bu to'plamning nuqtalaridan  $a$  ga yaqinlashuvchi  $x_n$  ( $x_n \neq a$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ketma-ketlik tuzish mumkun bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra yuqorida olingan  $\delta > 0$  son uchun shunday  $n_0 \in N$  son topiladiki, barcha  $n > n_0$  lar va  $\forall m \in N$  uchun  $0 < |x_n - a| < \delta$  va  $0 < |x_{n+m} - a| < \delta$  tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengsizliklarning bajarilishidan esa, shartga ko'ra

$$|f(x_{n+m}) - f(x_n)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $f(x_n)$  fundamental ketma-ketlik. U yaqinlashuvchi. Biz  $f(x_n)$  ketma-ketlik limitini  $b$  bilan belgilaylik,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ . Endi  $X$  to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va  $a$  ga intiluvchi ixtiyoriy  $x'_n$  ketma-ketlik  $x'_n \rightarrow a$ ,  $x'_n \neq a$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) olinganda ham  $f(x)$  funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos  $f(x'_n)$  ketma-ketlik ham o'sha  $b$  ga intilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik,  $x'_n \rightarrow a$ , ( $x'_n \neq a$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) da  $f(x'_n) \rightarrow b'$  bo'lsin.  $x_n$  va  $x'_n$  ketma-ketliklar hadlaridan ushbu

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots, x_n, x'_n, \dots$$

ketma-ketlik tuzaylik. Ravshanki, bu ketma-ketlik  $a$  ga intiladi. U holda

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), f(x_3), f(x'_3), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots \quad (10.5)$$

ketma-ketlik fundamental bo'lib, chekli limitga ega. Bu limitni  $b^*$  bilan belgilaylik. Agar  $f(x_n)$  va  $f(x'_n)$  ketma-ketliklarning har biri (10.5) ketma-ketlikning qisman ketma-ketliklari ekanini hisobga olsak, u holda  $f(x_n) \rightarrow b^*$ ,  $f(x'_n) \rightarrow b^*$  bo'lishini topamiz.

Demak,

$$b^* = b = b'.$$

Shunday qilib,  $f(x)$  funksiya uchun  $a$  nuqtada Koshi sharti bajarilishidan  $X$  to'plam nuqtalaridan tuzilgan va  $a$  ga intiluvchi har qanday  $x_n$  ( $x_n \neq a$ ,  $n=1,2,3,\dots$ ) ketma-ketlik olinganda ham mos  $f(x_n)$  ketma-ketlik bitta songa intilishini topdik. Bu esa funksiya limitining Geyne ta'tifiga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada chekli limitga ega bo'lishini bildiradi. Teorema isbotlandi.

**3-eslatma.** Koshi sharti va Koshi teoremasi  $x \rightarrow a+0$ ,  $x \rightarrow a-0$  bo'lgan hollarda ham yuqoridagiga o'xshash ifodalanadi va isbot etiladi.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Ushbu

a)  $f(x) = \lg x^2$  bilan  $\varphi(x) = 2 \lg |x|$ ,

b)  $f(x) = x^2$  bilan  $\varphi(x) = 2 \lg |x|$ ,

c)  $f(x) = \arcsin x$  bilan  $\varphi(x) = \arccos \sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )

funksiyalar bir-biriga aynan tengmi?

2. Agar  $f(x)$  funksiya  $(0,1)$  intervalda aniqlagan bo'lsa,

$$f(t^2), f(\sin t), f(\ln t), f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

3. Agar

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } |x| \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa} \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{agar } |x| \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } |x| > 2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsa,  $f(\varphi(x))$  topilsin.

4. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$$

limit hisoblansin.

5. Agar

$$f_n(x) = \frac{1 + x^{2n}}{2 + x^{4n}}$$

bo'lsa,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

topilsin.

6.  $x \rightarrow 0$  da

a)  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = 100 + x$ ;

b)  $f(x) = \frac{13}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ ;

v)  $f(x) = \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}$ ,  $g(x) = x$

funksiyalarning bir hil tartibli bo'lishi isbotlansin.

7. Quyidagi funksiyalarning grafigini chizing:

a)  $y = 3x + 5$ ;

b)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ;

c)  $y = 4 - 4x^2$ ;

d)  $y = \frac{5}{x}$ ;

e)  $y = x^3 + 1$ ;

f)  $y = \sin 2x$ ;

g)  $y = \cos 3x$ ;

h)  $y = 2 \operatorname{tg} x$ ;

i)  $y = 4 \sin x$ ;

8. Quyidagi limitlarni hisoblang.

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 6x + 8)$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{7x}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + x}$ ;

## XI BOB. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

### 11.1-§. Funksiya uzluksizligi ta'rif

**1. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi.**  $X \subset R$  to'plamda  $f(x)$  aniqlangan bo'lib,  $a \in X$  esa  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**11.1.1-ta'rif.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (11.1)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Masalan: 1)  $f(x) = x^2 + x + 1$  funksiya  $\forall a \in R$  nuqtada uzluksiz, chunki

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a).$$

2). Ushbu funksiya

$$f(x) = (\operatorname{sign} x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

uchun  $\forall a \in R$  da

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

bo'ladi. Ammo  $f(0) = 0$  bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0).$$

Demak,  $f(x) = (\operatorname{sign} x)^2$  funksiya  $a = 0$  nuqtada uzluksiz emas, boshqa hamma  $a \neq 0$  nuqtalarda esa uzluksizdir.

Funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflaridan foydalanib, funksiyaning  $a$  nuqtada uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

**11.1.2-ta'rif (Geyne).** Agar  $X \subset R$  to'plamning elementlaridan tuzilgan va  $a$  ga intiluvchi har qanday  $x_n$  ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos  $f(x_n)$  ketma-ketlik hamma vaqt  $f(a)$  ga intilsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

**11.1.3-ta'rif (Koshi).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta > 0$  son topilsaki, funksiya argumenti  $x$  ning  $|x - a| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, yani

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap U_\delta(a): |f(x) -$$

$$f(a)| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

funksiyaning  $x = 5$  nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

*Yechish.*  $\forall \varepsilon > 0$  son olib, bu  $\varepsilon$  songa ko'ra  $\delta > 0$  sonni  $\delta = 3\varepsilon$  deb qaralsa, u holda  $|x - 5| < \delta$  bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = |\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3} < \frac{|x-5|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa yuqoridagi ta'rifga ko'ra,

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

funksiyaning  $x = 5$  nuqtada uzluksiz bo'lishi bildiradi.

Koshi ta'rifidagi  $|x - a| < \delta$  va  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  tengsizliklar mos ravishda

$$x \in U_\delta(a) \text{ va } f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

ko'rinishida ham yozilishi mumkin ekanligini hisobga olsak, atrof tushunchasi yordamida funksiyaning uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

**11.1.4-ta'rif.** Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz deb ataladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya  $x=0$  nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Haqiqatan,  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun  $\delta > 0$  sonni  $\delta = \varepsilon$  deb olinsa, u holda  $\forall x \in U_\delta(0)$  lar uchun  $f(x) \in U_\varepsilon(0)$  kelib chiqadi.

Ravshanki, (11.1) o'rinli bo'lsa, ushbu  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$  limit ham o'rinli bo'ladi. Odatda  $x - a$  ayirma *argument ortirmasi*,  $f(x) - f(a)$  ayirma esa funksiyaning  $a$  nuqtadagi *orttirmasi* deyiladi. Ular mos ravishda  $\Delta x$  va  $\Delta y$  (yoki  $\Delta f$ ) kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = \Delta f = f(x) - f(a).$$

Bu tengliklardan foydalanib yozamiz:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Natijada (11.1) munosabat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ko'rinishni oladi. Demak,  $f(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtada uzluksizligini argu-mentning  $a$  nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

3-misol.  $y = \sin x$  va  $y = \cos x$  funksiyalarning  $\forall a \in R$  nuqtada uzluk-siz bo'lishini ko'rsatilsin.

*Yechish.*  $\forall a \in R$  nuqta olib, unga  $\Delta x$  ortirma beraylik. Natijada  $y = \sin x$  funksiya ham ushbu

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a$$

ortirmaga ega bo'lib,  $-\pi < \Delta x < \pi$  bo'lganda

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right) \right|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,  $y = \sin x$  funksiya  $a \in R$  nuqtada uzluksiz. Xuddi shunga o'xshash  $y = \cos x$  funksiyaning ham  $\forall a \in R$  da uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.

**2. Funksiyaning bir tomonli uzluksizligi.**  $X \subset R$  to'plamda  $f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lib,  $a \in X$  esa  $X$  to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

**11.1.5-ta'rif.** Agar  $x \rightarrow a+0$  ( $x \rightarrow a-0$ ) da  $f(x)$  funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad (f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Masalan. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1 \neq f(0)$$

bo'lganligi sababli, bu funksiya  $x=0$  nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lib, chapdan esa uzluksiz emas.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, agar  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

**11.1.6-ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deb ataladi.

Masalan,  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu *intervalda uzluksiz* deb ataladi.  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  segment berilgan bo'lsin. Agar bu funksiya  $(a,b)$  da uzluksiz bo'lsa, hamda  $a$  nuqtada o'ngdan,  $b$  nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  segmentda uzluksiz deb ataladi.

4-misol. Ushbu  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  funksiyaning  $R$  to'plamda uzluksiz bo'li-shi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Avval  $\forall a \in R \setminus \{0\}$  nuqtada maskur funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz.  $\forall \varepsilon > 0$  son olib, bu songa ko'ra  $\delta > 0$  sonni  $\delta = \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2} \varepsilon$  deb qaraylik. Natijada  $|x - a| < \delta$  bo'lganda

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} \right| = \frac{|x - a|}{\left| \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2} \right|} = \\ &= \frac{|x - a|}{\left( \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{a} \right)^2 + \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}} \leq \frac{|x - a|}{\frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon \end{aligned}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, funksiya  $\forall a \in R \setminus \{0\}$  nuqtada uzluksiz.

Endi  $a=0$  bo'lgan holda,  $\forall \varepsilon > 0$  songa ko'ra  $\delta > 0$  sonni  $\delta = \varepsilon^3$  deb olib,  $|x - a| = |x| < \delta$  bo'lganda

$$|f(x) - f(0)| = \left| \sqrt[3]{x} \right| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa berilgan funksiyaning  $a=0$  nuqtada uzluksiz bo'lishini ifodalaydi. Demak, berilgan funksiya  $R$  to'plamda uzluksiz.

## 11.2-§. Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari

$f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda aniqlangan bo'lib,  $a \in X$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**11.2.1–ta’rif.** Agar  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  funksiyaning limiti mavjud, chekli bo’lib,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$  yoki  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ( $+\infty$ ;  $-\infty$ ) bo’lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo’lmasa,  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Funksiyaning  $a$  nuqtada uzilishga ega bo’ladigan hollarini alohida-alohida qarab o’tamiz.

1. Aytaylik  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  funksiyaning limiti mavjud, chekli bo’lib, u  $f(a)$  ga teng bo’lmasin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a) \quad (b - \text{chekli son}).$$

Bu holda, ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ b, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz bo’ladi:

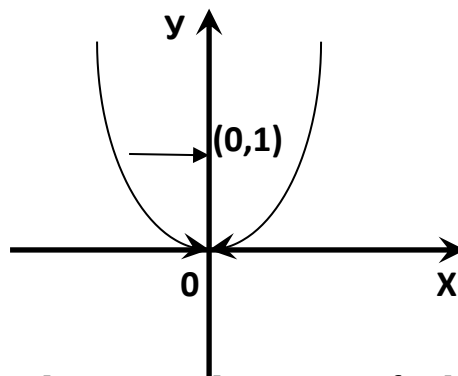
$$\lim_{x \rightarrow a} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = f^*(a)$$

Shunday qilib, berilgan funksiyaning bitta  $a$  nuqtadagi qiymatini o’zgartirib ( $f(a)$  o’rniga  $b$  olib)  $a$  nuqtada uzluksiz funksiya ega bo’lamiz. Shuning uchun, bu holda  $f(x)$  funksiya *bartaraf qilish mumkin bo’lgan* uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$  munosabat o’rinli. Demak, bu funksiya  $x=0$  nuqtada bartaraf qilish mumkin bo’lgan uzilishga ega (1–chizma).



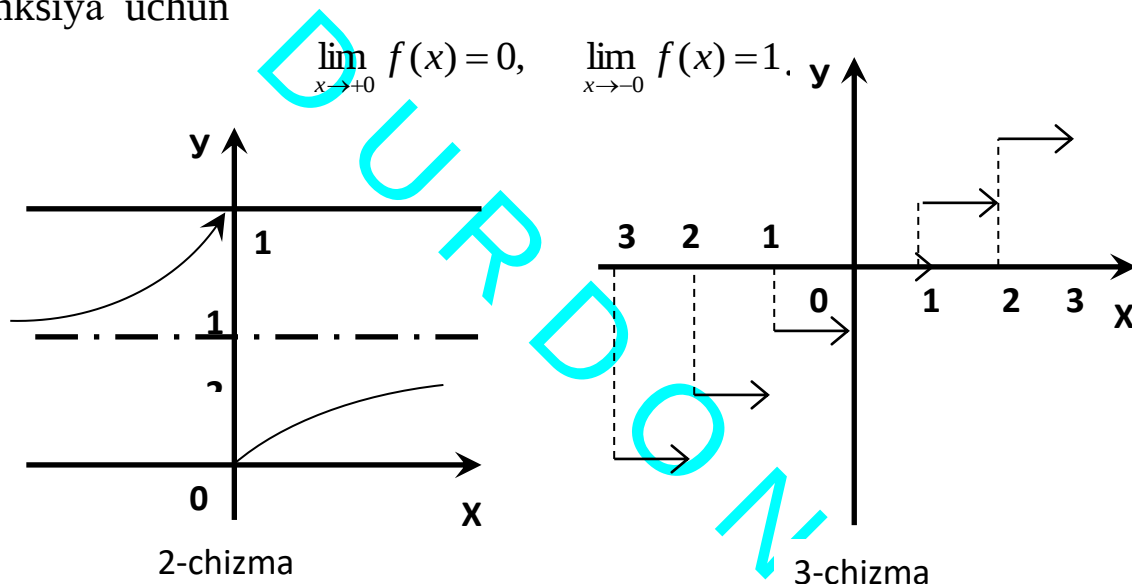
2. Aytaylik endi 1-chizma  $f(x)$  funksiya limiti mavjud bo’lmasin.

Bu holat, avvalo,  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib,  $f(a-0) \neq f(a+0)$  bo'lganda ro'y beradi. Shu holda funksiya  $a$  nuqtada *birinchi tur uzilishga ega* deyiladi va  $f(a+0) - f(a-0)$  ayirma funksiyaning  $a$  nuqtadagi *sakrashi* deyiladi.  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  ning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya  $a$  nuqtada *ikkinchi tur uzilishga ega* deyiladi.

Masalan, 1) ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun



Demak berilgan funksiya  $x=0$  nuqtada birinchi tur uzilishga ega. Uning  $0$  nuqtadagi sakrashi  $-1$  ga teng (2-chizma).

2). Quyidagi

$$f(x) = [x]$$

funksiya  $x = p$  ( $p$  – butun son) nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki (3-chizma):

$$\lim_{x \rightarrow p-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p-0} [x] = p-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow p+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow p+0} [x] = p.$$

3). Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya  $x=0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  funksiya  $x \rightarrow +0$  da limitga ega emas.

4) Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

har bir  $a \in \mathbb{R}$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki  $x \rightarrow a$  da  $D(x)$  funksiyaning o'ng limiti ham, chap limiti ham mavjud emas.

5). Ushbu

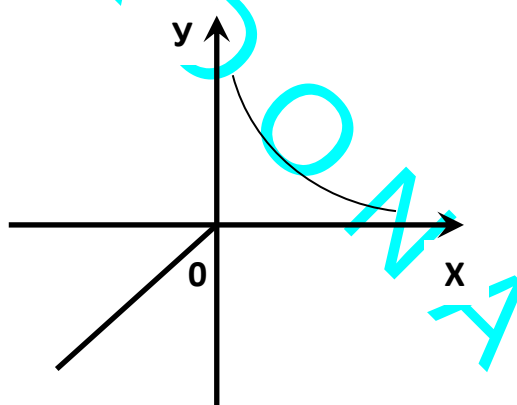
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ x, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$$

bo'lib bu funksiya  $x=0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

(4-chizma).



4-chizma

6). Ushbu  $f(x) = \tan x$  funksiyaning  $x = \frac{\pi}{2}$  nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = +\infty$$

bo'ladi. Demak,  $f(x) = \tan x$  funksiya  $x = \frac{\pi}{2}$  nuqta ikkinchi tur uzilishga ega.

**3. Aytaylik endi  $x \rightarrow a$  da  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  ( $+\infty, -\infty$ ) bo'lsin.** Unda funksiya-ning o'ng va chap limitlari ham  $\infty$  ( $+\infty, -\infty$ ) bo'ladi. Bu holda ham funksiya  $a$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti  $+\infty$  dir (bu holda  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ).

Demak, berilgan funksiya  $x=0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Shunday qilib,  $f(x)$  funksiya  $a \in X$  nuqtada:

1. uzluksiz bo'ladi, yoki

2. bartaraf qilish mumkin bo'lgan yoki birinchi tur uzilishga ega

bo'ladi, yoki

3. ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

**1-eslatma.** Agar  $a \in X$  nuqta  $x$  to'plamning bir tomonli (ya'ni o'ng yoki chap) limit nuqtasi bo'lsa, yuqoridagidek funksiyaning bu nuqtada uzilishi (o'ngdan yoki chapdan uzilishi) ta'rifi keltiriladi.

**2-eslatma.**  $f(x)$  funksiya  $x$  to'plamda uzluksiz bo'lib,  $a \in X$  nuqta  $x$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda funksiyaning  $a$  nuqtadagi qiymati aniqlanmagan bo'lsa ham  $x \rightarrow a$  da  $f(x)$  ning limiti mavjud va chekli, ya'ni  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  ( $b$  — chekli son) bo'lishi mumkin. Bu limit munosabatdan foydalanib  $X \cup \{a\}$  to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiya tuzish mumkin. Haqiqatan, agar

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{agar } x \in X \text{ bo'lsa,} \\ b, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani tuzsak, tuzilgan  $f^*(x)$  funksiya  $X \cup \{a\}$  to'plamda uzluksiz funksiya bo'ladi.

Masalan,  $y = \frac{\sin x}{x}$  funksiya  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  da aniqlangan va uzluksiz. Ma'lumki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bu munosabatdan foydalanib tuzilgan ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya  $R$  da uzluksiz bo'ladi.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Ushbu

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

funksiyalarning aniqlanish sohalarida uzluksizligi isbotlansin.

2. Agar  $f(x)$  funksiya  $R$  da uzluksiz bo'lsa,  $|f(x)|$  funksiyaning ham  $R$  da uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ x^2 - 1, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning  $R$  to'plamning faqat  $x = -1, x = 1$  nuqtalarida uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

4. Ushbu

$$f(x) = \text{sign}[x(1-x^2)]$$

funksiyaning uzilish nuqtalari topilib, turlari aniqlansin.

Agar  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada uzluksiz,  $g(x)$  funksiya shu nuqtada uzilishga ega bo'lsa,  $f(x) + g(x)$  funksiyaning  $a$  nuqtada uzilishga ega bo'lishi ko'rsatilsin.

## XII BOB. FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

### 12.1-§. Funksiyaning hosilasi

**1. Funksiya hosilasining ta'rifi.** Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda berilgan,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$  bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

funksiya orttirmasi muayyan funksiya va  $x_0$  nuqtalarda  $\Delta x$  ga bog'liq bo'ladi.

**12.1.1-ta'rif.** Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi odatada,

$$f'(x_0) \text{ yoki } y_{x=x_0}, \text{ yoki } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

belgilar yordamida yoziladi.

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Bunda  $x_0 + \Delta x = x$  deb olaylik, unda  $\Delta x = x - x_0$  va  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $x \rightarrow x_0$  bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi  $x \rightarrow x_0$  da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (12.1)$$

Ravshanki,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalning har bir  $x$  nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, bu hosila  $x$  o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi.

Misollar qaraylik.

a)  $f(x) = C = \text{const}$  funksiya uchun,  $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

bo'lib,  $y' = 0$  bo'ladi.

b)  $f(x) = x$  funksiya uchun  $\Delta y = \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

bo'lib,  $y' = 1$  bo'ladi.

v)  $f(x) = |x|$  funksiya uchun  $x_0 = 0$  nuqtada  $\Delta y = |\Delta x|$  bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lmaydi. Demak, bu funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada hosilaga ega emas.

1-misol.  $f(x) = e^x$  funksiyaning  $x=1$  nuqtadagi hosilasi topilsin.

*Yechish.* Funksiya hosilasining (12.1.1) ta'rifidan foydalanib, topamiz:

$$y' \Big|_{x=1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1} - e}{t} = e \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = e \ln e = e.$$

Demak,  $(e^x)'_{x=1} = e$ .

2-misol.  $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ) funksiyaning ixtiyoriy  $x > 0$  nuqtadagi hosilasi hisoblansin.

*Yechish.* Berilgan funksiyaning  $x$  nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right), \quad (x > 0)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = 1$$

Unda  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$  limit o'rinli bo'ladi. Demak,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

3-misol.  $f(x) = \cos x$  funksiyaning ixtiyoriy  $x \in R$  nuqtadagi hosilasi hisoblansin.

*Yechish.* Bu funksiya uchun

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

bo'ladi. Demak,  $(\cos x)' = -\sin x \quad (\forall x \in R)$ .

4-misol.  $f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0)$  funksiyaning  $\forall x \in (0, +\infty)$  nuqtadagi hosilasi topilsin.

*Yechish.* Bu funksiyaning hosilasi  $x$  o'zgaruvchining ushbu

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

funksiya bo'ladi.

**12.1.2-ta'rif.** Agar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left( \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi deb ataladi. Funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi  $f'(x_0 + 0)$  ( $f'(x_0 - 0)$ ) kabi belgilanadi.

Odatda funksiyaning o'ng va chap hosilalari bir tomonli hosilalar deb ataladi.

Masalan,  $f(x) = |x|$  funksiya uchun  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$  bo'ladi. Demak,  $f(x) = |x|$  funksiyaning  $x = 0$  nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi -1 ga teng.

**1-eslatma.** Agar  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  nisbatning limiti aniq ishorali cheksiz bo'lsa, uni ham  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi deb yuritiladi. Bunday holda  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi  $+\infty$  (yoki  $-\infty$ ) ga teng deyiladi.

**2. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi bilan uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda aniqlangan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ushbu

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \quad (12.2)$$

miqdor  $\Delta x$  ga bog'liq va  $\Delta x \rightarrow 0$  da nolga intiladi.

(12.2) tenglikdan topamiz:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x. \quad (12.3)$$

Odatda (12.3) formula *funksiya orttirmasining formulasi* deb ataladi. Bu formuladan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x) = 0$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib,  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosila-ga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

**2-eslatma.** Funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan,  $y = |x|$  funksiya  $x = 0$  nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtada hosilaga ega emas.

## 12.2-§. Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi

**1. Teskari funksiyaning hosilasi.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiya teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaning (qaralsin 11-bob) barcha shartlarini qanoatlantirsin.

**12.2.1-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsin. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0) \neq 0$  hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya teskari  $x = f^{-1}(y)$  funksiya  $x_0$  nuqtaga mos bo'lgan  $y_0$  ( $y_0 = f(x_0)$ ) nuqtada hosilaga ega va

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot.  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0) \neq 0$  hosilaga ega bo'lsin. (12.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha(t - x_0) \quad (t \in (a, b)) \quad (12.4)$$

bunda  $t \rightarrow x_0$  da  $\alpha = \alpha(t) \rightarrow 0$ . Endi  $f(x)$  funksiyaning  $t$  nuqtadagi qiymatini  $f(t) = z$  deb belgilaymiz. Unda  $t = f^{-1}(z)$  shuningdek,  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  bo'ladi. Natijada (12.4) tenglik ushbu

$$\begin{aligned} z - y_0 &= f'(x_0)(f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)) + \alpha(f^{-1}(z))(f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)) = \\ &= (f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0))(f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))) \end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikdan esa

$$\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))}$$

kelib chiqadi.  $z \rightarrow y_0$  da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \lim_{z \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demak,

$$\lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{z \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = (f^{-1}(y))'_{y=y_0}$$

bo'lib, bundan

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi. 12.2.1-teorema isbotlandi.

**2. Murakkab funksiyaning hosilasi.**  $u = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda,  $y = F(u)$  funksiya esa  $(c, d)$  intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida  $y = F(f(x)) = \phi(x)$  murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin (bunda, albatta,  $x \in (a, b)$  da  $u = f(x) \in (c, d)$  bo'lishi talab qilinadi).

**12.2.2-teorema.** Agar  $u = f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lib,  $y = F(u)$  funksiya esa  $x_0$  nuqtaga mos  $u_0$  ( $u_0 = f(x_0)$ ) nuqtada  $F'(u_0)$  hosilaga ega bo'lsa,  $u$  holda murakkab funksiya  $\phi(x) = F(f(x))$  ham  $x_0$  nuqtada hosilaga ega va

$$\phi'(x_0) = (F(f(x)))'_{x=x_0} = F'(u_0).$$

$$f'(x_0) \quad (12.5)$$

formula orinli bo'ladi.

Isbot.  $u = f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada,  $y = F(u)$  funksiya esa mos  $u_0$  ( $u_0 = f(x_0)$ ) nuqtada hosilaga ega bo'lsin. (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(t) - f(x_0) = f'(x_0)(t - x_0) + \alpha(t)(t - x_0), \quad (12.6)$$

$$F(s) - F(u_0) = F'(u_0)(s - u_0) + \beta(s)(s - u_0), \quad (12.7)$$

bunda

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow u_0} \beta(s) = 0.$$

Murakkab funksiya  $\varphi(x) = F(f(x))$  ning,  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi  $\varphi(t) - \varphi(x_0)$  ni yuqoridagi (12.6) va (12.7) munosabatlardan foydalanib, quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(x_0) &= F(f(t)) - F(f(x_0)) = F'(u_0)(f(t) - f(x_0)) + \\ &+ \alpha(t)(f(t) - f(x_0)) + \beta(f(t))(f(t) - f(x_0)) = F'(u_0)f'(x_0)(t - x_0) + \\ &+ F'(u_0)\alpha(t)(t - x_0) + \beta(f(t))(f(t) - f(x_0)). \end{aligned}$$

Endi bu tenglikning har ikki tomonini  $t - x_0$  ga bo'lib, so'ngra  $t \rightarrow x_0$  da limitga o'tamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} &= \\ &= F'(u_0)f'(x_0) + F'(u_0) \lim_{t \rightarrow x_0} \alpha(t) + \lim_{t \rightarrow x_0} \beta(f(t)) \cdot \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}. \end{aligned}$$

Bundan  $t \rightarrow x_0$  da  $\alpha(t) \rightarrow 0$ ,  $\beta(f(t)) \rightarrow 0$  ekanini e'tiborga olsak, (12.5) formula kelib chiqadi.

### 12.3-§. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyalarning hosilalari

Biz ushbu paragrafda ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilalarini topish qoidalarini keltiramiz. So'ngra elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz.

$f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  intervalda aniqlangan bo'lsin.

#### 1. Ikki funksiya yig'indisi hamda ayirmasining hosilasi.

Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning har biri  $x \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lsa, u holda  $f(x) \pm g(x)$  funksiya ham  $x$  nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad (12.8)$$

formula o'rinli bo'adi.

Haqiqatan ham,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lsin:

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad g'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Endi  $F(x) = f(x) \pm g(x)$  deb belgilab, topamiz:

$$\frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \frac{g(t) - g(x)}{t - x}.$$

Bu tenglikda  $t \rightarrow x$  da limitga o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \pm \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \\ &= f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$

Bu esa (12.8) formulani isbotlaydi.

**2. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning har biri  $x \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lsa, u holda  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya ham  $x$  nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (12.9)$$

formula o'rinli bo'ladi.

$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  deb belgilab,  $\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x}$  nisbatni quyidagi

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} g(x) + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} f(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikda  $t \rightarrow x$  da limitga o'tib, topamiz:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} = \left[ \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} g(x) + \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} f(t) \right] = \\ &= g(x) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \lim_{t \rightarrow x} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Bu esa (12.9) formulani isbotlaydi.

**3. Ikki funksiya nisbatining hosilasi.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiya-larning har biri  $x \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lib,  $g(x) \neq 0$  bo'lsa, u holda  $\frac{f(x)}{g(x)}$  funksiya ham  $x$  nuqtada

hosilaga ega va

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (12.10)$$

formula o'rinli bo'ladi.

(12.10) formulani isbotlashdan avval funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib,  $\frac{1}{g(x)}$  ( $g(x) \neq 0$ ) funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(x)}}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\frac{g(x) - g(t)}{g(t)g(x)}}{t - x} = \\ &= \frac{-1}{g(x)} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \cdot \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{g(t)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Demak,

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0). \quad (12.11)$$

Endi (12.9) va (12.11) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \left( f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Bu (12.10) formulaning o'rinli ekanini isbotlaydi.

**1-natija.** 1). Yuqorida keltirilgan (12.8) va (12.9) formulalar yordamida qo'shiluvchilar hamda ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham tegishli formulalarni isbotlash mumkin.

2). (12.9) formuladan  $g(x) = c$ ,  $c = \text{const}$  bo'lganda  
 $(cf(x))' = cf'(x)$

formula kelib chiqadi. Bundan o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqari-ga chiqarish mumkinligi kelib chiqadi.

**4. Elementar funksiylarning hosilalari.** Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib elementar funksiylarning hosilalarini topamiz.

**1).**  $y = x^\mu$  ( $x > 0$ ) **darajali funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu \left[ \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^\mu \left[ \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1 \right]}{\Delta x} = x^{\mu-1} \frac{\left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Ma'lumki,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$  (qaralsin 11-bob) unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{\mu-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}$$

bo'ladi.

Demak,  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ . Umuman, bu formula  $y = x^\mu$  funksiyaning aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy  $x$  uchun o'rinlidir. Xususan,  $\mu = -1$  bo'lganda

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2).  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) **ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Ma'lumki,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ . Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

bo'ladi.

Demak,

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Xususan,  $(e^x)' = e^x$ .

3).  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1, x > 0$ ) **logarifmik funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Ma'lumki,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$  (qaralsin 11-bob). Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left[ \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e$$

boladi.

Demak,

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Xususan,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

**4). Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.** Ushbu  $y = \sin x$  funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Keyingi tenglikda  $\Delta x \rightarrow 0$  da limitga otib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Demak,

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

Shunga o'xshash  $(\cos x)' = -\sin x$  formula ham isbotlanadi.

Endi  $y = \operatorname{tg} x$  funksiyaning hosilasini  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  nisbatning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Huddi shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

**5) Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari.** Teskari funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanib, teskari

trigonometrik funksiyalarining hosilalarini hisoblaymiz. Ushbu  $y = \arcsin x$  funksiyani olaylik. Bu funksiya  $x = \sin y$  funksiyaga teskari bo'lib, uni  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  intervalda qarasak,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

kelib chiqadi.

Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

Xuddi shunga o'hshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

**6). Giperbolik funksiyalarining hosilalari.** Endi giperbo'lik funksiya- larning hosilalarini hisoblaymiz. Bunda hosila hisoblashdagi sodda qoida- lardan va ko'rsatkichli funksiya hosilasi formulasidan foydalanamiz. Sodda hisoblashlar yordamida  $y = shx$  funsiya uchun topamiz:

$$y' = (shx)' = \left[ \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right]' = \frac{1}{2} \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = chx.$$

Shunga o'hshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(chx)' = shx, \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0).$$

**4. Hosilalar jadvali.** Biz ushbu bandda elementar funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz:

$$1). (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \quad (x > 0);$$

$$2). (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$3). (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$$

Xususan,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0);$$

$$4). (\sin x)' = \cos x;$$

$$5). (\cos x)' = -\sin x;$$

$$6). (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$7). (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$8). (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$9). (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$10). (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$11). (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$12). (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$13). (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$14). (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$15). (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

5-misol. Agar  $a > 0, a \neq 1, x \neq 0$  bo'lsa,

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bolishi isbotlansin.

*Yechish.* Aytaylik,  $x > 0$  bo'lsin. Unda  $|x| = x$  bo'lib,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x < 0$  bo'lsin. Unda  $|x| = -x$  bo'lib,

$$\log_a |x| = \log_a (-x)$$

bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$(\log_a (-x))' = \frac{1}{(-x) \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi.

6-misol. Agar  $u(x)$  va  $v(x)$  funksiyalar hosilaga ega bo'lib,  $u(x) > 0$  bo'lsa,

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

*Yechish.* Ravshanki,

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Murakkab funksiyaning hosilasi va ko'paytmaning hosilasi uchun tegishli formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

$$y' = y \left( v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x) \right)$$

$$y' = (u(x))^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x). \quad (12)$$

7-misol. Ushbu

$$f(x) = x^x, \quad \varphi(x) = x^{x^x} \quad (x > 0);$$

funksiyani hosilalari topilsin.

*Yechish.* (12) formulaga ko'ra

$$f'(x) = (x^x)' = x^x (\ln x + 1)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\varphi(x) = x^{x^x} = x^{f(x)}$$

yana (12) formulaga ko'ra

$$\varphi'(x) = (x^{f(x)})' = \varphi(x) \ln x \cdot f'(x) + f(x) x^{f(x)-1}$$

bo'lib,

$$\varphi'(x) = x^{x^x} \ln x \cdot x^x (\ln x + 1) + x^x \cdot x^{x^x-1} = x^{x^x+x-1} (x \ln x (\ln x + 1) + 1)$$

bo'ladi.

8-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

*Yechish.* Aytaylik,  $x \neq 0$  bo'lsin. Unda

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x=0$  bo'lsin. Bu holda hosila ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$$

Demak,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi.

## 12.4-§. Funksiyaning differensial

### 1. Funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi tushunchasi.

$f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda aniqlangan,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$  bo'lsin. U holda  $f(x)$  funksiya ham  $x_0$  nuqtada  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  orttirmaga ega bo'ladi.

**12.4.1-ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiyaning  $x_0 \in (a, b)$  nuqtadagi orttirmasi  $\Delta y$  ni

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \Delta x \quad (12.13)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda  $A$  miqdor  $\Delta x$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas,  $\alpha$  esa  $\Delta x$  ga bog'liq va  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ .

Agar  $\Delta x \rightarrow 0$  da

$$\alpha \Delta x = \alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$$

ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi (6.13) ifoda ushbu

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

ko'rinishni oladi. Funksiya orttirmasi uchun (12.13) formulada  $A \cdot \Delta x$  ifoda orttirmaning bosh qismi deb yuritiladi.

**12.4.1-teorema.**  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin, unda

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

bo'lib,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$  bo'ladi. Demak,  $f'(x) = A$ .

**Yetarliligi.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Agar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

deb olsak, undan

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

ekanini topamiz. Bu tenglikdagi  $\alpha$  miqdor  $\Delta x$  ga bog'liq va  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\alpha \rightarrow 0$ . Demak,  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib,  $A = f'(x)$  bo'ladi. Teorema isbotlandi.

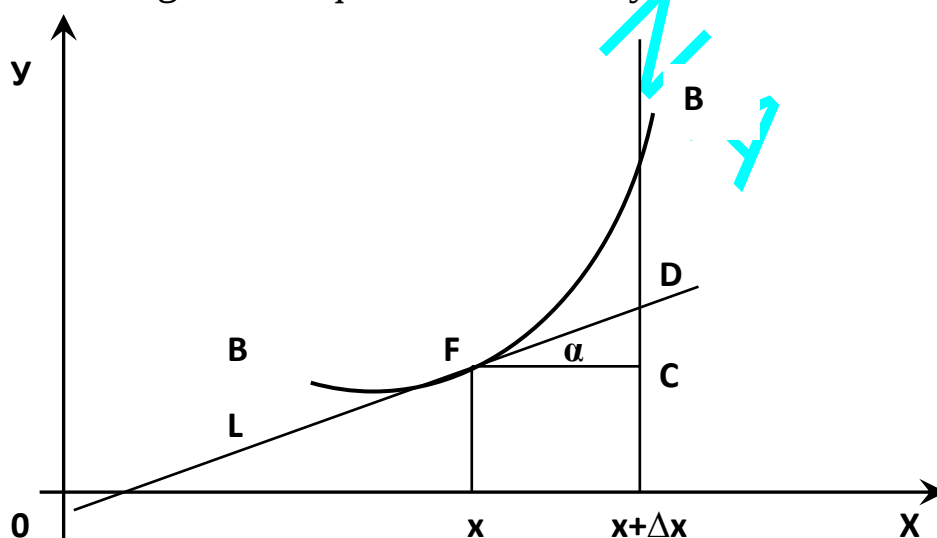
Isbot etilgan teorema  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lishi bilan uning shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi ekvivalent ekanini ko'rsatadi.

**2. Funksiya differentsiali va uning geometrik ma'nosi.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

bunda  $A = f'(x)$  bo'ladi. Bu tenglikda funksiya orttirmasi  $\Delta y$  ikki qo'shiluvchi: argument orttirmasi  $\Delta x$  ga nisbatan chiziqli  $A \cdot \Delta x$  hamda  $\Delta x$  ga nisbatan yuqori tartibli ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) cheksiz kichik miqdorlar yig'indisidan iborat ekani ko'rinadi.

**12.4.2-ta'rif.**  $f(x)$  funksiya orttirmasi  $\Delta y$  ning  $\Delta x$  ga nisbatan chiziqli bosh qismi  $A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x$  berilgan  $f(x)$  funksiyaning  $x$  nuqtadagi *differentsiali* deb ataladi. Funksiyaning differentsiali  $dy$  yoki  $df(x)$  kabi belgilanadi:  $dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x$ . Endi  $x \in (a, b)$  nuqtada differentsiallanuvchi bo'lgan  $f(x)$  funksiyaning grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik.



Bu chiziqning  $(x, f(x)), (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  nuqtalarini mos ravishda  $F$  va  $B$  bilan belgilaylik. Unda  $F$  1-chizma  $\Delta y$  bo'ladi.  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differentsiallanuvchi yani  $x$  nuqtada chekli  $f'(x)$  hosilaga ega. Demak,  $f(x)$  funksiya grafigiga uning  $F(x, f(x))$

nuqtasida o'tkazilgan  $FL$  urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti  $tg\alpha = f'(x)$ . Shu  $FL$  urinmaning  $BC$  bilan kesishgan nuqtasini  $D$  bilan belgilaylik. Ravshanki,  $\Delta FDC$  dan  $\frac{DC}{FC} = tg\alpha$  va undan  $DC = tg\alpha \cdot FC = f'(x) \cdot \Delta x$  ekani kelib chiqadi.

Demak,  $f(x)$  funksiyani  $x$  nuqtadagi differensial  $dy = f'(x) \cdot \Delta x$  funksiya grafigiga  $F(x, f(x))$  nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi  $DC$  ni ( $DC = dy$ ) ifodalaydi. Xususan,  $f(x) = x$  bo'lganda bu funksiyaning differensial

$$dy = f'(x)\Delta x = \Delta x$$

bo'lib,

$$dy = dx = \Delta x$$

bo'ladi. Bu hol  $f(x)$  funksiyaning  $x$  nuqtadagi differensialini quyidagi

$$dy = f'(x)dx = y'dx \quad (12.14)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ekanini anglatadi.

Endi funksiya differensialining (12.14) ifodasidan foydalanib, elementar funksiylarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

- 1)  $d(x^\mu) = \mu \cdot x^{\mu-1} dx \quad (x > 0);$
- 2)  $d(a^x) = a^x \lg a dx \quad (a > 0, a \neq 1);$
- 3)  $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx;$
- 4)  $d(\sin x) = \cos x dx;$
- 5)  $d(\cos x) = -\sin x dx;$
- 6)  $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\right);$
- 7)  $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$
- 8)  $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1);$
- 9)  $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1);$
- 10)  $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$
- 11)  $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx;$
- 12)  $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx;$

$$13) d(chx) = shx dx;$$

$$14) d(thx) = \frac{1}{ch^2 x} dx;$$

$$15) d(cthx) = -\frac{1}{sh^2 x} dx.$$

**3. Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyaning differensialli.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  intervalda aniqlangan bo'lib,  $x \in (a, b)$  nuqtada ularning differensiallari  $df(x)$ ,  $dg(x)$  mavjud bo'lsin. U holda  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ , va  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(x) \neq 0$ ) funksiyalarning ham shu  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallari mavjud va ular uchun quyidagi

$$d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x),$$

$$d(f(x) \cdot g(x)) = f(x)dg(x) + g(x)df(x),$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Bu tasdiqlarning isboti funksiya differensialining (12.14) ko'rinishda ifodalanishidan va funksiyaning hosilalarini topish qoidalaridan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik,  $u = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda,  $y = F(u)$  funksiya esa  $(c, d)$  intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida murakkab  $y = F(f(x)) = \varphi(x)$  funksiya tuzilgan bo'lsin.

Murakkab funksiyaning hosilasi uchun topilgan (12.5) formuladan foydalanib, shu murakkab funksiyaning differensialini topamiz:

$$d\varphi(x) = d(F(f(x))) = (F(f(x)))' dx = F'(u) f'(x) dx = F'(u) du.$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bu holda  $du$  miqdor argument  $u$  ning erkli orttirmasi emas, balki  $x$  o'zgaruvchining funksiyasidir.

**4. Funksiya differensiyali va taqribiy formulalar.** Nazariy va amaliy masalalarni yechishda tegishli formulalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zarurati tug'iladi. Ko'pincha bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasini yuzaga keltiradi. Funksiyaning differensialli esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

$f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda aniqlangan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0) \neq 0$  hosilaga ega bo'lsin. Bu holda funksiya orttirmasini ushbu

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu formulani hamda funksiya differensial uchun  $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$  formulani etiborga olib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right] = 1.$$

Shunday qilib,  $\Delta y \sim dy$ . Natijada quyidagi

$$\Delta y \approx dy$$

ya'ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (12.15)$$

taqribiy tenglikka kelamiz. Ravshanki,  $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ . Shuning uchun  $\Delta x \rightarrow 0$  da (12.15) taqribiy tenglikning nisbiy hatosi nolga intiladi, ya'ni  $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \rightarrow 0$ .

(12.15) formula  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi  $\Delta y$  ni uning shu nuqtadagi differensial  $dy$  bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Bu almashtirishning qulayligi, funksiya orttirmasi  $\Delta y$  argument orttirmasi  $\Delta x$  ning umuman aytganda, murakkab funksiyasi bo'lgan holda, funksiya differensial  $dy$  esa  $\Delta x$  ning chiziqli funksiyasi bo'lishidadir. Agar  $\Delta x = x - x_0$  ekanini etiborga olsak, unda  $x_0 + \Delta x = x$  bo'lib, (12.15) formula quyidagi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (12.16)$$

ko'rinishga keladi. Bunda  $x_0 \in (a, b)$  nuqta  $x \in (a, b)$  nuqtadan katta farq qilmaydigan, ammo  $f(x_0)$  qulayroq hisoblanadigan nuqtadir.

Masalan,  $f(x) = \sin x$  bo'lib,  $\sin 29^\circ$  ni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bu holda  $x_0 = 30^\circ$  deyish qulay. (12.16) formulaga ko'ra

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot (29^\circ - 30^\circ) = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0,4848$$

bunda radian olchovida yozish zarur, chunki boshqa hadlar radianlarda berilgan. Demak,  $\sin 29^\circ \approx 0,4848$  ( $10^{-4}$  aniqlikda).

Yuqoridagi (12.16) formula  $x_0 = 0$  bo'lganda ushbu

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$$

ko'rinishni oladi. Bu formula  $(1+x)^\mu$ ,  $\sqrt{1+x}$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$  funksiyalar uchun quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

## 12.5-§. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash

Biz ushbu bobning o'tgan paragraflarida funksiyalarning o'zgarish xususiyatlarini hosilalar yordamida o'rgandik. Bu hol funksiyalarni yaqqol tasavvur etishda, shuningdek, funksiya grafigini aniqroq yasashda qo'l keladi.

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi ketma-ketlik bo'yicha olib borish maqsadga muvofiqdir.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
3. Funksiyaning juft, toq hamda davriyligini aniqlash;
4. Funksiyani monotonlikka tekshirish;
5. Funksiyani ekstremumga tekshirish;
6. Funksiya grafigining qavariq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;
7. Funksiya grafigining asimptotalarini topish;
8. Funksiyaning haqiqiy ildizlarini (agar mavjud bo'lsa), shuningdek argument  $x$  ning bir nechta xarakterli qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini aniqlash.

9-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

*Yechish.* Berilgan funksiya  $R = (-\infty, +\infty)$  da aniqlangan va uzluksiz. Bu funksiya uchun  $f(-x) = f(x)$  tenglik o'rinli. Demak,  $f(x)$  juft funksiya (uning grafigi  $OY$  o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.) uni  $[0, +\infty)$  oraliqda tekshirish yetarli.

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi  $[0, +\infty)$  oraliqda mavjud va  $x=0$  nuqtada nolga aylanadi. Shu  $x=0$  nuqtada ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:  $f''(0) = 4 > 0$ . Bundan berilgan  $f(x)$  funksiya  $x=0$  da minimumga ega va  $[0, +\infty)$  da  $\min f(x) = -1$  bo'ladi. Endi  $x > 0$  da  $f'(x) > 0$  bo'lganidan berilgan funksiyaning  $[0, +\infty)$  oraliqda o'suvchiligini topamiz. So'ngra ushbu

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

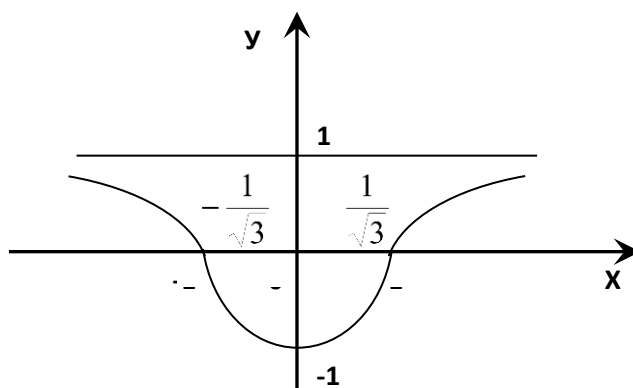
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

limitlarga ko'ra  $y=1$  gorizontaal to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining asimptotasi ekaniga va

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 = \frac{-2}{x^2 + 1} < 0$$

tengsizlikka ko'ra funksiya grafigi asimptotadan pastda joylashgan bolishiga ishonch hosil qilamiz.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi  $[0, +\infty)$  oraliqning  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  nuqtasida nolga aylanadi. Ravshanki,  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$  da  $f''(x) > 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty$  da  $f''(x) < 0$ . Demak,  $f(x)$  funksiya  $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$  intervalda botiq,  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$  intervalda qavariq bo'ladi.  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  nuqta funksiya grafigining egilish nuqta-sidan iborat. Berilgan funksiyaning grafigi 2-chizmada tasvirlangan.



## XIII BOB. ANIQMAS INTEGRAL

### 13.1-§. Aniqmas integral tushunchasi

**1. Aniqmas integral ta'rifi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) aniqlangan bo'lib,  $F(x)$  funksiya esa shu intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.

**13.1.1-ta'rifi.** Agar  $\forall x \in (a,b)$  da

$$F'(x) = f(x) \text{ yoki } dF(x) = f(x)dx$$

bo'lsa,  $F(x)$  funksiya  $(a,b)$  da  $f(x)$  ning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Masalan.

1).  $f(x) = x^2$  funksiyaning  $R = (-\infty, +\infty)$  dagi boshlang'ich funksiyasi  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x).$$

2).  $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  funksiyaning  $(-1,1)$  intervaldagi boshlang'ich funksiyasi  $F(x) = \sqrt{1-x^2}$  bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  da aniqlangan bo'lib,  $F(x)$  funksiya shu segmentga differensiallanuvchi bo'lsin.

**13.1.2-ta'rifi.** Agar

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a,b))$$

bo'lib,

$$F'(a+0) = f(a).$$

$$F'(b-0) = f(b).$$

bo'lsa,  $F(x)$  funksiya  $[a,b]$  da  $f(x)$  ning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0. \\ 0, & \text{agar } x = 0 \\ -1, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

funksiya  $(-1,1)$  intervalda boshlang'ich funksiyaga ega emasligi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Teskarisini faraz qilaylik. Biror  $F(x)$  funksiya  $(-1,1)$  da  $f(x)$  ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:  $(-1,1)$  da

$$F'(x) = f(x).$$

Lagranj teoremasiga ko'ra  $[0, x]$  da  $(0 < x < 1)$

$$F(x) - F(0) = F'(c)x = f(c)x = x \quad (0 < c < x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1.$$

Bu esa  $F'(0) = F'(0) = f(0) = 0$  bo'lishiga zid.

**1-eslatma.** Keyinchalik,  $F(x)$  funksiya boshlang'ich funksiyasi bo'ladigan oraliqni ko'rsatib o'tirmaymiz. Oraliq sifatida  $f(x)$  ning aniqlanish oralig'i  $x$  ko'zda tutiladi va  $x$  sifatida

$$[a, b], (a, b), (a, b], [a, b), (-\infty, a], (-\infty, a), \\ [b, +\infty), (b, +\infty), (-\infty, +\infty)$$

lar olinishi mumkin.

**13.1.1-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x$  oraliqda uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  shu oraliqda har doim boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

$F(x)$  va  $\Phi(x)$  funksiyalarning har biri  $f(x)$  funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin:

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x).$$

Demak,  $F'(x) = \Phi'(x)$ . Bundan

$$F(x) = \Phi(x) + C \quad (C = \text{const})$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak,  $f(x)$  funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari bir—biridan o'zgarmas songa farq qiladi va istalgan boshlang'ich funksiyasi ushbu ko'rinishda ifodalanadi:  $F(x) + C$  ( $C = \text{const}$ ).

**13.1.3-ta'rif.**  $f(x)$  funksiya boshlang'ich funksiyalarining umumiy ifodasi  $F(x) + C$  ( $C = \text{const}$ ) shu  $f(x)$  funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi va

$$\int f(x) dx$$

kabi belgilanadi. Bunda  $\int$  —integral belgisi,  $f(x)$  integral ostidagi funksiya,  $f(x)dx$  esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Masalan,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

bo'ladi, chunki hosila olish qoidalariga ko'ra

$$\left( \frac{2^x}{\ln 2} + C \right)' = 2^x.$$

## 2. Aniqmas intefralning sodda xossalari.

1).  $f(x)$  funksiya aniqmas inteqrali  $\int f(x)dx$  ning differensial  $f(x)dx$  ga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Haqiqatan ham,  $F(x)$  funksiya  $f(x)$  ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:  $F'(x) = f(x)$ . U holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Bu xossa avval differensial belgisi  $d$ , so'ngra integral belgisi  $\int$  kelib, ular yonma—yon turganda o'zaro bir—birini yo'qotishni ko'rsatadi.

2) Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$F(x)$  funksiya  $f(x)$  ning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:  $F'(x) = f(x)$ . u holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x).$$

Oxirgi ikki tenglik 2)—xossani isbot etadi.

Yuqorida keltirilganlardan, differensiallash (funksiyaning hosilasini hisoblash) hamda integrallash (funksiyaning aniqmas inteqralini hisoblash) amallari o'zaro teskari amallar ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda funksiya hosilasi hisoblanganda natija bitta funksiya bo'lsa, uning aniqmas integrali hisoblanganda esa natija cheksiz ko'p funksiya (ular bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi) bo'ladi. Aniqmas integral deb yuritilishining boisi ham shu.

**3. Integrallashning sodda qoidalar.** 1) Agar  $f(x)$  funksiya boshlan-g'ich funksiya ega bo'lsa, u holda  $kf(x)$  ( $k$  o'zgarmas son) funksiya ham boshlang'ich funksiya ega va  $k \neq 0$  da

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (13.1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

$f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi  $F(x)$  bo'lsin. U holda  $F'(x) = f(x)$  va  $\int f(x)dx = F(x) + C$  bo'lib,

$$k \int f(x)dx = k(F(x) + C) = kF(x) + kC \quad (13.2)$$

bo'ladi, bunda  $C$  — ixtiyoriy o'zgarmas son. Ushbu

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

tenglik o'rinli bo'lishidan  $kf(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi  $kF(x)$  ekanini topamiz. Demak,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C_1 \quad (13.3)$$

bunda  $C_1$  ixtiyoriy o'zgarmas son. Endi (13.2) va (13.3) munosabatlardan  $C$  va  $C_1$  o'zgarmas sonlarning ixtiyoriligi hamda  $k \neq 0$  bo'lishidan (1) formulaning o'rinli ekani kelib chiqadi.

Shunga o'xshash integralning quyidagi xossasi isbotlanadi:

1). Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiya boshlang'ich funksiylarga ega bo'lsa,  $f(x) + g(x)$  ham boshlang'ich funksiya ega va

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (13.4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Odatda bu xossa integralning *additivlik xossasi* deyiladi.

**2-eslatma.** Yuqorida keltirilgan (13.1) va (13.4) tengliklarni hamda kelgusida uchraydigan shunga o'xshash o'ng va chap tomonlaridagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligidan) tengliklar deb qaraladi.

#### 4. Elementar funksiyaning aniqmas integrallari.

Boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda elementar funksiylar hosilalari jadvalidan foydalanib elementar funksiylar aniqmas integrallari jadvalini keltiramiz (har bir formula integral ostidagi funksiyaning aniqlanish sohasida qaraladi):

1.  $\int 0dx = C = \text{const};$
2.  $\int 1dx = \int dx = x + C;$
3.  $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$5. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0);$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$11. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$12. \int sh x dx = ch x + C;$$

$$13. \int ch x dx = sh x + C;$$

$$14. \int \frac{1}{sh^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$15. \int \frac{1}{ch^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$$

2-misol. Ushbu  $\int (1 + \sqrt{x})^2 dx$  integral hisoblansin.

*Yechish.* Bu integralni hisoblash uchun avval (13.1), (13.4) formulalarni, so'ngra jadvalni qo'laymiz:

$$\int (1 + \sqrt{x})^2 dx = \int (1 + 2\sqrt{x} + x) dx = \int 1 dx + 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C.$$

## 13.2-§. Integrallash usullari

**1. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli.** Ushbu  $\int f(x) dx$  aniqmas integralni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bunda  $f(x)$  funksiya biror  $X = (a, b)$  intervalda aniqlangan va

$$f(x) = \varphi(g(x)) \cdot g'(x) \quad (13.5)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin deylik.

Agar  $\varphi(t)$  funksiya  $T = (t_1, t_2)$  intervalda boshlang'ich funksiya  $\Phi(t)$  ga ega bo'lib,  $g(x)$  funksiya  $X = (a, b)$  intervalda (bunda  $g(x) \subset T$ ) different-siallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int f(x) dx = \int \varphi(g(x)) g'(x) dx = \Phi(g(x)) + C \quad (13.6)$$

formula o'rinli.

Haqiqatan,  $[\Phi(g(x))]' = \Phi'(g(x)) \cdot g'(x) = \varphi(g(x))g'(x)$ .

Odatda integralni bunday usul bilan hisoblash *o'zgaruvchini almashtirish usuli* bilan integrallash deb ataladi.

O'zgaruvchilarni almashtirish usulining muhim tomoni o'zgaruvchilarni juda ko'p usul bilan almashtirish imkoniyati bo'lgan holda ular ichidan integralni sodda va hisoblash uchun qulay holga keltiradiganini tanlab olishdan iborat.

3-misol.  $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2}$  ( $a = \text{const}$ ) ni hisoblansin.

*Yechish.* Berilgan integralda o'zgaruvchi  $x$  ni  $x^2 + a^2 = t$  kabi almashtiramiz. Bunda  $2x dx = dt$  bo'lib ((13.5) va (13.6) ) larga qarang)

$$\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C$$

4-misol.  $\int e^{\cos x} \sin x dx$  ni hisoblansin.

*Yechish.* Bu integralda  $\cos x = t$  almashtirishni bajaramiz. Natijada  $-\sin x dx = dt$  bo'lib,

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

bo'ladi.

**2. Bo'laklab integrallash usuli.** Ikki  $u = u(x)$  va  $v = v(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda uzluksiz  $u'(x)$  va  $v'(x)$  hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki,

$$d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x).$$

Bu tenglikdan

$$u(x) \cdot dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x) \quad (13.7)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi (13.7) tenglikni integrallab topamiz:

$$\int u(x)dv(x) = \int d(u(x)v(x)) - \int v(x)du = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Sunday qilib, quyidagi

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du \quad (13.8)$$

formulaga kelamiz. Bu (13.8) formula *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani  $u(x)$  hamda  $dv(x)$  lar ko'paytmasi ko'rinishida yozib olinadi, bunda albatta  $dv(x)$  hamda  $v(x)du$  ifodalarning integrallarini oson hisoblana olinishi lozimligini e'tiborda tutish kerak.

5-misol.  $\int \ln x dx$  ni hisoblansin.

*Yechish.* Integral ostidagi  $\ln x dx$  ifodani  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$  lar ko'paytmasi deb olamiz. U holda  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $v = x$  bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib topamiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C = x \ln \frac{x}{e} + C$$

6-misol.  $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) ni hisoblansin.

*Yechish.* Bu integralda

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx \quad du = -\frac{2nxdx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}, \quad v = x$$

bo'ladi. (13.8) formuladan foydalanib topamiz:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx. \quad (13.9)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi  $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx$  ni

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

ko'rinishda yozsak, unda (13.9) munosabat ushbu

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

ko'rinishni oladi. Keyingi tenglikdan esa quyidagi

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot J_n \quad (13.10)$$

rekurrent formula kelib chiqadi.

Ravshanki,  $n=1$  bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

$n \geq 2$  bo'lganda, mos  $J_n$  integrallar (13.10) rekurrent formula yordamida topiladi. Masalan:

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot J_1 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

### 13.3-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu paragrafda ratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ulla-namiz. Buning uchun avval algebra kursidan biz uchun zarur bo'lgan ma'lumotlarni keltiramiz.

#### 1. Ko'phad va uning ildizlari haqida. Biror

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (13.11)$$

ko'phad berilgan bo'lsin, bunda  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  o'zgarmas haqiqiy sonlar,

$a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$  esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, biror  $a \in \mathbb{R}$  son uchun  $P(a) = 0$  bo'lsa  $a$  son  $P(x)$  ko'phad-ning ildizi deb ataladi. U holda Bezu teoremasiga ko'ra  $P(x)$  ko'phad  $x - a$  ga qoldiqsiz bo'linib, u quydagii

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda  $Q(x) - (n-1)$  — darajali ko'phad.

Agar (13.11) ko'phad  $(x - a)^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) ga qoldiqsiz bo'linsa,  $a$  son (13.11) ko'phadning  $k$  karrali ildizi bo'ladi. Bu holda  $P(x)$  ko'phadni ushbu

$$P(x) = (x - a)^k \cdot R(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda  $R(x) - (n-k)$  — darajali ko'phad.

Agar  $z = \alpha + i\beta$  kompleks son  $P(x)$  ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda  $z = \alpha - i\beta$  kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Shuningdek,  $z = \alpha + i\beta$  son  $P(x)$  ning  $k$  karrali ildizi bo'lsa,  $z = \alpha - i\beta$  son ham bu ko'phadning  $k$  karrali ildizi bo'ladi.

Demak,  $P(x)$  ko'phad  $z = \alpha + i\beta$  kompleks ildizga ega bo'lganda uning ifodasida  $(x - z)$  ko'paytuvchi bilan birga  $x - \bar{z}$  ko'paytuvchi ham qatnashadi. Bunday holda  $P(x)$  ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$$

$$(p = -2\alpha, q = \alpha^2 + \beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi bo'lib qoladi.

Faraz qilaylik,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ko'phad berilgan bo'lib,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  lar uning mos ravishda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  karrali haqiqiy ildizlari  $z_1, z_2, \dots, z_s$   $z = \delta_j + i\tau_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) lar esa ko'phadning mos ravishda  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$  karrali ko'mpleks ildizlari bo'lsin.

Bu ko'phadni ining ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratish haqidagi ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

**13.3.1-teorema.** Har qanday  $n$ -darajali

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  ko'phad ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  — o'zgarmas haqiqiy sonlar,  $a_n \neq 0$ ) ushbu

$P(x) = (x - a_1)^{\lambda_1} (x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_k)^{\lambda_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\gamma_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\gamma_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\gamma_s}$  ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_s) = n$$

bo'lib,  $x^2 + p_jx + q_j = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.

**2. Sodda kasrlar. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar orqali ifodalash.**

Ushbu

$$\frac{A}{(x - \alpha)^m} + \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (13.12)$$

ko'rinishidagi kasrlar *sodda kasrlar* deb ataladi, bunda  $A, B, C$  hamda  $a, p, q$  lar o'zgarmas sonlar,  $x^2 + px + q$  kvadrat uchhad esa haqiqiy ildizga ega emas.

Ma'lumki, qiyidagi

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

va

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_vx^v$$

ko'phadlarning ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_v$  o'zgarmas sonlar  $n \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{N}$ ) nisbati

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_vx^v}$$

*kasr ratsional funksiya* deyiladi,  $n < v$  bo'lganda esa u *to'g'ri kasr* deb ataladi.

Har qanday to'g'ri kasr (13.12) sodda kasrlar orqali ifodalanadi. Buni isbotlashdan avval, ikkita lemma keltiramiz.

**1-lemma.** Agar  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasr mahrajidagi  $Q(x)$  ko'phad

ushbu

$$Q(x) = (x - \alpha)^m Q_1(x) \quad (m \in \mathbb{N})$$

ko'rinishda bo'lib,  $Q_1(x)$  ko'phad esa  $x - \alpha$  ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quydagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin, bunda  $A_1, A_2, \dots, A_m$  o'zgarmas haqiqiy sonlar,  $P_1(x)$  ko'phad.

**Isbot.**  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasrni quydagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{P(x) - A_m Q_1(x)}{(x-\alpha)^m Q_1(x)} \quad (13.13)$$

Ravshanki, (8.14) munosabatlardagi  $P(x) - A_m Q_1(x)$  ayirma  $A_m$  songa bo'g'liq. Bu sonni shunday tanlab olamizki, natijada  $P(x) - A_m Q_1(x)$  ko'phad  $x - \alpha$  ga bo'linsin. Buning uchun

$$P(\alpha) - A_m Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Demak,

$$A_m = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda  $P(x) - A_m Q_1(x)$  ko'phad  $x - \alpha$  ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P(x) - A_m Q_1(x) = (x - \alpha) \cdot P_m(x)$$

bo'ladi, bunda  $P_m(x)$  -ko'phad.

Natijada (13.13) munosabat quydagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)} \quad (13.14)$$

ko'rinishga keladi, bunda  $A_m$  son yuqoridek aniqlanadi.

Endi

$$\frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)}$$

tenglikning o'ng tomonidagi  $A_{m-1}$  sonni shunday tanlab olamizki,

$P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)$  ko'phad  $x - \alpha$  ga bo'linsin. Buning uchun

$$P_m(\alpha) - A_{m-1} Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Demak,

$$A_{m-1} = \frac{P_m(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda  $P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)$  ko'phad  $x - \alpha$  ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x) = (x - \alpha) \cdot P_{m-1}(x) \quad (13.15)$$

bo'ladi, bunda  $P_{m-1}(x)$  — ko'phad.

(13.14) va (13.15) munosabatlardan topamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2} Q_1(x)} . \quad (13.16)$$

Xuddi shunga o'xshash har gal  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  kasrni ifodalovchi tenglikning o'ng tomonidagi oxirgi hadidan, yuqoridagidek  $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$  qismini ajratib topamiz:

$$\frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2} Q_1(x)} = \frac{A_{m-2}}{(x-\alpha)^{m-2}} + \frac{P_{m-2}(x)}{(x-\alpha)^{m-3} Q_1(x)} \quad (13.17)$$

va h.k.

$$\frac{P_2(x)}{(x-\alpha) Q_1(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (13.18)$$

(13.16), (13.17), (13.18) tengliklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. 1-lemma isbotlandi.

**2-lemma.** Agar  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasr maxrajidagi  $Q(x)$  ko'phad

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^n Q_1(x)$$

ko'rinishga ega bo'lib  $(x^2 + px + q)$  kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas),  $Q_1(x)$  ko'phad  $x^2 + px + q$  ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quydagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n(x) + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1}(x) + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1(x) + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bunda  $B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$  o'zgarmas sonlar,  $P_1(x)$  ko'phad.

**Isbot.**  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasrni quydagicha yozib olamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P(x) - (B_n x + C_n) Q_1(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} .$$

Bu tenglikdagi

$$P(x) - (B_n x + C_n) Q_1(x) \quad (13.19)$$

ko'phad  $B_n$  va  $C_n$  sonlarga bog'liq. Endi  $B_n$  va  $C_n$  sonlarni shunday tanlab

olish mumkinligini ko'rsatamizki, natijada (13.19) ko'phad  $x^2 + px + q$  ga bo'lin-sin. Avvalo  $P(x)$  va  $Q_1(x)$  ko'phaglarning har birini  $x^2 + px + q$  kvadrat uchhadga bo'lib topamiz:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{x^2 + px + q} &= R(x) + \frac{a_1x + b_1}{x^2 + px + q} \\ \frac{Q_1(x)}{x^2 + px + q} &= S(x) + \frac{a_2x + b_2}{x^2 + px + q}\end{aligned}\quad (13.20)$$

bunda  $R(x)$  va  $S(x)$  – ko'phadlar. U holda

$$\begin{aligned}\frac{P(x) - (B_nx + C_n)Q_1(x)}{x^2 + px + q} &= \frac{P(x)}{x^2 + px + q} - (B_nx + C_n) \frac{Q_1(x)}{x^2 + px + q} = \\ &= R(x) - (B_nx + C_n)S(x) + \frac{a_1x + b_1 - (B_nx + C_n)(a_2x + b_2)}{x^2 + px + q} = \\ &= R(x) - (B_nx + C_n)S(x) + B_na_2 + \frac{(a_1 + B_npa_2 + C_na_2 - B_nb_2)x + B_nqa_2 + b_1 - C_nb_2}{x^2 + px + q}\end{aligned}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan ko'rinadiki  $P(x) - (B_nx + C_n)Q_1(x)$  had  $x^2 + px + q$  ga bo'linishi uchun  $x$  ning barcha qiymatlarida

$$(a_1 + B_npa_2 + C_na_2 - B_nb_2)x + B_nqa_2 + b_1 - C_nb_2 = 0,$$

yani

$$\begin{cases} B_n(a_2p - b_2) - C_na_2 + a_1 = 0, \\ B_na_2q - C_nb_2 + b_1 = 0 \end{cases} \quad (13.21)$$

bo'lishi kerak.  $B_n$  va  $C_n$  larga nisbatan (13.21) sistemaning determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_2p - b_2 & -a_2 \\ a_2q & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi. Buni isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$D = -b_2(a_2p - b_2) + a_2^2q = 0 \quad (13.22)$$

bo'lsin.

Agar  $a_2 = 0$  bo'lsa, unda  $b_2 = 0$  bo'lib, natijada (13.20) dan  $Q_1(x)$  ko'phad  $x^2 + px + q$  ga bo'linishi kelib chiqadi. Bu esa  $Q_1(x)$  ko'phad  $x^2 + px + q$  ga bo'linmaydi deb olinishiga ziddir. Demak,  $a_2 \neq 0$ . Bu holda (13.22) tenglik ushbu

$$\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)^2 + p \cdot \left(-\frac{b_2}{a_2}\right) + q = 0$$

ko'rinishni olib,  $-\frac{b_2}{a_2}$  haqiqiy son  $x^2 + px + q = 0$  tenglamaning ildizi

bo'lishini ko'ramiz. Bu esa  $x^2 + px + q$  kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega bo'lmasin deb olinishiga ziddir. Demak, (13.21) sistemaning determinanti noldan farqli ekan. U holda, bu sistemadan yagona  $B_n$  va

$C_n$  sonlar topiladi. Bu sonlarni (13.19) ga qo'ysak, natijada  $P(x) - (B_n x + C_n)Q_1(x)$  ko'phad  $x^2 + px + q$  ga bo'linib,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  kasr esa ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)} \quad (13.23)$$

ko'rinishga keladi, bunda  $P_n(x)$  — ko'phad.

Xuddi shu yo'l bilan

$$\begin{aligned} & \frac{P_n(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} Q_1(x)} \\ &= \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} Q_1(x)}, \quad (13.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-2} Q_1(x)} \\ &= \frac{B_{n-2}x + C_{n-2}}{(x^2 + px + q)^{n-2}} + \frac{P_{n-2}(x)}{(x^2 + px + q)^{n-3} Q_1(x)} \quad (13.25) \end{aligned}$$

va hokozo

$$\frac{P_2(x)}{(x^2 + px + q) Q_1(x)} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad (13.26)$$

bo'lishi topiladi. (13.23), (13.24), (13.25), (13.26) tengliklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. 2-lemma isbotlandi.

**13.3.2-teorema.** Har qanday to'g'ri kasr soda kasrlar yig'indisi orqali ifodalanadi.

**Isbot.**  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasr bo'lsin.  $Q(x)$  esa  $n$  – darajali ko'phad

bo'lib,

$$\begin{aligned} Q(x) = & (x - a_1)^{n_1} \cdot (x - a_2)^{n_2} \dots (x - a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + \\ & + q_1)^{m_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i} \end{aligned}$$

bo'lsin, bunda

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_i) = n$$

bo'lib,  $x^2 + p_j x + q_j$  ( $j=1, 2, \dots, i$ ) kvadrat uchhadlar haqiqiy ildizga ega emas.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasrni quydagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}}$$

ko'rinishda yozib, bu tenglikning o'ng tomoniga 1—lemmani bir necha marta ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  marta) qo'llanib topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{n_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2}} + \frac{A_{n_2-1}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2-1}} + \dots + \\ & + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_{n_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k}} + \frac{A_{n_k-1}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha_k} + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \end{aligned}$$

bunda

$$Q_1(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}.$$

Endi  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  kasrga 2—lemmani bir necha marta qo'llab, topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = & \frac{P_1(x)}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}} \\ = & \frac{B_{m_1}^{(1)} x + C_{m_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \frac{B_{m_1-1}^{(1)} x + C_{m_1-1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{B_1^{(1)} x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} \\ & + (13.28) \\ & + \frac{B_{m_2}^{(2)} x + C_{m_2}^{(2)}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2}} + \frac{B_{m_2-1}^{(2)} x + C_{m_2-1}^{(2)}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2-1}} + \dots + \frac{B_1^{(2)} x + C_1^{(2)}}{x^2 + p_2 x + q_2} \\ & + \dots + \\ & + \frac{B_{m_i}^{(i)} x + C_{m_i}^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}} + \frac{B_{m_i-1}^{(i)} x + C_{m_i-1}^{(i)}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i-1}} + \dots + \frac{B_1^{(i)} x + C_1^{(i)}}{x^2 + p_i x + q_i}. \end{aligned}$$

(13.27) va (13.28) munosabatlardan teoremaning isboti kelib chiqadi. Isbotlandi.

Yuqorida isbotlangan teoremadagi o'zgarmas sonlarni boshqacha – noma'lum koeffitsientlar usuli deb atalgan usul bilan ham topish mumkin. Bunda  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  to'g'ri kasr noma'lum koeffitsientlari bo'lgan

sodda kasrlarga yoyilib, so'ng tenglikning o'ng tomonidagi sodda kasrlar yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijada

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

tenglik hosil bo'ladi va undan barcha  $x$  lar uchun o'rinli bo'lgan

$$P(x) = R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi  $x$  ning bir hil daragalari oldida turgan koefitsientlarini tenglashtirib, sistema hosil qilinadi.

7-misol.  $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$  to'g'ri kasrni sodd kasrlarga ajratilsin.

*Yechish.* Bu kasrning maxraji  $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$  bo'lgani uchun teorema ko'ra

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

bo'ladi. Uni

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

ko'rinishda yozib, ushbu

$$2x-1 = A(x-2) + B(x-3) \text{ yoki } 2x-1 = (A+B)x - (2A+3B)$$

tenglikka kelamiz. Ikki ko'phadning tengligidan foydalanib,  $A$  va  $B$  larga nisbatan ushbu

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \quad (13.29)$$

sistemaga kelamiz. (13.29) dan  $A=5, B=-3$  bo'ladi. Shunday qilib, berilgan to'g'ri kasr sodd kasrlar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} + \frac{-3}{x-2}.$$

**3. Sodda kasrlarni integrallash.** Sodda kasrlarning aniqmas integral-larini hisoblaymiz.

1).  $\frac{A}{x-a}$  sodda kasrning aniqmas integrali .

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

2).  $\frac{A}{(x-a)^m}$  ( $m > 1$ ) sodda kasrning aniqmas integrali ham tez

hisoblanadi:

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \frac{A}{1-m} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

3).  $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$  sodda kasrning (bunda  $x^2+px+q$  kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas) integrali  $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$  ni hisoblash uchun avval kasrning mahrajida turgan  $x^2+px+q$  kvadrat uchhadni ushbu

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx$$

bo'ladi, bunda  $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$ . Bu integralda  $x + \frac{p}{2} = t$  almashtirishni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= B \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \\ &+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{B}{2} \ln(t^2+a^2) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C_1 = \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1. \end{aligned}$$

Demak,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1$$

bunda  $C_1$  ixtiyoriy o'zgarmas.

4).  $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$  ( $m > 1$ ) sodda kasrning integrali

$J_m = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx$  ni hisoblash uchun 3)—holdagidek o'zgaruvchini

almashtiramiz:  $x + \frac{p}{2} = t$ . Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$J_m = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + p - \frac{p^2}{4}\right)^m} dx = \int \frac{Bt + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m} dt =$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Bu munosabatdagi  $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$  integral ushbu bobning 2-mavzusida keltirilgan integral bo'lib, u rekurrent formula orqali hisoblanadi.

**4. Ratsional funksiyalarni integrallash.** Ma'lumki, ratsional funksiya ikkita  $P(x)$  va  $Q(x)$  butun ratsional funksiyalar nisbatidan iborat:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Agar  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  noto'g'ri kasr bo'lsa, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya hamda to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida quyidagicha ifodalab olinadi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

U holda

$$\int f(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int R(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx \quad (13.30)$$

bo'ladi.

(13.30) munosabatdagi  $\int R(x) dx$  integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

To'g'ri kasrni integrallash uchun avval bu kasrni 3—teoremdan foydalanib, sodda kasrlar orqali ifodalab olinadi, so'ngra ularni 3—bandda ko'rsatilgandek integrallanadi.

8-misol.  $\int \frac{dx}{x^4-1}$  ni hisoblansin.

*Yechish.* Integral ostidagi  $\frac{1}{x^4-1}$  kasrni sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Bu tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

U holda

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

ya'ni

$$1 = (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)$$

bo'ladi. Natijada  $A, B, C, D$  larni topish uchun

$$A+B+C=0,$$

$$A-B+D=0,$$

$$A+B-C=0,$$

$$A-B-D=1.$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani echib,

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

bo'lib,

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + C$$

bo'ladi.

### 13.4-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Ikki  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilar berilgan bo'lib, bu o'zgaruvchilar yordamida

$$u^i v^j \quad (i = 0, 1, 2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots)$$

ko'paytmalarni tuzamiz. Bu ko'paytmalardan tuzilgan ushbu

$$P(u, v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots + a_{n0}u^n + a_{(n-1)1}u^{n-1}v + \dots + a_{1(n-1)}uv^{n-1} + a_{0n}v^n$$

funksiya  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning *ko'phadi* deb ataladi, bunda

$$a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots, a_{n0}, a_{0n}$$

o'zgarmas haqiqiy sonlar (koeffitsientlar).

$P(u, v)$  hamda  $Q(u, v)$  lar  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning ko'phadlari bo'lsin. Ushbu  $\frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$  ( $Q(u, v) \neq 0$ ) nisbat  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning

ratsional funksiyasi deb ataladi va  $u$   $R(u, v)$  orqali belgilanadi:

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \quad (Q(u, v) \neq 0).$$

Endi  $u$  va  $v$  o'zgaruvchilarning har biri o'z navbatida bitta  $x$  o'zgaruvchining

$$u = \varphi(x)$$

$$v = \phi(x)$$

funktsiyalari bo'lsin. U holda  $R(u, v)$  funksiya  $\varphi(x)$  va  $\phi(x)$  funksiylarning ratsional funksiylari bo'ladi. Masalan, ushbu

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt[3]{x^2 - 1} + 1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

funksiya  $u = \sqrt{x}$ ,  $v = \sqrt[3]{x^2 - 1}$  larning ratsional funksiyaasidir, chunki,

$$R(u, v) = \frac{u^2 - 2v + 1}{u + v}$$

Xususan,  $\varphi(x)$  va  $\phi(x)$  larning har biri  $x$  o'zgaruvchilarning ratsional funk-siyalari bo'lsa, u holda ushbu

$$R(u, v) = R(\varphi(x), \phi(x)) = \bar{R}(x)$$

funksiya shu  $x$  o'zgaruvchining ratsional funksiyaasi bo'ladi. Haqiqatan,  $x$  o'zgaruvchining ratsional funksiyaalaridan iborat  $\varphi(x)$  va  $\phi(x)$  lar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish hamda bo'lish amallari bajarilsa, natijada  $x$  ning yana ratsional funksiyaasi hosil bo'ladi.

**1.  $R(x, y(x))$  ko'rinishidagi funksiyaalarni integralash.** Ushbu

$$\int R(x, y(x)) dx \quad (13.31)$$

integralni qaraylik, bunda  $R(x, y(x))$  funksiya  $x$  va  $y(x)$  larning ratsional funksiyaasidir.

Agar  $y(x)$  funksiya  $x$  ning ratsional funksiyaasi bo'lsa, ushbu

$$\int R(x, y(x)) dx$$

integral ratsional funksiyaning integrali bo'ladi. Bunday integralar 3—bo'limda batafsil o'rganildi.

Agar  $y(x)$  funksiya  $x$  o'zgaruvchining ratsional funksiyaasi bo'lmasa, u holda ravshanki,  $R(x, y(x))$  ham  $x$  o'zgaruvchining ratsional funksiyaasi bo'lmaydi. Bu holda  $x$  o'zgaruvchini almashtirish yordamida  $R(x, y(x))$  ni ratsional funksiyaaga keltirish masalasi kelib chiqadi. Agar biz shunday  $x = \varphi(t)$  amashtirish topsakki, natijada  $x = \varphi(t)$ ,  $y(x) = y(\varphi(t))$  lar  $t$  ning ratsional funksiyaalari bo'lsa, (bunda  $x' = \varphi'(t)$  ham ratsional funksiya bo'ladi), u holda

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(\varphi(t), y(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt$$

bo'lib,  $\int R(x, y(x))dx$  integralini hisoblash ushbu

$$\int R(\varphi(t), y(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)dt$$

ratsional funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi.

Endi  $y(x)$  funksiyaning ba'zi bir muayyan ko'rinishga ega bo'lgan hollarini qaraymiz:

1) (31) integralda

$$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

bo'lsin, bunda  $a, b, c, d$  o'zgarmas sonlar,  $n \in \mathbb{N}$ . Bu holda (13.31) integral quyidagi

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx \quad (13.32)$$

ko'rinishni oladi. Bunda  $a, b, c, d$  sonlardan tuzilgan determinant noldan farqli, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

deb qaraymiz. Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa,  $a$  va  $b$  sonlar  $c, d$  sonlarga proporsional bo'lib,  $\frac{ax+b}{cx+d}$

nisbat  $x$  ga bog'liq bo'lmaydi va  $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$  funksiya  $x$

o'zgaruvchining ratsional funksiya bo'lib qoladi. Bu holda (13.32) integral 3-bo'limda o'rganilgan integralga keladi. Shunday qilib, keyingi mulohazalarda  $\Delta \neq 0$  deymiz.

(13.32) integralda

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$$

bo'lib, (13.32) integral ushbu

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t)dt = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \cdot \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$$

ko'rinishni oladi .

Demak, qaralayotgan

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

integralni hisoblash ushbu  $R(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t) \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2}$  ratsional funksiyani integralni hisoblashga keladi .

9-misol. Ushbu

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$$

integral hisoblansin .

*Yechish.* Bu integralni hisoblash uchun

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

deb olamiz. U holda

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2 + 1)^2}$$

bo'lib,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1}$$

bo'ladi. Natijada berilgan integral uchun topamiz :

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2t - 2 \arctg t + C = 2 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2 \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Quyidagi

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx \quad (13.33)$$

integralni qaraylik. Agar  $r_1, r_2, \dots, r_n$  ratsional sonlarni umumiy  $m$  maxrajga keltirib, (13.33) integralda

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirish bajarilsa, natijada (13.33) integralni hisoblash ratsional funksiyani integrallashga keladi.

10-misol. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

integral hisoblansin .

*Yechish.* Bu integralda  $t = \sqrt[6]{x}$  almashtirish bajaramiz . Natijada

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun topamiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \int \left( (t^2 - t + 1) - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 6 \left( \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| \right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

**2) (13.31) integralda**  $y = y(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  bo'lsin, bunda  $a, b, c$  o'zgarmas sonlar bo'lib,  $ax^2 + bx + c$  kvadrat uchhad teng ildizlarga ega emas. (13.31) integral quyidagi

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx (a \neq 0) \quad (13.34)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Quyida keltiriladigan uchta almashtirish yordamida (13.34) integral ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

**a)  $a > 0$  bo'lsin.** Bu holda (13.34) integral

$$t = \sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad (13.35)$$

(yoki  $t = -\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ )

almashtirish natijasida ratsional funksiyaning integrallashga keladi:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b}, \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{2\sqrt{at} + b}\right) \frac{2(\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}})}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt.$$

**b)  $c > 0$  bo'lsin.** Bu holda (13.34) integral

$$t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}) \quad (13.36)$$

(yoki  $t = \frac{1}{x} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c})$ )

almashtirish yordamida ratsional funksiyaning integrallashga keladi:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{2\sqrt{ct} - b}{a - t^2}, \frac{\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}}}{a - t^2}\right) \frac{2(\sqrt{ct^2 - bt + a\sqrt{c}})}{(a - t^2)^2} dt.$$

**v)  $ax^2 + bx + c$  kvadrat uchhad har hil  $x_1$  va  $x_2$  haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin.** Ma'lumki,  $x_1$  va  $x_2$  ildizlar orqali  $ax^2 + bx + c$  kvadrat uchhadni

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu holda (13.34) integral ushbu

$$t = \frac{1}{x - x_1} (\sqrt{ax^2 + bx + c}) \quad (13.37)$$

almashtirish bilan

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R\left(\frac{-ax_2 + x_1 t^2}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} t\right) \cdot \frac{2a(x_1 - x_2)}{t^2 - a} dt$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral ostidagi funksiya  $t$  o'zgaruvchining ratsional funksiyasidir.

Odatda (13.35), (13.26) va (13.37) almashtirishlar *Eyler almashtirishlari* deyiladi.

11-misol.  $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$  integral hisoblansin.

*Yechish.* Bu integral uchun ( $a=1$ ) Eylerning birinchi almashtirishini ((13.35) ga qarang) bajaramiz:

$$t = x + \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

U holda

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{t^2 + t + 1}{1 + 2t}, dx = 2 \frac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2} dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx = 2 \int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} dt$$

bo'ladi. Endi

$$2 \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1 + 2t} - \frac{3}{(1 + 2t)^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx &= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |1 + 2t| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2t} + C = \\ &= 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + x + 1}| - \frac{3}{2} \ln |1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} + C. \end{aligned}$$

## 2. Binominal differensiallarni integrallash. Ushbu

$$x^m (a + bx^n)^p dx$$

differensial ifoda *binomial differensial* deb ataladi, bunda  $a, b$  o'zgarmasli sonlar,  $m, n, p$  ratsional sonlar.

Ushbu

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (13.38)$$

integralni hisoblash  $m, n, p$  ratsional sonlariga bog'liq. Mashhur rus matema-tigi P. L. Chebishev ko'rsatganki (38) integral quyidagi uchta

- 1)  $p$  butun son, yoki
- 2)  $\frac{m+1}{n}$  butun son, yoki

3)  $\frac{m+1}{n} + p$  butun son,

bo'lgan holdagina ratsional funksiyalarning integrali orqali ifodalanadi.

**1)  $p$ -butun son bo'lsin.** Bu holda  $m$  va  $n$  ratsional sonlar (ya'ni kasrlar) maxrajining eng kichik umumiy bo'luvchisini  $\delta$  orqali belgilab, (13.38) integralda  $x = t^\delta$  almashtirish bajarilsa, integral ostidagi funk-siya ratsional funksiyaga aylanib, (13.38) integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

**2)  $\frac{m+1}{n}$ -butun son bo'lsin.** Avval (13.38) integralda

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

almashtirish bajaramiz. Natijada (13.38) integral quyidagi

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt \quad (13.39)$$

ko'rinishni oladi. Qisqalik uchun

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

deb belgilaymiz. Bu holda  $p$  kasr sonning maxrajini  $s$  bilan belgilab, (13.38) integralda

$$z = (a + bt)^{\frac{1}{s}} = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirish bajarilsa, natijada integral ostidagi ifoda ratsional funksiyaga aylanib, ya'na (13.38) integral ratsional funksiya integralini hisoblashga keltiriladi.

**3)  $p+q$  butun son bo'lsin.** Yuqoridagi (13.39) integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int (a + bt)^p t^q dt = \int \left( \frac{a + bt}{t} \right)^p t^{p+q} dt.$$

Agar keyingi integralda

$$z = \left( \frac{a + bt}{t} \right)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirish bajarilsa, (13.38) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi.

12-misol. Ushbu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$$

integral hisoblansin.

**Yechish.** Bu integralni (13.38) integral bilan taqqoslab,  $p = -2$  (butun son) ekanligini aniqlaymiz. Yuqorida qaralgan 1) holga ko'ra  $x = t^6$  ( $t = \sqrt[6]{x}$ ) almashtirish bajarib topamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = 6 \int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral ostidagi funktsiyani

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - 4 \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t^5}{5} - 2 \frac{t^3}{3} + 3t - 4 \arctgt + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

bo'ladi. Oxirgi integral shu bobning 2-bo'limda keltirilgan (13.16) rekurrent munosabat yordamida osongina hisoblanadi.

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \arctgt + C.$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + 3t - \frac{7}{2} \arctgt + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} + C.$$

Demak,  $t = \sqrt[6]{x}$  ekanini etiborga olib, uzul - kesil yozamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21 \arctg \sqrt[6]{x} + 3 \cdot \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C.$$

**13-misol.**  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$  integralni hisoblang.

**Yechish.** Bu integralni  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx$  ko'rinishda yozib,

$m=1$ ,  $n=\frac{2}{3}$ ,  $p=-\frac{1}{2}$  bo'lishini topamiz. Bu holda  $\frac{m+1}{n}=3$  bo'lib,

$$t = (1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$1+x^{\frac{2}{3}} = t^2, \quad x = (t^2-1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{va} \quad dx = \frac{3}{2} (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2t dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun ushbu

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \int (t^2-1)^2 t^2 dt = 3 \frac{t^7}{7} - 6 \frac{t^6}{5} + t^3 + C, \quad t = \sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$$

ifoda topiladi.

### 13.5-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Yuqoridagidek,  $R(\sin x, \cos x)$  orqali  $\sin x$  va  $\cos x$  larning ratsional funksiyasini belgilaylik. Bunday ifodaning

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (13.40)$$

integralini qaraylik.

Agar (13.40) integralda

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

almashtirish bajarilsa, u holda (13.40) integral ostidagi  $R(\sin x, \cos x)$  ifoda  $t$  o'zgaruvchining ratsional funksiyasiga aylanib (13.40) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

Darhaqiqat, quyidagi

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \arctg t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

munosabatlarni e'tiborga olsak, u holda (13.40) integral quyidagi

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}$$

funksiya  $t$  o'zgaruvchining ratsional funksiyasi. Demak, (13.40) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

**14-misol.**  $\int \frac{dx}{3 + \sin x}$  integral hisoblansin.

**Yechish.** Bu integralda  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  almashtirish bajarib topamiz :

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x} = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3},$$

$$2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} = \frac{2}{3} \int \frac{d(t + \frac{1}{3})}{(t + \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(t + \frac{1}{3})}{(t + \frac{1}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} 3 \frac{t + \frac{1}{3}}{2\sqrt{2}} + C.$$

Demak ,

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + C .$$

Shuni ta'kidlash lozimki,  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  integralda  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  almashtirish universal almashtirish bo'lib, u (13.40) integralni har doim ratsional funksiya integraliga keltirsada ko'pincha bu almashtirish murakab hisoblashlarga olib keladi.

Ayrim hollarda trigonometric funksiyalarni integrallashda  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $t = \sin x$ ,  $t = \cos x$  almashtirishlar qulay bo'ladi.

**15-misol.**  $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$  integral hisoblansin.

**Yechish.** Agar bu integralda  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  universal almashtirish bajarilsa , u holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = 2 \int \frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4} dt$$

bo'ladi. Biroq qaralayotgan integralda  $t = \operatorname{tg} x$  almashtirish bajarilsa , u holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^3 x) d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + t^2) dt$$

bo'lib, undan

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

bo'lishini topamiz.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Ushbu

$$f(x) = x|x|, \quad \varphi(x) = e^{|x|} x \quad (x \in R)$$

funksiyalarning  $(-\infty, +\infty)$  dagi boshlang'ich funksiyalari topilsin .

2. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

integral hisoblansin.

3. Ushbu

$$\int e^{ax} \cos b x dx$$

integral hisoblansin.

4. Quyidagi

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C \quad (a > 0),$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0),$$

$$3) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$4) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

tengliklar isbotlansin.

a. Ushbu

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$$

integral hisoblansin.

## XIV BOB. ANIQ INTEGRAL

### 14.1-§. Aniq integral tushunchasi

**1.  $[a, b]$  ni bo'laklash.** Biror  $[a, b] \subset R$  segment berilgan bo'lsin.

Uning ushbu

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Munosabatda bo'lgan chekli sondagi ixtiyoriy  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  nuqtalari sistemasini olaylik. Agar  $A_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  deb belgilasak, u holda ravshanki ,

$$1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = [a, b];$$

$$2) A_k \cap A_j = \emptyset, (k, j = 1, 2, \dots, n)$$

Mazkur kursdagi to'plamni bo'laklash tushunchasi ta'rifiga binoan  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  sistema  $[a, b]$  da bo'laklash bajargan bo'ladi, va aksincha, agar bizga  $[a, b]$  segmentning biror chekli  $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  bo'lak-lashi berilgan bo'lsa, u ushbu

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b$$

munosabatda bo'lgan chekli sondagi  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$  nuqtalar sistemasini aniqlaydi. Binobarin, biz to'plamni bo'laklash ta'rifiga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni kiritishimiz .

**14.1.1-ta'rif.**  $[a, b]$  segmentning ushbu

$$a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

munosabatda bo'lgan ixtiyoriy chekli sondagi  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  nuqtalari sistemasi  $[a, b]$  segmentda bo'laklash bajaradi deyiladi. Uni

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

kabi belgilanadi .

Har bir  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) nuqta bo'laklashning bo'luvchi nuqtasi,  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) segment esa  $P$  bo'laklashning oralig'i deyiladi.

$P$  bo'laklash oraliqlari uzunligi  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) larning eng kattasi , ya'ni ushbu

$$\lambda_P = \max \{\Delta x_k\} = \max \{\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}\}$$

miqdor  $P$  bo'laklashning diametri deb ataladi.  $[a, b]$  segment berilgan holda bu segmentni turli usullar bilan istalgan sondagi

bo'laklashlarni tuzish mumkin ekan. Bu bo'laklashlardan iborat to'plamni  $F$  bilan belgilaymiz :  $F = \{P\}$ .

**2. Integral yig'indi .**  $[a, b]$  segmentda  $f(x)$  funksiya aniqlangan bo'lsin. Shu segmentni

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n\} \in F$$

bo'laklashi va bu bo'laklashning har bir  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) oralig'ida ixtiyoriy  $\xi_k$  ( $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ) nuqta olamiz . Berilgan funksiyaning  $\xi_k$  nuqta-dagi qiymati  $f(\xi_k)$  ni  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  ga ko'paytirib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_k)\Delta x_k + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

**14.1.2-ta'rif .** Ushbu

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k. \quad (14.1)$$

yig'indi  $f(x)$  funksiyaning *integral yig'indisi* deb ataladi .

Masalan, 1)  $f(x) = x$  funksiyaning  $[a, b]$  segmentdagi integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

bo'ladi , bunda

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

**3) Dirixle funksiyasi**

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in [a, b] \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \in [a, b] \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

ning integral yig'indisi, masalan, barcha  $\xi_k$  lar faqatgina ratsional son, yoki irratsional son deb qarasak

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k)\Delta x_k = \begin{cases} b-a, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ravshanki,  $f(x)$  funksiyaning integral yig'indisi  $\sigma$ : a)  $f(x)$  funksiya,

b)  $[a, b]$  segmentni bo'laklash usuliga, v) har bir  $[x_k, x_{k+1}]$  segmentdan olingan  $\xi_k$

nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

**3. Aniq integral ta'rifi.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda aniqlangan bo'lsin.  $[a, b]$  segmentning shunday

$$P_1, P_2, \dots, P_m, \dots \quad (14.2)$$

$(P_m \in F, m=1,2,\dots)$  bo'laklashlarni qaraymizki ularni mos diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{p_3}, \dots, \lambda_{p_m}, \dots$$

ketma-ketlik nolga intilsin:  $\lambda_{p_m} \rightarrow 0$ .

Bunday  $P_m (m=1,2,3,\dots)$  bo'laklashlarga nisbatan  $f(x)$  funksiyaning integral yig'indilarini tuzamiz. Natijada  $[a,b]$  segmentni (14.2) bo'laklashlarga mos  $f(x)$  funksiyaning integral yig'indilari qiymatlaridan iborat quydagi:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \dots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Ravshanki bu ketma—ketlikning har bir hadi  $\xi_k$  nuqtalarga bog'liqdir.

**14.1.3-ta'rif.** Agar  $[a,b]$  segmentni har qanday (2) bo'laklashlar ketma-ketligi  $\{P_m\}$  olinganda ham unga mos integral yig'indi qiymatlaridan iborat  $\{\sigma_m\}$  ketma-ketlik  $\xi_k$  nuqtalarning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan ravishda hamma vaqt bitta  $J$  songa intilsa, bu  $J$  son  $\sigma$  yig'indining  $\lambda_p \rightarrow 0$  dagi limiti deb ataladi. U

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

kabi belgilanadi.

Yig'indi limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

**14.1.4-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $[a,b]$  segmentni diametri  $\lambda_p < \delta$ , bo'lgan har qanday  $P$  bo'laklash uchun tuzilgan  $\sigma$  yig'indi ixtiyoriy  $\xi_k$  nuqtalarda

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa,  $J$  son  $\sigma$  yig'indining  $\lambda_p \rightarrow 0$  dagi limiti deb ataladi.

**14.1.5-ta'rif.** Agar  $\lambda_p \rightarrow 0$  da  $f(x)$  funksiyaning integral yig'indisi (14.1) chekli limitga ega bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  segmentda integrallanuv-chi deyiladi,  $\sigma$  yig'indining chekli limiti  $J$  esa  $f(x)$  funksiyaning  $[a,b]$  segmentdagi aniq integrali deb ataladi. Funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x) dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k .$$

Bunda  $a$  son integralning quyi chegarasi,  $b$  son esa integralning yuqori chegarasi,  $[a, b]$  segment integrallash oralig'i deb ataladi.

Agar  $\lambda_p \rightarrow 0$  da yig'indining limiti mavjud bo'lmasa yoki uning limiti cheksiz bo'lsa, u holda funksiya  $[a, b]$  segmentda integrallanmaydi deyiladi.

**1-misol.**  $f(x) = C = \text{const}$  funksiyaning  $[a, b]$  segmentdagi integrali hisoblansin.

**Yechish.**  $[a, b]$  segmentni ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olib,  $f(x) = C$  funksiyaning integral yig'indisini topamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = C[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = C(x_n - x_0) = C(b - a)$$

Ravshanki,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} C(b - a) = C(b - a).$$

Demak,

$$\int_a^b C dx = C(b - a) .$$

Xususan,  $f(x) = 1$  bo'lganda quyidagiga egamiz:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a .$$

**2-misol.** Ushbu  $f(x) = x$  funksiyaning  $[a, b]$  segmentdagi integrali hisoblansin.

**Yechish.** Ma'lumki,  $[a, b]$  segmentda  $f(x) = x$  funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

bo'lib, bunda  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  va

$$x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} .$$

Bu tengsizlikni  $\Delta x_k > 0$  ga ko'paytirib topamiz:

$$x_k \cdot \Delta x_k \leq \xi_k \cdot \Delta x_k \leq x_{k+1} \cdot \Delta x_k \quad (k=0, 1, \dots, n-1) .$$

Keyingi tengsizliklardan esa

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Demak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \leq \sigma \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k.$$

Endi  $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k$  va  $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$  yig'indilarni quyidagicha o'zgartirib yozib

$$\begin{aligned} \text{olamiz:} \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2. \end{aligned}$$

Agar  $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$  ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Demak,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \sigma \leq \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Bu munosabatdan

$$\left| \sigma - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. So'ngra  $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$  uchun

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \leq \lambda_p \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \leq \frac{b-a}{2} \lambda_p$$

(bunda  $\lambda_p = \max_k \{\Delta x_k\}$ ) bo'lishidan  $\lambda_p \rightarrow 0$  da

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \rightarrow 0$$

bo'lishini topamiz.

Demak,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Bu esa ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

ekanini bildiradi.

**3-misol.**  $[a, b]$  segmentda Dirixle funksiyasi uchun aniq integral mav-jud emasligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Dirixle funksiyasi  $D(x)$  uchun integral yig'idini hususan quyidagicha bo'lishini ko'rgan edik:

$$\sigma = \begin{cases} b-a, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Ravshanki,  $\lambda_p \rightarrow 0$  da  $\sigma$  yig'indi limitga ega emas. Demak, Dirixle funksi-yasi  $[a,b]$  segmentda integrallanmaydi.

Odatda, yuqorida keltirilgan aniq integral *Riman integrali*, integral yig'indini Riman yig'indisi deyiladi.

**1-eslatma.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  segmentda chegaralanmagan bo'lsa, u shu segmentda integrallanmaydi.

## 14.2-§. Aniq integrallarni hisoblash

Integral mavzusining asosiy masalalaridan biri funksiya integralining mavjudligi bo'lsa, ikkinchisi funksiya integralini hisoblashdir.

**1. Nyuton–Leybnis formulasi.** Ushbu bandda, funksiylarning aniq integrallarini hisoblashda keng qo'llanadigan formulani keltiramiz.

Ma'lumki,  $f(x)$  funksiya  $[a,b]$  oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiya shu oraliqda  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Bu bir tomondan.

Ikkinchi tomondan,  $f(x)$  funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi  $\phi(x)$  berilgan boshlang'ich funksiya  $F(x)$  dan ixtiyoriy o'zgar-mas qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

bo'ladi. Bu tenglikdan, avval  $x = a$  deb,

$$\Phi(a) = C \tag{14.3}$$

so'ngra  $x = b$  deb

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C \tag{14.4}$$

tengliklarni topamiz. (14.3) va (14.4) tengliklardan ixtiyoriy boshlang'ich funksiya  $\Phi(x)$  uchun ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{14.5}$$

formula kelib chiqadi. Bu (14.5) formula *Nyuton–Leybnis formulasi* deb ataladi.

Odatda, (14.5) tenglikning o'ng tomonidagi  $\Phi(b) - \Phi(a)$  ayrima  $\Phi(x)|_a^b$  kabi yoziladi:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_a^b$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)|_a^b$$

Masalan,

$$\int_a^b xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

**2. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Ravshanki,  $\int_a^b f(x)dx$  mavjud bo'ladi.

Faraz qilaylik, aniq integralda o'zgaruvchi  $x$  ushbu  $x = \varphi(t)$  formula bilan almashtirilgan bo'lib, bunda quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

a)  $\varphi(t)$  funksiya biror  $[\alpha, \beta]$  oraliqda aniqlangan va uzluksiz,  $t$  o'zgaruvchi  $[\alpha, \beta]$  oralida o'zgarganda  $\varphi(t)$  funksiyaning qiymatlari  $[a, b]$  oraliqdan chiqmaydi;

b)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ ;

v)  $\varphi(t)$  funksiya  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz  $\varphi'(t)$  hosilaga ega.

U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (14.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  oraliqda boshlang'ich funksiyasi  $\Phi(x)$  uchun (14.5) formula o'rinli.

$[\alpha, \beta]$  oraliqda  $\Phi(\varphi(t))$  funksiyaning qaraylik. Bu funksiya  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz va

$$(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Keyingi tenglikdan  $\Phi'(x) = f(x)$  ekanini e'tiborga olib topamiz:

$$(\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Bu esa  $\phi(\varphi(t))$  funksiya  $[\alpha, \beta]$  da  $f(\varphi(t))$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini bildiradi. Nyuton–Leybnis formulasiga ko'ra,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(\varphi(\beta)) - \phi(\varphi(\alpha))$$

Demak,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a). \quad (14.7)$$

Shunday qilib, (14.5) va (14.7) munosabatlardan (14.4) tenglik kelib chiqadi.

**4-misol.** Quyidagi

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

integralni o'zgaruvchani

almashtirish usuli bilan hisoblansin.

**Yechish.** Bu integralda  $x = \sin x$  almashtirishni bajaramiz. U holda (14.6) formulaga ko'ra topamiz:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt = \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

**3. Bo'laklab integrallash usuli.**  $u(x)$  va  $v(x)$  funksiylarning har biri  $[a, b]$  oraliqda  $u(x)$  va  $v(x)$  hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \quad (14.8)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Ravshanki,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Demak,  $u(x)v(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda  $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  funksiya-ning boshlang'ich funksiyasi bo'lib, Nyuton–Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b$$

bo'ladi. Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b.$$

Bu tenglikdan esa (14.6) kelib chiqadi. (14.8) formula  $\int_a^b u(x)dv(x)$  integralni hisoblashni  $\int_a^b v(x)du(x)$  integralni hisoblashga olib keladi. Bunda  $u(x)$  hamda  $dv(x)$  shunday tanlash lozimki,  $\int_a^b v(x)du(x)$  integral imkoniyat boricha sodda hisoblansin.

**5-misol.**  $\int_1^2 \ln x dx$  integral hisoblansin.

**Yechish.** Agar  $u(x) = \ln x$ ,  $dv = dx$  deb olinsa, u holda

$$du = \frac{1}{x} dx, v(x) = x$$

bo'lib, (14.8) formulaga ko'ra topamiz.

$$\int_1^2 \ln x dx = (x \ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx = (x \ln x) \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

**6-misol.**  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  integral hisoblansin, bunda  $n = 0, 1, 2, \dots$

Bu integral, xususan  $n = 0$ ,  $n = 1$  bo'lganda osongina hisoblanadi:

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

$n \geq 2$  bo'lganda berilgan integralni

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

ko'rinishda yozib, unda bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz. Natijada

$$\begin{aligned} J_n &= (-\sin^{n-1} x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n \end{aligned}$$

bo'lib, undan ushbu

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

recurrent formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida berilgan integ-ralni  $n = 2, 3, \dots$  bo'lganda ketma—ket hisoblash mumkin. Biz

quyida  $n$  juft va toq bo'lganda berilgan integralning qiymatini keltiramiz:

$n = 2m$  — juft son bo'lganda

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (14.9)$$

$n = 2m+1$  — toq son bo'lganda

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \quad (14.10)$$

Bunda  $m!!$  belgi  $m$  dan katta bo'lmagan va u bilan bir xil juftlikka ega bo'lgan natural sonlarning ko'paytmasini bildiradi.

Shunday qilib,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{agar } n = 2m \text{ juft bo'lsa,} \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & \text{agar } n = 2m+1 \text{ toq bo'lsa,} \end{cases}$$

### 14.3-§. Aniq integralning ba'zi tadbiqlari

**1. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiya grafigi  $[a, b]$  oraliqda egri chiziq yoyini tasvirlasin. Uni  $\bar{AB}$  deb belgilaymiz.  $[a, b]$  oraliqning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashini olib, bo'luvchi  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) nuqtalar orqali  $OY$  o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning  $\bar{AB}$  yoy bilan kesishgan nuqtalari  $A_k(x_k, f(x_k))$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $A_0 = A$ ,  $A_n = B$ ) bo'ladi.  $\bar{AB}$  yoydagi bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib,  $L$  siniq chiziqni hosil qilamiz.  $L$  ni  $\bar{AB}$  yoyga *ichki chizilgan siniq chiziq* deb ataladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, siniq chiziq perimetri  $L$  qarayotgan  $f(x)$  funksiyaga bog'liq bo'lishi bilan birga  $[a, b]$  oraliqni bo'laklashga ham bog'liq bo'ladi:  $L = L(P)$ .

Agar  $P_1$  va  $P_2$  lar  $[a, b]$  oraliqni ikkita bo'laklash bo'lib,  $P_1 \subset P_2$  bo'lsa, u holda bu bo'laklashlarga mos  $\tilde{AB}$  yoyga ichki chizilgan siniq chiziqlar perimetrlari uchun

$$L_f(P_1) \leq L_f(P_2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak,  $P$  bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sonini orttirib borilsa,  $\tilde{AB}$  yoyga chizilgan mos siniq chiziqlar perimetrlari ham ortib boradi.

$P$  bo'laklashning diametri  $\lambda_P$  nolga intila borganda,  $\tilde{AB}$  yoyiga chizil-

gan bu bo'laklashga mos siniq chiziq shu  $\tilde{AB}$  yoyga brogan sari yaqinlashsa boradi, siniq chiziq perimetri esa  $\tilde{AB}$  yoyning uzunligini borgan sari aniqroq ifodalay boradi, deb qarash tabiiydir.

**14.3.1-ta'rif.**  $\tilde{AB}$  yoyiga chizilgan  $[a, b]$  oraliqni har qanday  $P$  bo'laklashga mos) siniq chiziq perimetri

$$L_f(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

$\lambda_P \rightarrow 0$  da chekli limitga ega bo'lsa,  $\tilde{AB}$  yoy uzunlikka ega deb ataladi va shu

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} L_f(P)$$

limitni  $\tilde{AB}$  yoyning uzunligi deyiladi.

Endi yoy uzunligining aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

$f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz hamda uzluksiz  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning  $[a, b]$  oraliqdagi grafigi  $\tilde{AB}$  yoyini tasvirlasin, deylik.  $[a, b]$  oraliqda ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashni olib,  $\tilde{AB}$  yoyiga chizilgan unga mos siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning perimetirini yozamiz:

$$L_f(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

Har bir  $[x_k, x_{k+1}]$  oraliqda  $f(x)$  funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llaymiz:

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(r_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k \leq r_k \leq x_{k+1})$$

Demak,

$$L_f(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(r_k)}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(r_k)} \Delta x_k$$

bunda  $x_k \leq r_k \leq x_{k+1}$ . Keyingi tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi  $\sqrt{1+f'^2(x)}$  funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Uning integral yig'indisidan farqi shuki, integral yig'indida  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  nuqta ixtiyoriy bo'lgan holda, yuqoridagi yig'indida esa  $r_k$  nuqta  $[x_k, x_{k+1}]$  oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo  $\sqrt{1+f'^2(x)}$  funksiya integrallanuvchi bo'lganligi (chunki shartga ko'ra,  $f'(x)$  uzluksiz) sababli  $\xi_k = r_k$  deb olish mumkin.

Demak,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} L_f(P) = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(r_k)} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

tenglik kelib chiqadi, Demak,  $\overset{\sim}{AB}$  yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi quyidagi

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx \quad (14.11)$$

formula yordamida hisoblanadi.

**7-misol.**  $[-a, a]$  ( $a > 0$ ) oraliqda ushbu

$$f(x) = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

zanjir chiziq yoyining uzunligi topilsin.

Avval  $f(x)$  funksiyaning hosilasini hisoblab,  $\sqrt{1+f'^2(x)}$  ni topamiz:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

$$1+f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2,$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Endi (14.11) formulaga ko'ra zanjir chiziqning  $[-a, a]$  oraliqdagi yoyi uzunligini hisoblaymiz:

$$L = \int_{-a}^a \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \Big|_{-a}^a = \left( e - \frac{1}{e} \right).$$

Quyidagi

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (14.12)$$

tenglamalar sistemasi orqali ifodalangan egri chiziqni qaraymiz (bu holda egri chiziq parametrik holda berilgan deyilib, (14.12) sistema egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi ). Bunda  $\varphi(t), \psi(t)$  lar  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluk-siz funksiyalar bo'lib,  $t$  o'zgaruvchi parametrlarning  $[\alpha, \beta]$  oraliqdagi ixtiyoriy ikkita turli  $t_1$  va  $t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ) qiymatiga mos keladigan (14.12) chiziqdagi  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$  nuqtalar ( $x_1 = \varphi(t_1), y_1 = \psi(t_1); x_2 = \varphi(t_2), y_2 = \psi(t_2)$ ) ham turlicha bo'lsin. Bundan tashqari, parametr  $t$  ning  $t_1$  va  $t_2$  qiymatlariga mos keladigan (14.12) chiziqdagi  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$  nuqtalarni  $t_1 < t_2$  bo'lganda,  $A_2$  nuqta  $A_1$  nuqtadan keyin keladi deb qaraladi. Shu bilan egri chiziqda yo'nalish o'rnatiladi.

Faraz qilaylik,  $t = \alpha, t = \beta$  qiymatlarga (14.12) chiziqda  $A$  va  $B$  nuqta-lar mos kelsin. Bu chiziqning  $\bar{AB}$  yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

Avval yuqoridagidek  $\bar{AB}$  yoyining uzunligini ta'riflaymiz.  $[\alpha, \beta]$  oraliqni ixtiyoriy

$$P\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta)$$

bo'laklashni olib, bu bo'laklashning bo'luvchi  $t_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) nuqtalariga mos kelgan  $\bar{AB}$  yoydagi  $A_k = A_k(x_k, y_k)$  ( $x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k)$ ) nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib,  $\bar{AB}$  yoyga chizilgan siniq chiziqni topamiz. Bu siniq chiziq perimetri quyidagi

$$L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (14.13)$$

formula bilan ifodalanadi. Ravshanki,  $L$  yig'indi  $\varphi(t), \psi(t)$  funksiyalarga hamda  $[\alpha, \beta]$  oraliqni bo'laklashga bog'liq:  $L = L_{\varphi\psi}(P)$ .

Yuqoridagidek,  $\lambda_p \rightarrow 0$  da siniq chiziq perimetri  $L = L_{\varphi\psi}(P)$  chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_{\varphi\psi}(P) = l$$

bo'lsa,  $\bar{AB}$  yoy uzunlikka ega deyiladi, va aniqlangan  $l$  esa  $\bar{AB}$  yoyning uzunligi deyiladi.

Aytaylik  $\varphi(t)$  va  $\psi(t)$  funksiyalar  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz  $\varphi'(t)$  va  $\psi'(t)$  hosilalarga ega bo'lsin Har bir  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ )

oraliqda  $\varphi(t)$  hamda  $\psi(t)$  funksiyalarga Langranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k) = \phi'(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (14.14)$$

$$\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\theta_k)(t_{k+1} - t_k) \quad (14.15)$$

bunda  $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Bu (14.14), (14.15) munosabatlardan foydalanib, (14.13) siniq chiziq perimetrini quyidagicha yozamiz:

$$L_{\varphi\psi}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)^2 + \psi'^2(\theta_k)(t_{k+1} - t_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} \cdot \Delta t_k$$

$$(\Delta t_k = t_{k+1} - t_k)$$

bunda  $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ,  $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Bu holda ham, yuqoridagi yig'indi

$$\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Farqi  $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$  ixtiyoriy nuqta bo'lgan holda,  $\tau_k$  va  $\theta_k$  lar shu  $[t_k, t_{k+1}]$  oraliqdagi tayin nuqtalardir. Modomiki,

$$\sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

funksiya  $[\alpha, \beta]$  da uzluksiz, binobarin integrallanuvchi ekan, unda

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} \Delta t_k = \lim_{\lambda_p \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\phi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \Delta t_k = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{\lambda_p \rightarrow 0} L_{\varphi\psi}(P) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Bu esa  $\bar{AB}$  yoyning uzunlikka ega bo'lishini va uning uzunligi uchun

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (14.16)$$

formula o'rinli ekanini bildiradi.

Xususan, agar (14.12) sistema ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu sistema  $y = \psi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) ko'rinishni oladi.

$\bar{AB}$  yoyning uzunligi uchun

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu (14.11) formulaning o'zidir.

**8-misol.** Ushbu

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq 2\pi) \quad (14.17)$$

chiziqning uzunligi topilsin.

$[\alpha, \beta]$  oraliqda  $x = \varphi(t) = r \cos t$ ,  $y = \psi(t) = r \sin t$  ( $r > 0$ ) funksiyalar uzluksiz hosilalarga ega. (14.17) sistema markazi koordinata boshida, radiusi  $r$  ga teng bo'lgan aylana yoyini ifodalaydi. Uning uzunligini (14.16) formula yordamida topamiz:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r \cos t)' ^2 + (r \sin t)' ^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = r \int_{\alpha}^{\beta} dt = r(\beta - \alpha).$$

Yuqoridagi (14.12) sistema bilan ifodalangan  $AB$  yoyni qaraylik. Bu yoyda parametrning  $t$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) qiymatiga mos keladigan nuqtani  $C$  deylik. Ravshanki,  $AC$  yoyning uzunligi  $t$  ga bog'liq bo'lib, u (14.16) formulaga ko'ra  $[\alpha, t]$  oraliqda

$$S = S(t) = AC = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integraldir. Uning hosilasi:

$$S'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}.$$

Keyingi tenglikni kvadratga ko'tarib, so'ngra har ikki tomonini  $dt^2$  ga ko'paytirsak, natijada

$$S'^2(t) dt^2 = \varphi'^2(t) dt^2 + \psi'^2(t) dt^2$$

ya'ni

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

munosabat hosil bo'ladi. Bu munosabat yoy differensialining kvadratini ifodalaydi.

Endi tekislikda qutb koordinatalarida berilgan egri chiziq yoyi uzunligining ham aniq integral orqali ifodasini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, egri chiziq qutb koordinata sistemasida quyidagi

$$r = g(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \quad (14.18)$$

funksiya bilan berilgan bo'lsin, bunda  $g(\theta)$  funksiya  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz  $g'(\theta)$  hosilaga ega bo'lsin deylik. Biz (14.18) ko'rinishida berilgan egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$\begin{cases} x = g(\theta) \cos \theta \\ y = g(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

parametrik ko'rinishda ifodalab, (14.16) formuladan foydalanamiz:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta]^2 + [g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'^2(\theta) + g^2(\theta)} d\theta.$$

Demak,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{g'^2(\theta) + g^2(\theta)} d\theta \quad (14.19)$$

**9-misol.** Ushbu

$$r = a \cdot \theta \quad (a = \text{const}, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha)$$

egri chiziqli (Arximed spirali) yoyining uzunligi topilsin.

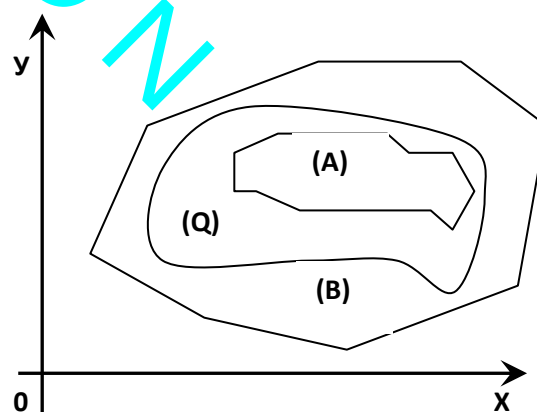
Yuqoridagi (14.19) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

$$l = \int_0^{\alpha} \sqrt{(a\theta')^2 + (a\theta)^2} d\theta = a \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \left[ \frac{\theta}{2} \sqrt{1 + \theta^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right| \right]_0^{\alpha} = \frac{a}{2} [\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})].$$

**2. Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi.** Ma'lumki, tekislikda yopiq sinik chiziqli bilan chegaralangan ko'pburchak yuzaga ega. Uning yuzi uchburchak yuzalari yig'indisi sifatida topiladi.

Endi tekislikda biror chegaralangan (Q) shaklni qaraylik. (1-chizma)

Bu (Q) shaklning ichiga (A) ko'pburchaklar, so'ngra (Q) shaklni o'z ichiga olgan (B) ko'pburchaklarni chizamiz. (A) ko'pburchaklarning yuzini  $S_A$  bilan, (B) ko'pburchaklarning yuzini  $S_B$  bilan belgilaylik. Natijada (Q) shaklga ichki chizilgan ko'pburchak



yuzalaridan iborat  $\{S_A\}$  to'plam, (Q) shaklni o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzalaridan iborat  $\{S_B\}$  to'plam, hosil bo'ladi.  $\{S_A\}$  to'plam yuqoridan,  $\{S_B\}$  to'plam quyidan chegaralangan. Demak,  $\sup\{S_A\} = \underline{Q}$ ,  $\inf\{S_B\} = \overline{Q}$  mavjud va  $\underline{Q} \leq \overline{Q}$  bo'ladi.

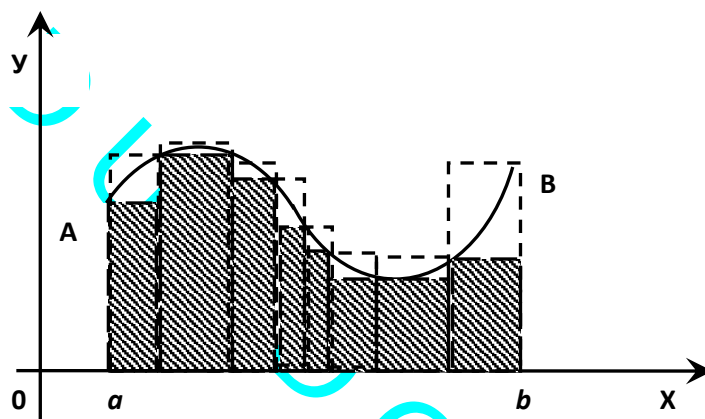
**14.3.2-ta'rif.** Agar  $\underline{Q} = \overline{Q}$  bo'lsa,  $(Q)$  shakl yuzga ega deyiladi va

$$Q = \underline{Q} = \overline{Q}$$

miqdor  $(Q)$  shaklning yuzi deyiladi. Demak,  $Q = \sup\{S_A\} = \inf\{S_B\}$ .

Aytaylik  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib,  $\forall x \in [a, b]$  uchun  $f(x) \geq 0$  bo'lsin.

Yuqoridan  $f(x)$  funksiya grafigi, yon tomonlardan  $x = a$ ,  $x = b$  vertikal chiziqlar hamda pastdan  $Ox$  abscissa o'qi bilan chegaralangan shaklni, ya'ni  $aABb$  egri chiziqli trapetsiyani qaraylik (40-chizma).



$[a, b]$

2-chizma

ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

bo'laklashi uchun har bir  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) oraliq'ida

$$\inf\{f(x)\} = m_k, \quad \sup\{f(x)\} = M_k$$

$$(x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1)$$

mavjud bo'ladi.

Quyidagi

$$S_A = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad S_B = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

yig'indilarni tuzamiz. Bu yig'indilarning birinchisi  $aABb$  egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan ko'pburchakning yuzini (2-chizmada bu yuz shtrixlangan), ikkinchisi esa  $aABb$  egri chiziqli trapetsiyani o'z ichiga olgan ko'pburchakning yuzini ifodalaydi.

Ravshanki, bu ko'pburchaklar, demak, ularning yuzlari ham  $f(x)$  funksiyaga hamda  $[a, b]$  oraliqni bo'laklashga bog'liq bo'ladi:

$$S_A = S_A(P), \quad S_B = S_B(P).$$

$[a, b]$  oraliqda turli bo'laklashlar olinsa, ularga nisbatan  $aABb$  egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan hamda bu egri chiziqli trapetsiyaning o'z ichiga olgan turli ko'pburchaklar yasaladi. Natijada bu ko'pburchak yuz-laridan iborat quyidagi

$$\{S_A(P)\}, \quad \{S_B(P)\}$$

to'plamlar hosil bo'ladi. Bunda  $\{S_A(P)\}$  to'plam yuqoridan,  $\{S_B(P)\}$  to'plam esa quyidan chegaralangan bo'ladi. Demak, bu to'plamlarning

$$\sup \{S_A(P)\}, \quad \inf \{S_B(P)\}$$

aniq chegaralari mavjud bo'ladi.

Shartga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz. U holda Kantor teoremasining natijasiga asosan  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  songa ko'ra shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $[a, b]$  oraliqni diametri  $\lambda_p < \delta$  bo'lgan har qanday  $P$  bo'laklash uchun har bir  $[x_k, x_{k+1}]$  oraliqda funksiyaning tebranishi

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi. Unda

$$\begin{aligned} \inf \{S_B(P)\} - \sup \{S_A(P)\} &\leq S_B(P) - S_A(P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demak,  $[a, b]$  oraliqni diametri  $\lambda_p < \delta$  bo'lgan har qanday bo'laklash olinganda ham bu bo'laklashga mos  $aABb$  egri chiziqli trapesiyaning ichiga chizilgan hamda bu trapesiyaning o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzlari uchun har doim

$$0 \leq \inf \{S_B(P)\} - \sup \{S_A(P)\} < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa

$$\inf \{S_B(P)\} = \sup \{S_A(P)\} \quad (14.20)$$

tenglik kelib chiqadi.

(14.20) tenglik  $aABb$  egri chiziqli trapesiyaning yuzaga ega bo'lishini bildiradi.

Endi yuqorida o'rganilgan  $S_A(P), S_B(P)$  yig'indilarni Darbu yig'indilari (9-bob, 5-ta'rifga qarang) bilan taqqoslab,  $S_A(P)$  hamda  $S_B(P)$  yig'indilar  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  oraliqda mos ravishda

Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari ekanini topamiz. Shuning uchun (9-bob, 6-ta'rifga asosan) ushbu

$$\sup\{S_A(P)\}, \quad \inf\{S_B(P)\}$$

miqdorlar  $f(x)$  funksiyaning quyi hamda yuqori integrallari bo'ladi:

$$\sup\{S_A(P)\} = \int_a^b f(x)dx, \quad \inf\{S_B(P)\} = \int_a^b f(x)dx$$

Yuqorida isbotlangan (14.20) munosabatga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli ekani ko'rinadi. U holda,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Demak,  $aABb$  egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$Q = \int_a^b f(x)dx \quad (14.21)$$

bo'ladi.

**10-misol.** Quyidagi

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$$

chizqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping (3-chizma).

(14.21) formuladan foydalanib topamiz:

$$Q = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}.$$

Agar tekislikda (Q) shakl quyidagi

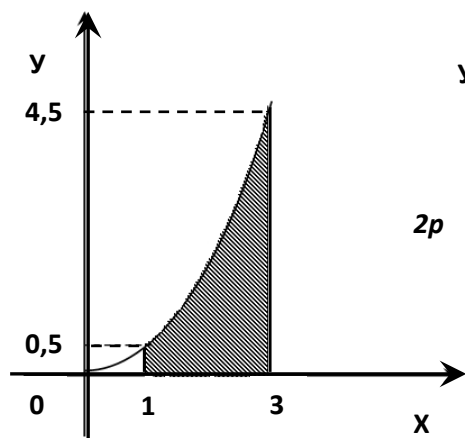
$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklni ifodalasa (5-chizma) (bunda  $f_1(x)$  va  $f_2(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib, bu oraliqda  $f_1(x) \geq 0$ ,  $f_2(x) \geq 0$ ,  $f_1(x) \geq f_2(x)$  u holda bu shaklning yuzi uchun ushbu

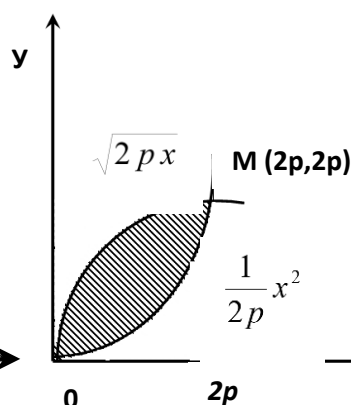
$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \quad (14.22)$$

fo'rmla o'rinli bo'ladi.

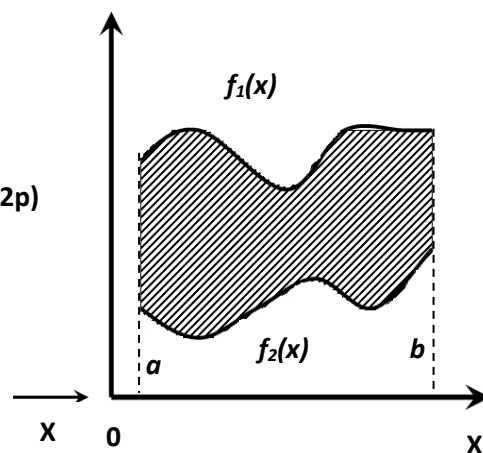
**11-misol.** Ushbu  $f_1(x) = \sqrt{2px}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{2p}x^2$  ( $p > 0$ ) chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin (4-chizma).



3-chizma.



4-chizma.



5-chizma.

Izlangan yuz  $y = \sqrt{2px}$  va  $y = \frac{1}{2p}x^2$  ( $p > 0$ ) parabolalar bilan chegaralangan. Shu parabolalar  $(0, 0)$  va  $(2p, 2p)$  nuqtalarda kesishadi. Demak, izlangan yuza  $x = 0$ ,  $x = 2p$  va  $y = \sqrt{2px}$ ,  $y = \frac{1}{2p}x^2$  chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi. Shuning uchun (14.22) formuladan foydalanib topamiz:

$$Q = \int_0^{2p} \left[ \sqrt{2px} - \frac{1}{2p}x^2 \right] dx = \left[ \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right]_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2.$$

**2-eslatma.** Yuqoridagi (14.191) formula  $[a, b]$  oraliqda  $f(x) \geq 0$  bo'lganda  $aABb$  egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalashini ko'rdik. Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda uzluksiz bo'lib, unda ishora saqlamasa, (14.19) formuladagi integral egri chiziqli trapetsiyalar uzlarining yig'in-disidan iborat bo'ladi. Bunda  $OX$  o'qining yuqorisidagi yuz musbat ishora bilan,  $OX$  o'qining pastidagi yuz esa manfiy ishora bilan olinadi.

**3-eslatma.** Tekis shaklning yuzini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Tekislikda  $(Q)$  shakl berilgan (1-chizmaga qarang).  $\{A_n\}$  shu shakl ichiga chizilgan ko'pburchaklar ketma-ketligi  $\{B_n\}$  esa  $Q$  shaklni o'z ichiga olgan ko'pburchaklar ketma-ketligi bo'lsin.  $A_n$  hamda  $B_n$  ko'pburchaklar uzlari mos rayishda  $s_{A_n}$  va  $s_{B_n}$  bo'lib, ulardan tuzilgan ketma-ketliklar esa  $\{s_{A_n}\}$  hamda  $\{s_{B_n}\}$  bo'lsin. Agar  $n \rightarrow \infty$  da  $\{s_{A_n}\}$  hamda  $\{s_{B_n}\}$  ketma-ketliklar chekli limitga ega bo'lib,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{B_n}$  tenglik o'rinli bo'lsa,  $(Q)$  shakl yuzga ega deyiladi, ushbu

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{B_n}$$

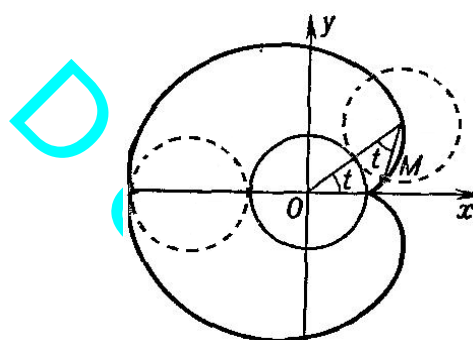
miqdor  $Q$  shakl yuzi deb ataladi.

Qutb koordinata sistemasida ushbu  $\rho = \rho(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) funksiya tasvirlagan  $\widehat{AB}$  yoy hamda  $OA$  va  $OB$  radius vektorlar bilan chegaralangan shakl – egri chiziqli sektorni qaraylik. Bunda  $\rho(\theta)$  funksiya  $[\alpha, \beta]$  oraliqda uzluksiz hamda  $\forall \theta \in [\alpha, \beta]$  uchun  $\rho(\theta) \geq 0$ .

Bu  $OAB$  sektor yuzga ega bo'lib, uning yuzi

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

bo'ladi.



6-chizma.

**12-misol.** Ushbu

$$\rho = \rho(t) = a(1 - \cos t) \quad (a = \text{const}, 0 \leq t \leq 2\pi)$$

funksiya grafigi bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

Bu funksiya kardioidani ifodalaydi. Ma'lumki, kardioida – radiusi  $a$  ga teng bo'lgan aylananing shu radiusli ikkinchi qo'zg'almas aylana bo'ylab harakati (sirg'anmasdan yumalashi) natijasida birinchi aylana ixtiyoriy nuqtasining chizgan chizig'idir (6-chizma).

Kardioida kutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani sababli yuqori yarim tekislikdagi shaklning yuzini topib, so'ngra uni ikkiga ko'paytirsak, izlanayotgan yuz kelib chiqadi.

$t$  o'zgaruvchi  $[0, \pi]$  oraliqda o'zgarganda  $\rho$  radius vektor kardioidaning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizadi. Shuning uchun

$$Q = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2(t) dt = \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right] dt =$$

$$a^2 \left[ \frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2$$

Demak,  $Q = \frac{3}{2}\pi a^2$

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi aniq integrallarni hisoblang.

- a)  $\int_0^1 x^4 dx$ ;
- b)  $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$ ;
- c)  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ ;
- d)  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ;
- e)  $\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$ ;
- f)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$ ;

2. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli yordamida quyidagi aniq integrallarni hisoblang.

- a)  $\int_0^3 \frac{2x dx}{\sqrt{16+x^2}}$ ;
- b)  $\int_{-1}^2 \frac{2x dx}{(2x^2+1)^2}$ ;
- c)  $\int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2 - 7} dx$ ;
- d)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}$ ;
- e)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$ ;
- f)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$ ;

3. Quyidagi integrallarni bo'laklab integrallash usuli yordamida hisoblang.

- a)  $\int_1^e \ln^2 x dx$ ;
- b)  $\int_1^8 \frac{x dx}{\sqrt{3x+1}}$ ;
- c)  $\int_1^e x^2 \ln x dx$ ;
- d)  $\int_0^2 (3 - 2x) e^{-3x} dx$ ;

## XV BOB. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HUSUSIY HOSILALARI VA EKSTREMUM

### 15.1-§. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning hususiy hosilalari

#### 1. Ikki o'zgaruvchili funktsiya xususiy va to'la orttirmalari.

**15.1.1-ta'rif.**  $z = f(x, y)$  funktsiyada  $x$  o'zgaruvchiga biror  $\Delta x$  orttirma berib,  $y$  ni o'zgarishsiz qoldirsak, funktsiya  $\Delta_x z$  orttirma olib, bu orttirmaga  $z$  funktsiyaning  $x$  o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday,  $y$  o'zgaruvchiga  $\Delta y$  orttirma berib  $x$  o'zgarishsiz qolsa, unga  $z$  funktsiyaning  $y$  o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

**15.1.2-ta'rif.**  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar mos ravishda  $\Delta x$  va  $\Delta y$  orttirmalar olsa,  $z = f(x, y)$  funktsiya  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  to'liq orttirma oladi.

#### 2. Ikki o'zgaruvchili funktsiya xususiy hosilalari.

**15.1.3-ta'rif.** a)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$  chekli limit mavjud bo'lsa, unga  $z = f(x, y)$  funktsiyaning  $x$  o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va  $\frac{\partial z}{\partial x}$  yoki  $z'_x = f'_x(x, y)$  bilan belgilanadi.

b)  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$  chekli limit mavjud bo'lsa, unga  $z = f(x, y)$  funktsiyaning  $y$  o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va  $\frac{\partial z}{\partial y}$  yoki  $z'_y = f'_y(x, y)$  bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funktsiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funktsiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol.  $z = x^2 + 2xy + 3y^2$  xususiy hosilalarni toping.

*Yechish.* Oldin  $y$  ni o'zgarmas deb  $z'_x$  ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y,$$

endi  $x$  ni o'zgarmas deb  $\frac{\partial z}{\partial y}$  ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-misol.  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  funksiyaning xususiy hosilalarini

toping.

*Yechish.* Hosila olish qoidalarini va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

( $u'_y, u'_z$  larni mustaqil toping).

**3. To'la differensial.** Ma'lumki,  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar mos ravishda  $\Delta x$  va  $\Delta y$  orttirmalar olsa,  $z = f(x, y)$  funksiya  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$  to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning  $\Delta x$  va  $\Delta y$  larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funksiyaning *to'la differensial* deyiladi va  $dz$  bilan belgilanadi.  $z = f(x, y)$  funksiyaning to'la differensial

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (15.1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ . To'la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni  $\Delta z \approx dz$  yoki  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz$ , bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (15.2)$$

Uch argumentli  $u = F(x, y, z)$  funksiyaning to'la differensial

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (15.3)$$

formula bilan hisoblanadi.

3-misol.  $z = \ln(x^2 + y^2)$  funksiyaning to'la differensialini toping.

*Yechish.* Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(15.1) formulaga asosan,  $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$  bo'ladi.

4-misol.  $u = x^2 yz^2$  funksiyaning to'la differensialini toping.

*Yechish.* Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 yz^2)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 yz^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 yz^2)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(15.3) formulaga asosan,  $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz$  bo'ladi.

5-misol. O'lchovlari  $a = 8m$ ,  $b = 6m$ ,  $c = 3m$  bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o'zgaradi.

*Yechish.* Parallelepipedning hajmi  $v = xyz$ ;  $x, y, z$  uning o'lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban  $\Delta V \approx dV$  formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yx dx + xz dy + xy dz$$

bo'lib, shartga ko'ra  $x = 8$ ,  $y = 6$ ,  $z = 3$ ,  $dx = 0.1$ ,  $dy = 0.05$ ,  $dz = -0.15$  bo'lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6 \cdot (-0.15) = -4.2.$$

Shunday qilib, hajm taxminan  $4.2m^3$  ga kamayadi.

6-misol. To'la differensial formulasidan foydalanib:

$$1) \arccotg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), 2) \sqrt{1.04^{1.99}} + \ln 1.02$$

larni taqribiy hisoblang.

*Yechish.* To'la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi

qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (15.2) formuladan foydalanish kerak.

1)  $\operatorname{arccctg}\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)$  ifoda  $f(x, y) = \operatorname{arccctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)$  funksiyaning

$P_1(1.97; 1.02)$  nuqtadagi qiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun  $P_0 = (2; 1)$  ni olsak,  $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$ ,  $\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$  bo'ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning  $P_0$  nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y) = \left[ \operatorname{arccctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y}-1\right)^2} = - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = - \frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[ \operatorname{arccctg}\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y \right] = - \frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y}-1\right)^2} = - \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x^2 - y^2))}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_x(2; 1) = - \frac{1}{1 + (2 - 1)^2} = -0.5; \quad f'_y(2; 1) = \frac{2}{1 + (2 - 1)^2} = 1.$$

(15.2) dan foydalansak,

$$\operatorname{arccctg}\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right) \approx \operatorname{arccctg}\left(\frac{2}{1}-1\right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$$

bo'ladi.

2)  $\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$  ni  $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$  funksiyaning  $P_1(1.04; 1.99; 1.02)$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun  $P_0(1; 2; 1)$  ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning  $P_0(1; 2; 1)$  nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(15.2) formulaning uch argumentli funktsiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0,04 + 0 \cdot (-0,01) + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 1,05$$

natijani olamiz.

#### 4. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.

1.  $z = f(x, y)$  funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$  va  $f_{yx}''(x, y)$  xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu  $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$  yozuv  $z$  funktsiyaning  $m$  marta  $x$  o'zgaruvchi

bo'yicha va  $(n-m)$  marta  $y$  o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.

7-misol.  $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$  ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

*Yechish.* Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y.$$

2. *Ikkinchi tartibli to'la differensial*  $d(dz) = d^2z$  kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (15.4)$$

8-misol.  $z = x^2y^3$  funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

*Yechish.* Xususiy hosilalarni topamiz:

$$z'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(15.1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

## 15.2-§. Ikki argumentli funksiya ekstremumi

**15.2.1-ta'rif.**  $z = f(x, y)$  funksiyaning  $P_0(x_0; y_0)$  nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan  $P(x, y)$  nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni  $f(x_0; y_0) > f(x, y)$  bo'lsa,  $z = f(x, y)$  funksiya  $P_0(x_0; y_0)$  nuqtada maksimumga ega deyiladi.

**15.2.2-ta'rif.**  $z = f(x, y)$  funksiyaning  $P_1(x_1; y_1)$  nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan  $P(x, y)$  nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni  $f(x_1; y_1) < f(x, y)$  bo'lsa,  $z = f(x, y)$  funksiya  $P_1(x_1; y_1)$  nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

**Ekstremumning zaruriy shartlari:**  $P_0(x_0; y_0)$  nuqtada uzluksiz  $z = f(x, y)$  funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (stasionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

**Ekstremumning yetarli shartlari:** Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

bilan belgilaymiz va  $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$  ni tuzamiz.

1.  $\Delta = AC - B^2 > 0$  bo'lsa,  $z = f(x, y)$  funksiya  $P_0(x_0, y_0)$  nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1)  $A < 0$  bo'lganda  $P_0(x_0, y_0)$  nuqtada maksimumga,

2)  $A > 0$  bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2.  $\Delta = AC - B^2 < 0$  bo'lsa,  $P_0(x_0, y_0)$  nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$  bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

9-misol.  $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$  funksiya ekstremumini tekshiring.

**Yechish.** Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1-x^2)]^3 + x - x^{+x^3} &= 0, \\ (1-x^2)^3 &= -1, 1-x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x_1 &= 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 &= 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Demak, uchta  $O(0,0)$ ,  $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$  va  $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$  kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

$O(0,0)$  nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz:

$A = -4$ ,  $B = 4$ ,  $C = -4$ ;  $\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$  bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan OX o'qi bo'yicha ( $y=0$ )

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0.$$

$y = x$ , bissektrisa bo'yicha

$$f(x, y)_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

bo'ladi. Shunday qilib,  $O(0,0)$  biror atrofida  $\Delta f(x, y)$  ortirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$  nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC - B^2 = 400 - 16 > 0$  va  $A = 20 > 0$  demak  $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$  nuqtada funksiya minimumga ega.  $f_{\min} = -8$ ;

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$  nuqtada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun

$A = 20$ ,  $B = 4$ ,  $C = 20$  bo'lib  $\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$  va  $A = 20 > 0$  bo'lganligi uchun  $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$  nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi,  $f_{\min} = -8$

10-misol.  $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$  funksiyaning ekstremumini tekshiring.

*Yechish.*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$  nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak,  $P_0(1;1)$  nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun  $\Delta z$  orttirmaning  $P_0$  nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora  $P_0(1;1)$  nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni  $P_0(1;1)$  nuqtada funksiya minimumga ega  $z_{\min} = f(1;1) = 0$ ;

**Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.** Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

11-misol.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$  funksiyaning  $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$  sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

*Yechish.* Soha  $AOB$  uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan  $x = -1, y = -1$  bo'lib,  $P_0(-1, -1)$  kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Funksiyani soha chegarasida tekshiramiz:  $AO$  chegarada  $y = 0$  bo'lib,  $z = x^2 + x$  funksiya xosil bo'ladi. Bu funksiyaning ekstremumi:

$$z'_x = 2x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} = -0,5$$

bo'ladi.

Demak,  $P_1(-0,5, 0)$   $AO$  chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi  $x = 0$ ,  $BO$  chegarada  $z = y^2 + y$  funksiya xosil bo'lib,  $z'_y = 2y + 1 = 0 \quad y = -1/2$ .

Demak,  $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$   $BO$  chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi

$y = -3 - x$  bo'lgan  $AB$  chegarada  $z = 3x^2 + 9x + 6$  funksiya hosil bo'lib  $z'_x = 6x + 9 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$ .  $AB$  ning tenglamasidan  $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ ,

demak,  $AB$  chegaradagi kritik nuqta  $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  bo'ladi.

Berilgan funksiyaning  $P_0, P_1, P_2, P_3$  kritik nuqtalardagi, hamda  $A, B, O$  nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$z_4 = f(0) = f(0, 0) = 0;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6;$$

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6.$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab  $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6$  va  $z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$  degan xulosaga kelimiz

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Quyidagi funksiyalarni ekstremumga tekshiring.

1.  $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$ .
2.  $z = xy(12 - x - y)$ .
3.  $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$ .
4.  $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$ .
5.  $z = x^2 + 3(y + 2)^2$ .
6.  $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20$ .
7.  $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$ .
8.  $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$ .
9.  $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ .
10.  $z = xy - 3x^2 - 2y^2$ .

Berilgan  $z = f(x, y)$  funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan  $D$  yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

1.  $z = x^2 - y^2 - x + y$ ;  $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$ .
2.  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ;  $x = 0, y = 0, 5x - 3y + 45 = 0$ .

3.  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5; x + y = 5, x = -1, y = -1.$

4.  $z = 3y - 2x - xy; x = 0, y = 0, 3x - 4y = 12.$

5.  $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x, x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$

6.  $z = x^2 + 6xy - x + 3y; x = 0, x = 3, y = 0, y = 3.$

7.  $z = x^2 + 2xy - 10; y = 0, y = x^2 - 4.$

8.  $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1; x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$

Berilgan funksiylarning ko'rsatilgan tartibli yuqori tartibli hosila va differensiallarini toping.

1.  $y = \frac{\ln x}{x}$  uchun  $d^5 y = ?$  J:  $\left( \frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6} \ln x \right) dx^5, x > 0.$

2.  $y = \frac{x^2}{1-x}$  uchun  $y^{(8)} = ?$  J:  $\frac{8!}{(1-x)^9}, x \neq 1.$

3.  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$  uchun  $y^{(100)} = ?$  J:  $\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}, x < 1.$

4.  $y = e^x \ln x$  uchun  $d^4 y = ?$  J:  $e^x \left( \ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.$

5.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  uchun  $d^3 y = ?$  J:  $\left( -\frac{15}{8x^3\sqrt{x}} \right) dx^3, x > 0.$

6.  $y = e^x \cos x$  uchun  $y^{(4)} = ?$  J:  $-4e^x \cos x.$

7.  $y = x \operatorname{sh} x$  uchun  $d^{100} y = ?$  J:  $(x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x) dx^{100}.$

8.  $y = \sin^2 x \ln x$  uchun  $y^{(6)} = ?$

J:  $-\frac{60}{x^6} + \left( \frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x + \left( \frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x.$

9.  $y = \frac{e^x}{x}$  uchun  $d^{10} y = ?$

J:  $e^x \left( \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}} \right) dx^{10}, A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (1+i), A_{10}^0 = 1.$

10.  $y = \sin^2 x$  uchun  $y^{(8)} = ?$  J:  $-2^7 \cos 2x.$

11.  $y = \cos^2 x$  uchun  $y^{(10)} = ?$  J:  $-2^9 \cos 2x.$

## XVI BOB. SONLI QATORLAR

### 16.1-§. Asosiy tushunchalar

Ushbu

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (16.1)$$

haqiqiy sonlar ketma—ketligi berilgan bo'lsin.

**16.1.1-ta'rif.** Quyidagi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (16.2)$$

ifoda *qator (sonli qator)* deb ataladi. Uni  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

(16.1) ketma—ketlikning  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  elementlari qatorning hadlari deyiladi,  $a_n$  esa qatorning umumiy ( $n$ —chi) hadi deyiladi.

(16.2) qatorning hadlaridan quyidagi

$$A_1 = a_1,$$

$$A_2 = a_1 + a_2,$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\dots\dots\dots$$

yig'indilarni tuzamiz. Ular qatorning *qisman yig'indilari* deyiladi.

Demak, (16.2) qator berilgan holda har doim bu qatorning qisman yig'indilaridan iborat ushbu  $A_n$ :

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

sonlar ketma—ketligini hosil qilish mumkin.

**16.1.2-ta'rif.** Agar  $n \rightarrow \infty$  da (16.2) qatorning qisman yig'indilaridan iborat  $A_n$  ketma—ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad (A \in \mathbb{R})$$

bo'lsa, (16.2) *qator yaqinlashuvchi* deyiladi.

Bu limitning qiymati  $A$  son (16.2) *qatorning yig'indisi* deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**16.1.3-ta'rif.** Agar  $n \rightarrow \infty$  da (16.2) qatorning qisman yig'indilaridan iborat  $A_n$  ketma—ketlikning limiti cheksiz bo'lsa yoki

bu limit mavjud bo'lmasa, u holda (16.2) qator uzoqlashuvchi deyiladi. Masalan:

1) Ushbu

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2.$$

2) Quyidagi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

qator uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty.$$

3) Quyidagi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

qator ham uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 - 1 + \dots + (-1) = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib,  $A_n$  ketma-ketlik limitga ega emas.

1-misol. Geometrik progressiya  $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$  hadlaridan tuzilgan

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin. Odatda bu qator *geometrik qator* deyiladi.

*Yechish.* Ravshanki,

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \quad (q \neq 1)$$

Agar  $|q| < 1$  bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a}{1 - q}$$

bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'in-

disi  $\frac{a}{1 - q}$  songa teng.

Agar  $q > 1$  bo'lsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$  bo'lib, qator uzoqlashuvchi

bo'ladi.

Agar  $q=1$  bo'lsa,  $n \rightarrow \infty$  da  $A_n = na \rightarrow \infty$  bo'lib qator uzoqlashuvchi,  $q \leq -1$  bo'lganda esa  $A_n$  ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib geometrik qator  $|q| < 1$  bo'lganda yaqinlashuvchi,  $|q| \geq 1$  bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-misol. Quyidagi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (16.3)$$

qatorni uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatilsin. Bu qator *garmonik qator* deb ataladi.

*Yechish.* (16.2) qatorning birinchi  $2^k$  ta ( $k \in \mathbb{N}$ ) hadidan tuzilgan

$$A_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}$$

qisman yig'indisini olib, unu quyidagicha yozib olamiz.

$$A_{2^k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Endi ushbu

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{8 \text{ ta}} = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2},$$

.....

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

tengsizliklarni etiborga olsak, unda

$$A_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki,  $A_{2^k}$  ketma-ketlik o'suvchi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{2^k} = \infty$ . Shunday qilib, garmonik qator uzoqlashuvchi.

3-misol. Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots \quad (16.4)$$

qatorni yaqinlashuvchiligi, yig'indisi  $\ln 2$  ga tengligi ko'rsatilsin.

*Yechish.* Bu qatorning qisman yig'indisini yozamiz:

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ma'lumki,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

bunda  $0 \leq x \leq 1$  uchun

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlik o'rinli. Yuqoridagi formulada  $x=1$  deb topamiz:

$$\ln 2 = A_n + r_n(1),$$

natijada ushbu

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| \leq \frac{1}{n+1}$$

tengsizlikka kelamiz. Undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \ln 2$$

kelib chiqadi. Demak, (16.4) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $\ln 2$  ga teng.

Aytaylik

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning dastlabki  $m$  ta hadini tashlash natija-sida hosil bo'lgan ushbu

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots =$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \quad (16.5)$$

qator  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning ( $m$  — chi hadidan keyingi) qoldig'i deyiladi.

## 16.2-§. Yaqinlashuvchi qatorlar. Koshi teoremasi

### 1. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (16.6)$$

qator berilgan bo'lsin. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u ma'lum xos-salarga ega bo'ladi.

**1-xossa.** Agar (16.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning istalgan (16.5)

qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

(16.6) qator berilgan bo'lsin. Biror  $m$  natural sonni tayinlab,

(16.5) qatorning qisman yig'indisini  $\overline{A}_k$  bilan belgilaylik:

$$\overline{A}_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}.$$

Ravshanki,

$$\overline{A}_k = A_{m+k} - A_m \quad A_n = A_m + \overline{A}_{n-m} \quad (n > m) \quad (16.7)$$

bunda  $A_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$  bo'ladi.

(16.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m+k} = A$  ( $A$ -chekli son) bo'ladi.  $k \rightarrow +\infty$  da (16.6) tenglikdan limitga o'tib topamiz:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A}_k = A - A_m$ .

Bu esa (16.5) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. Endi (16.5) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{A}_k = \overline{A}$  ( $\overline{A}$ -chekli son) bo'ladi. (16.7) tenglikda  $n \rightarrow +\infty$  da limitga o'tsak, u holda  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{A} + A_m$  bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (16.6) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Shunday qilib, qatorning dastlabki chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish uning yaqinlashuvchiligi xususiyatiga ta'sir qilmaydi.

**1-natija.** Agar (6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning qoldig'i

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

$m \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.

Haqiqatan ham (6) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi  $A$  bo'lsin, u holda

$$A = A_m + r_m, \quad r_m = A - A_m$$

bo'lib,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = A - A = 0$$

bo'ladi.

**2-xossa.** Agar (6) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi  $A$  bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c a_1 + c a_2 + \dots + c a_n + \dots \quad (16.8)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $cA$  ga teng bo'ladi ( $c \neq 0$  -  $n$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son).

(16.8) qatorning qisman yig'indisini  $A_n^1$  bilan belgilasak, u holda

$$A_n^1 = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^1 = cA$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (16.8) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi  $cA$  ga teng ekanini bildiradi.

Bu xossa yaqinlashuvchi qatorlarda ushbu

$$c(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots$$

munosabatning o'rinli bo'lishini ifodalaydi.

**3-xossa.** Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda  $A$  va  $B$  ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots \quad (16.9)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi  $A+B$  ga teng bo'ladi.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak, bu qatorning qisman yig'indilari ( $A_n$  va  $B_n$ ) lar uchun  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$  tengliklar o'rinli bo'ladi. (16.9) qatorning qisman yig'indilarini  $C_n$  bilan belgilab topamiz:

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = A + B.$$

Keyingi tenglikdan xossaning isboti kelib chiqadi.

**2-natija.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  va  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + lb_n)$$

qator ham yaqinlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n + lb_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + l \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi (bunda  $c, l$  -  $n$  ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas sonlar).

**4-xossa.** Agar (16.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning umumiy hadi  $a_n$ ,  $n \rightarrow \infty$  da nolga intiladi.

(16.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsin, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  ( $A$ -chekli

son). Agar

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda limitlar xossalriga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$$

bo'lishini topamiz.

**Eslatma.** Qatorning umumiy hadi  $n \rightarrow \infty$  da nolga intilishdan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

**Masalan.** Garmonik qator  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ning umumiy hadi  $a_n = \frac{1}{n}$  bo'lib, u  $n \rightarrow \infty$  da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida keltirilgan 4-xossa qator yaqinlashishning zaruriy shartini ifodalaydi.

**2. Koshi teoremasi.** Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lib,

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

uning qisman yig'indisi bo'lsin.

**16.2.1-teorema.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun  $\forall \varepsilon > 0$  olinganda ham shunday  $n_0 \in \mathbb{N}$  topilib,  $\forall n > n_0$  va  $m = 1, 2, 3, \dots$  lar uchun

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega bo'lib, undan amaliy masalalarni hal etishda foydalanish qiyin bo'ladi.

## Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$$

qatorning ham yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

2. Koshi teoremasidan foydalanib, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

4. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

qator uchun

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = 1$$

bo'lsa, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladimi? Misollar keltiring.

5. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot \frac{1}{n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

6. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

qatorning o'z-o'ziga Koshi bo'yicha ko'paytmasi uzoqlashuvchi qator ekanligi isbotlansin.

7. Quyidagi sonli qatorning yig'indisini toping.

$$a) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots$$

$$e) \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

$$f) \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$$

## XVII BOB. FUNKSIONAL QATORLAR

### 17.1-§. Funksional qator tushunchasi

Faraz qilaylik,  $X \subset R$  to'plamda  $\{u_n(x)\}$ :

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

funksional ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**17.1.1-ta'rif.** Quyidagi

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ifoda funksional qator deyiladi. U  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (17.1)$$

Bunda  $u_1(x), u_2(x), \dots$  funksiyalar (1) funksional qatorning hadlari,  $u_n(x)$  esa umumiy had deyiladi.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots$$

lar funksional qatorlar bo'ladi.

(17.1) funksional qatorning hadlaridan tuzilgan ushbu

$$S_1(x) = u_1(x),$$

$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

yig'indilar (17.1) funksional qatorning qisman yig'indilari deyiladi.

Bu yig'indilar quyidagilap

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots$$

funksional ketma-ketlikni hosil qiladi.

**17.1.2-ta'rif.** Agar  $\{S_n(x)\}$  funksional ketma-ketlik  $x_0 \in X$  nuqtada yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  funksional qator  $x_0$  nuqtada yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi.

Bu  $\{S_n(x)\}$  funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi (to'plami) tegishli funksional qatorning yaqinlashish sohasi to'plami) deyiladi.  $\{S_n(x)\}$  funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi  $S(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

berilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qator yig'indisi deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi hamda yig'indisi topilsin.

**Yechish.** Berilgan funksional qatorning qisman yig'indisi

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{agar } x \neq 1 \text{ bo'lsa,} \\ n, & \text{agar } x = 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Unda

$\forall x \in (-1, 1)$  da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x};$$

$\forall x \in [1, +\infty)$  da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \infty;$$

$\forall x \in (-\infty, -1]$  da  $\{S_n(x)\}$  ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, berilgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi  $M = (-1, 1)$ , yig'indisi

$S(x) = \frac{1}{1-x}$  bo'ladi.

## 17.2-§. Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligi

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (17.2)$$

funksional qator  $M$  to'plamda yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi  $S(x)$  bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] = S(x)$$

**17.2.1-ta'rif.** Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  funksional qatorning qisman yig'indilaridan iborat  $\{S_n(x)\}$  funksional ketma-ketlik  $M$  to'plamda qator yig'indisi  $S(x)$  ga tekis yaqinlashsa, bu funksional qator  $M$  to'plamda tekis yaqinlashuvchi deb ataladi, aks holda, ya'ni  $\{S_n(x)\}$  funksional ketma-ketlik  $M$  to'plamda  $S(x)$  ga tekis yaqinlashmasa, (2) funksional qator  $M$  to'plamda  $S(x)$  ga tekis yaqinlashmaydi deyiladi.

**2-misol.** Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < \infty)$$

funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshirilsin.

**Yechish.** Bu qatorning qisman yig'indisi

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \end{aligned}$$

bo'ladi.

Endi  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right\rceil$  deyilsa, sgbtqsm barcha

$n > n_0$  uchun

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{x+n_0+2} < \varepsilon \quad (17.3)$$

bo'ladi. Bunday  $n_0$  natural son  $\varepsilon > 0$  ga hamda  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ) nuqtalarga bog'liq. Biroq  $n'_0$  deb

$$n'_0 = \max_{0 \leq x < \infty} \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - (1+x) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$$

ni olinsa, unda  $n > n'_0$  bo'lgan  $n$  larda yuqoridagi (3) tengsizlik bajaralaveradi. Demak, berilgan funksional qator uchun ta'rifdagi  $n_0$  natural son barcha  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ) nuqtalari uchun umumiy bo'ladi, ya'ni  $x$  ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, berilgan funksional qator tekis yaqinlashuvchi.

**3-misol.** Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} \quad (0 < x < \infty)$$

funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshirilsin.

**Yechish.** Bu funksional qatorning qisman yig'indisi

$$S_n(x) = \frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 - \frac{1}{nx+1}$$

bo'lib, uning yig'indisi

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1 \quad (0 < x < \infty)$$

bo'ladi.

Endi  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$  ( $x \neq 0$ ) deyilsa,

sgbtqsm barcha  $n > n_0$  uchun

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| 1 - \frac{1}{nx+1} \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{(n_0+1)x+1} < \varepsilon$$

bo'ladi. (Agar  $x=0$  bo'lsa, ravshanki,  $\forall n$  uchun  $S_n(0) = S(0) = 1$  bo'lib,  $S_n(0) - S(0) = 0$

bo'ladi.) Bundagi  $n_0$  natural son  $\varepsilon > 0$  va  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ) nuqtalarga bog'liq bo'lib, u barcha  $x$  ( $0 \leq x < \infty$ ) nuqtalari uchun umumiy bo'la olmaydi (bu holda  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil$  ning  $(0, +\infty)$  da  $x$  bo'yicha maximumi chekli son emas.)

Boshqacha qilib aytganda, istalgan  $n$  natural son olsak ham shunday  $\varepsilon_0$  (masalan  $\varepsilon_0 = \frac{1}{n}$ ) va  $x = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$  nuqta topildiki,

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksional qator  $(0, +\infty)$  da tekis yaqinlashuvchi emas.

**17.2.1-teorema.** Aytaylik,  $M \subset \mathbb{R}$  to'plamda  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  funksional qator berilgan bo'lib, uning yig'indisi  $S(x)$  bo'lsin. Bu funksional qatorning  $M$  da tekis yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning qisman yig'indilari ketma-ketligi  $\{S_n(x)\}$  ning  $M$  da fundamental bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teorema funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashish haqidagi 2-teoremani funksional qatorga nisbatan aytilishi bo'lib, uning isboti 2-teoremaning isboti kabi.

Funksional qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

ning tekis yaqinlashuvchi bo'lishi haqidagi 17.2.1-ta'rif hamda funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashuvchi bo'lishining zarur va yetarli shartini ifodalovchi 17.2.1-teoremadan foydalanib quyidagi teoreмага kelamiz.

**17.2.2-teorema.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  funksional qator  $M$  to'plamda  $S(x)$  ga tekis yaqinlashish uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli, bunda  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ .

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

funksional qatorning qisman yig'indisi  $(-1, +1)$  da

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

ga tekis yaqinlashmaydi, chunki

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{x^n}{1-x} \right| \quad (x \in (-1, +1))$$

bo'lib,

$$\sup_{-1 < x < 1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

bo'ladi.

**17.2.3-teorema. (Veyershtrass alomati).** Agar ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

funksional qatorning har bir hadi  $M \subset R$  to'plamda quyidagi

$$|u_n(x)| \leq C_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n + \dots \quad (5)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qator  $M$  to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Modomiki, (5) qator yaqinlashuvchi ekan, 1-qism, 11-bob, 2-§ da keltirilgan teorema asosan,  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham, shunday  $n_0 \in N$  topiladiki, barcha  $n > n_0$ ,  $m > n$  uchun

$$C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_m < \varepsilon$$

bo'ladi. (4) tengsizlikdan foydalanib  $M$  to'plamning barcha  $x$  nuqtalari uchun

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Bundan esa 3-teorema ko'ra berilgan funksional qatorning  $M$  to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. ►

**4-misol.** Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2} \quad (0 \leq x < \infty)$$

funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshirilsin.

**Yechish.** Berilgan funksional qatorning umumiy hadi

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5 x} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

funksiyadan iborat. Bu funksiyani  $[0, +\infty)$  oraliqda ekstremumga tekshiramiz.  $u_n(x)$  funksiyaning hosilasi yagona  $x = n^{-\frac{5}{2}}$  nuqtada nolga aylanadi ( $x = n^{-\frac{5}{2}}$  stasionar nuqta). Stasionar nuqtada

$$u_n''\left(n^{-\frac{5}{2}}\right) < 0$$

bo'ladi. Demak,  $u_n(x)$  funksiya  $x = n^{-\frac{5}{2}} \in [0, +\infty)$  nuqtada maksimumga erishadi. Uning maksimum qiymati esa  $\frac{1}{2} n^{-\frac{3}{2}}$  ga teng. Demak,  $0 \leq x < \infty$  da

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

bo'ladi. Agar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$  qatorning yaqinlashuvchiligini etiborga olsak,

unda Veyershtrass alomatiga ko'ra, berilgan funksional qatorning  $[0, +\infty)$  da tekis yaqinlashuvchi ekanligini topamiz.

## Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1.  $\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3} \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^3 + \dots$  funksional qatorning  $x=0$  va  $x=1$  nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

2.  $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots$  qator yaqinlashishini tekshiring.

3.  $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

qator yaqinlashishini tekshiring. 4-8 misollarda qatorning yaqinlashish intervalini aniqlang.

4.  $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$

5.  $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots$

6.  $5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 x^4}{4!} + \dots$

7.  $x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \dots$

8.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^3 + \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{x-1}{2} \right)^4 + \dots$

9. Ushbu funksiyalarni darajali qatorga yoying.

1)  $f(x) = 3^x$ ; 2)  $f(x) = e^{-2x}$ ; 3)  $f(x) = \cos^2 x$ .

10. Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib quyidagilarni:

a)  $e$  sonini 0,00001 gacha aniqlikda;

b)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  ni 0,00001 gacha aniqlikda;

c)  $\sin 9^0$  ni 0,0001 gacha aniqlikda;

d)  $\sqrt[3]{1,06}$  ni 0,0001 gacha aniqlikda;

e)  $\ln 0,98$  ni 0,0001 gacha aniqlikda;

f)  $\ln 1,1$  ni 0,0001 gacha aniqlikda

taqribiy hisoblang.

## XVIII BOB. SODDA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

### 18.1-§. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar

**18.1.1-ta'rif.** Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga *differensial tenglama* deyiladi.

Noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamaga *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

Noma'lum funksiya ikki yoki undan ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamalarga, *xususiy hosilali differensial tenglamalar* deyiladi.

**18.1.2-ta'rif.** Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi.

$y'' = 3x^2$ ,  $y''' = \cos x$  tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo'ladi.

Umumiy holda  $n$ -tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda belgilanadi.

**18.1.3-ta'rif.** *Differensial tenglamaning yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi  $y = \varphi(x)$  funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga *integral chiziq* deyiladi. Masalan,  $\frac{dy}{dx} = 2x$ ,  $y = x^2$  bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lib, bu holda integral chiziq parabola iborat bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalari o'rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo'ladigan umumiy usullar yo'q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

### 18.2-§. Birinchi tartibli tenglamalar

Birinchi tartibli tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y') = 0 \tag{18.1}$$

ko'rinishda yoziladi. (18.1) tenglamani  $y$  ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (18.2)$$

bo'ladi. (18.2) tenglamaning o'ng tomoni faqat  $x$  ning funksiyasi bo'lsa, tenglama

$$y' = f(x) \quad (18.3)$$

ko'rinishida bo'lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko'rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni  $y = F(x) + C$ ,  $[F(x)]' = f(x)$ . Shunday qilib, (18.3) ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

**18.2.1-ta'rif.**  $y = \varphi(x, C)$   $x$  ning funksiyasi har bir  $C$  ixtiyoriy o'zgarmas bo'lganda (18.2) tenglamani qanoatlantirsa, uning *umumiy yechimi* deyiladi.

**18.2.2-ta'rif.**  $C$  ixtiyoriy o'zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga *xususiy yechim* deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko'pincha qo'shimcha

$$y(x_0) = y_0 \quad (18.4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda  $x_0, y_0$  lar berilgan sonlar bo'lib, bu shartga boshlang'ich shart deb ataladi.

**18.2.3-ta'rif.**  $y' = f(x, y)$  differensial tenglamaning (18.4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga *Koshi masalasi* deyiladi.

**1-misol.**  $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$ , differensial tenglama uchun  $y(0) = 3$

bo'ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

**Yechish.** Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \operatorname{tg} x + C$$

Endi boshlang'ich shartdan foydalanib,  $5 \operatorname{tg} 0 + C = 3$ , bundan  $C = 3$  kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi  $y = 5 \operatorname{tg} x + 3$  bo'ladi.

### 18.3-§. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

**18.3.1-ta'rif.**  $M(x)dx + N(y)dy = 0$  ko'rinishdagi tenglamaga *o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya'ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo'ladi.

**2-misol.**  $x dx + y dy = 0$  differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int x dx + \int y dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo'ladi.

**18.3.2-ta'rif.**  $y' = f_1(x)f_2(y)$  yoki  $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$

ko'rinishdagi tenglamaga *o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani  $f_2(y)$  ga bo'lib,  $dx$  ga ko'paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

$o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga$  keltirish bilan yechimi topiladi.

**3-misol.**  $\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$  tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** O'zgaruvchilarini ajratib  $\frac{dy}{1 + y^2} = x dx$  tenglamani hosil

qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = \tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

## 18.4-§. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar

$f(x, y)$  funksiya uchun  $f(kx, ky) = k^\alpha f(x, y)$  tenglik bajarilsa,  $f(x, y)$  funksiya  $\alpha$  tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda  $\alpha$  biror son. Masalan,  $f(x, y) = xy - y^2$  funksiya uchun  $f(kx, ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$  bo'lib,  $f(x, y) = xy - y^2$  funksiya  $\alpha = 2$  tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi.  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ ,  $\alpha = 0$  tartibli bir jinsli funksiya bo'ladi (buni tekshirib ko'ring).

**18.4.1-ta'rif.**  $y' = f(x, y)$  differensial tenglamada  $f(x, y)$  funksiya no'linchi tartibli bir jinsli funksiya bo'lsa, bunday differensial tenglamaga *birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama* deyiladi.

Bir jinsli, tenglama  $y = xv(x)$  almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1, v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

**4-misol.**  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$  differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

*Yechish.*  $y = x \cdot v$  almashtirish olib,  $y' = x'v + xv'$  ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

bo'lib,  $v + xv' = v + v^2$  yoki  $xv' = v^2$ ,  $\frac{x dv}{dx} = v^2$  bo'ladi. Oxirgi tenglamada o'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo'lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo'lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \text{ yoki } y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1) (1+y)dy - (1-x)dx = 0; \quad 2) (xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy;$$

$$3) x^2dy + (y-1)dx = 0; \quad 4) 2(xy+y)dx = xdy.$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

$$1) x^2dx + ydy = 0, \quad x=0 \text{ da } y=1;$$

$$2) (1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0, \quad x=0 \text{ bo'lganda } y=-1;$$

$$3) (1+x)ydx = (y-1)xdy, \quad x=1 \text{ da } y=1.$$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)y}{x^2}; \quad 2) x^2y' = y^2 - xy + x^2; \quad 3) (x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx.$$

4. Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

$$1) xy^2 - y' = x^3 + y^3, \quad x=1 \text{ bo'lganda } y=3;$$

$$2) (x-y)dx + xdy = 0, \quad x=1 \text{ bo'lganda } y=0;$$

$$3) y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0, \quad x=1 \text{ da } y=1.$$

# XIX BOB. BIRINCHI TARTIBLI CHIZIQLI TENGLAMALAR. BERNULLI VA RIKKATI TENGLAMASI

## 19.1-§. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko'rinishda bo'lib,  $p(x)$  va  $g(x)$  lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun  $z = u(x)y$  almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[ p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \quad (19.1)$$

tenglamani hosil qilamiz.  $u(x)$  funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0$$

bo'lsin. Bundan  $u(x) = e^{\int p(x)dx}$  bo'lib, bu holda (19.1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko'rinishda bo'ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

hosil bo'ladi.

Endi izlanayotgan  $y$  funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[ C + \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (19.2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

**1-misol.**  $y' + xy = x$  differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo'lib  $p(x) = x$ ,  $g(x) = x$  ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int x dx} \left[ C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ C + \int e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] = \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left( e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{x^2}{2}} + C). \end{aligned}$$

umumiy yechim bo'ladi.

## 19.2-§. Bernulli tenglamasi

Bunday differensial tenglama

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamada  $n=0$  yoki  $n=1$  bo'lsa, chiziqli tenglama hosil bo'ladi. Demak  $n \neq 0,1$  bo'lgan ,o'zgarmas. Bernulli tenglamasini  $y^n$  ga bo'lib,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \quad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

almashtirish bajarsak,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n} y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \text{ yoki } z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo'ladi.

**2-misol.**  $y' + xy = xy^3$  differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani  $y^3$  bo'lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

tenglamani hosil qilamiz.  $\frac{1}{y^2} = z$  almashtirish olsak  $z' = \frac{2y'}{y^3}$  bo'ladi.

Bularni tenglamaga qo'yib,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

chiziqli tenglamaga kelimiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z = e^{2\int x dx} \left[ C + \int (-2x)e^{-2\int x dx} dx \right] = e^{x^2} \left[ C - \int 2xe^{-x^2} dx \right] =$$

$$e^{x^2} \left[ C + \int e^{-x^2} d(-x^2) \right] = e^{x^2} \left[ C + e^{-x^2} \right] = Ce^{x^2} + 1.$$

Shunday qilib

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

bo'ladi,  $z$  ning o'rniga  $\frac{1}{y^2}$  ni qo'yib,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1},$$

yechimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo'ladi.

### 19.3-§. Rikkati tenglamasi

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (19.4)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda  $a(x), b(x), c(x)$  funksiyalar biror intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar. (19.4) tenglamada  $a(x)=0$  bo'lsa, chiziqli tenglama,  $c(x)=0$  bo'lsa, Bernulli tenglamasi kelib chiqadi.

Umuman olganda Rikkati tenglamasi yechimini elementar funksiya va ularning integrallari yordamida yechib(kvadraturada integrallab) bo'lmaydi.

Ushbu xususiy holni qaraymiz: Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, bu tenglama yechimi kvadraturalarda integrallanadi.  $y = \varphi(x)$  Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi bo'lsin.  $y = \varphi(x) + z$  almashtirish bajaramiz: bu holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

bo'lib, (19.4) tenglama

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = a(x)[\varphi(x) + z]^2 + b(x)[\varphi(x) + z] + c(x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi tenglikdan,  $y = \varphi(x)$  (19.4) tenglama yechimi, ya'ni

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a(x)[\varphi(x)]^2 + b(x)\varphi(x) + c(x)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)\varphi(x) + b(x)]z + a(x)z^2$$

tenglama hosil bo'lib, bu Bernulli tenglamasidir. Bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini qanday topishni yuqorida o'rgandik.

**3- misol.** Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xususiy yechimini  $y = \varphi(x) = ax + b$  ko'rinishda izlash maqsadga muvofiq, bu holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a, a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) + 5 - x^2$$

bo'lib, bir xil darajali  $x$  lar koeffitsiyentlarini tenglashtirsak  $a = 1, b = \pm 2$  kelib chiqadi.

Demak,  $\varphi(x) = x + 2, \varphi(x) = x - 2$  xususiy yechimlar bo'ladi.  $\varphi(x) = x + 2$  xususiy yechim uchun Bernulli tenglamasi

$$\frac{dz}{dx} = -4z - z^2$$

bo'lib, uning umumiy yechimi

$$y = x + 2 + \frac{4}{C e^{4x} - 1}$$

bo'ladi.

### 19.4-§. To'la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko'paytuvchi

1) To'la differensialli tenglama.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (19.5)$$

ko'rinishdagi tenglamaning chap qismi biror  $u(x, y)$  funksiyaning to'liq differensial, ya'ni

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

bo'lsa, bunday tenglama to'la differensialli tenglama deyiladi. (19.5) tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To'la differensialli tenglama ta'rifidan  $du = 0$  bo'lib, bundan  $u(x, y) = C$  kelib chiqadi ( $C$  ixtiyoriy o'zgarmas).  $u(x, y)$  funksiyaning topish uchun  $y$  ni o'zgarmas deb hisoblaymiz, u holda  $dy = 0$  ekanligidan  $du = M(x, y)dx$  bo'ladi. Oxirgi tenglikni  $x$  bo'yicha integrallasak,

$$u = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni  $y$  bo'yicha differensiallaymiz va natijani  $N(x, y)$  ga tenglaymiz, chunki  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$  edi.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni  $y$  bo'yicha integrallab,  $\varphi(y)$  ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int \left( N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Shunday qilib,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left( N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

**4-misol.** Ushbu

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

**Yechish.** Berilgan tenglamaning to'la differensialli bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}, N = \frac{2y}{x^3}$$

bo'lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6y}{x^4}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6y}{x^4}$$

bo'lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'ladi, ya'ni berilgan differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror  $u(x, y)$

funksiyaning to'liq differensial bo'ladi. Endi  $u(x, y)$  funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}$$

bo'lganligi uchun

$$u = \int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \varphi(y) = \int (x^{-2} - 3y^2 x^{-4}) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + \varphi(y) \quad (19.6)$$

bo'lib, bunda  $\varphi(y)$  hozircha noma'lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni  $y$  bo'yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan  $\varphi'(y) = 0$  bo'lib,

$$\varphi(y) = C_1.$$

bo'ladi. (19.6) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1\right) = 0$$

bo'lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo'lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo'ladi, bunda  $C = C_2 - C_1$ .

## 2) Integrallovchi ko'paytuvchi.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

differensial tenglamaning o'ng tomoni biror funksiyaning to'la differensial bo'lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o'ng tomoni biror

funksiyaning to'la differensial bo'lmasin. Ayrim hollarda shunday  $\mu(x, y)$  funksiyani tanlab olish mumkin bo'ladiki, berilgan tenglamani shu funksiyaga ko'paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to'la differensial bo'lishi mumkin. Hosil qilingan differensial tenglamaning umumiy yechimi bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo'ladi. Bunday  $\mu(x, y)$  funksiyaga berilgan tenglamaning integrallavchi ko'paytuvchisi deyiladi. Integrallovchi ko'paytuvchini topish uchun, berilgan tenglamani hozircha noma'lum bo'lgan  $\mu$  ga ko'paytirib,

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to'la differensial bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bundan

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

bo'lib,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglamani  $\mu$  ga bo'lajak,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial y}$$

bo'lganligi uchun

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

bo'ladi.

Umumiy holda  $\mu$   $x, y$  larga bog'liq, ya'ni  $\mu(x, y)$ . Berilgan tenglama faqat  $x$  ga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa,  $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$  bo'lib,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{yoki} \quad \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (19.7)$$

bo'ladi. Differensial tenglama faqat  $y$  o'zgaruvchiga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa,  $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$  bo'lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad (19.8)$$

bo'ladi. Bu hollarda (19.7) va (19.8) tengliklarni bevosita integrallab

$$\mu = e^{\int \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N dx}, \quad \mu = e^{\int \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M dy}$$

integrallovchi ko'paytuvchini topamiz. Bunda (19.7) va (19.8) nisbatlar, birinchi holda  $y$  o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan, ikkinchi holda  $x$  o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan integrallovchi ko'paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

### 5-misol.

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to'la differensialli yoki to'la differensialli emasligini tekshiramiz.  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x^2 - 3y^2)'_y = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y.$$

Demak,  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

bo'lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

hosil bo'ladi. Berilgan tenglamani  $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$  funksiyaga ko'paytirsak,

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2xy}{x^4} dy = 0$$

bo'lib, keyingi tenglama uchun  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  tenglik bajariladi, ya'ni oxirgi differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o'rgandik.

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

- a)  $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$
- b)  $(x + y)dx - (y - x)dy = 0$
- c)  $(1 + y^2)dx - (1 - x^2)dy = 0$
- d)  $(x + y)dx - xdy = 0$
- e)  $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$
- f)  $(x^2 + y^2) - 2yxy' = 0$
- g)  $(x^2 - 1)y' - 2xy^2 = 0$

2. Ushbu to'la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

- 1)  $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ ; 2)  $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$ ;
- 3)  $2(3xy^2 + 2x^2)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$ ; 4)  $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$ ;
- 5)  $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$ ; 6)  $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$ .

3. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko'paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

- 1)  $(x^2 - y)dx + xdy = 0$ ; 2)  $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ ;
- 3)  $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$ ; 4)  $(\sin x + e^y)dx + \cos x dy = 0$ ;
- 5)  $(x \cos y - y \sin y)dx + (x \sin y + y \cos y)dy = 0$ ; 6)  $2x \tan x dx + (x^2 - 2 \sin y)dy = 0$ .

## XX BOB. HODISALAR FAZOSI, HODISALAR USTIDA AMALLAR. HODISANING EHTIMOLI

### 20.1-§. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “*tasodifiy hodisa*” tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo’lmaydigan tajriba o’tkazilayotgan bo’lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida *tasodifiy* deb ataladi.

*Tasodifiy hodisa* (yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro’y berishi oldindan aniq bo’lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari  $A, B, C, \dots$  lar bilan belgilanadi.

Tajribaning har qanday natijasi *elementar hodisa* deyiladi va  $\omega$  orqali belgilanadi.

Tajribaning natijasida ro’y berishi mumkin bo’lgan barcha elementar hodisalar to’plami *elementar hodisalar fazosi* deyiladi va  $\Omega$  orqali belgilanadi.

**1-misol.** Tajriba nomerlangan kub (o’yin soqqasi) ni tashlashdan iborat bo’lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisalar  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  lardan iborat bo’ladi.  $\omega_i$  hodisa tajriba natijasida  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Tajriba natijasida albatta ro’y beradigan hodisaga *muqarrar hodisa* deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo’la oladi.

Aksincha, umuman ro’y bermaydigan hodisaga *mumkin bo’lmagan hodisa* deyiladi va u  $\emptyset$  orqali belgilanadi.

1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

$A = \{5 \text{ raqam tushishi}\};$

$B = \{\text{juft raqam tushishi}\};$

$C = \{7 \text{ raqam tushishi}\};$

$D = \{\text{butun raqam tushishi}\};$

Bu yerda  $A$  va  $B$  hodisalar tasodifiy,  $C$  hodisa mumkin bo’lmagan va  $D$  hodisa muqarrar hodisalar bo’ladi.

## 20.2-§. Hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

$A$  va  $B$  *hodisalar yig'indisi* deb,  $A$  va  $B$  hodisalarning kamida bittasi (ya'ni yoki  $A$ , yoki  $B$ , yoki  $A$  va  $B$  birgalikda) ro'y berishidan iborat  $C = A \cup B$  ( $C = A + B$ ) hodisaga aytiladi.

$A$  va  $B$  *hodisalar ko'paytmasi* deb,  $A$  va  $B$  hodisalar ikkilasi ham (ya'ni  $A$  va  $B$  birgalikda) ro'y berishidan iborat  $C = A \cap B$  ( $C = A \cdot B$ ) hodisaga aytiladi.

$A$  hodisadan  $B$  *hodisaning ayirmasi* deb,  $A$  hodisa ro'y berib,  $B$  hodisa ro'y bermasligidan iborat  $C = A \setminus B$  ( $C = A - B$ ) hodisaga aytiladi.

$A$  hodisaga *qarama-qarshi*  $\bar{A}$  hodisa faqat va faqat  $A$  hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi (ya'ni  $\bar{A}$  hodisa  $A$  hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi).  $\bar{A}$  ni  $A$  uchun *teskari hodisa* deb ham ataladi.

Agar  $A$  hodisa ro'y berishidan  $B$  hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa  $A$  hodisa  $B$  hodisani *ergashtiradi* deyiladi va  $A \subseteq B$  ko'rinishida yoziladi.

Agar  $A \subseteq B$  va  $B \subseteq A$  bo'lsa, u holda  $A$  va  $B$  hodisalar *teng* (*teng kuchli*) hodisalar deyiladi va  $A = B$  ko'rinishida yoziladi.

**2-misol.**  $A$ ,  $B$  va  $C$  -ixtiyoriy hodisalar bo'lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang:  $D = \{\text{uchchala hodisa ro'y berdi}\}$ ;  $E = \{\text{bu hodisalarning kamida bittasi ro'y berdi}\}$ ;  $F = \{\text{bu hodisalarning birortasi ham ro'y bermadi}\}$ ;  $G = \{\text{bu hodisalarning faqat bittasi ro'y berdi}\}$ .

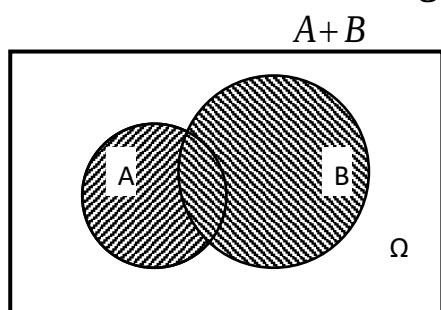
Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz:  $D = A \cap B \cap C$  ( $D = A \cdot B \cdot C$ );  
 $E = A + B + C$ ;  $F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ ;  $G = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ .

Demak, hodisalarni to'plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

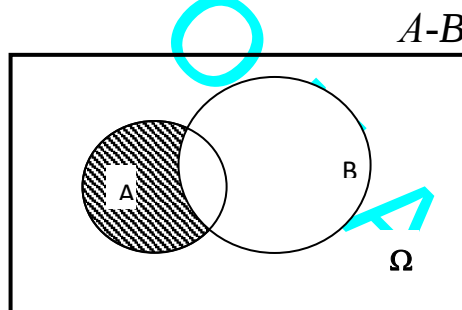
| Belgilash                   | To'plamlar nazariyasidagi talqini                 | Ehtimollar nazariyasidagi talqini                                                               |
|-----------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Omega$                    | Fazo (asosiy to'plam)                             | Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa                                                     |
| $\omega, \omega \in \Omega$ | $\omega$ fazo elementi                            | $\omega$ elementar hodisa                                                                       |
| $A, A \subseteq \Omega$     | $A$ to'plam                                       | $A$ hodisa                                                                                      |
| $A \cup B,$<br>$A + B$      | $A$ va $B$ to'plamlarning yig'indisi, birlashmasi | $A$ va $B$ hodisalar yig'indisi ( $A$ va $B$ ning kamida bittasi ro'y berishidan iborat hodisa) |

|                                               |                                     |                                                                                                  |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A \cap B, A \cdot B$                         | A va B to'plamlarning kesishmasi    | A va B hodisalar ko'paytmasi (A va B ning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa)              |
| $A \setminus B, A - B$                        | A to'plamdan B to'plamning ayirmasi | A hodisadan B hodisaning ayirmasi (A ning ro'y berishi, B ning ro'y bermasligidan iborat hodisa) |
| $\emptyset$                                   | Bo'sh to'plam                       | Mumkin bo'lmagan hodisa                                                                          |
| $\bar{A}$                                     | A to'plamga to'ldiruvchi            | A hodisaga teskari hodisa (A ning ro'y bermasligidan iborat)                                     |
| $A \cap B = \emptyset, A \cdot B = \emptyset$ | A va B to'plamlar kesishmaydi       | A va B hodisalar birgalikda emas                                                                 |
| $A \subseteq B$                               | A to'plam B ning qismi              | A hodisa B ni ergashtiradi                                                                       |
| $A = B$                                       | A va B to'plamlar ustma-ust tushadi | A va B hodisalar teng kuchli                                                                     |

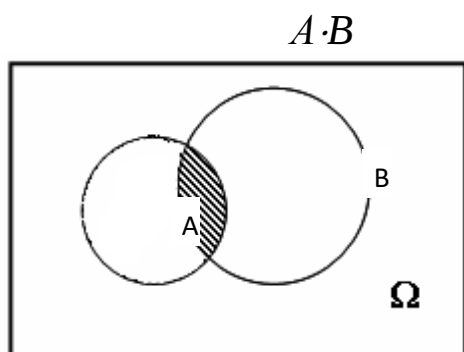
Hodisalar va ular ustidagi amallarni *Eyler-Venn* diagrammalari yordamida tushuntirish (tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.



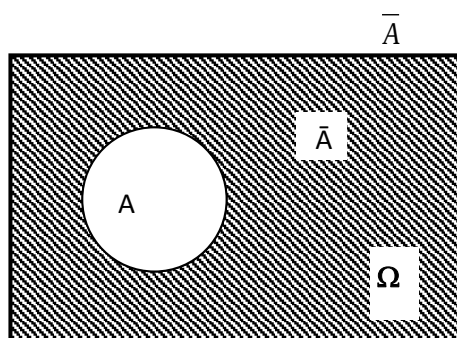
1-rasm.



2-rasm.

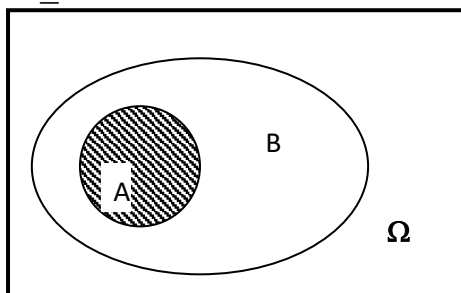


3-rasm.



4-rasm.

$$A \subseteq B$$



5-rasm.

**Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:**

1.  $A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A;$
2.  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$
3.  $(A + B) + C = A + (B + C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$
4.  $A + A = A, \quad A \cdot A = A;$
5.  $A + \Omega = \Omega, \quad A \cdot \Omega = A, \quad A + \emptyset = A, \quad A \cdot \emptyset = \emptyset;$
6.  $A + \bar{A} = \Omega, \quad A \cdot \bar{A} = \emptyset;$
7.  $\bar{\emptyset} = \Omega, \quad \bar{\Omega} = \emptyset, \quad \bar{\bar{A}} = A;$
8.  $A - B = A \cdot \bar{B};$
9.  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$  - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.
10.  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$  - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

### 20.3-§. Ehtimollikning statistik ta'rifi

A hodisa  $n$  ta bog'liqsiz tajribalarda  $n_A$  marta ro'y bersin.  $n_A$  son  $A$  hodisaning chastotasi,  $\frac{n_A}{n}$  munosabat esa  $A$  hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg'unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya'ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma'lum qonuniyatga ega bo'ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga  $A = \{\text{Gerb}\}$  tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o'tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

| Tajriba o'tkazuvchi | Tajribalar soni, $n$ | Tushgan gerblar soni, $n_A$ | Nisbiy chastota, $n_A/n$ |
|---------------------|----------------------|-----------------------------|--------------------------|
| Byuffon             | 4040                 | 2048                        | 0.5080                   |
| K.Pirson            | 12000                | 6019                        | 0.5016                   |
| K.Pirson            | 24000                | 12012                       | 0.5005                   |

Jadvaldan ko'rinadiki,  $n$  ortgani sari  $n_A/n$  nisbiy chastota  $\frac{1}{2}=0.5$  ga yaqinlashar ekan.

Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa, va shu tajribalarda biror  $A$  hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa  $A$  hodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

$A$  hodisaning ehtimolligi  $P(A)$  simvol bilan belgilanadi.

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} = P(A) \text{ yoki yetarlicha katta } n \text{ lar uchun } \frac{n_A}{n} \approx P(A).$$

Statistik ehtimollikning kamchiligi shundan iboratki, bu yerda statistik ehtimollik yagona emas. Masalan, tanga tashlash tajribasida ehtimollik sifatida nafaqat 0.5, balki 0.49 yoki 0.51 ni ham olishimiz mumkin. Ehtimollikni aniq hisoblash uchun katta sondagi tajribalar o'tkazishni talab qiladi, bu esa amaliyotda ko'p vaqt va xarajatlarni talab qiladi.

Statistik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
2.  $P(\emptyset) = 0$ ;
3.  $P(\Omega) = 1$ ;
4.  $A \cdot B = \emptyset$  bo'lsa, u holda  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ ;

Isboti. 1) Ihtiyoriy  $A$  hodisaning chastotasi uchun  $0 \leq n_A \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$ . Etarlicha katta  $n$  lar uchun  $\frac{n_A}{n} \approx P(A)$  bo'lgani uchun  $0 \leq P(A) \leq 1$  bo'ladi.

2) Mumkin bo'lmagan hodisa uchun  $n_A=0$ .

3) Muqarrar hodisaning chastotasi  $n_A=n$ .

4) Agar  $A \cdot B = \emptyset$  bo'lsa, u holda  $n_{A+B} = n_A + n_B$  va

$$P(A+B) \approx \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \approx P(A) + P(B).$$

## 20.4-§. Ehtimollikning klassik ta'rifi

$\Omega$  chekli  $n$  ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin.

$A$  hodisaning ehtimolligi deb,  $A$  hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni  $k$  ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni  $n$  ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \quad (20.1)$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz.

Kombinatorikada *qo'shish* va *ko'paytirish* qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida (prinsiplari) mavjud.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  va  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

**Qo'shish qoidasi:** agar  $A$  to'plam elementlari soni  $n$  va  $B$  to'plam elementlari soni  $m$  bo'lib,  $A \cdot B = \emptyset$  ( $A$  va  $B$  to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda  $A + B$  to'plam elementlari soni  $n + m$  bo'ladi.

**Ko'paytirish qoidasi:**  $A$  va  $B$  to'plamlardan tuzilgan barcha  $(a_i, b_j)$  juftliklar to'plami  $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$  ning elementlari soni  $n \cdot m$  bo'ladi.

$n$  ta elementdan  $m$  ( $0 < m \leq n$ ) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: *qaytarilmaydigan* va *qaytariladigan tanlashlar*. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

### I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

**Guruhlashlar soni:**  $n$  ta elementdan  $m$  ( $0 < m \leq n$ ) tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (20.2)$$

$C_n^m$  sonlar Nyuton binomi formulasining koeffisientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \dots + q^n.$$

**O'rinlashtirishlar soni:**  $n$  ta elementdan  $m$  ( $0 < m \leq n$ ) tadan o'rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (20.3)$$

**O'rin almashtirishlar soni:**  $n$  ta elementdan  $n$  tadan o'rinlashtirish o'rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n!. \quad (20.4)$$

O'rin almashtirish o'rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (3)

da  $n=m$  bo'lsa,  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$  bo'ladi.

## II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi.

**Qaytariladigan guruhlashlar soni:**  $n$  ta elementdan  $m$  ( $0 < m \leq n$ ) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011 \quad (20.5)$$

### Qaytariladigan

**o'rinlashtirishlar soni:**  $n$  ta elementdan  $m$  ( $0 < m \leq n$ ) tadan qaytariladigan o'rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \quad (20.6)$$

**Qaytariladigan o'rin almashtirishlar soni:**  $k$  hil  $n$  ta elementdan iborat to'plamda 1-element  $n_1$  marta, 2-element  $n_2$  marta, ...,  $k$ -element  $n_k$  marta qaytarilsin va  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  bo'lsin, u holda  $n$  ta elementdan iborat o'rin almashtirish  $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$  orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (20.7)$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

**3-misol.** Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to'g'ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni  $A_{10}^2$  usul bilan terish mumkin.  $A = \{\text{telefon nomeri to'g'ri terilgan}\}$  hodisasini kiritamiz.  $A$  hodisa faqat bitta elementdan iborat bo'ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo'ladi). Shuning uchun klassik ta'rifga ko'ra.

**4-misol.** 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo'lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini  $C_{100}^{10}$  usul bilan tanlash mumkin.  $B = \{10 \text{ lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo'lishi}\}$  hodisasi bo'lsa,

$$N(B) = C_1^1 \cdot C_{99}^9 \quad \text{va} \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

**5-misol.** Pochta bo'limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo'lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini  $\overline{C_6^4}$  usul bilan tanlash mumkin. a)  $A = \{4 \text{ ta bir xildagi otkritka sotilgan}\}$  hodisasi bo'lsin.  $A$  hodisaning elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni  $N(A) = 6$ . Klassik ta'rifga ko'ra  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{C_6^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$  bo'ladi. b)  $B = \{4 \text{ ta har xil otkritka sotilgan}\}$  hodisasi bo'lsin, u holda  $N(B) = C_6^4$  ga teng va  $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_6^4} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$ .

**Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:**

1.  $P(\emptyset) = 0$ ;
2.  $P(\Omega) = 1$ ;
3.  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
4. Agar  $A \cdot B = \emptyset$  bo'lsa, u holda  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ;
5.  $\forall A, B \in \Omega$  uchun  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

**Isboti.** 1)  $N(\emptyset) = 0$  bo'lgani uchun klassik ta'rifga ko'ra  $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$ . 2) Klassik ta'rifga ko'ra  $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$ . 3) Ihtiyoriy  $A$  hodisa uchun  $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$  ekanligidan  $0 \leq P(A) \leq 1$  bo'ladi. 4) Agar  $A \cdot B = \emptyset$  bo'lsa, u holda  $N(A + B) = N(A) + N(B)$  va

$$P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

5)  $A + B$  va  $B$  hodisalarni birgalikda bo'lmagan ikki hodisalar yig'indisi shaklida yozib olamiz:  $A + B = A + B \cdot \overline{A}$ ,  $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \overline{A}) = A \cdot B + B \cdot \overline{A}$ , u holda 4-xossaga ko'ra  $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \overline{A})$  va  $P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \overline{A})$ . Bu ikki tenglikdan  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$  kelib chiqadi.

## 20.5-§. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra,  $\Omega$  - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar  $\Omega$  cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.

O'lchovli biror  $G$  soha berilgan bo'lib, u  $D$  sohani o'z ichiga olsin.  $G$  sohaga tavakkaliga tashlangan  $X$  nuqtani  $D$  sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda  $X$  nuqtaning  $G$  sohaga tushishi muqarrar va  $D$  sohaga tushishi tasodifiy hodisa

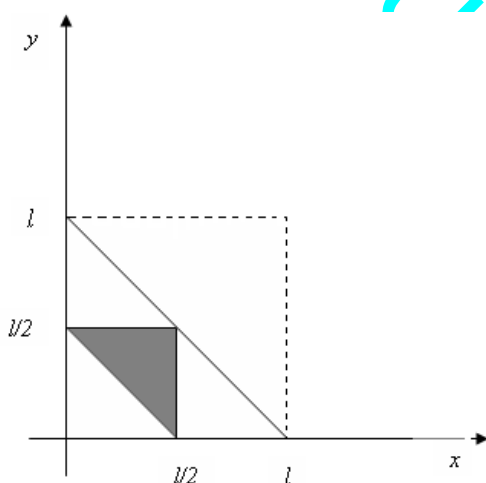
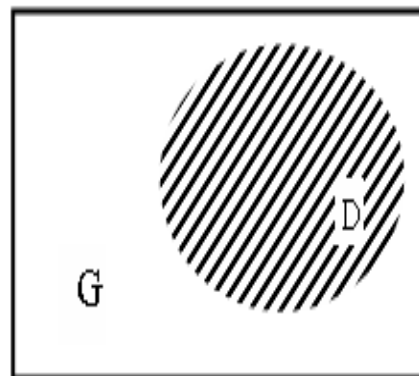
1-rasm.

bo'ladi.  $A = \{X \in D\}$  -  $X$  nuqtaning  $D$  sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

$A$  hodisaning *geometrik ehtimolligi* deb,  $D$  soha o'lchovini  $G$  soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A) = \frac{\text{mes}\{D\}}{\text{mes}\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.



**6-misol.**  $l$  uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo'laklarga bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimolligini toping.

Birinci bo'lak uzunligini  $x$ , ikkinchi bo'lak uzunligini  $y$  bilan belgilasak, uchinchi bo'lak uzunligi  $l-x-y$  bo'ladi. Bu yerda  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < l\}$ , ya'ni  $0 < x + y < l$  sterjenning bo'laklari uzunliklarining

barcha bo'lishi mumkin bo'lgan kombinatsiyasidir.

2-rasm

Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:  $x + y > l - x - y$ ,  $x + l - x - y > y$ ,  $y + l - x - y > x$ .

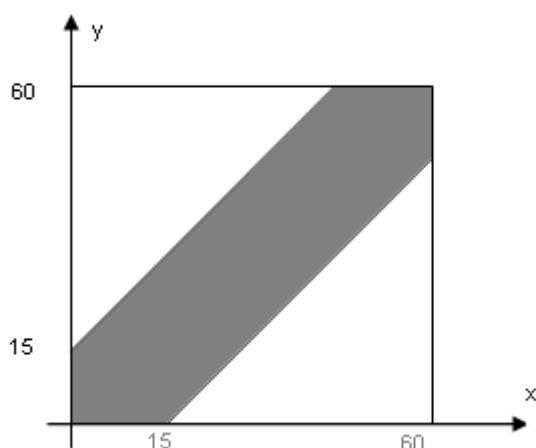
Bulardan  $x < \frac{l}{2}$ ,  $y < \frac{l}{2}$ ,  $x + y > \frac{l}{2}$  ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar 2-rasmdagi bo'yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{\text{mes}\{A\}}{\text{mes}\{G\}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{1}{2} \cdot l \cdot l} = \frac{1}{4}.$$

7-misol. (Uchrashuv haqida). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momenti  $x$ , ikkinchisikini  $y$  bo'lsin:  $0 \leq x \leq 60$ ,  $0 \leq y \leq 60$  U holda ularning uchrashishlari uchun  $|x - y| \leq 15$  tengsizlik



bajarilishi kerak. Demak,

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\},$$

$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 15\}$ .  $x$  va  $y$  larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz (3-rasm).

U holda

$$P(A) = \frac{\text{mes}\{A\}}{\text{mes}\{G\}} = \frac{60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 45}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

3-rasm

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Agar  $P(A+B)=0,8$ ,  $P(\bar{A})=0,7$ ;  $P(\bar{B})=0,2$  bo'lsa  $P(AB)=?$ .
2. Agar  $P(A+B)=0,9$ ,  $P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})=0,5$  bo'lsa  $P(AB)$  ni toping.
3. Ikkita tanga va bitta kub tashlash tajribasiga mos kelgan elementar xodisalar fazosi  $\Omega$  ning elementlari sonini toping
4. Idishda 5 ta nomerlangan bir xil sharlar bor. Idishdan tavakkaliga 3 ta shar olish (takrorsiz) tajribasiga mos kelgan elementar xodisalar fazosi  $\Omega$  - elementlari sonini aniqlang.
5. Agar  $A=\{1,5,4,6,3,8,9\}$ ,  $B=\{2,4,6,8\}$ ,  $C=\{6,7,8\}$  bo'lsa, ularning birlashmasini, kesishmasini va ayirmasini toping.
6. 3 ta kubik tashlanganda tushgan raqamlarning bir xil bo'lish ehtimolini toping
7. 10 qavatli bino liftiga 5 kishi kirdi. Ular turli qavatlariga chiqish ehtimolini toping
8. Guruxda 12 talaba bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 alochi talaba bo'lish ehtimolini toping.

9. Yashikda 10 detal bo'lib, ular orasida 6 ta bo'yalgani bor. Yig'uvchi tavakkaliga 4 ta detal oladi. Olingan detallarning hammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
- 10 Xaltada 1 dan 10 gacha nomerlangan bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin–ketin 1, 2, 3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini toping. (Olingan kubik xaltagacha qaytarib solinmaydi).
- 11 Agar  $A_1, A_2, A_3$  xodisalar bog'liqsiz bo'lib, ularning ehtimollari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,6 bo'lsin. Ulardan kamida bittasini bajarish ehtimolini toping.
- 12 Maxsulotni tekshiruvda 300 tasidan 270 tasi sifatli ekan. Maxsulotni sifatsiz bo'lish nisbiy chastotasini toping
- 13 Maxsulotni tekshiruvda 200 tasidan 40 tasi sifatsiz ekan. Maxsulotni sifatli bo'lish nisbiy chastotasini toping. Nishonga ketma-ket o'q otishda nishonga tegish nisbiy chastotasi 0,6 bo'lib, 20 o'q nishonga tegmagan bo'lsa nishonga necha marta o'q otilgan
- 14 Idisha 8ta shar bo'lib ulardan 3 tasi oq 2 tasi qizil va qolganlari qora. 4 ta shar olinganda 2 tasi oq, 1 tasi qizil va 1 tasi qora bo'lish ehtimoli toping
- 15 Nishonga ketma-ket o'q otishda nishonga tegish nisbiy chastotasi 0,7 bo'lib, 15 o'q nishonga tegmagan bo'lsa nishonga necha marta o'q otilgan.

## XXI BOB. TASODIFIY MIQDORLAR. TAQSIMOT QONUNLARI

### 21.1-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari

Ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir.

**21.1.1-ta’rif.** Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qilishi oldindan ma’lum bo’lmagan miqdor tasodifiy miqdor deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari  $X, Y, Z, \dots$  (yoki grek alifbosining kichik harflari  $\xi$  (ksi),  $\eta$  (eta),  $\zeta$  (dzeta), ...) bilan, qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar  $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots$  bilan belgilanadi.

Amaliyotda asosan 2 xildagi tasodifiy miqdorlar bilan ish ko’riladi: Diskret va uzluksiz.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz: 1)  $X$  – tavakkaliga olingan mahsulotlar ichida sifatsizlari soni; 2)  $Y$  –  $n$  ta o’q uzilganda nishonga tekkanlari soni; 3)  $Z$  – asbobning beto’xtov ishlash vaqti; 4)  $U$  –  $[0, 1]$  kesmadan tavakkaliga tanlangan nuqtaning koordinatalari; 5)  $V$  – bir kunda tug’iladigan chaqaloqlar soni va h.k.

**21.1.2-ta’rif.** Agar tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlar qabul qilsa, bunday tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

**21.1.3-ta’rif.** Chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo’lgan miqdorga uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Endi tasodifiy miqdorni qat’iy ta’rifini keltiramiz .

**21.1.4-ta’rif.**  $\Omega$  elementar hodisalar fazosida aniqlangan  $X$  sonli funktsiya tasodifiy miqdor deyiladi, agar har bir  $\omega$  elementar hodisaga  $X(\omega)$  conni mos qo’ysa, ya’ni  $X = X(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  .

Masalan, tajriba tangani 2 marta tashlashdan iborat bo’lsin. Elementar hodisalar fazosi  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\omega_1 = GG$ ,  $\omega_2 = GR$ ,  $\omega_3 = RG$ ,  $\omega_4 = RR$  bo’ladi.  $X$  – gerb chiqishlari soni bo’lsin, u holda  $X$  tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlari:  $X(\omega_1) = 2$ ,  $X(\omega_2) = 1$ ,  $X(\omega_3) = 1$ ,  $X(\omega_4) = 0$ .

## 21.2-§. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunlari

$X$  – diskret tasodifiy miqdor bo'lsin.  $X$  tasodifiy miqdor  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  qiymatlarni mos  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  ehtimollar bilan qabul qilsin:

|     |       |       |         |       |         |
|-----|-------|-------|---------|-------|---------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ |

Yuqoridagi jadval diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni jadvali deyiladi. Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini  $p_i = P\{X = x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$  ko'rinishda ham yozish mumkin.

$\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \dots$  hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun ular to'la guruhni tashkil etadi va ularning ehtimollari yig'indisi birga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_i p_i = \sum_i P\{X = x_i\} = 1$$

**21.2.1-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor deyiladi, agar  $x_1, x_2, \dots$  chekli yoki sanoqli to'plam bo'lib,  $P\{X = x_i\} = p_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) va  $p_1 + p_2 + \dots = 1$  tenglik o'rinli bo'lsa.

**21.2.2-ta'rif.**  $X$  va  $Y$  diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz deyiladi, agar  $A_i = \{X = x_i\}$  va  $B_j = \{Y = y_j\}$  hodisalar  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  va  $\forall j = 1, 2, \dots, m$  da bog'liqsiz bo'lsa, ya'ni  $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$ ,  $n, m \leq \infty$ .

1-misol. 10 ta lotereya biletida 2 tasi yutuqli bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta lotereya biletleri ichida yutuqlilari soni  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish.  $X$  tasodifiy miqdorni qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ . Bu qiymatlarning mos ehtimollari esa

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}; \quad p_2 = P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15};$$

$$p_3 = P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

$X$  tasodifiy miqdor taqsimot qonunini jadval ko'rinishida yozamiz:

|     |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1              | 2              |
| $P$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1.$$

**a) Binomial taqsimot qonuni.**

**21.2.3-ta'rif.**  $X$  diskret tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi, agar u  $0, 1, 2, \dots, n$  qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

ehtimol bilan qabul qilsa, bu yerda  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ .

Binomial qonun bo'yicha taqsimlangan  $X$  diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

|                    |       |                     |                     |     |                     |     |       |
|--------------------|-------|---------------------|---------------------|-----|---------------------|-----|-------|
| $X = m$            | 0     | 1                   | 2                   | ... | $m$                 | ... | $n$   |
| $p_m = P\{X = m\}$ | $q^n$ | $C_n^1 p^1 q^{n-1}$ | $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ | ... | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | ... | $p^n$ |

Nyuton binomiga asosan  $\sum_{m=0}^n p_m = (p + q)^n = 1$ . Bunday taqsimotni

$Bi(n, p)$  orqali belgilaymiz.

Uning taqsimot funktsiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0; \\ \sum_{m < x} C_n^m p^m q^{n-m}, & \text{agar } 0 < x \leq n; \\ 1, & \text{agar } x > n. \end{cases}$$

**b) geometrik taqsimot qonuni.**

**21.2.4a'rif.** Agar  $X$  tasodifiy miqdor  $1, 2, \dots, m, \dots$  qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = q^{m-1} p$$

ehtimol bilan qabul qilsa, u geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda  $p = 1 - q \in (0, 1)$ .

Geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misol sifatida quyidagilarni olish mumkin: sifatsiz mahsulot chiqqunga qadar tekshirilgan mahsulotlar soni; gerb tomoni tushgunga qadar tashlangan tangalar soni; nishonga tekkunga qadar otilgan o'qlar soni va h.k.

Geometrik qonun bo'yicha taqsimlangan  $X$  diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

|                    |     |      |     |         |     |
|--------------------|-----|------|-----|---------|-----|
| $X = m$            | 0   | 1    | 2   | ...     | $m$ |
| $p_m = P\{X = m\}$ | $p$ | $qp$ | ... | $q^m p$ | ... |

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

chunki  $p_m$  ehtimollar geometrik progressiyani tashkil etadi:  $p, qp, q^2 p, q^3 p, \dots$ . Shuning uchun yuqoridagi taqsimot geometrik taqsimot deyiladi va  $Ge(p)$  orqali belgilanadi.

Uning taqsimot funktsiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } m < 1; \\ \sum_{m < x} q^{m-1} p, & \text{agar } 1 \leq m \leq x \end{cases}$$

### v) *Puasson taqsimot qonuni*

**21.2.5-ta'rif.** Agar  $X$  tasodifiy miqdor  $0, 1, 2, \dots, m, \dots$  qiymatlarni

$$p_m = P\{X = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

ehtimol bilan qabul qilsa, u Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda  $\lambda$  biror musbat son.

Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan  $X$  diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

|                    |                |                                   |                                     |     |                                     |     |
|--------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $X = m$            | 0              | 1                                 | 2                                   | ... | $m$                                 | ... |
| $p_m = P\{X = m\}$ | $e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$ | ... | $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ | ... |

Taylor yoyilmasiga asosan,  $\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$ . Bu taqsimotni  $\Pi(\lambda)$  orqali belgilaymiz. Uning taqsimot funktsiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \leq 0; \\ \sum_{m < x} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, & \text{agar } 0 < m \leq x \end{cases}$$

## 21.3-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar

### A) *Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va xossalari.*

$X$  diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

$$\{p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

**21.3.1-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb,

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$  qator yig'indisiga aytiladi va  $MX$  orqali belgilanadi.

$$\text{Demak, } MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Matematik kutilishning ma'nosi shuki, u tasodifiy miqdor o'rta qiymatini ifodalaydi. Haqiqatan ham  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$  ekanligini hisobga olsak, u holda

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = x_{\text{yptacha}}.$$

Matematik kutilishning xossalari:

1. O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu sonning o'ziga teng, ya'ni

$$MC = C.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni  $M(CX) = CMX$ .

3. Yig'indining matematik kutilishi matematik kutilishlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

4. Agar  $X \perp Y$  bo'lsa, u holda  $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$ .

2-misol.  $X$  diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilgan bo'lsa,  $X$  tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

|     |      |      |     |      |      |
|-----|------|------|-----|------|------|
| $X$ | 500  | 50   | 10  | 1    | 0    |
| $P$ | 0,01 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,69 |

Yechish.  $MX = 500 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,69 = 8,65.$

**b) Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va xossalari.**

**21.3.2-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb,  $M(X - MX)^2$  ifodaga aytiladi.

Dispersiya  $DX$  belgilanadi. Demak,  $DX = M(X - MX)^2$ .

Agar  $X$  diskret tasodifiy miqdor bo'lsa,

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 \cdot p_i.$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi formula qulaydir:

$$DX = M(X^2) - (MX)^2.$$

Dispersiyaning xossalari:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng, ya'ni  $DC = 0$ .

2. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni  $D(CX) = C^2 DX$ .

3. Agar  $X \perp Y$  bo'lsa,  $D(X + Y) = DX + DY$ .

3-misol.  $X$  diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -1  | 0   | 1   | 2   |
| $P$ | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

$MX$  va  $DX$  larni hisoblang.

Yechish.  $MX = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9$ ;

$DX = (-1)^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 - (0,9)^2 = 1,29$ .

**V) O'rtacha kvadratik chetlanish.**

**21.3.3-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik tarqoqligi (standart chetlashishi) deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}$$

Dispersiyaning xossalariidan o'rtacha kvadratik tarqoqlikning xossalari kelib chiqadi:

1.  $\sigma_C = 0$ .

2.  $\sigma_{CX} = |C| \sigma_X$ .

Binomial taqsimotning sonli xarakteristikallari:

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Geometrik taqsimotning sonli xarakteristikallari:

$$MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{q}{p^2}.$$

Puasson taqsimotining sonli xarakteristikallari:

$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda.$$

## 21.4-§. Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari

### 1. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

**21.4.1-ta'rif.** Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo'lsa, u holda bunday tasodifiy miqdor uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor deyiladi.

Demak, diskret tasodifiy miqdor bir-biridan farqli alohida qiymatlarni, uzluksiz tasodifiy miqdor esa biror oraliqdagi ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilargan.

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun diskret tasodifiy miqdor kabi taqsimot qatorini qurib bo'lmaydi, chunki uzluksiz tasodifiy miqdor chekli yoki cheksiz oraliqning har bir qiymatini qabul qilishi mumkin va bunday qiymatlar soni sanoqsiz. Shu sabab, uzluksiz tasodifiy miqdorlarni tasvirlashda va o'rganishda taqsimot hamda zichlik funktsiyalaridan foydalaniladi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funktsiyalarini berishdir. Taqsimot funktsiya  $F(x)$  orqali belgilanadi.

**21.4.2-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning  $F(x)$  taqsimot funktsiyasi  $\forall x \in R$  son uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\}..$$

Taqsimot funktsiya quyidagi xossalarga ega:

1.  $F(x)$  funktsiya chegaralangan:  $0 \leq F(x) \leq 1$ .
2.  $F(x)$  kamaymaydigan funktsiya, ya'ni agar  $x_1 < x_2$  bo'lsa, u holda  $F(x_1) \leq F(x_2)$ .
3.  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
4.  $F(x)$  funktsiya chapdan uzluksiz, ya'ni  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ .

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

1-misol.  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasini topamiz:

|     |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1              | 2              |
| $P$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{1}{15}$ |

Yechish. Agar  $x \leq 0$  bo'lsa,  $F(x) = P\{X < 0\} = 0$ ,

agar  $0 < x \leq 1$  bo'lsa,  $F(x) = P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = \frac{7}{15}$ ,

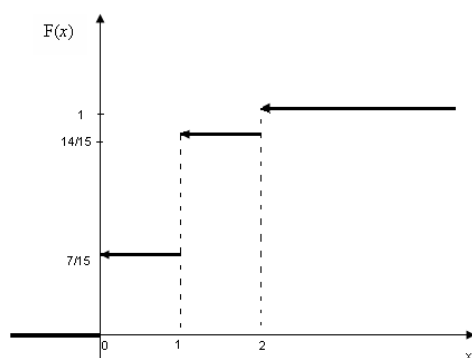
agar  $1 < x \leq 2$  bo'lsa,  $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{14}{15}$ ,

agar  $x > 2$  bo'lsa,  $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{7}{15} + \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 1$ .

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0, \\ \frac{7}{15}, & \text{agar } 0 < x \leq 1, \\ \frac{14}{15}, & \text{agar } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{agar } x > 2. \end{cases}$$

$F(x)$  taqsimot funktsiya grafigi quyidagi rasmda keltirilgan:



**21.4.3-ta'rif.** Agar  $X$  tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi ixtiyoriy nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda  $X$  – uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar  $F(x)$  taqsimot funktsiya uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi bo'lsa, taqsimot funktsiyaning 1-4 xossalardan quyidagi natijalarni keltirish mumkin:

**Natija.**  $X$  tasodifiy miqdorning  $[a; b)$  oraliqda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimoli taqsimot funktsiyaning shu oraliqdagi orttirmasiga teng:

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$$

**Natija.**  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng:

$$P\{X = x_i\} = 0.$$

## 2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorni asosiy xarakteristikasi zichlik funktsiya hisoblanadi.

**21.4.4-ta'rif.** Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi deb, shu tasodifiy miqdor taqsimot funktsiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi  $f(x)$  orqali belgilanadi. Demak,

$$f(x) = F'(x).$$

Zichlik funktsiya quyidagi xossalarga ega:

1.  $f(x)$  funktsiya manfiy emas, ya'ni  $f(x) \geq 0$ .
2.  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning  $[a; b]$  oraliqqa tegishli qiymatni qabul qilishi ehtimoli zichlik funktsiyaning  $a$  dan  $b$  gacha olingan aniq integraliga teng, ya'ni

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi zichlik funktsiya orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

4. Zichlik funktsiyadan  $-\infty$  dan  $+\infty$  gacha olingan xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

2-misol.  $X$  tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi  $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$  tenglik bilan berilgan. O'zgarmas  $a$  parametrni toping.

Yechish. Zichlik funktsiyaning 4-xossasiga ko'ra  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = 1$ ,

ya'ni 
$$a \cdot \lim_{\substack{d \rightarrow +\infty \\ c \rightarrow -\infty}} \int_c^d \frac{1}{1+x^2} dx = a \cdot \lim_{\substack{d \rightarrow +\infty \\ c \rightarrow -\infty}} \arctg x \Big|_c^d = a \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = a \cdot \pi = 1.$$

Demak,  $a = \frac{1}{\pi}$ .

### 3. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

**A) Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va xossalari.**

**21.4.5-ta'rif.**  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

tenglik bilan aniqlanuvchi  $MX$  songa aytiladi.

Matematik kutilishning xossalari qarang chiqamiz:

1. O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu miqdorning o'ziga teng:

$$MC = C.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CMX.$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining yig'indisiga teng:

$$M(X + Y) = MX + MY.$$

4. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng:

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY.$$

### **B) Uzlaksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va xossalari.**

**21.4.6-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilishi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilishiga aytiladi:

$$DX = M(X - MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \right)^2.$$

Ko'pincha  $DX$  belgilash o'rniga  $\sigma^2$  belgilash ishlatiladi.

Dispersiyaning xossalari:

1. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$DC = 0.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga oshirib chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 DX.$$

3. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

4. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X - Y) = DX + DY.$$

### **V) O'rtacha kvadratik chetlanish.**

**21.4.7-ta'rif.**  $X$  tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik tarqoqligi (standart chetlashishi) deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_x = \sqrt{DX}$$

Dispersiyaning xossalariidan o'rtacha kvadratik tarqoqlikning xossalari kelib chiqadi:

1.  $\sigma_c = 0$ .
2.  $\sigma_{cX} = |C| \sigma_X$ .

Dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishlar tasodifiy miqdor qiymatlarining matematik kutilmasidan o'rtacha chetlanish darajasini xarakterlaydi: dispersiya yoki o'rtacha kvadratik chetlanish qancha katta bo'lsa, tasodifiy miqdorning qiymatlarini sochilish darajasi shuncha katta bo'ladi.

Agar  $Y = \varphi(X)$  bo'lsa, u holda  $Y$  tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi  $MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p(x)dx$  formula yordamida hisoblanadi.

Tekis taqsimotning sonli xarakteristikolari:

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ko'rsatkichli taqsimotning sonli xarakteristikolari:

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Normal taqsimotning sonli xarakteristikolari:

$$MX = a, \quad DX = \sigma^2.$$

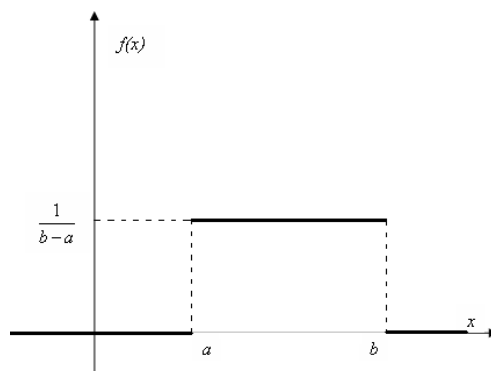
#### 4. Uzlusiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyalari.

**21.4.8-ta'rif.** Agar  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{agar } x \in [a, b], \\ 0, & \text{agar } x \notin [a, b] \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u  $[a; b]$  oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

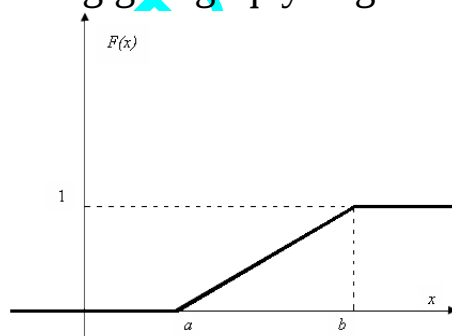
Bu tasodifiy miqdor zichlik funktsiyasining grafigi quyidagi rasmda berilgan:



$[a; b]$  oraliqda tekis taqsimlangan  $X$  tasodifiy miqdor  $X \in R[a, b]$  ko'rinishda belgilanadi.  $X \in R[a, b]$  uchun taqsimot funktsiya quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agap } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{agap } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{agap } x > b. \end{cases}$$

$F(x)$  taqsimot funktsiyaning grafigi quyidagi rasmda keltirilgan.

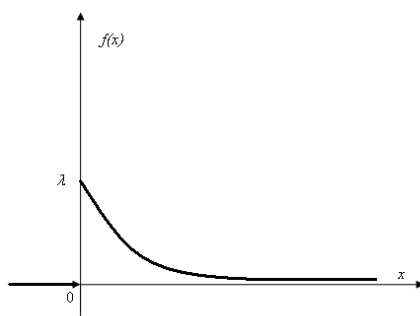


**21.4.9-ta'rif.** Agar  $X$  uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{agap } x \geq 0, \\ 0, & \text{agap } x < 0 \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa,  $X$  tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda  $\lambda$  biror musbat son.

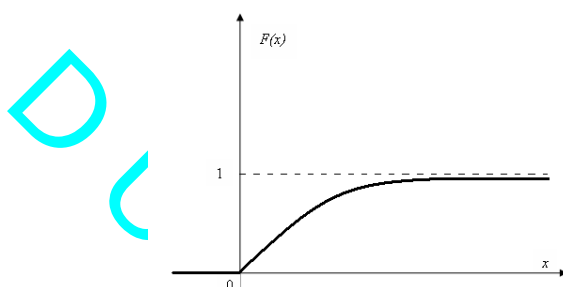
$\lambda$  parametrli ko'rsatkichli taqsimot  $E(\lambda)$  orqali belgilanadi. Uning grafigi quyidagi rasmda keltirilgan.



$E(\lambda)$  uchun taqsimot funktsiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0. \end{cases}$$

Uning grafigi quyidagi rasmda keltirilgan.



Normal taqsimot ehtimollar nazariyasida o'ziga xos o'rin tutadi. Normal taqsimotning xususiyati shundan iboratki, u limit taqsimot hisoblanadi. Ya'ni boshqa taqsimotlar ma'lum shartlar ostida bu taqsimotga intiladi. Normal taqsimot amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigan taqsimotdir.

**21.4.10-ta'rif.**  $x$  uzluksiz tasodifiy miqdor normal qonun bo'yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funktsiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

$a$  va  $\sigma > 0$  parametrlar bo'yicha normal taqsimot  $N(a, \sigma)$  orqali belgilanadi.  $X = N(a, \sigma)$  normal tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Agar normal taqsimot parametrlari  $a = 0$  va  $\sigma = 1$  bo'lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funktsiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

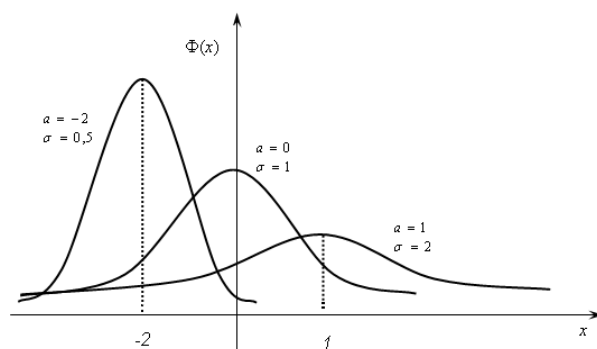
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Taqsimot funktsiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ko'rinishga ega va u Laplas funktsiyasi deyiladi.

Quyidagi rasmda  $a$  va  $\sigma$  larning turli qiymatlarida normal taqsimot grafigining o'zgarishi tasvirlangan:



$X = N(a, \sigma)$  tasodifiy miqdorning  $(\alpha, \beta)$  intervalga tushish ehtimolini hisoblaymiz. Avvalgi mavzulardan ma'lumki,

$$\begin{aligned} P\{\alpha < X < \beta\} &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[ \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Laplas funktsiyasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi_0\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Normal taqsimot funktsiyasini Laplas funktsiyasi orqali quyidagicha ifodalasa bo'ladi:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = P\{-\infty < X < x\} = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \Phi_0(+\infty) = \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Agar Laplas funktsiyasi  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  bo'lsa, u holda

$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$  va oxirgi formulani quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Amaliyotda ko'p hollarda normal tasodifiy miqdorning  $a$  ga nisbatan simmetrik bo'lgan intervalga tushish ehtimolini hisoblashga to'g'ri keladi.

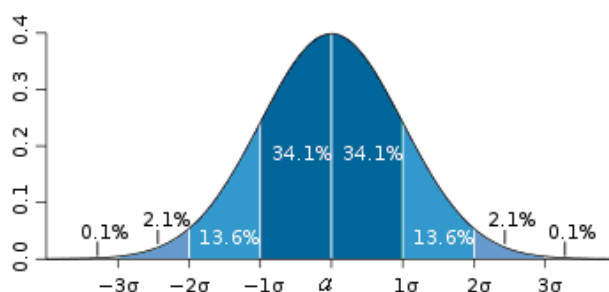
Uzunligi  $2l$  bo'lgan  $(a-l, a+l)$  intervalni olaylik, u holda

$$P\{a-l \leq X \leq a+l\} = P\{|X-a| \leq l\} = \Phi_0\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

Demak,

$$P\{|X-a| \leq l\} = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 1.$$

$l = 3\sigma$  deb olsak,  $P\{|X-a| \leq 3\sigma\} = 2\Phi_0(3)$  bo'ladi.  $\Phi_0(x)$  funktsiyaning qiymatlari jadvalidan  $\Phi_0(3) = 0,49865$  ni topamiz. U holda  $P\{|X-a| \leq 3\sigma\} \approx 0,9973$  bo'ladi. Bundan quyidagi muhim natijaga ega bo'lamiz: Agar  $X \sim N(a, \sigma)$  bo'lsa, u holda uning matematik kutilmasidan chetlanishining absolyut qiymati o'rtacha kvadratik tarqoqligining uchlanganidan katta bo'lmaydi. Bu qoida "uch sigma qoidasi" deyiladi.



3-misol. Detallarni o'lchash jarayonida  $\sigma = 10$  mm parametrli normal taqsimotga bo'ysunuvchi tasodifiy xatoliklarga yo'l qo'yildi. Bog'liqsiz 3 marta detalni o'lchaganda hech bo'lmasa bitta o'lchash xatoligining absolyut qiymati 2 mm dan katta bo'lmasligi ehtimolini baholang.

Yechish.

$$P\{|X-a| \leq 2\} = 2\Phi_0\left(\frac{2}{10}\right) \approx 2 \cdot 0,07926 = 0,15852.$$

Bitta tajribada (o'lchashda) xatolikning 2mm dan oshishi ehtimoli  $P\{|X-a| > 2\} = 1 - P\{|X-a| \leq 2\} \approx 0,84148$ . Tajribalarimiz bog'liqsiz bo'lganligi uchun uchala tajribada xatolikning 2mm dan oshishi

ehtimoli  $0,84148^3 \approx 0,5958$  bo'ladi. Qidirilayotgan ehtimol  $1 - 0,5958 \approx 0,4042$ .

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. 1,5,6,7,8 raqamlardan nechta uch xonali sonlarni hosil qilish mumkin?
2. Nechta usulda kitobxon 6 ta kitobdan 2 tasini tanlashi mumkin?
3. Agar  $P(A)=0,4$ ;  $P(B)=0,7$  va  $P(AB)=0,5$  bo'lsa, u holda  $P(A+B)=?$
4. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.
5. 1,2,3,4,5,6 raqamlarini faqat bir marta ishtirok ettirib nechta 4 xonali son hosil qilish mumkin.
6. Chigitning unib chiqishi ehtimolligi 0.5 ga teng bo'lsa, ekilgan 6 ta chigitdan 4 tasi unib chiqishi ehtimolini toping.
7. Idishda 10 ta bir xil sharlar bo'lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni, bittasi qora rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

## XXII BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENLARI

### 22.1-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Bosh to'plamdan tanlanma olingan. Bunda  $x_1$  qiymat  $n_1$  marta,  $x_2$  qiymat  $n_2$  marta va hokazo  $x_k$  qiymat,  $n_k$  marta kuzatilgan, bunda  $\sum n_i = n$  bo'lib,  $n$ -tanlanma to'plam hajmi,  $n_i$ - chastotalari  $\sum n_i = n$  bo'lsin. Kuzatilgan  $x_i$  qiymatlar variantalar, variantlarning ortib borishi tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Chastotalarni, tanlanma to'plamning hajmiga nisbati  $n_i/n=w_i$  yani nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ketma-ketligiga aytiladi. Statistik taqsimotni yana intervallar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko'rinishida ham berish mumkin.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari va nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Misol: Hajmi 20 bo'lgan tanlanmaning chastotalar taqsimoti berilgan:

|       |   |    |    |
|-------|---|----|----|
| $x_i$ | 2 | 6  | 12 |
| $n_i$ | 3 | 10 | 7  |

Nisbiy chastotalar taqsimoti ko'rinishida yozing.

Yechish:  $w_1=n_1/n=3/20=0,15$ .  $w_2=10/20=0,5$ .  $w_3=0,35$ .

U holda:

|       |      |     |      |
|-------|------|-----|------|
| $x_i$ | 2    | 4   | 12   |
| $n_i$ | 0,15 | 0,5 | 0,35 |

Tekshirish:  $w_1+w_2+w_3=0,15+0,5+0,35=1$ .

### 22.2-§. Taqsimotning empirik funksiyasi

Aytaylik,  $X$  son belgi chastotalarning statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin.  $N_x$ -belgining  $x$  dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni;  $n$ -tanlanma hajmi. Ravshanki,  $X < x$  hodisaning nisbiy chastotasi  $n_x/n$  ga teng. Agar  $x$  o'zgaradigan bo'lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o'zgaradi, ya'ni  $n_x/n$  nisbiy chastota  $x$  ning

funksiyasidir. Bu funksiya empirik yo'l bilan topiladiganligi uchun u empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi deb, har bir  $x$  qiymati uchun  $X < x$  hodisaning ehtimolini aniqlaydigan  $F^*(x)$  funksiyaga aytiladi. Shunday qilib ta'rifga ko'ra  $F^*(x) = n_x/n$ .

Bosh to'plam taqsimotining  $F(x)$  integral funksiyasini, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilib taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi. Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki,  $F(x)$  nazariy funksiya  $X < x$  hodisa ehtimolini,  $F^*(x)$  empirik funksiya esa shu hodisaning o'zining nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasidan kelib chiqadiki,  $X < x$  hodisaning nisbiy chastotasi, ya'ni  $A^*(x)$  shu hodisaning  $F(x)$  ehtimoliga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Boshqacha so'z bilan aytganda  $F^*(x)$  va  $F(x)$  sonlar bir-biridan kam farq qiladi. Shu yerning o'zidanoq, bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanishi maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Bunday xulosa shu bilan ham tasdiqlanadiki,  $F^*(x)$  funksiya  $F(x)$  ning barcha xossalriga ega. Darhaqiqat,  $F^*(x)$  funksiyaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

- 1). Empirik funksiya qiymatlari  $[0,1]$  kesmaga tegishli;
- 2).  $F^*(x)$  - kamaymaydigan funksiya;
- 3).  $x_1$  - eng kichik varianta bo'lsa, u holda  $X \leq x_1$  da  $F^*(x)=0$ ;
- $x_k$  - eng katta varianta bo'lsa, u holda  $X > x_k$  da  $F^*(x)=1$ ;

Shunday qilib, tanlanma taqsimotning empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotning nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol: Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

|              |       |    |    |    |
|--------------|-------|----|----|----|
| Variantalar: | $x_i$ | 2  | 6  | 10 |
| Chastotalar: | $n_i$ | 12 | 18 | 30 |

Yechish: Tanlanma hajmini topamiz:  $12+18+30=60$ .

Eng kichik varianta 2 ga teng, demak:  $x$   
 $X \leq 2$  da  $F^*(x)=0$

$X < 6$  qiymat, xususan,  $x_1=2$  qiymat 12 marta kuzatilgan, demak:  
 $2 < X \leq 6$  da  $F^*(X)=12/60=0,2$ .

$X < 10$  qiymatlar, jumladan  $X_1=2$  va  $X_2=6$  qiymatlar  $12+18=30$

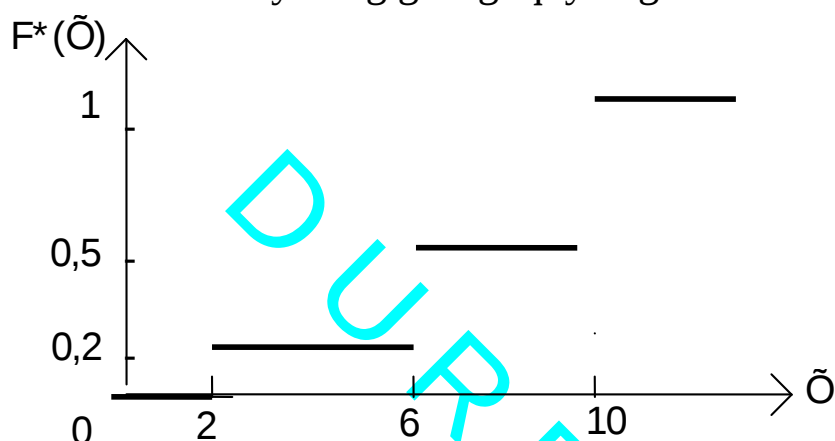
marta kuzatilgan, demak:

$6 < X \leq 10$  da  $F^*(X) = 30/60 = 0,5$ .

$X = 10$  eng katta varianta bo'lgani uchun  $X > 10$  da  $F^*(X) = 1$ .

$$F'(x) = \begin{cases} x \leq 2 & \text{da } 0. \\ 2 < x \leq 6 & \text{da } 0,2. \\ 6 < x \leq 10 & \text{da } 0,5. \\ x > 10 & \text{da } 1. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi quyidagicha:



### 22.3-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari

Aytaylik, bosh to'planning son belgisini o'rganish talab qilinayotgan bo'lsin. Faraz qilaylik, shu belgi qaysi taqsimotga ega ekanligi nazariy mulohazalardan aniqlangan bo'lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi yuzaga kelishi tabiiydir.

Odatda tadqiqotchi ixtiyorida tanlanmadagi ma'lumotlarga, masalan, son belgining  $n$  ta kuzatish natijasida olingan  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  qiymatlari bo'ladi. Baholanayotgan belgi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanadi.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ni erkli  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  deb qarab, nazariy taqsimot ma'lum parametrining statistik bahosini topish, bu demak, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiyaning topishdirki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini beradi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrning statistik bahosi deb, kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaqa aytiladi.

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniqlanadigan statistik bahoga

aytiladi.

Aytaylik,  $\theta^*$  nazariy taqsimot  $\theta$  noma'lum parametrlarning statistik bahosi bo'lsin.

Siljimagan baho deb, tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilish baholanayotgan  $\theta$  parametrga teng, ya'ni

$$M(\theta^*) = \theta$$

bo'lgan  $\theta^*$  nuqtaviy bahoga aytiladi.

Siljigan baho deb, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan nuqtaviy bahoga aytiladi.

Ammo siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrning yaxshi yaqinlashishini beradi deb hisoblash xato.  $\theta^*$  ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq, ya'ni  $D(\theta^*)$  dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. Agar  $\theta^*$  ning dispersiyasi kichik bo'lishini talab qiladigan bo'lsak, u holda katta xatoga yo'l qo'yishning oldini olgan bo'lamiz. Shu sababli statistik bahoga effektivlik talabi qo'yiladi.

Effektiv baho deb mumkin bo'lgan eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik bahoga aytiladi.

## 22.4-§. Bosh to'plamning o'rtacha qiymat. O'rtacha tanlanma to'plamning qiymati

Bosh to'plamning o'rtacha qiymat  $\bar{X}_B$  deb bosh to'plam belgisi qiymatlarining arifmetik o'rtacha qiymatiga aytiladi.

Agar  $N$  hajmli bosh to'plam belgisining barcha  $x_1, x_2, \dots, x_N$  qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$\bar{X}_B = (x_1 + x_2 + \dots + x_N) / N.$$

Agar belgining  $x_1, x_2, \dots, x_k$  qiymatlari mos  $N_1, N_2, \dots, N_k$  chastotalarga ega va,  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$  bo'lsa,

$$\bar{X}_B = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_k N_k) / N.$$

Agar  $n$  hajmli tanlanma belgisining barcha  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Agar belgining  $x_1, x_2, \dots, x_k$  qiymatlari mos ravishda  $n_1, n_2, \dots, n_k$  chastotalarga ega bo'lsa va  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} \text{ yoki } \bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

**22.4.1-ta'rif.** Chetlanish deb belgining qiymati bilan umumiy o'rtacha qiymat orasidagi  $x_i - \bar{X}$  ayirmaga aytiladi.

**22.4.2-ta'rif.** Bosh to'planning dispersiya  $D_B$  deb bosh to'plam belgisi qiymatlarini o'rtacha qiymati  $\bar{x}_B$  dan chetlanishlari kvadratlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar  $N$  hajmli bosh to'plam belgisining  $x_1, x_2, \dots, x_N$  qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$D_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_B)^2.$$

Agar belgining  $x_1, x_2, \dots, x_k$  qiymatlari mos ravishda  $N_1, N_2, \dots, N_k$  chastotalarga ega, shu bilan birga  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$  bo'lsa, u holda

$$D_B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_B)^2$$

Tanlanma to'planning dispersiya  $D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2.$

Agar  $x_1, x_2, \dots, x_k$  qiymatlar mos ravishda  $n_1, n_2, \dots, n_k$  chastotalarga ega va  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  bo'lsa,

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2$$

Tanlanma to'planning o'rtacha kvadratik chetlanish deb tanlanma dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T}.$$

## 22.5-§. Ishonchli ehtimol. Ishonchli interval

Interval baho deb ikkita son - intervalning uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

$\theta$  bahoning  $\theta^*$  bo'yicha ishonchliligi (ishonchli ehtimol) deb  $|\theta - \theta^*| < \delta$  tengsizlikni amalga oshishi ehtimoli  $\gamma$  ga aytiladi, bu yerda  $\delta > 0$  son bahoning aniqligini xarakterlaydi.

Odatda bahoning ishonchliligi oldindan berilgan bo'ladi, bunda  $\gamma$  sifatida 0,95; 0,99; 0,999 qilib beriladi.

Aytaylik,  $|\theta - \theta^*| < \delta$  bo'lish ehtimoli  $\gamma$  ga teng bo'lsin, ya'ni  $P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = \gamma$ .

$\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta = \gamma$  yoki  $P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \gamma$ .

Bu munosabatni bunday tushunish lozim  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$  intervalning noma'lum  $\theta$  parametrni o'z ichiga olish ehtimoli  $\gamma$  ga teng.

Ishonchli interval deb noma'lum parametrni berilgan  $\gamma$  ishonchlilik bilan qoplaydigan  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$  intervalga aytiladi.

Faraz qilaylik  $X$  son belgi normal taqsimlangan,  $\sigma$  ma'lum,  $a$ -noma'lum bo'lsin.  $a$ -parametrni  $\gamma$  ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervallarni topishni ko'raylik.

$$M(\bar{X}) = a, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$$

Buning uchun

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanamiz.

$x$  ni  $\bar{x}$  ga  $\sigma$  ni  $\sigma(\bar{x})$  ga almashtiramiz.

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \quad t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$P\left(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma$$

Demak,  $\gamma$  ishonch bilan aytish mumkinki,  $(\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  ishonchli interval noma'lum  $a$ -parametrni qoplaydi: bahoning aniqligi

$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$   $t$  son  $\Phi(t) = \gamma/2$  tenglikdan topiladi.  $\Phi(t)$  – Laplas funksiyasi.

Misol.  $X$  tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chetlanishi  $\sigma=3$  ma'lum bo'lgan noreal taqsimotga ega.

$n=36$ ,  $\gamma=0,95$  Noma'lum  $a$ -matematik kutilma  $\bar{x}$  tanlanma o'rtacha qiymati bo'yicha baholash uchun ishonchli intervallarni toping.

Yechish.  $t$  ni topamiz  $2F(t) = 0,95$ ,  $F(t) = 0,475$ .  
Jadvaldan  $t=1,96$  ni topamiz.

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,98$$

Ishonchli intervallar

$$(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$$

agar  $\bar{x}=4,1$  bo'lsa, u holda

$$\bar{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12,$$

$$\bar{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

U holda  $3,12 < a < 5,08$

### Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. 10 qavatli bino liftiga 5 kishi kirdi. Ular turli qavatlariga chiqish ehtimolini toping
2. Guruxda 12 talaba bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 alochi talaba bo'lish ehtimolini toping.
3. Yashikda 10 detal bo'lib, ular orasida 6 ta bo'yalgani bor. Yig'uvchi tavakkaliga 4 ta detal oladi. Olingan detallarning hammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping.
4. Xaltada 1 dan 10 gacha nomerlangan bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin-ketin 1, 2, 3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini toping. (Olingan kubik xaltagacha qaytarib solinmaydi).
5. Agar  $A_1, A_2, A_3$  xodisalar bog'liqsiz bo'lib, ularning ehtimollari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,6 bo'lsin. Ulardan kamida bittasini bajarish ehtimolini toping.
6. Maxsulotni tekshiruvda 300 tasidan 270 tasi sifatli ekan. Maxsulotni sifatsiz bo'lish nisbiy chastotasini toping
7. Maxsulotni tekshiruvda 200 tasidan 40 tasi sifatsiz ekan. Maxsulotni sifatli bo'lish nisbiy chastotasini toping. Nishonga ketma-ket o'q otishda nishonga tegish nisbiy chastotasi 0,6 bo'lib, 20 o'q nishonga tegmagan bo'lsa nishonga necha marta o'q otilgan
8. Idishda 8ta shar bo'lib ulardan 3 tasi oq 2 tasi qizil va qolganlari qora. 4 ta shar olinganda 2 tasi oq, 1 tasi qizil va 1 tasi qora bo'lish ehtimoli toping
9. Nishonga ketma-ket o'q otishda nishonga tegish nisbiy chastotasi 0,7 bo'lib, 15 o'q nishonga tegmagan bo'lsa nishonga necha marta o'q otilgan.

## ADABIYOTLAR

1. T. Azlarov, X. Mansurov. Matematik analiz. II qism, T., «O'qituvchi», 1989.
2. A.B. Ефимов, Б.П. Демидович. Сборник задач по математике, «Наука» М.: 1984, -с. 520.
3. C. Quinn et al. Mathematics. Australia, 2014, p. 240.
4. V. E. Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T., «O'qituvchi», 1977.
5. V. E. Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechish uchun qo'llanma. T., «O'qituvchi», 1980.
6. T. Juraev, A. Sa'dullaev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov. Oliy matematika asoslari. I qism, T., «O'zbekiston», 1995.
7. T. Juraev, A. Sa'dullaev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov. Oliy matematika asoslari. II qism, T., «O'zbekiston», 1998.
8. X. Latipov, Sh. Tojiev, R. Rustamov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., «O'qituvchi», 1995.
9. V. P. Minorskiy. Matematikadan masalalar tuplami. T., «O'qituvchi», 1988.
10. V. T. Petrova. Leksii po algebre i geometrii, I, II chast. M., Vldos, 1999.
11. N. S. Piskunov. Differensial va integral hisob. I, II tom. T., «O'qituvchi», 1979.
12. R. N. Nazarov, B. T. Toshpulatov. Algebra va sonlar nazariyasi. T., «O'qituvchi», 1990.
13. F. R. Rajabov, A. N. Nurmetov. Analitik geometriya va chiziqli algebra. T., «O'qituvchi», 1990.
14. E. U. Soatov. Oliy matematika. T., «O'qituvchi», 1992.
15. V. E. Shneyder, A. I. Sluskiy, A. S. Shumov. Oliy matematika qisqa kursi. 2-jild, T., «O'qituvchi», 1987.
16. F. Rajabov, S. Masharipova, R. Madrahimov. Oliy matematika. T.: «Turon-Iqbol», 2007, 387 b.

DURDONA

**Akramova D.I.**

## **OLIY MATEMATIKA**

**O'quv qo'llanma**

*Muharrir:* A. Qalandarov  
*Texnik muharrir:* G. Samiyeva  
*Musahhih:* Sh. Qahhorov  
*Sahialovchi:* M. Bafoyeva

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 20.06.2024. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog'ozi. Bosma tobog'i 18,7. Adadi 100. Buyurtma №370.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ  
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.  
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45