



ILMIY AXBOROTNOMA

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК

SCIENTIFIC JOURNAL

2020-yil, 5-son (123)

ANIQ FANLAR SERIYASI

Matematika, Mexanika, Informatika, Fizika

Samarqand viloyat matbuot boshqarmasida ro'yxatdan o'tish tartibi 09-25.
Jurnal 1999-yildan chop qilina boshlagan va OAK ro'yxatiga kiritilgan.

BOSH MUHARRIR
BOSH MUHARRIR O'RINBOSARLARI:

R. I. XALMURADOV, t.f.d. professor
H.A. XUSHVAQTOV, f-m.f.n., dotsent
A. M. NASIMOV, t.f.d., professor

TAHRIRIYAT KENGASHI:

M. X. ASHUROV	- O'zFA akademigi
T.M.MO'MINOV	- O'zFA akademigi
SH. A. ALIMOV	- O'zFA akademigi
S. N. LAKAYEV	- O'zFA akademigi
T. RASHIDOV	- O'zFA akademigi
M.M.MIRSAIDOV	- O'zFA akademigi
A. S. SOLEEV	- f-m.f.d., professor
I. A. IKROMOV	- f-m.f.d., professor
B. X. XO'JAYAROV	- f-m.f.d., professor
I. I. JUMANOV	- f-m.f.d., professor
X. X. XUDOYNazarov	- t.f.d., professor
N. N. NIZAMOV	- f-m.f.d., professor
L.SABIROV	- f-m.f.d., professor
A.G.YAGOLA	- f-m.f.d., professor (Moskva davlat universiteti, Rossiya)
MASLINA DARUS	- Malayziya milliy universiteti professori, Malayziya
ALBERTO DEL BIMBO	- Florensiya universiteti professori, Italiya

Obuna indeksi – yakka tartbidagi obunachilar uchun - 5583,
tashkilot, korxonalar uchun - 5584

MUNDARIJA/СОДЕРЖАНИЕ/CONTENTS

МАТЕМАТИКА / МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

Lakaev S.N., Khamidov Sh.I. Threshold effects in the spectrum of the one-particle schrödinger operator on a lattice	4
Akramova D.I. Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligi bilan bog'langan tebranuvchan integrallar haqida	15
Кабулов А.В., Урунбаев Э., Бердимуродов М.А. Логический метод нахождения максимальных совместных подсистем систем булевых уравнений	27
Mamatov A.U. Modeling the effect of the two-fold non-linear heat dissipation equation on biological population with ambient density	37
Azimov A.A. A method for finding a unimodular matrix of a power transformation using continued fractions in three-dimensional space	40
Махмудов О.И., Нуъзов И.Э. Критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений термоупругости	46
Kuliev K., Kuliyeva G., Maxmadiyeva M. Muavri-Laplasning lokal va integral limit teoremlari	52
Мирзаев О.Э. Изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке	60
Usmanov S.E. On properties of some singular surfaces	64
Артикбаев А., Исмоилов Ш. Сечение сферы с плоскостью в изотропном пространстве $\mathbb{R}_3^2$	70
Кулжанов У.Н., Исмоилов Г.И. Спектральные свойства одночастичного оператора Шредингера на решетке	74

МЕХАНИКА / МЕХАНИКА / MECHANICS

Хужаёров Б.Х., Усмонов А.И., Қайтаров З. Численное решение задачи переноса вещества в двумерной неоднородной пористой среде	79
Гайбулов Ю., Джаббаров М.С. Моделирование давления на плунжер при эксплуатации скважин, добывающих неньютоновские нефти	91
Суванкулов И.Ш., Муллажонов Н.Ж. Об одном способе формирования двухпоясных решетчатых структур	96

ИНФОРМАТИКА / ИНФОРМАТИКА / INFORMATICS

Turaqulov Sh. X. CNN (Convolutional Neural Network) orqali tasvir kasallik diagnostikasini amalga oshirish	102
Iskandarova S. N., Muxamadjonov X. Z. Tanib olish masalalari uchun qator segmentatsiya masalasi	107
Sotvoldiev D. M. Ko'z tubi qon tomiri tasviri asosida kasalliklarni tashxislash	111

FIZIKA / ФИЗИКА / PHYSICS

Сафаров А.Н., Мухамедов А.К., Шаронов И.А., Азимов А.Н., Сафаров А.А., Салимов М.И., Ражаббоев Б.И.	119
О радиационном экспресс-анализе строительных материалов	
Шарифов Г.	128
Межмолекулярные взаимодействия молекул пиррола и его растворах. неэмпирические (ab initio) расчеты	
Hushvaktov H.	133
Raman scattering spectra of α -alanine molecular complexes	
Tuxtayev U.U., Nurmurodov L.N., Umirzakov E.A., Tog'ayev B.S., Fayzullayeva M.L.	138
Buloq suvlarida Radon-222 miqdorini ssintillyatsion gamma-spektrometriya usuli yordamida aniqlash	
Xudoyberdiyeva M.K., Jo'rayeva N.B.	141
Tarkibida kompakt obyektlar bo'lgan tor qo'shaloq sistemalarning elektromagnit nurlanishi	
Бункин Н.Ф., Сабиров Л.М., Козлов В.А., Жураев Й.Т.	147
Реологический эффект при набухании полимерных мембран в водных растворах с различным дитиреческим содержанием	
Egamberdiyev Sh., Axunov T., Jurayev B., Turniyazov R.	152
SBS1520+530 va SDSS2124+1632 gravitatsion linzalangan sistemalarning fotometrik tahlili	

Mualliflarga

16. A. Mogilner. *Hamiltonians in solid state physics as multi-particle discrete Schrödinger operators : Problems and results. Many-Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering* // Advances in Soviet Mathematics, 5, eds. R. A. Minlos, AMS, Providence, RI, 139–194 (1991).
17. M. Reed, B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators* // Academic Press, New York, 1979.
18. A.V. Sobolev. *The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics* // Comm. Math. Phys. 156:1, 101–126 (1993).
19. H. Tamura. *The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: Asymptotics for the number of negative eigenvalues* // Nagoya Math. J. 130, 55–83 (1993).
20. V. Hoang, D. Hundertmark, J. Richter, S. Vugalter. *Quantitative bounds versus existence of weakly coupled bound states for Schrödinger type operators* // arXiv:1610.09891v2 [math-ph], 22 May (2017).
21. D.R. Yafaev. *On the theory of the discrete spectrum of the three-particle Schrödinger operator* // Math. USSR-Sb. 94(136):4(8), 567–593 (1974).

UDC 517.518.5

ARNOL'DNING E_6 TIPIDAGI MAXSUSLIGI BILAN BOG'LANGAN TEBRANUVCHAN INTEGRALLAR HAQIDA

D. I. Akramova

Samarqand davlat universiteti,
akramova.shoda@mail.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada biz o'lchovlar Fur'e almashtirishining ma'lum daraja bilan yig'ilishi muammosini ko'rib chiqamiz. Uch o'lchovli Evklid fazosida, faza funksiyasi Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligiga ega bo'ladigan, sirtida mujassamlashgan o'lchovlarning Fur'e almashtirishi $p > 3$ bo'lganda L^p fazoga qarashli bo'lishi ko'rsatgan. Bundan tashqari darajaning aniq ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Tebranuvchan integrallar, Fur'e almashtirishi, sirtida mujassamlashgan o'lchovlar, oddiy maxsuslik, gradient ideal, kritik nuqtalarning karraliligi.

Об осциллирующих интегралах, связанных с особенностями типа E_6 Арнольда

Аннотация. В данной статье мы рассматриваем проблему интегрируемости преобразования Фурье мер с некоторой степенью. Мы покажем, что в трехмерном евклидовом пространстве преобразование Фурье меры, сосредоточенной на гиперповерхности фазовая функция которой имеет особенность Арнольда типа E_6 , принадлежит в L^p при $p > 3$. К тому же доказана точность показателя.

Ключевые слова: Осциллирующие интегралы, преобразование Фурье, поверхностные меры, простая особенность, градиентный идеал, кратность критических точек.

On the oscillatory integrals related to the Arnold singularities of type E_6 .

Abstract. In this paper we consider the integrability problem for the Fourier transform of measures with some degree. We show that in three-dimensional Euclidean space the Fourier transform of the surface-carried measures belongs to the space L^p for $p > 3$ in the case when the phase function associated to the surface has Arnol'd's E_6 type singularity. Moreover, the exponent is sharp.

Keywords: Oscillatory integrals, Fourier transform, surface-carried measures, simple singularities, gradient ideal, multiplicity of critical points.

Mathematics Subject Classification (2010): 42A38, 32D10(primary); 31C45 (secondary).

1. Umumiy masalaning qo'yilishi va asosiy ilmiy natija

Faraz qilaylik $S \subset \mathbb{R}^3$ silliq gipersirt va $\varphi \in C_0^\infty(S)$ compact tashuvchili (support) cheksiz silliq funksiya bo'lsin. Quydagi ko'rinishdagi zaryadni qaraymiz: $d\mu(X) := \varphi(X)dS$, bunda dS S gipersirtning yuzasi orali berilgan o'lchov. Xususan, φ nomanfiy funksiya bo'lsa biz musbat Borel o'lchoviga ega bo'lamiz. Yuqorida aniqlangan $d\mu$ zaryadning (o'lchovning) Fur'e almashtirishi quydagi ko'rinishdagi sirt integrali orqali aniqlanadi:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int_S e^{iX \cdot \xi} d\mu(X), \quad (1)$$

Bunda $X \cdot \xi$ X va ξ vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Shuni ta'kidlash joizki bu integral $d\mu$ zaryadga mos umumlashgan funktsiyaning taqsimot ma'nosidagi Fur'e almashtirishiga mos keladi (qarang [11]). Aslida klassik Paley-Wiener teoremasiga ko'ra kompakt tashuvchili istalgan taqsimotning Fur'e almashtirishi C^n fazoga analitik davom etadigan cheksiz silliq funktsiyaga mos keluvchi regulyar taqsimot bo'ladi. O'zimizga bir oz erk berib bunday taqsimotning Fur'e almashtirishi analitik funktsiya bo'ladi deyishimiz mumkin.

Bizni asosan $\widehat{d\mu(\xi)}$ funktsiyaning cheksizdagi xarakteri qiziqtiradi. Umumiy holda kompakt tashuvchili taqsimotning cheksizdagi xarakteri ixtiyoriy darajali tartibda bo'lishi mumkin. Buni $D^\alpha \delta$ (bunda D^α α – tartibli xususiy hosila va δ Dirak "del'ta"si). Lekin kompakt tashuvchili (bu sirt integrali orqali aniqlangan bo'lishi ham shart emas) zaryadning Fur'e almashtirishi doimo chegaralangan funktsiya bo'ladi. Bu tasdiq zaryad uchun Han yoyilmasi deb ataluvchi yoyilmadan osongina kelib chiqadi.

Bu ishda qaraladigan asosiy masalani keltiramiz: *Quyidagi*

$$\{p \in [1, \infty) : \forall \varphi \in C_0^\infty(S) \text{ funktsiya uchun ushbu munosabat bajariladi: } d\mu \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

to'plamning aniq quyi chegarasi p_S ni toping, bunda $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ $p(1 \leq p < \infty)$ – daraja bilan integrallanuvchi o'lchovli funktsiyalar sinflari fazosi, agar $p = \infty$, bo'lsa u holda biz muhim qiymatlari to'plami chegaralangan funktsiyalar fazosiga ega bo'lamiz, ya'ni muhim chegaralangan funktsiyalar fazosini qaraymiz.

Keyinchalik biz p_S sonini S sirtida mujassamlashgan $d\mu$ zaryadning aniq yig'ilish ko'rsatkichi deb ataymiz.

Eslatma. Bu masalada S sirt gipersirt bo'lishi shart emas, ya'ni sirtning koo'lchovi birdan katta bo'lishi ham mumkin. Bundan tashqari nisbatan oson bo'lgan chegarasi yetarlisha silliq bo'lgan kompakt sohalar xarakteristik funktsiyasi uchun ham shunga o'xshash masalani qarash mumkin. Chegarasi C^1 – silliq sohalar uchun shunga o'xshash masala [9] ishda qaralgan va masalaning tugallanishiga yaqin yechimi olingan. Umumiy holda bu masala yechilmagan. Bu masalaning yechimi bir necha sohalar xususan analitik sonlar nazariyasida paydo bo'ladigan Terri muammosi ham shu shaklda ifodalanishi mumkin, bundan tashqari bu kabi masala Garmonik analiz va matematik fizika masalalarida ham katta rol o'ynaydi [15].

Bu ishda biz Arnol'dning sodda deb ataluvchi E_6 tipdagi maxsusligiga ega funktsiyaning grafigi shaklida berilgan uch o'lchovli fazodagi sirtlar uchun yuqorida keltirilgan masalani qaraymiz. Agar φ funktsiyaning tashuvchisi sirt E_6 tipdagi maxsuslikka ega nuqtaning yetarlicha kichik atrofida mujassamlashgan bo'lsa, u holda Duistermaat tomonidan [12] ishda isbotlangan tekis bahodan osongina $p_S \leq 3h(\varphi)$ baho kelib chiqadi, bunda $h(\varphi)$ berilgan φ funktsiyaning A.N. Varchenko tomonidan (qarang [17]) kiritilgan balandligi. Bizning holda $h(\varphi) = 12/7$. Shunday qilib biz osongina $p_S \leq 36/7$ bahoga ega bo'lamiz. Ammo, bu baho aniq bahodan ancha yiroq. Yana ham aniqroq aytadigan bo'lsak $p_S = 3h(\varphi)$ teglik o'rinli bo'lishi uchun $h(\varphi) = 1$, ya'ni φ funktsiya bilan berilgan sirtning Gauss egriligi, zichlik funktsiyasi noldan farqli bo'lgan har bir nuqtada noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Biz φ funktsiya nolning yetarli kichik atrofida aniqlangan va bu nuqtada E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lganda $p_S = 3$ tenglikning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Bundan tashqari biz $p_S \geq 3$ tengsizlik ixtiyoriy silliq sirtlar uchun bajarilishini ko'rsatamiz.

Asosiy Teorema. Faraz qilaylik $\varphi(x_1, x_2)$ silliq funktsiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin: $\varphi(0) = 0, \nabla \varphi(0) = 0$ va $(0,0)$ nuqtada bu funktsiya E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lsin. Agar $S \subset \mathbb{R}^3$ funktsiya $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ shaklda berilgan bo'lsa, u holda $(0,0,0)$ nuqtaning shunday U atrofi topiladiki,

istalgan $\varphi \in C_0^\infty(U)$ funktsiya uchun $\widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabat ixtiyoriy $p > 3$ uchun o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari $\varphi(0) > 0$ bo'lib uning tashuvchisi nolning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa $d\mu$ funksiya $L^3(\mathbb{R}^3)$ fazoning elementi bo'lmaydi. Boshqacha so'zlar bilan aytganda S sirt yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ϕ funksiyaning grafigi bo'lsa $p_S = 3$ tenlik o'rinli bo'ladi.

2 Masalaning qisqacha tarixi va dolzarbligi.

Zaryadlar Fur'e almashtirishining yig'ilishi masalasining dolzarbligi bir necha sabablarga ega:

1) **Terri muammosi:** Faraq qilaylik $Q := [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$ kub va $p(x, a)$ ko'effitsentlari $a \in \mathbb{R}^n$ fazoga qarashli bo'lgan, $(x_1, \dots, x_k)$ o'zgaruvchilarga bog'liq ko'phad bo'lsin. Quyidagi integral

$$\Theta_p := \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_Q e^{2\pi i p(x, a)} dx \right|^p da$$

integralga maxsus integral deyiladi.

Bu integralning p sonining qanday qiymatlarda yaqinlashishi haqidagi masala Terri muammosi deb yuritiladi [1].

Agar $p(x, a)$ ko'phad

$$p(x, a) := a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + \dots$$

ko'rinishda bo'lsa biz bu fazali trigonometrik integralni $\chi_Q \delta_S$ (Bunda χ_Q Q kubning xarakteristik funksiyasi, δ_S p ko'phadni aniqlovchi monomlar orqali aniqlangan silliq sirt ustidagi del'ta funksiya) taqsimotning Fur'e almashtirishi shaklida yozishimiz mumkin.

Quyidagi tasdiq Terri muammosi bilan biz qarayotgan muammo orasidagi bog'liqlikni ko'rsatadi:

1-tasdiq. Agar $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ berilgan funksiya uchun ixtiyoriy $x \in Q$ nuqtada $\varphi(x) = 1$

tenglik bajarilsa hamda $\varphi \delta_S \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ($q > 1$) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda istalgan $q \leq p$ bo'lganda maxsus integral Θ_p yaqinlashuvchi bo'ladi.

1-tasdiqning isboti. $a \in \mathbb{R}^n$ vektorni $a = (a', a'')$ shaklida yozib olamiz, bunda $a' := (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ va $a'' \in \mathbb{R}^{n-k}$. Istalgan $x \in Q$ uchun $\varphi(x) = 1$ bo'lgani bois Biz quyidagi ayniyatni yozishimiz mumkin:

$$\int_Q e^{2\pi i p(x, a)} dx = \int_Q e^{2\pi i p(x, a')} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i p(x, a')} \chi_Q(x) \varphi(x) dx.$$

Endi $p(x, a)$ funksiyaning ko'rinishidan

$$p(x, a) = (a', x) + p_1(x, a'')$$

shaklda yozamiz, bunda (a', x) a' va x vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Shunday qilib

$$J(a', a'') = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) \chi_Q(x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} f_1(x, a'') f_2(x) dx,$$

bunda

$$f_1(x, a'') := e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x), \quad f_2(x) = \chi_Q(x).$$

Singulyar integral operatorlar nazariyasidan ma'lumki ([16]119 betdagi 4-teorema qarang), istalgan $1 < p < \infty$ uchun

$$\int_{\mathbb{R}^k} |J(a', a'')|^p da' \leq C_p \int_{\mathbb{R}^k} \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i (x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) dx \right|^p da'$$

tengsizlik bajariladi.

Shuni ta'kidlaymizki $e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x)$ funksiya cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lgani bois istalgan tayinlangan a'' uchun uning Fur'e almashtirishi Schwartz funksiyasi bo'ladi va tayinlangan a'' uchun albatta a' bo'yicha istalgan $r \geq 1$ uchun r – daraja bilan integrallanuvchi bo'ladi.

Ammo, uning integrali albatta a'' ga bog'liq bo'ladi.

Suning uchun endi biz $q \leq p$ deb olamiz va 1-tasdiqning integrallanuvchilik shartidan foydalanamiz va osongina:

$$\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}} |J(a', a'')|^p da \leq C_p \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}} \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{2\pi i(x, a')} e^{2\pi i p_1(x, a'')} \varphi(x) dx \right|^p da$$

tengsizlikka kelamiz. Shunday qilib biz 1-tasdiqni isbotladik.

Bundan tashqari, standard birning yoyilmasidan foydalanib biz φ ning tashuvchisi yetarlicha kichik deb faraz qilishimiz ham mumkin. Shunday qilib biz Terri muammosini biz qo'yilgan asosiy muammoga, ya'ni amplitudasi chesiz silliq hamda tashuvchisi yetarlicha kichik bo'lgan tebranuvchan integral orqali aniqlangan funksiyaning biror daraja bilan integrallanishi masalasiga keltirdik.

Endi yana bir masalani keltiramiz. Faraz qilaylik $E(x)$ biror silliq funksiya hamda $a \in \mathbb{R}$ uning kritik qiymatlar to'plamidan tashqarida yotsin, ya'ni ixtiyoriy $x \in E^{-1}(a)$ uchun $\nabla E(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda oshkormas funksiya haqidagi teorema ko'ra $S_a := \{x: E(x) = a\}$ sirt cheksiz silliq sirt bo'ladi. Xususan $E(x) = \cos(x_1) + \dots + \cos(x_k)$ bo'lsa $E(x)$ funksiya diskret Schrödinger operatori uchun dispersion munosabat va S_a sirtga Ferma sirti deyiladi. Bu holda S_a sirtida mujassamlashgan o'lchivlar uchun yig'ilish masalasi ($k = 3$ bo'lgan holda [3] ishda o'rganilgan va bu baho Schrödinger operatori bilan bog'langan singulayar integralning xarakterini o'rganishga qo'llanilgan).

Bu kabi o'lchovlarning tekis baholari ham keng qo'llanilgan.

Asosiy masala yechimining yana bir qo'llanilishi Fur'e almashtirishini toraytirish ("Fourier restriction problem") haqidagi quyidagi a-prior baho orqali ifodalanuvchi masaladir: Faraz qilaylik $S \subset \mathbb{R}^n$ biror tayinlangan silliq sirt (gipersirt bo'lishi shart emas) va φ nomanfiy kompakt tashuvchili funksiya bo'lsin. Bu masala quyidagicha ifodalanadi:

$$\left(\int_S |\hat{f}(\xi)|^q \varphi(\xi) dS(\xi) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q} P f P_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

tengsizlik istalgan Schwartz funksiyasi uchun o'rinli bo'ladigan barcha (p, q) juftliklar to'plamini toping, bunda $C_{p,q}$ faqat (p, q) juftlikka bog'liq bo'lgan son.

Bu masala hozirgacha yechilmagan masalalardan biri hisoblanadi ([15], [8] ga qarang).

Yuqoridagi asosiy masalaning yechimi (p, q) sonlariga chegaralash haqidagi oxirgi tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun ba'zi zaruriy shartlarni keltirib chiqaradi.

3 Arnol'dning E_6 maxsusligi haqida

Biz bu bo'limda E_6 maxsuslik haqidagi ba'zi ma'lumotlarni keltiramiz. Faraz qilaylik $p_k(x_1, x_2)$ darajasi $k \geq 0$ bo'lgan bir jinsli k – darajali ko'phad bo'lsin. Biz $m_{s_1}(p_k)$ orqali nolmas p_k ko'phadning, markazi koordinatalar boshida bo'lgan birlik aylanadagi nollari tartiblarining eng kattasini belgilaymiz. Masalan, $p_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 1$ va $p_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 0$, hamda $p_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$ bo'lsa $m_{s_1}(p_2) = 2$ bo'ladi.

Faraz, qilaylik $\phi(x_1, x_2)$ cheksiz silliq funksiya bo'lib ixtiyoriy $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ multiindeks uchun $D^\alpha \phi(0) = 0$ shart bajarilsin. U holda $\phi(x_1, x_2)$ funksiya Teylor qatori uchun

$$\phi(x_1, x_2) = p_3(x_1, x_2) + p_4(x_1, x_2) + \dots,$$

yoyilma o'rinli bo'ladi.

2-tasdiq. Yuqoridagi ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ va $\text{Res}(p_3, p_4) \neq 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir, bunda $\text{Res}(p_3, p_4)$ p_3, p_4 ko'phadlarning rezultanti. Boshqacha so'zlar bilan aytganda ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ va p_3, p_4 ko'phadlar S^1 aylana ustida umumiy nolga ega bo'lmasliklari zarur va yetarli.

2-tasdiqning isboti. Albatta bu tasdiq Arnol'dning umumiy nazariyasidan kelib chiqadi. Biz o'quvchilarga qulay bo'lishi uchun 2- tasdiqning elementar va bevosita isbotini keltiramiz. Faraz qilaylik $m_{s_1}(p_3) = 3$ va p_3, p_4 ko'phadlar S^1 aylana ustida umumiy nolga ega bo'lmasin. Agar $m_{s_1}(p_3) = 3$ bo'lsa u holda aqalli bittasi noldan farqli bo'lgan shunday b_1, b_2 haqiqiy sonlari topiladiki $p_3(x_1, x_2) = (b_1x_1 + b_2x_2)^3$ tenglik o'rinli bo'ladi. Biz quyidagi teskarlanuvchi chiziqli almashtirishni qo'llaymiz: $y_1 = -b_2x_1 + b_1x_2$, $y_2 = b_1x_1 + b_2x_2$. Belgilashlarni soddalashtirish uchun yangi y o'zgaruvchilarni yana x orqali va bu koordinatalarda yozilgan yangi funktsiyani yana ϕ orqali belgilab quyidagini hosil qilamiz:

$$\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + p_4(x_1, x_2) + \dots,$$

Endi 2-tasdiqning sharti $p_4(x_1, 0) = c_0x_1^4$ va $c_0 \neq 0$ shaklida yoziladi. Biz agar zarurat bo'lsa chiziqli almashtirishni bagarib

$$p_4(x_1, 0) = c_0x_1^4 + c_2x_1^2x_2^2 + c_3x_1x_2^3 + c_4x_2^4, \quad (2)$$

ya'ni $x_1^3x_2$ monom oldidagi koeffitsient nolga teng holga keltirishimiz mumkin.

Endi p_4 (2) ko'rinishga egaligini hisobga olib $\partial_2^2\phi(x_1, x_2) = 0$ tenglamani qaraymiz. Oshkormas funksiya haqidagi teorema ko'ra bu tenglama $(0,0)$ nuqtaning yetarli kichik atrofida $x_2 = x_1^m\omega(x_2)$ ko'rinishdagi yechimga ega bo'ladi, bunda $m \geq 2$ va ω silliq funksiya. Agar yechim tekis funksiya bo'lmasa $\omega(0) \neq 0$ deb olamiz, aks holda u cheksiz silliq bo'lib biz $m \geq 2$ sonini xohlagancha katta deb olishimiz mumkin va yana ω silliq bo'lib, qo'shimcha ravishda $\omega(0) = 0$ shart bajariladi.

Endi ϕ funktsiyani $(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3$ ga bo'lamiz ([5] va [10] monografiyalardagi Veyershtassning bo'lish haqidagi teremasiga qarang) va quyidagi natijaga kelamiz:

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3 + x_2^2b_2(x_1) + x_2x_1^{k_1}b_1(x_1) + x_1^4b_0(x_1),$$

bunda $b_j, j = 0, 1, 2$ silliq funktsiyalar bo'lib $b_0(0) = c_0 \neq 0$ va $b(0,0) = 1$. Endi $x_1^m\omega(x_1)$ funktsiyaning aniqlanishini e'tiborga oladigan bo'lsak $b_2 \equiv 0$ tenglikka kelamiz, bundan tashqari yuqoridagi p_4 ko'phadning (2) shaklidan $k_1 \geq 4$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday, qilib

$$\phi(x_1, x_2) = b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))^3 + x_2x_1^{k_1}b_1(x_1) + x_1^4b_0(x_1),$$

tenglikka kelamiz.

Nihoyat, $k_1 \geq 4$ ekanligini hisobga olib

$$y_1 = x_1 |b_0(x_1)|^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{1 + x_2x_1^{k_1-4} \frac{b_1(x_1)}{|b_0(x_1)|}}, \quad y_2 = \sqrt[3]{b(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m\omega(x_1))}, \quad (3)$$

almashtirishni olamiz. Teskari akslantirish haqidagi teorema ko'ra bu akslantirish $(0,0)$ nuqtaning biror atrofida teskariga ega va teskarisi ham cheksiz differentsiallanuvchi bo'ladi. Osongina ko'rish mumkinki (y_1, y_2) koordinatalarda ϕ quyidagi shaklga ega bo'ladi:

$$\phi(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = y_2^3 + \text{sign}(b_0(0,0))y_1^4. \quad (4)$$

Diffeomorf almashtirish orqali (4) ko'rinishga keluvchi funktsiyalar Arnol'dning E_6 tipidagi maxsusligi deyiladi.

Shunday qilib biz ϕ funksiya uchun $m_{s_1}(p_3) = 3$ bo'lib (albatta $p_k = 0(k \leq 2)$ shart ostida)

p_3, p_4 ko'phadlar S^1 ustida umumiy nolga ega bo'lmasa u holda ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipdagi maxsuslikka ega ekanligini ko'rsatdik.

2-tasdiqning isbotini yakunlash uchun uning teskarinsini ko'rsatamiz: Ya'ni agar ϕ koordinatalar boshida E_6 tipdagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda yuqoridagi shartlar bajarilishini ko'rsatamiz. Avvalo, shuni ta'kidlaymizki, agar ϕ ikki o'zgaruvchili funksiya bo'lsa bu funktsiyaning maxsus nuqtadagi

Hessianining rangi (xuddi shunday korangi) diffeomorf almashtirishga bo'g'liq emas. Shu boisdan biz $0 \leq k \leq 2$ uchun $p_k = 0$ ekanligiga kelamiz. Ikkinchi tomondan ixtiyoriy diffeomorf akslantirish p_3 ko'phadga chiziqli akslantirish sifatida ta'sir qiladi. Chiziqli akslantirish esa ravshanki $m_{s_1}(p_3)$ ni o'zgartirmaydi. Shuning uchun agar zarurat bo'lsa biz chiziqli akslantirishni qo'llab $p_3(x_1, x_2) = x_2^3$ deb faraz qilishimiz mumkin.

Nihoyat $p_4(x_1, 0) = c_0 x_1^4$ va $c_0 \neq 0$ ekanligini ko'rsatish qoldi xolos.

Buning uchun bizga ba'zi tushinchalar kerak bo'ladi [2]. Faraz qilaylik ϕ koordinatalar boshining biror atrofida aniqlangan C^∞ funksiya bo'lib $\phi(0) = 0, \nabla \phi(0) = 0$ bo'lsin. Quydagi halqaga $I_{\nabla \phi} := \partial_1 \phi C^\infty(\mathbb{R}^2) + \partial_2 \phi C^\infty(\mathbb{R}^2)$ gradiyent ideal deb ataladi, bu erda $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ koordinatalar boshida aniqlangan C^∞ funksiyalarning ekvivalentlik sinflaridan tuzilgan algebra. Ikki f_1, f_2 funksiyalar koordinatalar boshining biror atrofida aynan teng bo'lsa ularga ekvivalent funksiyalar deb ataladi.

Maxsuslikning lokal algerasi deb $Q_\phi := C^\infty(\mathbb{R}^2)/I_{\nabla \phi}$ faktor algebraga aytiladi. Agar bu faktor algebra chekli $\mathbb{R}$ -modul strukturasi ega bo'lsa, ya'ni o'zimizga bir oz erk berib chekli o'chovli chiziqli fazo bo'lsa, u holda $\dim_{\mathbb{R}} Q_\phi = k$ soniga $x = 0$ kritik nuqtaning karraliligi deb ataladi va unga chekli karrali kritik nuqta deyiladi. Aks holda kritik nuqta cheksiz karrali kritik nuqta deyiladi. Masalan $\phi(x_1, x_2) = x_1^2$ bo'lsa, ya'ni u x_2 o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmasa, $x = 0$ cheksiz karrali kritik nuqta bo'ladi.

Gradient idealning ta'rifidan kelib chiqadiki istalgan $F : (\mathbb{R}^2, 0) \mapsto (\mathbb{R}^2, 0)$ koordinatalar boshining biror atrofida diffeomorf akslantirish bo'lib $F(0) = 0$ shart bajarilsa

$$I_{\nabla \phi} = I_{\nabla(\phi \circ F)}, \quad Q_\phi = Q_{\phi \circ F}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Xususan, kritik nuqtaning karrasi diffeomorf akslantirishda o'zgarmaydi.

Shuning uchun biz $\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1^4$ deb olishimiz mumkin ($\phi(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1^4$ hol shunga o'xshash tavsiflanadi).

Bu holda $I_{\nabla \phi} = \langle x_2^2, x_1^3 \rangle$, ya'ni gradient ideal yasovchilari x_2^2, x_1^3 bo'lgan idealdir. Hamda maxsuslikning lokal algebrasi Q_ϕ ni $\{1, x_1, x_1^2, x_2, x_1 x_2, x_1^2 x_2\}$ bazisga ega bo'lgan chiziqli fazo deyishimiz mumkin. Demak $k = 6$ bo'lib shuning uchun ham E_6 orqali belgilangan, ya'ni E ning indeksi kritik nuqtaning karralik ko'rsatkichini bildiradi.

Endi 1- tasdiqning isbotiga qaytamiz. Isbot teskarisini faraz qilish orqali amalga oshiriladi. Faraz qilaylik $p_3(x_1, x_2) = x_2^3$ va $p_4(x_1, 0) \equiv 0$ bo'lsin.

U holda yana $\partial_2^2 \phi(x_1, x_2) = 0$ tenglamaning $x_1^m \omega(x_1)$ yechimini olib va $(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3$ ga bo'lib

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3 + x_2 x_1^{k_1} b_1(x_1) + x_1^{k_0} b_0(x_1)$$

munosabatga kelamiz, bunda $k_1 \geq 3$ va $k_0 \geq 5$. Yoki $x_2 - x_1^m \omega(x_1) \mapsto x_2$ almashtirish olib

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)x_2^3 + x_2 x_1^{k_1} b_1(x_1) + x_1^{k_0} b_0(x_1)$$

bu erda $b_3(0, 0) = 1$ va $k_1 \geq 3$ hamda $k_0 \geq 5$.

Endi, ikki holni alohida qarab chiqamiz. Faraz qilaylik $k_1 = 3$ va $b_1(0) \neq 0$ hamda $k_0 \geq 5$ bo'lsin u holda $\phi(x_1, x_2)$ quyidagi shaklda yoziladi:

$$\phi(x_1, x_2) = x_2^3 + x_2 x_1^3 b_1(0) + \dots,$$

bu erda "... " $x_1^{l_1} x_2^{l_2}$ shaklidagi $2l_1/9 + l_2/3 > 1$ shartni qanoatlantirivchi monomlarning formal yig'indisidan iborat. Shuning uchun $1, x_1, x_2, x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_2^2, x_1^2$ monomlar Q_ϕ fazoda chiziqli erkli bo'ladi.

Xuddi shunday $k_1 > 3$ va $3k_1 < 2k_0$ bo'lgan holda ham bu monomlar o'sha fazoda chiziqli erkli bo'ladi. $3k_1 \geq 2k_0$ bo'lganda esa $1, x_1, \dots, x_1^{k_0-2}, x_2, x_2x_1, \dots, x_2x_1^{k_0-2}$ monomlar Q_ϕ fazoda chiziqli erkli monomlar sistemasini tashkil qiladi ([2] 169- betga qarang). Ikkala holda ham $\dim_{\mathbb{R}} Q_\phi \geq 7$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun ϕ bu holda E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lishi mumkin emas, aks holda biz $6 = \dim_{\mathbb{R}} Q_\phi \geq 7$ ziddiyatga kelamiz. 2-tasdiq isbot bo'ldi.

2-tasdiqdan quyidagi natijaga kelamiz.

3- Natija. Agar ϕ koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda u chiziqli almashtirish orqali quyidagi shaklda yoziladi:

$$\phi(x_1, x_2) = b_3(x_1, x_2)(x_2 - x_1^m \omega(x_1))^3 + x_2 x_1^{k_1} b_1(x_1) + x_1^4 b_0(x_1)$$

bu erda b_3, b_1, b_0, ω silliq funksiyalar bo'lib, $b_3(0,0)=1, b_0(0) \neq 0$ hamda $m \geq 2, k_1 \geq 4$ shartlar bajariladi.

4 Rendel maksimal funksiyalarining yig'ilishi masalasi

Ma'lumki $\widehat{d\mu(\xi)}$ quyidagi karrali integral shaklida yoziladi:

$$\widehat{d\mu(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_3 \phi(x_1, x_2) + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} \varphi(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \phi(x_1, x_2)|^2} dx_1 dx_2. \quad (5)$$

Bizning farazimizga ko'ra φ funksiyaning tashuvchisi koordinatalar boshining yetarli kichik atrofida joylashgan va $\nabla \phi(0) = 0$. Shu boisdan aniqlik uchun $|\xi_3| \leq \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$ bo'lganda faza funksiyasi deb ataluvchi quyidagi

$$\Phi(x, s) := \phi(x_1, x_2) + s_1 x_1 + s_2 x_2, \quad (6)$$

(bunda $s_j = \xi_j / \xi_3, j = 1, 2$) funksiya uchun $\max\{|s_1|, |s_2|\} \geq 1$ bo'lib biror $\delta > 0$ topilib, ixtiyoriy $(x_1, x_2) \in \text{supp}(\varphi(\cdot, \phi(\cdot)))$ nuqta uchun $|\nabla \Phi(x, s)| \geq \delta$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikka asosan,

bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib katta $|\xi|$ larda $\widehat{d\mu(\xi)} = O(|\xi|^{-N})$ munosabatga ega bo'lamiz. Shuning uchun biz bundan keyin $\max\{|s_1|, |s_2|\} \leq 1$ deb faraz qilamiz va (5) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$J(\lambda, s) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda \Phi(x, s)} a(x) dx, \quad (7)$$

bunda

$$a(x) = a(x_1, x_2) := \varphi(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \sqrt{1 + |\nabla \phi(x_1, x_2)|^2}$$

amplituda deb ataluvchi funksiya.

Biz ishning qolgan qismida $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integralning λ, s parametrlarga nisbatan xarakterini o'rganamiz. Buning uchun Rendel funksiyasi deb ataluvchi funksiyani kiritamiz [14]:

$$m(s) := \sup_{|\lambda| > 0} |\lambda| |J(\lambda, s)|. \quad (8)$$

Bu funksiya Borel ma'nosida o'lchovli funksiya bo'ladi.

4-teorema. Agar ϕ funksiya koordinatalar boshida E_6 tipidagi maxsuslikka ega bo'lsa, u holda nol nuqtaning shunday U atrofi topiladiki, istalgan $a \in C_0^\infty(U)$ funksiya uchun $m \in L_{loc}^{3-0}(\mathbb{R}^2)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu erda biz tabiiy ravishda aniqlanadigan $L_{loc}^{3-0}(\mathbb{R}^2) = \bigcap_{p < 3} L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ belgilashdan foydalandik.

Eslatma. 4-teoremaning tasdig'i aniqdir. Ya'ni agar $\phi(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ hamda $a(0) > 0$ bo'lib, uning tashuvchisi koordinatalar boshining yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa, u holda $m \notin L_{loc}^3(\mathbb{R}^2)$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari amplitudaning tashuvchisi nolning yetarli

kichik atrofida joylashgan holda hamda $|s| > 1$ shartda $m(s)$ chegaralangan funksiya bo'ladi. Shuning uchun $|s| \leq 1$ va hatto $|s|$ yetarlicha kichik son deb faraz qilishimiz ham mumkin.

4-teoremani isbot qilish uchun singulyar integral tenglamalar nazariyasida keng qo'llaniladigan birning yoyilmasidan foydalanamiz.

Faraz qilaylik $\kappa_1 = 1/4$ va $\kappa_2 = 1/3$ va musbat r soni uchun δ_r quyidagi formula bilan aniqlangan cho'zishni belgilaymiz: $\delta_r(x) := (r^{\kappa_1} x_1, r^{\kappa_2} x_2)$.

Vazn deb ataluvchi κ – juftlikka mos "masofa"ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho_\kappa(x_1, x_2) := (x_1^8 + x_2^6)^{\frac{1}{2}}.$$

Faraz qilaylik β quyidagicha aniqlangan nomanfiy silliq funksiya bo'lsin

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho_\kappa(x) \leq 1, \\ 0 & \text{if } \rho_\kappa(x) \geq 2. \end{cases} \quad (9)$$

Istalgan natural $k \in \mathbb{N}$ soni uchun χ_k funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: $\chi_k(x) = \beta(\delta_{2^{k-1}}(x)) - \beta(\delta_{2^k}(x))$. U holda $\text{supp}(\chi_1) \subset D$ bunda D quyidagicha aniqlangan halqa:

$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \rho_\kappa(x_1, x_2) \leq 2\}$. Bundan tashqari quyidagi formula o'rinli:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \chi_k(x) = \beta(\delta_{2^{k_0-1}}(x)), \quad \text{bunda } x \neq 0. \quad (10)$$

Shuni ta'kidlaymizki $\{0 < \rho_\kappa(x) < 2^{-k_0}\}$ sohada (10) qator lokal chekli yig'indidir, ya'ni ixtiyoriy $x^0 \neq 0$ nuqtaning shunday $U(x^0)$ atrofi topiladiki, quyidagi to'plam $\{k \in \mathbb{N} : U(x^0) \cap \text{supp}(\chi_k) \neq \emptyset\}$ faqat chekli sondagi elementlarga ega bo'ladi. Shuning uchun ham (10) qator $\{0 < \rho_\kappa(x) < 2^{-k_0}\}$ to'plamda lokal tekis yaqinlashadi va uning yig'indisi cheksiz marta differentsiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Aniqlik uchun $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integral amplitudasining tashuvchisi $\{\rho_\kappa(x) < 2^{-k_0-1}\}$ to'plamda yotadi deb faraz qilamiz. Nihoyat birning yoyilmasi bo'lgan (10) tenglikdan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$J(\lambda, s) = \sum_{k=k_0}^{\infty} J_k(\lambda, s), \quad (11)$$

bunda

$$J_k(\lambda, s) := \int_{\mathbb{R}^2} a(x) \chi_k(x) e^{i\lambda \Phi(x, s)} dx, \quad \text{qachon } k = k_0, k_0 + 1, \dots$$

$J_k(\lambda, s)$ integralda cho'zish orqali berigan almashtirishni bajaramiz: $\delta_{2^k} x \rightarrow x$ va quyidagini olamiz:

$$J_k(\lambda, s) := 2^{-k|\kappa|} \int_{\mathbb{R}^2} a(\delta_{2^{-k}}(x)) \chi_1(x) e^{i\lambda 2^{-k} \Phi_k(x, \sigma)} dx,$$

bunda

$$|\kappa| := \kappa_1 + \kappa_2, \Phi_k(x, \sigma) := \phi_k(x_1, x_2) + \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2,$$

bu erda

$$\begin{aligned} \phi_k(x_1, x_2) := & b(\delta_{2^{-k}}(x))(x_2 - 2^{(\kappa_2 - m\kappa_1)k} x_1^m \omega(2^{-\kappa_1 k} x_1))^3 + \\ & 2^{(1-\kappa_2-4\kappa_1)k} x_2 x_1^4 \beta_1(2^{-\kappa_1 k} x_1) + x_1^4 \beta_0(2^{-\kappa_1 k} x_1) \text{ va } \sigma_j := 2^{(1-\kappa_j)k} s_j \quad (j=1,2). \end{aligned}$$

Shuni ta'kidlaymizki, $J_k(\lambda, s)$ integral amplitudasining tashuvchisi D halqada yotadi va $k \geq k_0$ hamda k_0 yetarlicha katta natural son. Shuning uchun ham biz $\phi_k(x_1, x_2)$ funksiyani quyidagi, nolda yakkalangan kritik nuqtaga ega bo'lgan $b(0,0)x_2^3 + x_1^4 \beta_0(0)$ ko'phadning kichik deformatsiyasi deb

qarashimiz mumkin. Shuning uchun ham C_1 va k_0 musbat sonlari topiladiki $|\sigma| > C_1$ va $k \geq k_0$ bo'lganda quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C 2^{-k|\kappa|} \text{PaP}_{C^1}}{1 + |\lambda 2^{-k} \sigma|}, \quad (12)$$

bunda PaP_{C^1} C^1 fazoning tabiiy normasi. Yuqoridagiga o'xshash shunday musbat son $\varepsilon > 0$ topiladiki $|\sigma| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilganda:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C 2^{-k|\kappa|} \text{PaP}_{C^1}}{1 + |\lambda 2^{-k}|} \quad (13)$$

baho o'rinli bo'ladi.

Endi $J_k(\lambda, s)$ integralning xarakterini $\sigma \in \Sigma := \{\varepsilon \leq |\sigma| \leq C_1\}$ shartlarda o'rganamiz. Bu holda standard Σ kompaktni chekli qoplamasidan foydalanamiz.

5-lemma. *Shunday musbat k_0 soni topiladiki, ixtiyoriy $k \geq k_0$ bo'lganda shunday $\psi_k \in L^{3-0}(\Sigma)$ funksiya mavjud va bu funksiya orqali quyidagi baho:*

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C 2^{(1-|\kappa|)k} \psi_k(\sigma) \text{PaP}_{C^2}}{|\lambda|}, \quad (14)$$

o'rinli bo'ladi, bundan tashqari istalgan tayinlangan $1 \leq p < 3$ soni uchun ψ_k funksiyaning $L^p(\Sigma)$ normasi $k \geq k_0$ ga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\sigma^0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0) \in \Sigma$ ixtiyoriy tayinlangan nuqta bo'lsin. Avvalo σ^0 nuqtaning ikkala komponentasi, ya'ni $\sigma_j^0 \neq 0 (j=1,2)$ noldan farqli deb faraz qilamiz. U holda quyidagi funksiya

$$b(0,0)x_2^3 + x_1^4 \beta_0(0) + \sigma_1^0 x_1 + \sigma_2^0 x_2 \quad (15)$$

ko'pi bilan ikkita xosmas kritik nuqtaga ega bo'ladi. Shuning uchun shunday musbat k_0 soni va σ^0 nuqtaning shunday $V(\sigma^0)$ atrofi topiladiki $k \geq k_0$ va $\sigma \in V(\sigma^0)$ bo'lganda quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{C 2^{(1-|\kappa|)k} \text{PaP}_{C^2}}{|\lambda|}. \quad (16)$$

Endi faraz qilaylik $\sigma_1^0 = 0$ bo'lsin. U holda Σ to'plamning aniqlanishiga ko'ra: $\sigma_2^0 \neq 0$. Bundan kelib chiqadiki $b(0,0)\sigma_2^0 < 0$ shart bajarilganda (15) funksiya ikkita A_3 tipidagi maxsuslikka ega bo'ladi. Agar $b(0,0)\sigma_2^0 > 0$ bo'lsa, u holda faza funksiyasi kritik nuqtalarga ega bo'lmaydi. So'nggi holda bo'laklab integrallash formulasini qo'llab (16) shakldagi bahoga kelamiz.

Shuning uchun shunday musbat δ_1, δ_2, k_0 sonlari topiladiki istalgan $k \geq k_0$ bo'lganda $\psi_{k\sigma^0} \in L^{3-0}((-\delta_1, \delta_1) \times (\sigma_2^0 - \delta_2, \sigma_2^0 + \delta_2))$ funksiya topilib ixtiyoriy tayinlangan $1 \leq p < 3$ uchun quyidagi integral

$$\int_{\{|\sigma_1| < \delta_1\}} (\psi_{k\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 \quad (17)$$

$k \geq k_0, \sigma_2 \in (\sigma_2^0 - \delta_2, \sigma_2^0 + \delta_2)$, o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'lib quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$|J_k(\lambda, s)| \leq \frac{2^{(1-|\kappa|)k} \psi_{k\sigma^0}(\sigma_1, \sigma_2) \text{PaP}_{C^2}}{|\lambda|}.$$

$\varepsilon \leq |\sigma_2| \leq C_1$ to'plam kompakt bo'lganligi bois shunday musbat k_0 soni va $k \geq k_0$ soniga bog'liq $\psi_{k_0} \in L^{3-0}((-\delta_1, \delta_1) \times [\varepsilon, C_1])$ funksiya topiladiki ixtiyoriy $1 \leq p < 3$ bo'lganda (17) shaklidai ψ_{k_0} funksiyaning integrali $k \geq k_0, \sigma_2 \in [\varepsilon, C_1]$ o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

Shunga o'xshash agar $\sigma_2^0 = 0$ bo'lsa, u holda faza funksiyasi A_2 tipdagi maxsuslikning R_+ versal deformatsiyasi bo'ladi ([2]ga qarang). Shuning uchuin ham shunday musbat son k_0 va istalgan $k \geq k_0$ uchun shunday $\tilde{\psi}_{k_0} \in L^{4-0}([\varepsilon, C_1] \times (-\delta_2, \delta_2))$ funksiya topiladiki ixtiyoriy tayinlangan $1 \leq p < 4$ uchun quyidagi integral

$$\int_{\{|\sigma_2| < \delta_2\}} (\tilde{\psi}_{k_0}(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_2 \quad (18)$$

$k \geq k_0, \sigma_1 \in [\varepsilon, C_1]$ o'zgaruvchilarga nisbatan tekis chegaralangan bo'ladi.

O'z-o'zidan ravshanki quyidagicha aniqlangan funksiya

$$\psi_k(\sigma) := PaP_{C^2}(C\chi_{[\delta_1, C_1]^2}(\sigma) + \chi_{(-\delta_1, \delta_1) \times [\varepsilon, C_1]}(\sigma)\psi_{k_0}(\sigma) + \chi_{[\delta_1, C_1] \times (-\delta_2, \delta_2)}(\sigma)\tilde{\psi}_{k_0}(\sigma))$$

5-lemma tasdiqlarini qanoatlantiradi. Bu erad $\chi_A - A$ to'plamning xarakteristik funksiyasi. 5-lemma isbot bo'ldi.

4-teoremaning isboti. Faraz qilaylik $V \subset \mathbb{R}^2$ nol nuqtaning biror chegaralangan atrofi bo'lsin va $1 \leq p < 3$ tayinlangan son bo'lsin. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_V (\psi_k(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2))^p ds_1 ds_2 = 2^{(|\kappa|-2)k} \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_k(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 d\sigma_2 \leq C_p 2^{(|\kappa|-2)k}.$$

Nihoyat quyidagi funksiyaning aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \Psi_k(s) &:= 2^{(1-|\kappa|)k} C\chi_{|(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2)| < \varepsilon}(s) PaP_{C^1} + \\ &\frac{C\chi_{|(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2)| > C_1}(s) PaP_{C^1}}{|\sigma(s)|} + \psi_k(2^{(1-\kappa_1)k} s_1, 2^{(1-\kappa_2)k} s_2) \end{aligned}$$

Ravshanki $2 < p < 3$ bo'lganda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_V (\Psi_k(s_1, s_2))^p ds_1 ds_2 = 2^{(1-|\kappa|)kp + (|\kappa|-2)k} \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_k(\sigma_1, \sigma_2))^p d\sigma_1 d\sigma_2 \leq C_p 2^{(1-|\kappa|)kp + (|\kappa|-2)k}.$$

Endi $|\kappa| = \frac{7}{12} < 1/2$ bo'lan uchun quyidagi qator

$$\Psi(s_1, s_2) := \sum_{k=k_0}^{\infty} \Psi_k(s_1, s_2)$$

$2 < p < 3$ shart bajarilganda L^p fazoda yaqinlashadi. Bundan tashqari V to'plam chekli o'lchovga ega bo'lgani uchun $\Psi \in L^{3-0}(V)$. Bu 4-teorema isbotini yakunlaydi.

5 Asosiy teoremaning isboti.

4-teoremadan $\widehat{d\mu(\xi)}$ uchun quyidagi baho kelib chiqadi:

$$|\widehat{d\mu(r\omega)}| \leq \frac{M(\omega)}{r+1}, \quad (19)$$

bu erda $\omega \in S^2$ bunda S^2 markazi koordinatalar boshida bo'lgan birlik sfera, $M \in L^{3-0}(S^2)$. Bundan tashqari klassik J. J. Duistermaat [12] teoremasiga ko'ra

$$|\widehat{d\mu(r\omega)}| \leq \frac{c}{(r+1)^{7/12}}, \quad (20)$$

Endi biz (19) va (20) baholarni interpolatsiya qilib

$$|\widehat{d\mu(r\omega)}| \leq \frac{c^{1-\alpha} M^\alpha(\omega)}{(r+1)^{\frac{7(1-\alpha)+\alpha}{12}}}, \quad (21)$$

bahoga ega bo'lamiz, bunda $0 \leq \alpha \leq 1$.

Faraz qilaylik $p > 3$ ixtiyoriy tayinlangan son bo'lsin. U holda shunday $0 \leq \alpha < 1$ sonini topish mumkinki $p\alpha < 3$ va $(7(1-\alpha)/12 + \alpha)p > 3$ tengsizliklar bajariladi. Haqiqatan, ham agar $p > 36/7$ bo'lsa $\alpha = 0$ deb olish yetarli. Endi $p = 36/7$ deb olsak $0 < \alpha$ yetarlicha kichik sonni olishimiz mumkin, masalan $\alpha = 0.1$ deb olish yetarli. Nihoyat, $3 < p < 36/7$ sonini olaylik. U holda biz

$$0 < \frac{12}{5} \left(3 - \frac{7p}{12} \right) < 3$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Endi

$$0 < \frac{12}{5p} \left(3 - \frac{7p}{12} \right) < \alpha < \frac{3}{p} < 1$$

deb olish yetarli.

Shunday qilib biz istalgan $p > 3$ soni uchun $\widehat{d\mu} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabat o'rinli bo'lishini isbot qildik.

Nihoyat, agar $\varphi(0) > 0$ va φ funksiyaning tashuvchisi nol nuqtaning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa $\widehat{d\mu}$ funksiya $L^3(\mathbb{R}^3)$ fazoga qarashli emasligini ko'rsatamiz.

Bu munosabatni isbotlash uchun quyidagi umumiy holda bajariladigan tasdiqdan foydalanamiz.

6- lemma. Agar $J(\lambda, s)$ tebranuvchan integralda faza ϕ va a amplituda funksiyalari $\mathbb{R}^2$ fazo koordinatalar boshining biror atrofida cheksiz marta differensiallanuvchi va $a(0,0) > 0$ shart bajarilib amplitudaning tashuvchisi nol nuqtaning yetarli kichik atrofida joylashgan bo'lsa u holda nol nuqtaning shunday V atrofi topiladiki bu atrof uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds = \frac{c}{\lambda^2} + O(\lambda^{-5/2}), \quad \text{bunda } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (22)$$

bundan tashqari $c \neq 0$.

6-lemmaning isboti. Aslida bu kabi natija Maslov kanonik operatorining unitarligi nomi bilan mashhur [12]. Biz bu lemmaning elementar isbotini keltiramiz.

χ orqali nomanfiy nolning yetarli kichik atrofida aynan birga teng bo'lgan kompakt tashuvchili funksiyaning (cut-off function deb ataladigan funksiyaning) belgilaymiz.

Quyidagi munosabat o'z-o'zidan ravshan:

$$|J(\lambda, s)|^2 = \int_{\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y^2} e^{i\lambda(\phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1(x_1 - y_1) + s_2(x_2 - y_2))} a(x_1, x_2) a(y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2.$$

Endi biz quyidagi integralni qaraymiz:

$$I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^2} \chi(s) |J(\lambda, s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_y^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(x, y, s)} a(x) a(y) \chi(s) dx dy ds,$$

Bu erda

$$\Phi(x, y, s) := \phi(x_1, x_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1(x_1 - y_1) + s_2(x_2 - y_2).$$

Endi $I(\lambda)$ integralda o'zgaruvchilarni quyidagicha almashtiramiz: $z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2$ va o'sha integralni yangi o'zgaruvchilarda yozamiz:

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_y^2} a(y) dy \int_{\mathbb{R}_z^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(z, y, s)} a(z + y) \chi(s) dz ds,$$

Bu erda

$$\Phi(z, y, s) := \phi(z_1 + y_1, z_2 + y_2) - \phi(y_1, y_2) + s_1 z_1 + s_2 z_2.$$

Endi ichki integralni qaraymiz:

$$I_{in}(\lambda, y) := \int_{\mathbb{R}_z^2 \times \mathbb{R}_s^2} e^{i\lambda\Phi(z, y, s)} a(z + y) \chi(s) dz ds.$$

Faza funksiyasi $\Phi(z, y, s)$ y parametrta bog'liq quyidagi kritik nuqtaga ega bo'ladi: $z^c(y) = 0, s^c(y) = -\nabla \phi(y)$. Bundan tashqari $\det \text{Hess} \Phi(z^c(y), y, s^c(y)) = 1$, va kritik nuqtada Hessian matritsasining signaturasi nolga teng va yana $\Phi(z^c(y), y, s^c(y)) = 0$. Shuning uchun agar a va χ funksiyalarning tashuvchilari yetarlicha kichik bo'lsa odatdagi stationary faza usuliga ko'ra ([4] ga qarang) quyidagi asymptotik yoyilmaga ega bo'lamiz:

$$I_{in}(\lambda, y) := c \frac{a(y)\chi(s^c(y))}{|\lambda|^2} + O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}}),$$

bunda $c \neq 0$ biror o'zgarmas. Bu sonning aniq qiymatini ham ko'rsatishimiz mumkin. Ammo, bu hozircha bizga shart emas. Shuni ta'kidlash joizki $O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})$ qoldiq had $y \in \text{supp}(a)$ ga nisbatan tekis munosabatdir. Ya'ni shunday C soni topiladiki ixtiyoriy $y \in \text{supp}(a)$ uchun $|O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})| \leq C |\lambda|^{-\frac{5}{2}}$ tengsizlik bajariladi.

Biz χ funksiyani shunday tanlaymizki istalgan $y \in \text{supp}(a)$ uchun $\chi(s^c(y)) = 1$ bo'ladi.

Nihoyat olingan asymptotik munosabatni integrallab

$$I(\lambda) = c \frac{\int_{\mathbb{R}^2_y} a^2(y) dy}{|\lambda|^2} + O(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})$$

izlangan munosabatga keldik.

Bu 6-lemmani isbot qiladi, haqiqatan ham biz V atrofda $\chi(s) = 1$ deb olsak hamda a funksiyaning tashuvchisi yetarlicha kichik bo'lsa u holda $s \in \mathbb{R}^2 \setminus V$ uchun dastlabki faza funksiyasi $\Phi(x, s) \in \text{supp}(a)$ to'plamda kritik nuqtalarga ega bo'lmaydi. Shuning uchun biz

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}^2_s} \chi(s) |J(\lambda, s)|^2 ds + O(|\lambda|^{-N}) = I(\lambda) + O(|\lambda|^{-N}),$$

bunda $N \geq 3$ istalgan son. Oxirgi tenglik 6-lemma isbotini yakunlaydi.

Nihoyat, asosiy teorema isbotining yakuniy qismiga o'tamiz. Endi ω nuqta $(0, 0, 1)$ nuqtaning

yetarlicha kichik atrofida o'zgaradi deb faraz qilib $\widehat{d\mu}(\xi)$ o'lchov Fur'e almashtirishini tebranuvchan integral $J(\lambda, s)$ shaklida yozib olamiz, bunda $\lambda := \xi_3, s_j = \frac{\xi_j}{\lambda}, j = 1, 2$ va $s \in V$, bunda V nol nuqtaning yetarli kichik atrofi. Agar a nomanfiy funksiya bo'lib $a(0) > 0$ shart bajarilsa, u holda 6-lemmani inobatga olib yetarli katta λ lar uchun navbatdagi quyi bahoni olamiz:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \geq \frac{C}{|\lambda|^2},$$

bunda C biror musbat son.

Boshqa tomondan $2 \leq p$ bo'lganda Hölder tengsizligini qo'llab quyidagiga kelimiz:

$$\int_V |J(\lambda, s)|^p ds \geq C \left(\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \geq \frac{C}{|\lambda|^p}.$$

Pirovard natijada, $p \leq 3$ bo'lganda

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{d\mu}(\xi)|^p d\xi &\geq \int_1^\infty \lambda^2 d\lambda \int_V |J(\lambda, s)|^p ds \geq \\ &\int_1^\infty \lambda^2 d\lambda \left(\int_V |J(\lambda, s)|^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} \geq C \int_1^\infty \lambda^{2-p} d\lambda = \infty \end{aligned}$$

munosabatga kelimiz.

$\widehat{d\mu(\xi)}$ chegaralangan funksiya bo'lgani bois $p \leq 3$ bo'lganda $\widehat{d\mu(\xi)} \notin L^p(\mathbb{R}^3)$ munosabatga kelamiz. Asosiy teorema isbot bo'ldi.

References

1. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N., *Trigonometric integrals*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971-1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980), pp 21-239.
2. Arnol'd V. I., Gusen-zade S.M., Varchenko A.N., *Singularities of differentiable maps, Part I*, M.: Nauka, 1982.
3. Erdős, L. and Salmhofer, M., Decay of the Fourier transform of surfaces with vanishing curvature. Math. Z. 257 (2007), no. 2, 261–294.
4. Fedoryuk M.V., *Perevals method*, M.: Nauka, 1977.
5. Hörmander L., *Analysis of linear partial differential operators, part I, Distribution Theory and Fourier Analysis*, Second edition, Springer-Verlag, 1989.
6. Ikromov I. A., Damped oscillatory integrals and maximal operators, *Mathematical notes*, vol. 78, pages 833-852, 2005.
7. Ikromov I. A., Müller D., Kempe M., Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces, *Duke Math.J.* vol. 126, No.3, pages, 471-490, 2005.
8. Ikromov, I. A., Müller, D., *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Princeton University press, *Annals of Mathematics Study*, No. 194, Princeton, 2016.
9. Lebedev V.V., On Fourier transform of characteristic functions of domains with C^1 – smooth boundary. *Funkts. Anal. Prilozhen.* 2013, V. 47, No. 1. p. 33-46.
10. Malgrange B., *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute, Bombay, and Oxford University Press, 1966.
11. Palamodov V. P., Generalized functions and harmonic analysis, *Modern problems of Mathematics, Fundamental directions*, V. 72, M. 1991, p. 5-134.
12. Duistermaat J.J., *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and Unfoldings of singularities*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1974, V. 27, No. 2, p. 207-281.
13. Popov D. A., Estimates with constant for some classes oscillating integrals. *UMN.*, Vol. 52, No. 1(313), 1997, pages 77-148.
14. Randol B., On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set. *Trans. AMS*, 139, (1970), 279-285.
15. Stein E. M., *Harmonic Analysis Real-Valued Methods, Orthogonality, and oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ.Press, 1993.
16. Stein E. M., *Singular Integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, Princeton Univ.Press, 1970.
17. Varchenko A.N., *Newton polyhedra and estimates for oscillatory integrals*. *Funkts. Anal. Prilozhen.* 18. No. 3. (1976), 175–196.

УДК: 519.8

ЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СОВМЕСТНЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

А.В. Кабулов¹, Э.Урунбаев², М.А.Бердимуродов¹

¹Национальный университет Узбекистана

²Самаркандский государственный университет

Аннотация. Решается задача поиска максимальной совместной подсистемы систем булевых уравнений. Предлагается алгоритм нахождения максимального верхнего нуля монотонной булевой функции. Исследуется и разрабатывается эффективная процедура вычисления значений монотонных функций f на наборах n - мерного куба. Разрабатывается алгоритм решения систем булевых уравнений на основе поиска максимального верхнего нуля монотонных функций алгебры логики.

Ключевые слова: Систем булевых уравнений, монотонной булевой функции, максимального верхнего нуля, совместной подсистемы.