T.H.RASULOV
A.SH.RASHIDOV

OLIY MATEMATIKA

(o‘quv qo‘llanma)
(2-qism)

“KAMOLOT” nashriyoti
Buxoro 2023

UO‘K: 51:378.6:75/76(075.8)
KBK: 22.1ya73
R 24

T.H.Rasulov, A.Sh.Rashidov. Oliy matematika / [Matn]: o‘quv qo‘llanma / - Buxoro : “BUXORO DETERMINANTI”MCHJning Kamolot nashriyoti, 2022. - 108 b.

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallab yozilgan.

Taqrizchilar:

Teshayev Muxsin Xudoyberdiyevich	O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Buxoro bo‘linmasi bosh ilmiy xodimi, f.-m.f.d, professor
Rasulov Xaydar Raupovich	Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi, f.-m.f.n., dots.

ISBN: 978-9943-9146-5-0

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining ***2022-yil 25-noyabrdagi 388-sonli*** *buyrug‘iga asosan nashr qilishga ruxsat berilgan.* ***Ro‘yxatga olish raqami 388-070***

ANNOTATSIYA

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining 60111200 - Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi ta’lim yo‘nalishi uchun qabul qilingan davlat ta’lim standarti, malaka talablari asosida “Matematika” fanidan tuzilgan fan dasturi asosida shakllantirilgan. Qo‘llanma analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda ehtimolliklar nazariyasi qisqa kursini o‘z ichiga oladi. Mazkur qo‘llanmada asosan Oliy matematika fani dasturida keltirilgan barcha mavzulari to‘liq qamrab olingan. Barcha mavzularda nazariy ma’lumotlar, namunaviy masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo‘ljallangan test topshiriqlari keltirilgan.

АННОТАЦИЯ

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений по специальностям «Математика» 60111200 – Изобразительное искусство и инженерная графика. Пособие включает краткий курс аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и теории вероятностей. Предусмотрены теоретические и практические занятия по темам, а также тесты для самостоятельного выполнения.

KIRISH

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining 60111200 - Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi ta’lim yo‘nalishi uchun qabul qilingan davlat ta’lim standarti, malaka talablari asosida “Matematika” fanidan tuzilgan fan dasturi asosida shakllantirilgan. Qo‘llanma analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda ehtimolliklar nazariyasi kurslarini o’z ichiga oladi.

Mazkur qo‘llanmada asosan Oliy matematika fani dasturida keltirilgan barcha mavzulari to‘liq qamrab olingan. Ular:

1-mavzu. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar

2-mavzu. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va to‘la differensiali

3-mavzu. Ikki argumentli funksiya ekstremumi

4-mavzu. Ikki karrali integrallar

5-mavzu. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashish belgilari

6-mavzu. Funksional va darajali qatorlar

7-mavzu. Umumiy tushunchalar.Birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamalar

8-mavzu. Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to‘la differensialli tayenglamalar

9-mavzu. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

10-mavzu. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Barcha mavzularda nazariy ma’lumotlar, namunaviy masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo‘ljallangan keys topshiriqlari keltirilgan. Bundan tashqari, qo‘llanmada keltirilgan mavzular bo‘yicha egallangan bilimlarni mustahkamlash uchun test topshiriqlari ham o‘z aksini topgan.

OLIY MATEMATIKA FANI HAQIDA

Reja

1. Kirish.

2. Matematika va modellar hamda modellashtirish tushunchalari.

3. O’rganiladigan asosiy matematik tushunchalar haqida.

1. Kirish. Hozirgi zamonda iqtisodga, ishlab chiqarishga qo‘yilayotgan yuksak talablarni bajarishda kadrlarning umumiy malakasi oldingi o‘ringa qo‘yilmoqda. Bu yuksak talablar hamma mutaxassislarga tegishlidir.

Bunday yuksak vazifalarni har tomonlama kamol topgan, yuksak ma’lakali mutaxassislar amalga oshiradi. Yuksak malakali mutaxassislar tayyorlashda «Oliy matematika» fanining katta ahhamiyatga ega ekanligi hech kimda shubha tug‘dirmasa kerak.

Hamma sohalarda matematik qonuniyatlarga asoslangan zamonaviy komp’yuterlarning muvaffaqiyat bilan tatbiq etilishi hamda uning kundan-kunga rivojlanib borayotganligi, yosh mutaxassislarning tegishli sohalar, masalalarining matematik modellarini tuza bilishi va unda hisoblash texnikasini joriy etish vazifalarini qo‘ymoqda. Bu masalalarni modellashtirish matematik amallar va usullar yordamida amalga oshiriladi.

Ma’lumki, matematikadagi mavjud, natural sonlar, arifmetik amallardan boshlab, hozirgi zamonaviy, chiziqli algebra va analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda differensial tenglamalargacha tushunchalar real dunyoning modellaridir. Bu tushunchalarning hammasi insoniyat ehtiyojlaridan-narsalarni sanash, xo‘jalik hisobi kabi tirikchilik uchun zarur masalalardan kelib chiqqan va rivojlanib bormoqda.

Matematika o‘z rivojlanish tarixida mexanika, fizika, biologiya kabi fanlardan tashqari ijtimoiy fanlarga ham jadal kirib, rivojlanib bormoqda. Matematikani insoniyat taraqqiyotida vujudga kelgan va uning rivojlanishida katta ahamiyatga ega bo‘lgan fanlarning yetakchilaridan desak xato qilmagan bo‘lamiz. Bu fikrimizning isbotini matematika iborasi yunoncha “matema” - “bilim, ilm, fan” deyilishi bilan ham izohlasa bo‘ladi.

Ma’lumki, matematik tushuncha va modellar universallik xususiyatiga ega, ya’ni aynan bitta model fizikada o‘z ma’nosiga, biologiyada ham, iqtisodiyotda ham ma’lum ma’nolarga ega. Bunday modellar tabiiy fanlarda bir necha asrlardan beri qo‘llanib rivojlanib kelmoqda. Lekin, ijtimoiy (iqtisodiyot, psixologiya, jamiyatshunoslik va boshqalar) fanlarda qo‘llash XIX-XX asrlarda intensiv rivojlanishi bilan xarakterlanadi. XX asrda ijtimoiy fanlar muammolarini yechadigan matematikaning sohalari vujudga kela boshladi. Keyingi o‘n yilliklarda matematika usullari, kishilik jamiyatining jarayonlarini va munosabatlarini o‘rganishda yanada chuqurroq kirib bormoqda. Matematika, shunday universal qurolki, real borliqdagi mavjud bog‘lanish va munosabatlarni aniqlashda, hamda ulardan hodisa va jarayonlarni ilmiy baholab bashorat qilishda foydalanish imkoniyatlari rivojlanib bormoqda.

Shunday qilib, Mirzo Ulug‘bek bobomiz ta’kidlagan qoida (tezis) ijtimoiy fanlarida ham o‘z ifodasini topib, rivojlanmoqda.

Matematikani o‘rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o‘ringa egaligini ta’kidlamasdan bo‘lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur
qobiliyatki, bular matematikani o‘rganish jarayonida shakllanib, rivojlanadi.

2. Matematika va modellar hamda modellashtirish tushunchalari

Model lotincha modulus so‘zidan olingan bo‘lib, narsa yoki hodisalarning asosiy xususiyatlarini o‘zida ifodalovchi shartli (moddiy yoki abstrakt) tasvirdir. U tekshiruvchi shaxsi tomonidan tuzilib, tekshirilayotgan ob’ekt, originalning asosiy xususiyatlari (tuzilishi, o‘zaro bog‘liqligi, xossalari va hokazo)ni tekshirish maqsadiga muvofiq holda taxminan ifodalaydi. Model iborasi inson faoliyatining ko‘p sohalarida ishlatiladi. Modelni tekshirish natijasida original haqida yangi axborotlar olinadi. Modellarning oddiy turlari qadim zamonda ham bo‘lgan.

Modellarga misol sifatida Yer sharining modeli globusni, rassom yasagan rasmni, biror joyning haritasini va hokazolarni ko‘rsatish mumkin.

Har bir ob’ektni sistema (tizim) deb qarash mumkin. ***Sistema*** - (grekchadan olingan bo‘lib. qismlardan tuzilgan butun, birlashma, tizim) o‘zaro bog‘liq elementlardan tuzilgan to‘plam bo‘lib, aniq yaxlitlikni ifodalaydi. Sistemalar o‘ta xilma-xil bo‘lib, inson ilmiy va amaliy faoliyatining hamma jabhalarida uchraydi. Biz ko‘proq **iqtisodiy sistemalar** haqida fikr yuritamiz. Iqtisodiy sistemalarning misollari qilib, xalq xo‘jaligining turli tarmoqlarini, ishlab chiqarish korxonalarini, firmalarni va hokazolarni ko‘rsatish mumkin. ***Iqtisodiy sistema*** deb biror mahsulot ishlab chiqarishni olsak, uning elementlari sifatida ishchi kuchi -odamlarni, stanoklarni, xom ashyolarni qarash mumkin.

Sistemaning elementlari o‘zaro bir-biri bilan bog‘liq bo‘ladi. Masalan, xalq xo‘jaligi sistemasining elementlari ishlab chiqarish korxonalari va birlashmalari bir-biriga xom ashyolar, materiallar, jihozlar yetishtirib beradi. Ishlab chiqarish korxonalari, birlashmalar o‘z navbatida, transport, qurulish va boshqa tashkilotlardan tashkil topgan sistemalarni tashkil etadi. Yuqoridagi har bir sistema elementini yana mustaqil sistema sifatida qarash mumkin.

Sistema tushunchasi favqulodda keng sohalarda foydalaniladi.

Sistemalarni shartli ravishda ***moddiy*** **va** ***abstrakt*** (g‘oyaviy) turlarga ajratish mumkin.

Moddiy (material) sistema insondan tashqarida real olamdagi elementlar to‘plamidan tashkil topgan sistemadir. Bunga stanoklarni, mexanizmlarni va boshqalarni kiritish mumkin.

Abstrakt sistema inson fikri, tasavvuri bo‘lib unga bilimlar, nazariyalar, gipotezalar sistemasini kiritish mumkin.

Sistemalarni tahlil qilish jarayonida ko‘p sondagi tekshirishlar, tajribalar o‘tkazilib ulardan eng qulayini tanlash masalasi kelib chiqadi. Buni mavjud (real) sistemalarda o‘tkazish juda murakkab va juda ko‘p vaqtni oladi, hamda iqtisodiy tomondan katta harajatlarga olib keladi. ***Sistemaning modelini tuzish*** va unda tajriba, tekshirishlar o‘tkazish masalasi yuzaga keladi.

Modellashtirish deganda mavjud sistemani almashtira oladigan o‘xshashini, modelini tuzish va uni tekshirish natijasida original (asli) haqida yangi axborotlar olish tushuniladi. Tuzilgan model, modellashtirilayotgan sistemani to‘liq yoki qisman xususiyatlarini mujassamlashtiradi.

Modellashtirishda uchta: 1) ***sub’ekt*** sifatida tekshiruvchi, inson shaxsi; 2) ***tekshirish ob’ekti*** (sistema); 3) ob’ektning modeli elementlarining mavjudligini payqash lozim.

Modellashtirish jarayoni qaytarilish xususiyatiga ega bo‘lib, ko‘rsatilgan bosqichlr bir necha marta takrorlanish jarayonida model ketma-ket mukammallashtiriladi. Masalan, kemaning modeli yasalib uni bir necha marta o‘rganib, tekshirib, natijada suvda suzadigan **asl kema** yasaladi. Bichuvchi oldin buyumning modelini yasab uni har taraflama tekshirib, keyin uni materialga qo‘yib kiyimni bichadi va bu jarayonda material iqtisod qilinadi.

Amaliyotda qo‘llaniladigan modellarni shartli ravishda ikki, ***fizik*** **va** ***simvolik*** (belgilik) turlarga ajratish mumkin. O’z navbatida fizik model ***geometrik o‘xshashlik*** modeli va ***analog-modellarda*** ifodalanadi.

Geometrik o‘xshashlik modelida asosan originalning tuzilishi va uning geometrik xususiyatlari mujassamlashadi. Modelning o‘lchamlari originalga nisbatan proporsional holda kichiraytirilishi yoki kattalashtirilishi mumkin. Masalan, tekshirish uchun samolyot, kema, mashina, ko‘prik,binolarning modellari originalga nisbatan kichiraytiriladi. Atomning modeli kattalashtiriladi.

Geometrik o‘xshashlik modellarini yasashda har bir tekshiriladigan sistema uchun model tuziladi yoki eskisini qaytadan yasaladi, bunga ko‘p vaqt ketadi hamda ancha moddiy harajatlarga olib keladi. Bundan tashqari bunday turdagi modellar sistema dinamikasini tekshirishda qiyinchiliklarga olib keladi.

Analog-modellarda originalda kechadigan fizik jarayonlar mo‘jassamlashadi. Modellarning bunday turi texnik qurilmalar modellarini yasashda ishlatiladi.

Simvolik modellarda original tuzilishi hamda ularga tegishli bog‘liqliklar simvollar va ular orasidagi munosabatlar yordamida ifodalanadi. Simvolik modellar orasida matematik va mantiqiy bog‘lanishni ifodalaydigan ***<u>matematik</u>*** **(tenglama, tengsizlik, funksiya va boshqalar)** ***<u>modellar</u>*** asosiy o‘rinni egallaydi.

Ma’lumki, insoniyat jamiyatining uzluksiz o‘sib boruvchi ehtiyojini to‘laroq qondirish uchun matematika fani vujudga keldi va rivojlandi. Buni arifmetika, geometriya va algebra fanlarining kelib chiqishi hamda rivojlanishi tarixidan ham tushunish mumkin. Masalan, tomonlari a dan iborat kvadrat yuzining modeli $s = a \cdot a = a^2$ dir. A mahsulot 5 kg ning narxi 200 so‘m bo‘lsa, uning 1 kg ning narxi x uchun $5x$=200 tenglama o‘rinli bo‘lib, x=40 so‘m ekanligini topamiz. Xulosa qilib, matematikadagi har bir ifoda, tenglama, tengsizlik, formula, funksiya, hosila, integral va hokazolar borliqning modellari ekanligini payqash qiyin emas.

Matematik modelda mavjud sistema (original) tuzilishi hamda elementlarining boђliqligi matematik va mantiqiy munosabatlar sistemasi orqali ifodalanadi. Matematik model o‘zining tabiati bilan originaldan farq qiladi. Originalning xususiyatlarini matematik model orqali tekshirish juda qulay va arzon bo‘ladi. Bundan tashqari ko‘p matematik modellar ***<u>universal</u>*** bo‘lib, ular yordamida turli sistemalarni tekshirish mumkin. Masalan, ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

(1) sistemaning ma’nosi nima? Har xil yo‘nalishdagi mutaxassislar: bu aktiv qarshilikli elektr zanjiridagi kuchlanish yoki tok kuchi modeli, stanoklarni yuklash tenglamasi, bu sistema orqali tovarlarni realizatsiya qilish shartlari ifodalangan deyish mumkin. Bu a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 o‘zgarmas koeffitsiyentlar va x_1, x_2 noma’lumlar simvollarining nimani ifodalashi bilan bog‘liq. Bu matematik yozuvning universalligi shundaki, u yuqoridagi hamma holatlar, asosiy qonuniyatlarini ifodalaydi.

Matematik modellashtirish rivojlanishida har xil murakkablikdagi hisoblashlarni va mantiqiy amallarni katta tezlik bilan bajaradigan zamonaviy komp'yuterlarning ahamiyati kattadir.

Iqtisodiy hodisa va jarayonlarning matematik modellari qisqacha ***iqtisodiy-matematik model*** (IMM)lar deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish tabiiy fanlardagiga nisbatan ancha murakkabroq kechadi, bu birinchi navbatda iqtisod, ishlab chiqarish jarayonlaridan tashqari, ***ishlab chiqarish munosabatlarini*** ham qamrab olishidadir. ***Ishlab chiqarish munosabatlarida*** esa odamlarning xulq-odat, hatti-harakatlari, qiziqishi va shaxsan yechim qabul qilishlarini hisobga olmasdan modelni yasab bo‘lmaydi.

Bu fikrning to‘g‘riligini quyidagi oddiy misoldan ham payqash mumkin. Usta (master) boshchiligida bir necha kishi ishlaydigan jamoa kam seriyali mahsulot ishlab chiqarishini olaylik. Usta har kuni ishchilar o‘rtasida har xil detallarni yasashni taqsimlaydi. Ishchilar bir-biridan umumiy malakasi bilan ham ishlab chiqarish amallarini bajarishi bilan ham farq qiladi. Har bir ishchining, har bir amalni bajarishini ish unumdorligiga qarab detallarni eng kam vaqt sarf qilgan holda topshirilgan vazifani bajarishning matematik modelini yasab uni chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish mumkin. Lekin yechilgan masala boshliqni (ustani) qanoatlantirmasligi mumkin. Gap shundaki amallar (detallarni) bajarish ish haqiga nisbatan qulay, noqulay bo‘lishi va bu amallarni bajarayotgan ishchilar uchun ish haqi ular hohlagan hamda usta hohlaganday muayyan normada bo‘lishini modellashtirish qiyin. Bunda ustani, ishchini nima qiziqtiradi ***buni oddiy holda ham matematik ifodalash ancha murakkab***. Bu sohada ham e'tiborga molik ishlar qilinmoqda.

Iqtisodiy-matematik modellashtirish amaliyotida shunday aniq qonun-qoidalar ishlab chiqilganki, ularni keyingi kurslarda o‘rganiladigan matematik (matematik dasturlash, iqtisodiy matematik modellar va usullar va boshqalar) kurslarda qaraladi.

3. Asosiy matematik tushunchalar haqida.

,,Oliy matematika’’ fani kursida sistemalarning matematik modellarini tuzishda qo‘llaniladigan **asosiy matematik apparat**ni (amaldagi dastur asosida) o‘rganishni maqsad qilib qo‘yamiz.

Iqtisodiy jarayon yoki hodisalarning matematik modelini tuzishda va uni tekshirishda koordinatlar usulidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida ushbuni qaraymiz.

1-misol. Biror xil mahsulotdan ikki donasini ishlab chiqarish uchun 6 ming so‘m harajat qilinadi, o‘n donasi uchun esa harajat 26 ming so‘m bo‘lsin. Xarajat funksiyasi chiziq (to‘g‘ri chiziq) li bo‘lsa, shu mahsulotdan sakkiz dona ishlab chiqarish harajatini topish uchun masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdorini x, uni ishlab chiqarish uchun ketgan harajat miqdorini y bilan belgilasak, xOy koordinatlar tekisligida masala shartiga asosan $A(2;\ 6)$ *ва* $B(10;\ 26)$ berilgan nuqtalar hosil bo‘ladi. berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{x-2}{10-2}=\frac{y-6}{26-6} \quad yoki \quad y=2,5x+1$$

matematik modelni hosil qilamiz va $x=8$ bo‘lganda $y=2,5\cdot 8+1=21$ ming so‘m harajat bo‘lishi kelib chiqadi, koordinatlar usuli **tekislik va fazodagi analitik geometriya mavzulari**da o‘rganiladi.

Turli xil iqtisodiy sistemalarning matematik modellarini tuzish va uni tahlil qilishda chiziqli va nochiziqli (chiziqli bo‘lmagan) modellar deb ataluvchi matematik modellar qo‘llaniladi. Ushbu misollarni qaraymiz.

2-misol. Firma palto va kurtka (kalta kamzul) ishlab chiqarish uchun to‘rtta turdagi resurslardan foydalanadi. Resurslar sarfi quyidagicha: bitta palto ishlab chiqarish uchun 1-turdagi resursdan a_1 birlik, 2-turdagi resursdan a_2 birlik, 3-turdagi resursdan a_3 birlik, 4-turdagi resursdan esa a_4 birlik miqdorda ishlatiladi; bitta kurtka uchun esa 1,2,3,4-turdagi resurslardan mos ravishda b_1,b_2,b_3,b_4

birlik miqdorda ishlatiladi. Resurslar chegaralangan bo‘lib, ular mos ravishda c_1, c_2, c_3, c_4 birlik miqdorda berilgan bo‘lsin.

Palto va kurtka ishlab chiqarish uchun resurslar sarfi matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan paltolar miqdorini x_1, ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan kurtkalar miqdorini x_2 bilan belgilaylik. Bu holda $a_1 \cdot x_1$ ko‘paytma palto ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini xuddi shunga o‘xshash $b_1 x_2$ kurtka ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini ifodalaydi. Demak, 1-tur resursning umumiy sarfi $a_1 x_1 + b_1 x_2$ bo‘lib,

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

tenglik hosil bo‘ladi. Yuqoridagiga o‘xshash 2, 3, 4-tur resurslar sarfi uchun mos ravishda

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$
$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = c_3$$
$$a_4 x_1 + b_4 x_2 = c_4$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 &= c_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

ikki noma’lumli, to‘rtta chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘ladi. Bu modelda o‘zgaruvchilar (noma’lumlar) faqat birinchi darajali bo‘lganligi uchun chiziqli model deb yuritiladi.

Bu sistemaning koeffitsiyentlaridan hamda ozod hadlardan ushbu jadvallarni tuzish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Bunday jadvallarga matritsalar deb aytiladi. Yuqoridagiga o‘xshash modellarni tuzishda va tahlil qilishda oliy algebra (determinantlar, matritsalar, chiziqli tenglamalar sistemasi va boshqalar) elementlaridan keng foydalaniladi , bu matematik apparat **oliy algebra**(**chiziqli algebra**)elementlari mavzusida o‘rganiladi.

3-misol. Ma’lumki, biror mahsulotni sotishdan olingan ja’mi daromad y, mahsulot narxi p bilan, uning miqdori x ning ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y = px \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan sotiladigan mahsulotning miqdori uning narxiga bog‘liq, odatda narx qancha arzonroq qo‘yilsa ko‘proq miqdorda, narx ko‘tarilsa esa kamroq miqdorda mahsulot sotiladi. Bu bog‘lanish oddiy, chiziqli deb olaylik, ya’ni

$$p = ax + b \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Narxning (3) formuladagi qiymatini (2) tenglikka qo‘ysak

$$y = px = (ax + b)x = ax^2 + bx$$

matematik model kelib chiqadi. Bu model **nochiziqli modellar**ga misol bo‘ladi (x o‘zgaruvchi ikkinchi darajada).

Tekshirilayotgan iqtisodiy sistema butun xalq xo‘jaligi bo‘ladimi yoki uning tarmoqlarimi, ayrim fermer xo‘jaliklari bo‘ladimi ularni modellashtirishda ko‘rsatkichlar orasidagi funksional bog‘lanishni, ya’ni mahsulot ishlab chiqarish uchun u yoki bu resurslarning sarfi orasidagi bog‘lanishni topishdan iborat bo‘ladi. Bunday funksiyani odatda **ishlab chiqarish funksiyasi** deb ataladi. Ishlab chiqarish funksiyasini umumiy holda:

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda x resurslarning sarfi, y ishlab chiqarish ko‘rsatkichi (miqdori), a parametr (son). Bu bog‘lanish analitik (formulalar) ko‘rinishida yoki jadval ko‘rinishida bo‘lishi mumkin. Bu funksiyaning ko‘rinishini umumiy iqtisodiy yoki texnologik mulohazalardan hamda axborotlarni statistik o‘rganishlardan olish mumkin. (4) tenglikni

$$y = f(x, a) \ \text{ёки} \ x = \varphi(y,\ a)$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin, bular mos ravishda ishlab chiqarish va sarf funksiyalari deb ataladi. Funksiyalar haqidagi boshlanђich tushunchalar matematik tahlilga kirish bobida qaraladi.

Ma’lumki, o‘rtacha miqdor tushunchasi ko‘p sohalarda ishlatiladi, masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug‘doy ekinining o‘rtacha hosildorligi, sutdagi bo‘lgan o‘rtacha yog‘ miqdori, bozorda sotilayotgan tovarning o‘rtacha miqdori, ma’lum oyning kunlaridagi biror shaharga kelgan turistlar soni va boshqalar. Tijorat ishlarida ham o‘rtacha miqdor ahamiyatga ega, misol uchun haftaning kunlarida sotilgan mahsulot miqdori, kunning soatlarida oshxonaga kelgan xo‘randalar soni, yilning oylaridagi korxonaning o‘rtacha daromadi va boshqalar. Lekin o‘rtacha miqdorni bilish bilan ko‘p hollarda maqsadga erishib bo‘lmaydi. Istalgan tadbirkorlik ishlarini amalga oshirishda ushbu savolga to‘g‘ri kelish mumkin, mahsulot ishlab chiqarishda qilinayotgan harajatni biror miqdorga oshirganda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori qanchaga ko‘payadi yoki aksincha harajat biror miqdorga qisqartirilganda mahsulot ishlab chiqarish qanday bo‘ladi. Bunday hollarda o‘zgaruvchi miqdorlar ortishi haqida fikr yuritilib, qaralayotgan o‘zgaruvchilar orttirmasi nisbatining limiti qiymatini yoki limitik samaradorlik haqida mulohaza qilishga olib keladi. Misol uchun limitik harajat tushunchasini qaraylik. Tabiiyki, biror mahsulot ishlab chiqarilganda ishlab chiqarish harajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog‘liq. Mahsulot miqdorini x birlik bilan, ishlab chiqarish harajatlarini y bilan belgilasak,

$$y = f(x)$$

funksional bog‘lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga orttirilsa, $x+\Delta x$ mahsulotga mos keluvchi harajat $f(x+\Delta x)$ bo‘ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, mahsulot ishlab chiqarish harajatining

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

orttirmasi mos keladi. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarishning o‘rtacha harajati deyiladi.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ga esa ishlab chiqarishning limitik harajati deyiladi, bunday masalalarni yechish matematikadagi **funksiya hosilasi** tushunchasiga olib keladi , bu tushunchalar **differensial hisob** mavzusida o‘rganiladi.

4-misol. Mahsulot ishlab chiqarish harajati y va mahsulot hajmi x orasida ushbu funksional bog‘lanish bo‘lsin:

$$y = 200x - \frac{1}{20}x^2.$$

Ishlab chiqarish hajmi:

a) $x=100$; b) $x=150$ bo‘lgandagi limitik harajatlarni toping.

Yechish. Berilgan funksiyadan hosila olsak $y' = 200 - \frac{1}{10}x$ bo‘lib, $x=100$ bo‘lganda, $y'(100) = 200 - \frac{1}{10}\cdot 100 = 190$ va $x=150$ bo‘lganda esa, $y'(150) = 200 - \frac{1}{10}\cdot 150 = 185$ bo‘ladi. Bu topilganlarning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 100 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish harajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda, 190 birlikni tashkil etadi, ishlab chiqarish hajmi 150 birlik bo‘lganda esa, u 185 ni tashkil etadi.

Qaralayotgan masalalarda bir necha variantlardan optimal (eng qulay) ini topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsa, uning uchun tuzilgan matematik modelda uning optimal qiymatini topish masalasi qo‘yiladi. Masalan, biror firma yaqin kelajak rejasida ishlab chiqarish funksiyasi, faqat ishlab chiqarishda band bo‘lgan shaxslar soniga bog‘liq bo‘lib,

$$y = 4{,}5x^2 - 0{,}1x^3$$

ko‘rinishda bo‘lsin, bunda y ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, x ishlovchi shaxslar soni. Ishlovchi shaxslar sonining shunday qiymatini topish kerakki ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori maksimal bo‘lsin. Bu holda ishlab chiqarish funksiyasidan hosila olib, uni 0 ga tenglashtirib kritik (statsionar) nuqtalarni topamiz:

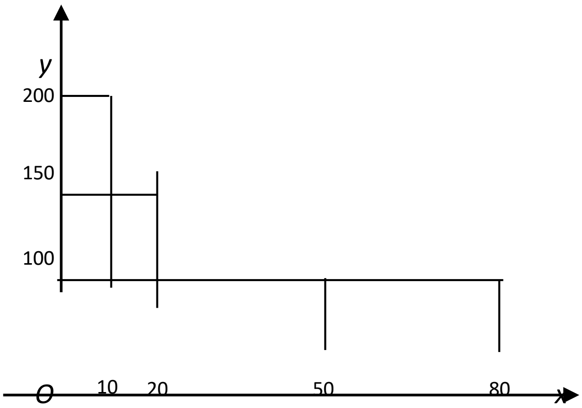
$y' = 9x - 0{,}3x^2$, $9x - 0{,}3x^2 = 0$, bundan $x_1 = 0$ bo‘lganda funksiya minimumga $x_2 = 30$ da maksimumga ega bo‘ladi. Tabiiyki ishchilar soni 0 bo‘lganda hech qanday mahsulot ishlab chiqarilmasligi tushunarli, $x_2 = 30$ bo‘lganda, $y(30) = 4{,}5 \cdot 30^2 - 0{,}3 \cdot 30^3 = 1250$

bo‘lib, maksimum qiymatga ega bo‘ladi. Optimallik sharti qatnashgan modellarga **optimizatsiyaviy** (optimizatsion) modellar deb ataladi.

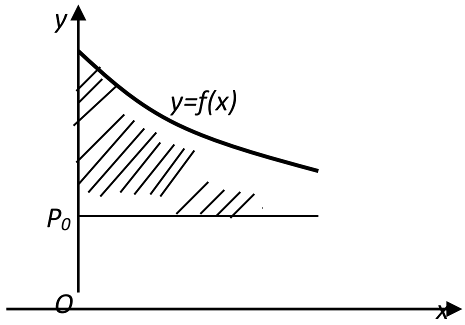
Ma’lumki, iste’molchi biror tovarni bozordagi narxdan yuqoriroq narxda sotib olishga qodir bo‘lib, uni pastroq, bozor narxida harid qilib ortiqcha pul mablag‘iga ega bo‘ladi. Iste’molchining bunday jami pul mablag‘iga iste’molchilar ortiqcha pul mablag‘i deb ataylik. Biror tovarga talab quyidagicha ifodalansin: tovarning narxi 200 so‘m bo‘lsa uni 10 nafar iste’molchi bir donadan, 150 so‘m bo‘lsa 20 nafar, 100 so‘m bo‘lsa yana 50 nafar iste’molchi bir donadan harid qilsin, bunda iste’molchilarning umumiy sarfi:

$S_1 = 200 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 50 = 10000$ so‘m bo‘ladi. Tovarga narx birdaniga 100 so‘m bo‘lganda uni 80 nafar iste’molchi bir donadan harid qilib umumiy sarf $S_2 = 100 \cdot 80 = 8000$ so‘m bo‘lar edi. Demak iste’molchilar

$S_1 - S_2 = 10000 - 8000 = 2000$ so‘m pulni iqtisod qilar edi. Bu holatni grafik ko‘rinishda 1-chizmadagi yuzalar ayirmasi sifatida ifodalash mumkin.



1-chizma.



2-chizma

Umumiy holda, talab $y = f(x)$ funksiya bilan berilgan bo‘lib, p_0 bozordagi muvozanat narx bo‘lsa, iste’molchilar ortiqcha mablag‘ini hisoblash, yuqoridan talab chizig‘i quyidan $y = p_0$ to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan yuzani hisoblashga olib keladi (2-chizma). Bunday ko‘rinishdagi masalalar matematikaning integral hisob deb ataluvchi apparatini o‘rganishga olib keladi, bu apparat **aniqmas va aniq integral hisob** mavzularida qaraladi.

Tabiat va jamiyatdagi hodisa hamda jarayonlar bir necha faktorlarga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug‘doydan olinadigan hosilning miqdori, bir necha faktorlarga: ekilgan bug‘doy urug‘iga, yerning tuzilishiga, uning sug‘orilishiga, o‘g‘it berilishiga, ob-havoning kelishiga, parvarish qilayotgan shaxsning saviyasiga va boshqalarga bog‘liq.

Iqtisodiyotni qaraydigan bo‘lsak, umuman yuqorida qayd etilgan mahsulot ishlab chiqarish, ishlab chiqarish uskunalari, ishchi kuchi, ishchi shaxs saviyasi, uning kayfiyati, ishlab chiqaruvchining moliyaviy ahvoli va boshqalarga bog‘liq, ya’ni uni

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ko‘rinishda ifodalash kerak bo‘ladi. Bunday turdagi masalalarni modellashtirish va tekshirish matematikaning ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bo‘limi yordamida amalga oshiriladi..

5 - misol. Ikki xildagi tovar ishlab chiqarilayotgan bo‘lib, x_1 va x_2 ularning miqdorlari, $p_1 = 14$ va $p_2 = 20$ mos ravishda bu tovarlarning narxlari bo‘lsin. $C(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ harajat funksiyasi ko‘rinishda ifodalansin. Tovar ishlab chiqarishdan maksimum foyda olishning matematik modelini tuzing.

Yechish. $\Phi(x_1, x_2)$ foyda funksiyasi bu holda

$$\Phi(x_1, x_2) = 14x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$$

bo‘ladi. Bu foydaning matematik modelidir. Foydaning maksimum qiymatini topish uchun ikki o‘zgaruvchili funksiya ekstremumini topish qoidasidan foydalaniladi. Bu qoidani **ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar** mavzusida qaraladi.

Bank aholidan yiliga foiz stavkasi (hissasi) h hamda qo‘shimcha stavka mijoz hisob raqamiga har oy oxirida o‘tkazish sharti bilan pul mablag‘ini qabul qiladi. Bu holda mijoz qo‘ygan pul har bir oyda $i = \frac{h}{12}$ miqdorda ko‘payadi. Masalan, mijoz a_0 so‘m miqdordagi pulni bankka qo‘ygan bo‘lsin. Birinchi oy oxirida mijoz hisob raqamida

$$a_1 = a_0 + a_0 \cdot i = a_0(1+i)$$

pul bo‘ladi. Ikkinchi oy oxirida esa

$$a_2 = a_1 + a_1 i = a_1(1+i) = a_0(1+i)(1+i) = a_0(1+i)^2$$

bo‘lib, uchinchi oy oxirida esa

$$a_3 = a_2 + a_1 i = a_2(1+i) = a_0(1+i)^3$$

bo‘ladi. Xuddi yuqoridagiga o‘xshash kelgusi oylar uchun $a_4, a_5, a_6, \ldots$ va hokazolarni aniqlash mumkin.

Shunday qilib, birinchi hadi a_1 maxraji $q = 1+i$ bo‘lgan geometrik progressiya

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi kelib chiqadi. Bunday matematik modellar sonli ketma-ketliklar tushunchasiga olib keladi. Sonlar ketma-ketligidan tuzilgan

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

cheksiz yig‘indi xususiyatlarini o‘rganish esa qatorlar nazariyasiga olib keladi. Bu nazariya **qatorlar** mavzusida qaraladi.

Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib, u tayin p narxda sotilayotgan bo‘lib, $y(t)$ vaqtning t oni (momenti)dagi realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$p \cdot y(t)$$

modeli bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi, albatta, ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya’ni

$$J(t) = m \cdot p \cdot y(t) \qquad (6)$$

bo‘ladi, bunda m investitsiya me’yori o‘zgarmas son hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, daromadning bir qismi ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi $y'(t)$, $J(t)$ investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$y'(t) = l\ J(t) \qquad (7)$$

bo‘lib, bunda $1/l$ akseleratsiya me’yori, (6) va (7) tengliklardan

$$y'(t) = l \cdot m \cdot p \cdot y(t) \text{ yoki } y'(t) = ky(t) \qquad (8)$$

tenglik qilib chiqadi, bunda $k = lmp$.

(8) tenglik ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sishining matematik modeli bo‘lib, differensial tenglama deb ataladi. Bu **differensial tenglamalar nazariyasi** mavzusida o‘rganiladi.

O’quv qo‘llanmani tayyorlashda, ushbularga erishishni maqsad qilib olindi:

1) matematikaning hozirgi zamon taraqqiyotidagi o‘rni va ahamiyatiga e’tiborni jalb qilish;
2) o‘quvchini matematik apparatning qo‘llanilishiga qiziqtirib o‘rgatish;
3) amaldagi dastur asosida matematik apparatni o‘rgatish;
4) ayrim masalalarning matematik modellarini tuza bilish va uni tahlil qilish;
5) matematik fikrlash va xulosa chiqarish;

6) matematik bilimlarni chuqurlashtirishga yo‘naltirib, bu bilimlarni o‘z faoliyatida qo‘llash.

Shuni ta’kidlaymizki, ,,Oliy matematika’’ fani oliy ta’limda asosiy tayanch fan ekanligi, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatilishi e’tiborga olindi.

Takrorlash uchun savollar

1. Hozigi zamon talablari nimalardan iborat deb bilasiz?

2.Zamon talablarini bajarishda kadrlarning malakasi qanday bo‘lishi kerak?

3.Komp’yuterlarning tatbiqlari soha mutaxassislaridan nimalarni bilishni talab qiladi?

4.Matematika fanini o‘rganishning ahamiyati nimada deb hisoblaysiz?

5. Model nima?

6. Oddiy modellarga misollar keltiring?

7. Modelda nima ifodalanadi?

5. Arifmetika, geometriya va algebra fanlaridagi ifoda va belgilarning modelga aloqasi bormi?

6. Sistema nima?

7. Iqtisodiy sistemaga misollar keltiring?

8. Sistemaning elementlari nima?

9. Sistemani qanday turlarga ajratish mumkin?

10. Moddiy sistema nima?

12. Abstrakt (g‘oyaviy) sistema nima?

13. Modellashtirish deganda nimani tushinasiz?

14. Model originalning xususiyatlarini to‘liq ifodalaydimi?

15. Modellashtirishning asosiy mohiyati nima?

16. Simvolik (belgilik) model nima?

17. Matematik model qanday ifodalanadi?

18. Matematik modellarning universalligini qanday tushinasiz?

19. Iqtisodiy-matematik modellar, modellarning qanday turiga kiradi?

20. IMM lar tabiiy fanlardagi modellardan nima bilan farq qiladi?

21. Optimizatsiyaviy modellarning mohiyati nimada?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Arifmetikadagi oddiy modellarni bilasizmi? Ulardan bir nechtasini sanab chiqing.

2. Geometriyadagi modellarni bilasizmi?

3. Algebrada modellar bormi? Bor bo‘lsa misollar keltiringchi?

4. Sistema deganda nimani tushunasiz va bir nechta misollar keltiring, ularning elementlarini sanab chiqing.

5. Moddiy va abstrakt sistemalarga misollar keltiring.

6. Modellashtirish yordamida original haqida yangi ma’lumotlar olinadi, misollar keltiring.

7. Geometrik o‘xshashlik, analog-model va simvolik modellarga misollar keltiring.

8. Matematik modellarga bir necha misollar keltiring.

9. Oila daromadini x, uning harajatini y desak $y = \frac{x}{2}$ modelda daromadning ortishi bilan nimani kuzatasiz?

10. Respublikamiz xalq xo‘jaligi tarmoqlari va ularning elementlarini iqtisodiy sistemaga misol qilib bo‘ladimi? Mumkin bo‘lsa sistema va uning elementlari nimalar bo‘ladi? Muayyan tarmoqlar misolida tushuntiring.

11. Yashash joyingiz yoki unga yaqin, biror mahsulot ishlab chiqarishni sistema deb olib uning elementlarini sanab chiqing(birnecha misollar keltiring).

1-mavzu. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar

Reja

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar.

2. Ikki va ko‘p argumentli funksiya limiti.

3. Ikki va ko‘p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish va o‘zgarish sohalari, aniqlanish sohasi, o‘zgarish sohasi, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi.

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida umumiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko‘p masalalar borki o‘zgaruvchi miqdorlar bog‘lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x va y dan iborat bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o‘zgarishi bilan o‘zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o‘lchovining o‘zgarishi bilan o‘zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o‘g‘it berishga, sug‘orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko‘p faktorlarga; sigirdan sog‘ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday yem-xashak bilan boqilishiga va hakozolarga bog‘liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog‘lanishlarni tekishirish uchun ***ko‘p o‘zgaruvchili (argumentli) funksiyalar*** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish apparati amallarini o‘rganamiz.

1-ta’rif. R^2 fazoda biror D to‘plamning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan x va y o‘zgaruvchilari har bir (x, y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko‘ra E to‘plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda ***ikki*** x va y ***o‘zgaruvchilarning funksiyasi*** z ***aniqlangan*** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (funksiya U $yoki$ y bilan o‘zgaruvchilar mos ravishda $x, t \;\; yoki \;\; x_1, x_2$ lar bilan belgilangan bo‘lsa $U = f(x,t) \;\; yoki \;\; y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda $x, \; y$ o‘zgaruvchilarga erkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, z ga erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to‘plamga *__funksiyaning aniqlanish__* sohasi, E to‘plamga o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o‘rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

__Ikki o‘zgaruvchili funksiya berilish usullari__ ham, bir o‘zgaruvchili funksiyaga o‘xshash har xil bo‘lishi mumkin. Ko‘proq funksiyaning ***__analitik usulda__*** berilishini qaraymiz. Masalan. 1) $— = \rangle_1^2 + \rangle_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo‘lib, OX_1X_2 tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O’zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo‘ladi. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo‘lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad yoki \quad x^2 + y^2 \leq 4$ bo‘lishi kerak, bunday nuqtalar to‘plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo‘lgan doiradan iborat. Qiymatlar to‘plami $[0,2)$ bo‘ladi. 3) $u = 1 \Big/ \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ funksiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya’ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo‘lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to‘plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo‘lgan sirtni ifodalaydi. Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo‘lib, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta’rif . D to‘plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo‘yicha E to‘plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda uch o‘zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 erkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o‘zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o‘zgaruvchining fuksiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib, $u = f(x, y, z)$ o‘rniga, $u = f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to‘plami yoki butun fazo bo‘lishi mumkin. Masalan: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To‘rt o‘zgaruvchili va umuman n o‘zgaruvchili funksiyaga ham yuqoridagidek ta’rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *yoki* $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ bilan belgilanadi.

To‘rt va undan ortiq o‘zgaruvchiga bog‘liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko‘rgazmali namoyish etish mumkin emas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo‘lmasa y yo‘q deyish mumkin emas. Masalan, to‘rtinchi o‘zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k bo‘lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom ettirib n o‘zgaruvchining funksiyasini biror n o‘lchovli fazo $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

2. **Ikki va ko‘p argumentli funksiya limiti**. $y = f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o‘z ichiga olgan oraliq bo‘lar edi. Ikki argumentli

$z = f(x,y)$ funksiya qaralganda **nuqtaning δ atrofi** deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o‘xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada radiusi δ bo‘lgan sharning ichki nuqtalari bo‘ladi.

n o‘lchovli $(n > 3)$ fazoda $P_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o‘xshash aniqlanadi.

1-ta’rif. Ikki o‘zgaruvchili $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \quad yoki \quad |f(P) - A < \varepsilon|$$

tengsizlik bajarilsa, A ***o‘zgarmas son*** $z = f(x,y)$ ***funksiyaning*** $P \to P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \ yoki \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x,y))$ funksiyaning limiti bo‘lsa, $|f(x,y) - A|$ ayirma $x \to x_0$, $y \to y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Uch va undan ortiq o‘zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo‘lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi uchun ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

1-misol. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$ limitni hisoblang.

Yechish. $P_0(2;0)$ nuqtada $\frac{\sin xy}{y}$ funksiya aniqlanmagan.Limitning xossalaridan

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x\frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2$$

chunki $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

3. <u>Ikki va ko‘p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.</u> 1-ta’rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ no‘qtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0) \ \ yoki \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

bo‘lsa, ya’ni funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lsa, ***<u>funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz</u>*** deyiladi.

Bu ta’rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi bo‘lsin.

2-ta’rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo‘lsa, argumentlarning Δx *va* Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0$$

bo‘lsa, ***<u>funksiya R_0 (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz</u>*** deyiladi.

3-ta’rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

1-misol. $z = x^2 + y^2$ funksiyaning $P_0\,(2;3)$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

Yechish: Bu nuqtada funksiyaning to‘liq orttirmasini topamiz:

$$\Delta z = (2+\Delta x)^2 + (3+\Delta y)^2 - (2^2 + 3^2) = 2^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 +$$
$$+ 3^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 - 2^2 - 3^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta y + \Delta y^2$$

2-ta’rifga asosan $\lim \Delta z = \lim \left[2\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta y + \Delta y\right] = 2\cdot 0 + 0 + 6\cdot 0 = 0$.

Shunday qilib, $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0\ \ da\ \ \Delta z \to 0$. Demak, $P_0\,(2;3)$ nuqtada berilgan funksiya uzluksizdir. Bu holatni istalgan $P_0\,(x_0\,;y_0)$ uchun ko‘rsatish mumkin. (Bu o‘quvchiga havola etiladi). $z = f(x,y)$funksiya biror to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, unga bu to‘plamda uzluksiz deyiladi.

2-misol. $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Yechish. Funksiya koordinatalari $z^2 - y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzilishga ega. Bu $y = x$ va $y = -x$ to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqlarga tegishli har bir nuqtada funksiya uzilishga ega bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ham bir o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ega bo‘lgan asosiy xossalarga ega bo‘ladi. (Bu xossalarni takrorlash o‘quvchiga tavsiya etiladi).

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini aniqlang va uning qandayligini izohlang:

1) $u = \sqrt{1 - x^2 - 9y^2}$; 2) $u = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$; 3) $u = \ln(x+y)$;

4) $u = \sqrt{4 - x^2 + y^2 - z^2}$; 5) $z = \sqrt{xy}$; 6) $z = \dfrac{xy}{y - x}$.

2. Quyidagi limitlarni hisoblang.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4.}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

3. Quyidagi funksiyalarning istalgan nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

1) $z = x - y$; 2) $z = x^2 + 3y^2$; 3) $u = x + y + 2z$; 4) $2x^2. + 3y^2 + 2z^2$.

4 Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping.

1) $z = \dfrac{6}{x^2 - y^2 - 2}$; 2) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ko'p argumentli funksiyalar nazariyasiga nimalar olib keladi?
2. Qanday funksiyalarga ikki argumentli funksiyalar deyiladi?
3. Uch argumentli funksiya deb nimaga aytiladi?
4. 2 va 3 argumentli funksiyalarning aniqlanish sohalari nima?
5. Ikki va undan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limiti deb nimaga aytiladi?
6. Nuqtaning atrofi tushunchasi nima?
7. Ikki va undan ko'p o'zgaruvchili funksiyalar limiti qanday xossalarga ega?
8. Ikki va ko'p argumentli funksiyalrning nuqtada uzluksizligini ta'riflang?
9. Ikki argumentli funksiya qanday nuqtalarda uzilishga ega deyiladi?
10. Qanday funksiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?

2-mavzu. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va to‘la differensiali

Reja

1. 2-o‘zgaruvchili funksiya xususiy va to‘la orttirmalari.

2. 2-o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari.

3. To‘la differensial.

4. **Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar**.

Tayanch ibora va tushunchalar

Xususiy orttirma, xususiy hosila, to‘la differensial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to‘la differensial, taqribiy hisoblash.

1. 2-o‘zgaruvchili funksiya xususiy va to‘la orttirmalari.

1. 1-ta’rif. $z = f(x, y)$funksiyada x o‘zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y ni o‘zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o‘zgaruvchiga Δyorttirma berib x o‘zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

2-ta’rif. x va y o‘zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$funksiya $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ to‘liq orttirma oladi.

2. 2-o‘zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari.

1-ta’rif. $a)$ $\lim \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning x ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi*** deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, unga $z = f(x, y)$ funksiyaning y o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta’riflaridan ko‘rinadiki bir argumentli funksiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o‘z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o‘zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiy hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o‘zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y \ ,$$

endi x ni o‘zgarmas deb $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y .$$

2-misol. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} .$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

3. ***<u>To‘la differensial</u>***. Ma’lumki, $x \ va \ y$ o‘zgaruvchilar mos ravishda $\Delta x \ va \ \Delta y$ orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$funksiya $\Delta z = f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to‘la orttirma oladi. Bu to‘la orttirmaning

Δx *va* Δy larga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi funksiyaning ***to‘la differensiali*** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y.$ To‘la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya’ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz,$ bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \qquad (2)$$

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) formulaga asosan, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy$ bo‘ladi.

2-misol. $u = x^2 yz^2$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 yz^2\right)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 yz^2\right)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 yz^2\right)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yzdz$ bo‘ladi.

3-misol. O'lchovlari $a = 8m, \quad b = 6m, \quad c = 3m$ bo‘lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko‘paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o‘zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v = xyz; \quad x, y, z$ uning o‘lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yxdx + xzdy + xydz$$

bo‘lib, shartga ko‘ra $x = 8, \quad y = 6, \quad z = 3, \quad dx = 0.1, \quad dy = 0.05, \quad dz = -0.15$ bo‘lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6(-0.15) = -4{,}2.$$

Shunday qilib, hajm taxminan $4.2m^3$ ga kamayadi.

4-misol. To‘la differensial formulasidan foydalanib:

1) $arcctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$, 2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To‘la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang‘ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo‘lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$ ifoda $f(x, y) = arcctg(\frac{x}{y} - 1)$ funksiyaning $P_1(1.97;1.02)$ nuktadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang‘ich nuqta uchun $P_0 = (2;1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03, \quad \Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo‘ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y) = \left[arcctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x \right] = -\frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = -\frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2+(x^2-y^2)\right)}{y^2}}=\frac{x}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_x(2;1)=-\frac{1}{1+(2-1)^2}=-0.5; \qquad f'_y(2;1)=\frac{2}{1+(2-1)^2}=1.$$

(2) dan foydalansak,

$$arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$$

bo‘ladi.

2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ ni $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04;\ 1.99;\ 1.02)$ nuktadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang‘ich nukta uchun $P_0(1;\ 2;\ 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x=1.04-1=0.04,\quad \Delta y=1.99-2=-0.01,\ \Delta z=1.02-1=0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1;\ 2;\ 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f_x{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_x{}'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_y}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_y{}'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z{}'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_z}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\quad \boldsymbol{f_z{}'(1;2;1)=\frac{1}{2}}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0{,}04+0\cdot(-0{,}01)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}05$$

natijani olamiz.

4. **Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar**.

1. $z=f(x,y)$ **funksiyaning** ***ikkinchi tartibli xususiy hosilalari*** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo‘yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''=f_{xx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}''=f_{xy}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}''=f_{yx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}''=f_{yy}''(x,y);$$

$f_{xy}''(x,y)$ va $f_{yx}''(x,y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy xosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo‘lgan nuqtalarda ular o‘zaro teng bo‘ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o‘zgaruvchi bo‘yicha va $(n-m)$ marta y o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallashni bildiradi.

1-misol. $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_x'=4x^3+8xy^3+7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_y'=4x^2.3y^2+7x=12x^2y^2+7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx^2}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_x'=12x^2+8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx\partial y}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_y'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy\partial x}=\left(12x^2y^2+7x\right)'_x=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy^2}=\left(12x^2y^2+7x\right)'_y=24x^2y.$$

2. ***<u>Ikkinchi tartibli to‘la differensial</u>*** $d(dz)=d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (1)$$

2-misol. $z=x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$z'_x=\left(x^2y^3\right)'_x=2xy^3$; $z'_y=3x^2y^2$; $z''_{xx}=2y^3$, $z''_{xy}=6xy^2$, $z''_{yx}=6xy^2$, $z''_{yy}=6xy^2$,

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to‘la differensial

$$d^2z=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?
3. Uch argumentli funksiyaning xususiy xosilalari nechta bo‘ladi?
4. Ikki argumentli funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog‘lanish bormi?
6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy xosila qanday topiladi?
8. Ikki argumentli funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:
2. 1) $z=x^3+3x^2y-y^3$; 2) $z=\frac{xy}{x-y}$; 3) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$

   4) $z=\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}+\arcsin\frac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

1) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $u=x^{y^2z}$; 3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

4) $u=\sqrt{x^2-2y^2+3z^2}$; 5) $s=x\ln t$.

3. $z=xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x=0{,}1,\ \Delta y=-0{,}2$ bo‘lganda dz va Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0\cdot\cos 59^0$ taqribiy hisoblang.

5. $z=x^3y+y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)$ funksiya uchun $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ ekanligini tekshiring.

7. $u=arctg(2x-t)$ bo‘lsa, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}=0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z=(x^2+y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u=x^4y^2$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

11. $z=\sin x\cos y$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

12 1) $u=\frac{y^2}{x^2}$; 2) $u=x\ln\frac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to‘la differensiallarini toping.

3-mavzu. <u>Ikki argumentli funksiya ekstremumi</u>

Reja

1. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari, eng kichik va katta qiymatlar, xarajat funksiyasi, foyda funksiyasi, tovarning limitik bahosi, limitik xarajat, foyda funksiyasi maksimumi.

1. **<u>Ikki argumentli funksiya ekstremumi</u>**. 1-ta’rif. $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya’ni $f(x_0;y_0) > f(x,y)$ bo‘lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta’rif. $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_1(x_1;y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo‘lsa, ya’ni $f(x_1;y_1) < f(x,y)$ bo‘lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_1(x_1;y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

***<u>Ekstremumning zaruriy shartlari</u>*:** $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa,

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{array}\right\}$$

bo‘ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo‘lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo‘lmasligi ham mumkin.

***<u>Ekstremumning yetarli shartlari</u>*:**

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

bilan belgilaymiz va $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo‘lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lib: 1) A<0 bo‘lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga,

2) A>0 bo‘lganda minimumga ega bo‘ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo‘lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo‘q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo‘lsa, ekstremum bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y;\ f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo‘lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{matrix} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \left[x(1 - x^2)\right]^3 + x - x^{+x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{matrix}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ kritik nuqtalarga ega bo‘lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo‘q, chunki $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar XOU tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4;\ f''_{xy}(x, y) = 4;\ f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

O(0,0) nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4;$ $\Delta=AC-B^2$ =-4·(-4)-4²=0 bo‘lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo‘lishini ko‘ramiz, masalan OX o‘qi bo‘yicha ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0} = f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, bissektrisa bo‘yicha

$$f(x,y)\Big|_{y=x}= f(x,x)=2x^4>0$$

bo‘ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo‘q.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2$ =400-16>0 va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min}$ =-8;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuktada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, B=4,C=20 bo‘lib $\Delta=AC-B^2$ =400-16>0 va A=20>0 bo‘lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo‘ladi, $f_{\min}$ =-8

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

P_0(1;1) nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, P_0 (1;1) nuqta kritik nuqta bo‘ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nukta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z=\sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuktaning istalgan atrofida saqlanadi ya’ni $P_0(1;1)$ nuktada funksiya minimumga ega $z_{\min}=f$ (1;1)=0;

2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Chegaralangan yopiq sohada differensiallan- uvchi funksiya o‘zining ***eng katta va eng kichik qiymatiga*** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$ sohadagi eng katta va eng kichik kiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo‘lib, P_0(-1,-1) kritik nuqtaga ega bo‘lamiz. Funksiyani soxa chegarasida tekshiramiz: A0 chegarada $y = 0$ bo‘lib, $z = x^2 + x$ funksiya xosil bo‘ladi. Bu funksiyaning ekstremumi: $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} = -0,5$

bo‘ladi.

Demak, P_1(-0,5, 0) AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya xosil bo‘lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ y=-1/2.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo‘ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo‘lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo‘lib $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, ABchegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo‘ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1 \text{ ;}$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2},-0\right) = -\frac{1}{4}\ ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\ ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\ ;$$

$$z_4 = f(0) = f(0{,}0) = 0\ ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3{,}0) = 6\ ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6.$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\ kat.} = f(A) = f(B) = 6$ *va* $z_{eng\ kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning ekstremumini tekshiring.

1. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$
2. $z = xy(12 - x - y).$
3. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1.$
5. $z = x^2 + 3(y+2)^2.$
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20.$
7. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10.$
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

Berilgan $z = f(x, y)$ funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

1. $z=x^2-y^2-x+y;\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1.$

2. $z=x^2+2xy-4x+8y;\ x=0,\ y=0,\ 5x-3y+45=0.$

3. $z=2xy-3x^2-2y^2+5;\ x+y=5,\ x=-1,\ y=-1.$

4. $z=3y-2x-xy;\ x=0,\ y=0,\ 3x-4y=12.$

5. $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x,\ x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=2.$

6. $z=x^2+6xy-x+3y;\ x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=3.$

7. $z=x^2+2xy-10;\ y=0,\ y=x^2-4.$

8. $z=x^2-2xy-y^2+4x+1;\ x=-3,\ y=0,\ x+y+1=0.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy sharti nima?

2. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining yetarli sharti nima?

3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?

4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

4-mavzu. Ikki karrali integrallar

Reja

1. Ikki karrali integralning ta'rifi.

2. Ikki karrali integralni hisoblash.

3. Ikki karrali integralning tatbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikki karrali integral, integral yig'indi, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmi, statik momentlar, og'irlik markazi, inersiya momentlari.

1. Ikki karrali integralning ta'rifi. $f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo'lsin. D sohani n ta D_i qismlarga bo'lamiz. Har bir D_i qismda $P_i(x_i, y_i)$ bittadan nuqta tanlaymiz hamda

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

yig'indini to'zamiz. (1) yig'indiga $f(x,y)$ funksiya uchun D sohadagi ***integral yig'indi*** deyiladi. λ qism sohalar diametrlarining eng kattasi bo'lsin. ΔS_i, D_i sohaning yuzi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining, qismlarga bo'linish usuliga, P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi ***ikki karrali integrali*** deyiladi va

$$\iint_D f(x,y)ds$$

simvol bilan belgilanadi.

Ikki karrali integral aniq integralning ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiya uchun umumlashgan holidir.

Ikki karrali integral ham aniq integralning asosiy xossalariga ega. Aniq integralning xossalarini takrorlashni tavsiya etamiz.

2. Ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integralni hisoblash ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. D soha $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$

funksiyalar grafklari hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsin, ya’ni

$$\begin{cases} a\le x\le b \\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo‘lsa, ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint\limits_D f(x,y)ds=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad (1)$$

Oxirgi aniq integral **ichki integral** deb ataladi va uni hisoblashda x ni o‘zgarmas deb, integrallash y bo‘yicha olib boriladi. Ichki integralni hisoblash natijasi ***tashqi integral*** uchun integral osti funksiyasi bo‘ladi.

D soha

$$\begin{cases} c\le y\le d \\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo‘lsa , ikki karrali integral

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_s^d\left[\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right]dy=\int\limits_s^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

formula yordamida ikkita aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

1-misol. $\iint\limits_D x\ln ydxdy$ integralni D soha: $0\le x\le 4$, $1\le y\le e$ to‘g‘rito‘rtburchak bo‘lganda hisoblang.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\iint\limits_D x\ln ydxdy=\int\limits_0^4 xdx\int\limits_0^e \ln ydy=\int\limits_0^4 xdx[y\ln y-y]_1^e=\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8.$$

2-misol. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ integralni $D: y=2-x^2$, $y=2x-1$, chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

Yechish. Birinchi chiziq uchi (0,2) nuqtada OY o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola. Ikkinchisi chiziq to‘g‘ri chiziq. Bu chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

tenlamalar sistemasini yechib, $A(-3;-7),\ B(1,1)$ nuqtalarni topamiz. (1) formulaga asosan,

$$\iint_D (x,y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int_{-3}^{1} \left[x\cdot(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - \left[x\cdot(2x-1) - \frac{(2x-1)^2}{2} \right] \right] dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - \frac{4-4x^2+x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{4x^2-4x+1}{2} \right) dx =$$

$$\int_{-3}^{1}$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]_{-3}^{1} = 4\frac{4}{15}$$

bo‘ladi.

3. Ikki karrali integralning tatbiqlari. 1. $\iint_D f(x,y)dxdy$ integralda $f(x,y)=1$ bo‘lsa, $\iint_D dxdy$ integral D figuraning yuzini ifodalaydi, ya’ni

$$S = \iint_D dxdy$$

1-misol. $x = 4y - y^2,\ \ x + y = 6$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Berilgan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.

$$x = 4y - y^2,\ x = 6 - y \quad dan \quad 4y - y^2 = 6 - y, \quad y^2 - 5y + 6 = 0,$$

$y_1 = 2,\ y_2 = 3;\ \ x_1 = 4,\ x = 3;\ A(4;2)\ va\ B(3;3)$
kesishish nuqtalari bo‘ladi. Shunday qilib, yuza

$$S=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3\left(4y-y^2-6+y\right)dy=\int_2^3\left(5y-y^2-6\right)dy=$$

$$=\left(\frac{5}{2}y^2-\frac{y^3}{3}-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}\quad \text{(kv. birlik)}$$

2. Yuqoridan $z=f(x,y)$ sirt, quyidan $z=0$ tekislik, yon tomondan to‘g‘ri silindrik sirt bilan hamda XOY tekislikda D sohani hosil qiladigan ***silindrik jismning xajmi***

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

integral bilan xisoblanadi.

2-misol. $y=1+x^2$, $z=3x, y=5, z=0$ sirtlar bilan chegaralangan I oktantadagi jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Hajmi hisoblanishi kerak bo‘lgan jism yuqoridan $z=3x$ tekislik, yondan $y=1+x^2$ parabolik silindr, $y=5$ tekislik bilan chegaralangan. Shunday kilib

$$V=\iint_D 3xdxdy=3\int_0^2 xdx\int_{1+x^2}^{5}dy=3\int_0^2 x\left[5-(1+x^2)\right]dx=3\int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=3\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=3\left(2\cdot 2^2-\frac{2^4}{4}\right)=24-12=12\ \textit{куб.бир.}$$

3. Plastinka har bir nuqtasidagi zichlik funksiyasi $\gamma(x,y)$ bo‘lsa, uning massasi

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy$$

integral bilan hisoblanadi.

Plastinkaning OX *va* OY o‘qlarga nisbatan ***statik momentlari*.**

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy\ ,\ M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Plastinka birjinsli, ya'ni $\gamma = \cos nt$ bo'lganda uning ***og'irlik markazining koordinatalari***

$$\bar{x}_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint xdxdy}{S} \qquad \bar{y}_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$$

formulalar yordamida topiladi, bu yerda S, D sohaning yuzi.

Plastinkaning OX va OU o'qlariga nisbatan ***inersiya momentlari***

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \gamma(x,y)dxdy\,,\; J_y = \iint\limits_D x^2 \gamma(x,y)dxdy$$

formulalar bilan, koordinatlar boshiga nisbatan inersiya momenti

$$J_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)dxdy = J_x + J_y$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqoridagi formulalarda $\gamma(x,y) = 1$ deb tekis figuralarning geometrik inersiya momentlarini topish formulalarini olamiz.

3-misol. $y^2 = 4x + 4,\ \ y^2 = -2x + 4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og'irlik markazining koordinatlarini toping.

Yechish. Chiziqlar OX o'qiga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun $\bar{y}_c = 0$ $\bar{x}_c$ ni topamiz:

$$S = \iint\limits_D dxdy = 2\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = 2\int\limits_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right)dy = 2\int\limits_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4}\right)dy =$$

$$= 6\left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = 6\left(2 - \frac{8}{12}\right) = 8$$

$$\bar{x}_c = \frac{1}{8}\iint\limits_L xdxdy = \frac{1}{8}2\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdxdy = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \left[\frac{4-y^2}{4} - \frac{\left(y^2-4\right)}{16}\right]dy = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right)dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80}\right)_0^2 = \frac{2}{5}. \quad \text{Demak } C(\frac{2}{5};0).$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ integralni $D: y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

2. $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y dxdy$ integralni $D: 0\le x\le \pi, 0\le y\le \frac{\pi}{2}$ to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lganda hisoblang.

3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ integralni $D: y=x,\ x=0,\ y=1,\ y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘yicha hisoblang.

4. $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)dxdy$ integralni $D: x=0,\ x=y^2,\ y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

5. $x=y^2-2y,\ x+y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani ikki karrali integral yordamida hisoblang.

6. $y=2-x,\ y^2=4x+4$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang.

7. $x^2+y^2=8,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=4$ sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

8. $x=2y^2,\ x+2y+z=4,\ y=0,\ z=0$ sirtlar bilan chegaralangan silindrik jismning hajmini hisoblang.

9. $y=x^2,\ y=2x^2,\ x=1,\ x=2$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning og‘irlik markazini toping.

10. $y^2=x,\ x^2=y$ parabolalar bilan chegaralangan yuzaning og‘irlik markazini toping.

11. Bitta uchi koordinatlar boshida, qirralari mos ravishda $6, 8, 10$ bo‘lgan hamda zichlik taqsimoti $\rho(x,y,z)=x+y+z$ funksiya bilan berilgan parallelepipedning massasini toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki karrali integralni hisoblashga qanday masalalar keltiriladi?
2. Integral yig‘indi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki karrali integralning ta’rifi nimadan iborat?
4. Ichki va tashqi integrallar qanday integrallar?
5. Ikki karrali integral qanday hisoblanadi?
6. Ikki karrali yordamida nimalarni hisoblash mumkin?

5-mavzu. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashish belgilari

1. Sonli qatorlar haqida tushunchalar

1-ta’rif. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_1^{\infty} u_n \qquad (1)$$

cheksiz yig‘indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa n***- hadi*** yoki ***umumiy hadi*** deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

1) $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

qatorga ***garmonik qator*** deyiladi;

$$2)\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo‘lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

$$3)\ \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

2. Qator yig‘indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta’rifidan ma’lumki, uning hadlari cheksiz ko‘p bo‘lib, yig‘indisini oddiy yo‘l bilan qo‘shib, topib bo‘lmaydi. Shuning uchun qatorning yig‘indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1,\ \ u_1 + u_2 = S_2,\ \ u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \dots,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = S_n$$

qismiy yig‘indilar tuzamiz.

2-ta’rif. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limit mavjud bo‘lsa, S ga ***qator yig‘indisi*** deyiladi va ***qator yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo‘lmasa, qatorning yig‘indsi bo‘lmaydi va u ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

1-misol. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismiy yig‘indisi

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots..+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots.+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=1$ bo‘ladi.

3. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti).

Teorema. $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

shart bajariladi.

Isbot. (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun

$u_n=S_n-S_{n-1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty} S_n-\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n\to\infty$ dagi limiti 0 ga teng bo‘lmasa, u uzoqlashuvchi bo‘ladi. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ shartdan qatorning

yaqinlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat zaruriy shart bo‘lib, yetarli emas.

4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari

***1) Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi*.**

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad , \tag{3}$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{4}$$

qatorlar uchun $u_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2, \ldots, u_n \le v_n, \ldots$ tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (4) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (3) qator ham yaqinlashuvchi bo‘lidi va uning yig‘indisi (4) qator yig‘indisidan katta bo‘lmaydi; (3) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (4) qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2-misol. $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma’lumki, keyingi qator maxraji $q = \frac{1}{2}$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib, yaqinlashuvchidir. Hamma n lar uchun

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). *Dalamber belgisi*. Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

qator berilgan bo‘lsin. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ limit mavjud bo‘lib: $d < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $d > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $d = 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo‘ladi.

3-misol. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4-misol. $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{5} + \ldots + \dfrac{n}{2n-1} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish.

$$d = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} = \frac{2}{2} = 1.$$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) ***Koshi belgisi*.**

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud va $k < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $k > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $k = 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

5-misol. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n = \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisidan

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) Qator *__yaqinlashishining integral belgisi__*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

$f(n) = a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(n)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo‘lsin.

$\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b f(n)dn$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

6-misol. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n^2}$ $yoki$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyani tuzib, ushbu xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

7-misol. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n}$ $yoki$ $f(x) = \frac{1}{x}$

bo‘lganligi uchun

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnits qatori). Ishoralari har xil bo‘lgan qatorlarga ***o‘zgaruvchan ishorali*** qatorlar deyiladi.

O’zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi ***ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir*.**

Masalan, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$

qator birinchi hadi musbat bo‘lgan ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnits belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1-a_2+a_3+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots \qquad (5)$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu yerda $a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots, a_n, \ldots$ musbat sonlar.

***Leybnits belgisi*.** Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo‘yicha kamayuvchi, ya’ni 1) $a_1>a_2>a_3>\ldots$

va 2) umumiy hadining $n\to\infty$ dagi limiti no‘lga teng, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ bo‘lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (5) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi birinchi haddan katta bo‘lmaydi. Bu shartlardan birontasi bajarilmasa qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

8 –misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnits belgisi shartlarini tekshiramiz:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Demak, Leybnits belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnits belgisiga asosan, qator yaqinlashuvchi.

9-misol. $1{,}1-1{,}01+1{,}001+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0{,}1^n$ bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0,$$

Leybnits belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Taqribiy hisoblashlarda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo‘lmaydi, ya’ni

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

10-misol. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$

ni 0,1 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0{,}1$ bo‘lishi kerak.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Demak,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Bunda $S \approx 0{,}7$; $0{,}1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o‘zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

Absolyut va shartli yaqinlashish.

1-ta’rif. O’zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***absolyut yaqinlashuvchi*** deyiladi.

2-ta’rif. O’zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***shartli yaqinlashuvchi*** deyiladi.

11-misol. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

bu qator maxraji $q=\frac{1}{3}$ bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

12-misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

2. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

5. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

6. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\dots$

qator yaqinlashishini Dalamber belgisidan foydalanib tekshiring.

7. $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

8. $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

9. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots$

qator yaqinlashishini integral belgi bilan tekshiring.

10. $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

11. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

12. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

13. Quyidagi qatorlarning yaqinlashishini Koshi belgisidan foydalanib tekshiring:

1) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

14-22. Quyidagi qatorlar yaqinlashishini tekshiring hamda yaqinlashuvchi bo‘lsa, absolyutmi yoki shartli ekanligini aniqlang.

14. $\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{40}+\dots$

15. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

16. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{3n+5}$.

17. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$.

18. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

19. $\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$.

20. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$.

21. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$.

22. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\ldots$.

23. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring va uning yig‘indisini 0,01 aniqlikkacha hisoblang.

24. $e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots \qquad (n=0,1,2,\ldots)$

bo‘lsa, e^{-1} *ni* 0.001 aniqlikkacha taqriban hisoblang.

6-mavzu. Funksional va darajali qatorlar

1. Funksional qatorlar haqida tushunchalar.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), ..., u_n(x), ...$$

funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsin.

1-ta’rif. $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...$ (1)

ifodaga ***funksional qator*** deyiladi. (1) da $x = x_0$ biror son bo‘lsa, qo‘yidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \qquad (2)$$

(2) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va $x = x_0$ nuqtaga yaqinlashish nuqtasi deb ataladi.

1-misol. $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ (3)

funksional qator $x = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchidir, chunki

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Berilgan (3) funksional qator $x = 2$ nuqtada uzoqlashuvchi, chunki

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + ...$$

sonli qator uzoqlaщuvchi.

Funksional qator yaqinlashuvchi bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga, uning ***yaqinlashish sohasi*** deyiladi.

2. Darajali qatorlar va ularning xossalari.

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + ... + a_n(x - a)^n + ... \qquad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ o‘zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffitsiyentlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qonoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki,

$|x-x_0|<R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x-x_0|>R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya'ni $-x_0-R<x<-x_0+R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x=-x_0\pm R$ nuqtalarda hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo'ladi. $(x_0-R,\ x_0+R)$ intervalga ***yaqinlashish intervali,*** ga darajali qatorning ***yaqinlashish radiusi*** deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R=0$ *yoki* $R=\infty$ bo'lishi mumkin $R=0$ bo'lsa, darajali qator faqat $x=x_0$ nuqtada, $R=+\infty$ bo'lsa, butun sonlar o'qida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffitsiyentlari 0 dan farqli bo'lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

2-misol. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $a_n=\frac{1}{n},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Demak, $-1<x<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x=1$ bo'lsin. Bu holda

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$$

garmonik qator hosil bo‘lib, u uzoqlashuvchidir. $x=-1$ bo‘lsin, bu holda

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....$$

sonli qator hosil bo‘lib, u Leybnits belgisi shartlarini qanoatlantirgani uchun yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1\le x<1$ dan iboratdir.

3-misol. $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+...+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+...$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ bo‘lganligi uchun

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1.$$

Demak, $-1<x-2<1$ *yoki* $1<x<3$ intervalda qator yaqinlashuvchi. Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x=3$ bo‘lsin, bunda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, integral belgidan foydalansak uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko‘ring). $x=1$ bo‘lsa,

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u absolyut yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1\le x\le 3$ bo‘ladi.

3. Teylor va Makloren qatorlari. $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda qo‘yidagi Teylor formulasi o‘rinlidir:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n+R_n(x),$$

bu yerda $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left[a+Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<Q<1)$ bo‘lib, Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$a=0$ da Teylor formulasining xususiy holi - Makloren formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\quad bu\ erda$$

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[Qx\right]}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (0<Q<1).$$

$y=f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo‘lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

bo‘lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+....\ va$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+....$$

qatorlar hosil bo‘ladi. Bularning birinchisi ***Teylor qatori,*** ikkinchisiga ***Makloren qatori*** deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ bo‘ladigan qiymatlarida $f(x)$ ga yaqinlashadi.

A nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $(M$ biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim_{n\to\infty}R(x)=0$ bo‘ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyyamiz.

1) $f(x)=e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,...,f^{(n)}(x)=e^x,... \quad x=0 \quad deb$$
$$f(0)=1,\ \ f'(0)=1,\ \ f''(0)=1,\ ...,\ f^{(n)}(0)=1,...$$

Bularni Makloren qatoriga qo‘yib,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x=1$ desak,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+....$$

bo‘lib, e soni qator yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x)=\sin x$. Istalgan x uchun

$$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x,\ \ f'''(x)=-\cos x,\ \ f''''(x)=\sin x,....$$

Bundan

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=1,\ \ f''(0)=0,\ \ f'''(0)=-1,\ \ f''''(0)=0,\ ...$$

bo‘lib,bularni Makloren qatoriga qo‘ysak,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

hosil bo‘ladi.

Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty<x<+\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

qator hosil bo‘ladi, bu $f(x)=\cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo‘ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x)=(1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+....+...$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga ***binomial qator*** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.\quad (-1<x\le 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

5-misol. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\ldots.+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$$

bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos\sqrt{x}$ funksiya $x<0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos\sqrt{x}$ funksiyaga $0\le x<+\infty$ da yaqinlashadi.

5. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari. Bir necha misollar qaraymiz.

6-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^0$ ni $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^0=\cos\frac{\pi}{10}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4-\ldots$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10}=0{,}31416\,;\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2=0{,}09870\,;\quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4=0{,}00974\,.$$

va $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6<0{,}0001$ bo‘lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^0\approx 1-\frac{0{,}09870}{2}+\frac{0{,}00974}{24};\quad yoki\quad \cos 18^0\approx 0{,}9511\,.$$

7-misol. $\sqrt[5]{1,1}$ *ni* $0,0001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1,1}=(1+0,1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\sqrt[5]{1,1}=(1+0,1)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot 0,1+\frac{{}^{1}\!/\!{}_{5}\cdot({}^{1}\!/\!{}_{5}-1)}{2!}0,01+\frac{{}^{1}\!/\!{}_{5}\cdot({}^{1}\!/\!{}_{5}-1)\cdot({}^{1}\!/\!{}_{5}-2)}{3!}0,001+$$
$$+\ldots=1+0,02-0,0008+0,000048-\ldots.$$

bo‘ladi. To‘rtinchi had $0.000048<0.0001$ bo‘lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1,1}\approx 1+0,02-0,0008=1,0192\,.$$

8-misol. $\sqrt[3]{130}$ *ni* $0,001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. 5^3 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo‘lganligi uchun $130=5^3+5$deb olish qo‘lay bo‘lib,

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3}+5=\sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})}=5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}}=5(1+\frac{1}{3}0,04+\frac{{}^{1}\!/\!{}_{3}\cdot({}^{1}\!/\!{}_{3}-1)}{2!}0,0016+$$
$$+\frac{({}^{1}\!/\!{}_{3}({}^{1}\!/\!{}_{3}-1)\cdot({}^{1}\!/\!{}_{3}-2))}{3!}0,000064+\ldots.)=5+\frac{1}{3}\cdot 0,2\cdot\frac{1}{9}\cdot 0,0016+5\frac{25}{81}\cdot 0,000032-\ldots$$

oxirgi qatorda to‘rtinchi had $0,001$ dan kichik bo‘lganligi uchun, birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130}\approx 5+0,0667-0,0009\approx 5,066.$$

9-misol. $\ln 1,04$ *ni* $0,0001$ gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1+0,04)=0,04-\frac{0,04^2}{2}+\frac{0,04^3}{3}-\frac{0,04^4}{4}+\ldots.,\quad \text{yoki}$$

$$\ln 1,04=0,04-0,0008+0,000021-0,00000064+\ldots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had $0,0001$ dan kichik bo‘lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$\ln 1{,}04 \approx 0{,}0392$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\dots$

funksional qatorning $x=0$ *va* $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

2. $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

3. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4-8 misollarda qatorning yaqinlashish intervalini aniqlang.

4. $(x-4)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3+\dots$

5. $x+(2x)^2+(3x)^3+(4x)^4+\dots$

6. $5x+\frac{5^2x^2}{2!}+\frac{5^3x^3}{3!}+\frac{5^4x^4}{4!}+\dots$

7. $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^8}{4}+\dots$

8. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^4+\dots$

9. Ushbu funksiyalarni darajali qatorga yoying.

1) $f(x)=3^x$; 2) $f(x)=e^{-2x}$; 3) $f(x)=\cos^2 x$.

10. Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib quyidagilarni:

1) e sonini $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ni $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

3) $\sin 9^0$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

4) $\sqrt[3]{1{,}06}$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

5) $\ln 0{,}98$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

6) $\ln 1{,}1$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda

taqribiy hisoblang.

7-mavzu. Umumiy tushunchalar.Birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamalar

Reja

1. **Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.**
2. **Birinchi tartibli tenglamalar.**
3. **O’zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar.**
4. **Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar.**

Mavzuning tayanch tushunchalari

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang‘ich shartlar, o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

1. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. 1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga ***differensial tenglama*** deyiladi.

Noma’lum funksiya faqat bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***oddiy differensial tenglama*** *deyiladi*.

Noma’lum funksiya ikki yoki undan ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamalarga, ***xususiy hosilali differensial*** *tenglamalar* deyiladi.

2-ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga ***differensial tenglamaning tartibi*** deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo‘ladi.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

kњrinishda belgilanadi.

3-ta'rif. ***Differensial tenglamaning yechimi*** **yoki** ***integrali*** deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga ***integral chiziq*** deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx}=2x, \quad y=x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalarini o'rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo'ladigan umumiy usullar yo'q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

2. Birinchi tartibli tenglamalar. Birinchi tartibli tenglama *umumiy* holda

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

ko'rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y'=f(x,y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{2}$$

bo'ladi. (2) tenglamaning o'ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo'lsa, tenglama

$$y'=f(x) \tag{3}$$

ko'rinishida bo'lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko'rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni $y=F(x)+C, \quad [F(x)]'=f(x)$. Shunday qilib, (3) ko'rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi.

1-ta'rif. $y=\varphi(x,C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o'zgarmas bo'lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

2-ta’rif. C ixtiyoriy o‘zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko‘pincha qo‘shimcha

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0, y_0 lar berilgan sonlar bo‘lib, bu shartga boshlang‘ich shart deb ataladi.

3-ta’rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

1-misol. $y' = \dfrac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Endi boshlang‘ich shartdan foydalanib, $5tg0 + C = 3,$ bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5tgx + 3$ bo‘ladi.

3. O’zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

4-ta’rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***o‘zgaruvchilari ajralgan*** differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya’ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

2-misol. $xdx + ydy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \;\; yoki \;\; x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo‘ladi .

5-ta’rif. $y' = f_1(x) f_2(y)$ $yoki$ $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***<u>o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama</u>*** deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo‘lib, dx ga ko‘paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O’zgrauvchilarini ajratib $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4. <u>Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar</u>. $f(x,y)$ funksiya uchun $f(kx,ky) = k^{\alpha} f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya uchun $f(kx,ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ bo‘lib, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya $\alpha = 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo‘ladi. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, \alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiyadir(buni tekshirib ko‘ring).

6-ta’rif. $y' = f(x,y)$ differetsial tenglamada $f(x,y)$ funksiya no‘linchi tartibli bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***<u>birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama</u>*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1, v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

bњlib, $v + xv' = v + v^2$ yoki $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamada o‘zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo‘lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo‘lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $(1 + y)dy - (1 - x)dx = 0;$ 2) $(xy^2 + x)dx = (y - x^2 y)dy;$

3) $x^2 dy + (y - 1)dx = 0;$ 4) $2(xy + y)dx = xdy.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

1) $x^2dx + ydy = 0,\ \ x = 0\ \ da\ \ y = 1;$

2) $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0,\ \ x = 0\ bo'\lg anda\ \ y = -1;$

3) $(1+x)ydx = (y-1)xdy,\ \ x = 1\ da\ y = 1.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-y)y}{x^2}$; 2) $x^2y' = y^2 - xy + x^2$; 3) $(x^2 - 2xy)dy = (xy - y^2)dx.$

4. Boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

1) $xy^2 - y' = x^3 + y^3,\ \ x = 1\ \ bo'\lg anda\ \ y = 3;$

2) $(x-y)dx + xdy = 0,\ \ x = 1\ \ bo'\lg anda\ \ y = 0;$

3) $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0,\ \ x = 1\ \ da\ \ y = 1.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?
8. Boshlan□ich shart deb nimaga aytiladi?
9. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
10. Qanday tenglamaga o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?
11. Birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb nimaga aytiladi?6.

8-mavzu. Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to‘la differensialli tayenglamalar

Reja

1. ***Birinchi tartibli chiziqli differensial*** **tenglamalar.**

2. *Bernulli tenglamasi*.

3. **Rikkati tenglamasi.**

4. To‘la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko‘paytuvchi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

1. ***Birinchi tartibli chiziqli differensial*** **tenglamalar.**Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $p(x)$ *va* $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x) = x, \quad g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx}dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}}d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

2. *Bernulli tenglamasi*. Bunday differensial tenglama

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamada n=0 yoki n=1bo‘lsa, chiziqli tenglama hosil bo‘ladi. Demak $n \neq 0{,}1$ bo‘lgan ,o‘zgarmas. Bernulli tenglamasini y^n ga bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \qquad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

almashtirish bajarsak,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \ \ yoki \ \ z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo‘ladi.

2-misol. $y' + xy = xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

tenglamani hosil qilamiz. $\frac{1}{y^2}=z$ almashtirish olsak $z'=\frac{2y'}{y^3}$ bo‘ladi. Bularni tenglamaga qo‘yib,

$$\frac{z'}{2}+xz=x, \quad z'-2xz=-2x$$

chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z=e^{2\int xdx}\left[C+\int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[C-\int 2xe^{-x^2}dx\right]=$$
$$e^{x^2}\left[C+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right]=e^{x^2}\left[C+e^{-x^2}\right]=Ce^{x^2}+1.$$

Shunday qilib

$$z=C\cdot e^{x^2}+1$$

bo‘ladi, z ning o‘rniga $\frac{1}{y^2}$ ni qo‘yib,

$$\frac{1}{y^2}=C\cdot e^{x^2}+1, \quad y^2=\frac{1}{Ce^{x^2}+1},$$

echimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo‘ladi.

3. **Rikkati tenglamasi. Ushbu**

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \qquad \textbf{(4)}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $a(x),b(x),c(x)$ funksiyalar biror intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar. (4) tenglamada $a(x)=0$ bo‘lsa, chiziqli tenglama, $c(x)=0$ bo‘lsa, Bernulli tenglamasi kelib chiqadi.

Umuman olganda Rikkati tenglamasi yechimini elementar funksiya va ularning integrallari yordamida yechib(kvadraturada integrallab) bo‘lmaydi.

Ushbu xususiy holni qaraymiz: Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa , bu tenglama yechimi kvadraturalarda integrallanadi. $y=\varphi(x)$

Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi bo‘lsin. $y=\varphi(x)+z$ almashtirish bajaramiz: bu holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}$$

bo‘lib, (4) tenglama

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}=a(x)[\varphi(x)+z]^2+b(x)[\varphi(x)+z]+c(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan, $y=\varphi(x)$ (4) tenglama yechimi, ya’ni

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a(x)[\varphi(x)]^2+b(x)\varphi(x)+c(x)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dz}{dx}=[2a(x)\varphi(x)+b(x)]z+a(x)z^2$$

tenglama hosil bo‘lib, bu Bernulli tenglamasidir. Bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini qanday topishni yuqorida o‘rgandik.

3- misol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=-y^2+2xy+\left(5-x^2\right)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y=\varphi(x)=ax+b$ ko‘rinishda izlash maqsadga muvofiq, bu holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a,\ a=-(ax+b)^2+2x(ax+b)+5-x^2$$

bo‘lib, bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirsak $a=1, b=\pm 2$ kelib chiqadi.

Demak, $\varphi(x)=x+2, \varphi(x)=x-2$ xususiy yechimlar bo‘ladi. $\varphi(x)=x+2$ xususiy yechim uchun Bernulli tenglamasi

$$\frac{dz}{dx}=-4z-z^2$$

bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4ч} - 1}$$

bo‘ladi.

4. To‘la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko‘paytuvchi.

1) To‘la differensialli tenglama.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

ko‘rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x, y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya’ni

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

bo‘lsa, bunday tenglama to‘la differensialli tenglama deyiladi.(1) tenglama to‘la differensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To‘la differensialli tenglama ta’rifidan $du = 0$ bo‘lib, bundan $u(x, y) = C$ kelib chiqadi(C ixtiyoriy o‘zgarmas). $u(x, y)$ funksiyani topish uchun y ni o‘zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanligidan $du = M(x, y)dx$ bo‘ladi. Oxirgi tenglikni x bo‘yicha integrallasak,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallaymiz va natijani $N(x, y)$ ga tenglaymiz, chunki $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ edi.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y)=\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$

Shunday qilib,

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

1-misol. Ushbu

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}dy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}\quad ,N=\frac{2y}{x^3}$$

bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4}\quad ,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$

bo‘lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

bo‘ladi, ya’ni berilgan differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘ladi. Endi $u(x,y)$ funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

bo‘lganligi uchun

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y)\quad(2)$$

bo‘lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma’lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y) = 0$ bo‘lib,

$$\varphi(y) = C_1.$$

bo‘ladi. (2) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1) = 0$$

bo‘lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo‘lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo‘ladi, bunda $C = C_2 - C_1$.

2) Integrallovchi ko‘paytuvchi.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

differensial tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lmasin. Ayrim hollarda shunday $\mu(x, y)$ funksiyani tanlab olish mumkin bo‘ladiki, berilgan tenglamani shu funksiyaga ko‘paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lishi mumkin. Hosil qilingan differensial tenglamaning umumiy yechimi Bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo‘ladi. Bunday $\mu(x,y)$ funksiyaga berilgan tenglamaning integrallavchi ko‘paytuvchisi deyiladi. Integrallovchi ko‘paytuvchini topish uchun , berilgan tenglamani hozircha noma’lum bo‘lgan μ ga ko‘paytirib,

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to‘la differensialli bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

bo‘lib,

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamani μ ga bo‘lcak,

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\mu\partial y}$$

bo‘lganligi uchun

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

bo‘ladi.

Umumiy holda μ x,y larga bog‘liq, ya’ni $\mu(x,y)$. Berilgan tenglama faqat x ga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=0$ bo‘lib,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \text{ yoki } \frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (4)$$

bo‘ladi. Differensial tenglama faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ bo‘lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad (5)$$

bo‘ladi. Bu hollarda (4) va (5) tengliklarni bevosita integrallab

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N dx}, \quad \mu = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M dx}$$

integrallovchi ko‘paytuvchini topamiz. Bunda (4) va (5) nisbatlar, birinchi holda y o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan, ikkinchi holda x o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan integrallovchi ko‘paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

2-misol.

$$(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xydy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli yoki to‘la differensialli emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(x^2 - 3y^2\right)_y' = -6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy)_x' = 2y.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

bo‘lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{ч} dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

hosil bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$ funksiyaga ko‘paytirsak,

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2xy}{x^4} dy = 0$$

bo‘lib, keyingi tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya’ni oxirgi differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o‘rgandik.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$;

5) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - ytgx = ctgx$;

8) $y' + y\cos x = \sin 2x.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

1) $xy' + y = 3,\ x = 1\ da\ \ y = 1$; 2) $(1 + x^2)y' - xy = 2x,\ x = 0\ \ bo'\lg anda\ \ y = 0$;
3) $xy' + y = x + 1,\ \ x = 2\ \ bo'\lg anda\ \ y = 3.$

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo‘lganda $y = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x = 1$ bo‘lganda $y = -1$ boshlang‘ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

4. Ushbu to‘la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$; 2) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$;

3) $2(3xy^2 + 2x^2)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0$; 4) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$;

5) $\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+12y^3\right)dy=0$; 6) $3x^2e^y\,dx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$.

5. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

1) $\left(x^2-y\right)dx+x\,dy=0$; 2) $\left(y+xy^2\right)dx-x\,dy=0$;

3) $y^2\,dx+(xy-1)\,dy=0$; 4) $\left(\sin x+e^y\right)dx+\cos x\,dy=0$;

5) $(x\cos y-y\sin y)dx+(x\sin y+y\cos y)dy=0$; 6) $2xtgx\,dx+\left(x^2-2\sin y\right)dy=0.$

9-mavzu. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Reja

1. $y^{(n)}=f(x)$ **ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.**

2. $F(x,y',y'')=0$ **ko‘rinishdagi differensial tenglamalar.**

3. $F(y,y',y'')=0$ **(erkli o‘qzgaruvchi oshkor qatnashmagan) ko‘rinishdagi differensial tenglamala*r*.**

4. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.

5. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Yuqori tartibli differensial tenglamalar, bevosita ketma-ket integrallanib yechiladigan yuqori tartibli tenglamalar, tartibni pasaytirish Bilan yechiladigan yuqori tartibli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar, chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi.

1. $y^{(n)}=f(x)$ **ko‘rinishdagi differensial tenglamalar**

$y^{(n)}=f(x)$ **ko‘rinishdagi differensial tenglama *ketma-ket*** n marta integrallash bilan uning yechimi topiladi. Har bir integrallashda bittadan ixtiyoriy o‘zgarmas hosil bo‘lib, natijada $\underline{n}$ ta ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq umumiy yechim hosil bo‘ladi.

1-misol. $y'' = \cos 2x$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda $y = 0,\ y' = 0$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(x)$ desak, $y'' = p'$ bo‘lib, berilgan tenglama

$$p' = \cos 2x \ \ yoki \ \ \frac{dp}{dx} = \cos 2x, \quad dp = \cos 2x dx$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Oxirgi tenglamani integralab,

$$p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

tenglamani hosil qilamiz.

$p = y'$ bo‘lganligi uchun

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

ya’ni,

$$dy = \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \int \ C_1 dx, \ \ y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x$$

umumiy yechimni olamiz.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarda Koshi masalasini yechamiz: $x = 0$ bo‘lganda $y = 0,\ y' = 0$ bo‘lganligi uchun,

$$-\frac{1}{4}\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 0 + C_1 = 0, \ \ C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4} \ .$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

bo‘ladi.

2. $F(x, y', y'') = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglamalar

$F(x, y', y'') = 0$ ko‘rinishdagi differensial tenglama $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish orqali $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

2-misol. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani yechib:

$$P = e^{\int \frac{1}{x} dx}\left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx\right] = e^{\ln x}\left[C_1 + \int x e^{-\ln x} dx\right] = x(C_1 + \int x e^{-\ln x} dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1 x + x^2, \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

3. $F(y, y', y'') = 0$ *(erkli o‘qzgaruvchi oshkor qatnashmagan) bunday differensial tenglamaning* umumiy yechimini $y' = z(y)$ almashtirish olib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib yechim topiladi.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y).$$

bo‘ladi.

3-misol. $yy'' - 2y'^2 = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = z(y)$ almashtirish olib, $y'' = z\frac{dz}{dy}$ ekanligini hisobga olsak,

$yz\dfrac{dz}{dy}-2z^2=0$ tenglama hosil bo‘ladi. Bu birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$\dfrac{ydz}{dy}=2z \quad yoki \;\; \dfrac{dz}{z}=2\dfrac{dy}{y},$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln z = 2\ln y+\ln C_1$$

bundan

$$z=C_1y^2$$

bo‘ladi. $z=\dfrac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak ,

$$\frac{dy}{dx}=C_1y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2}=C_1dx$$

bo‘ladi.Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2 \quad yoki \;\; y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$$

bo‘ladi.Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga* keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y''+p(x)y'+g(x)y=f(x) \tag{1}$$

bu yerda y noma’lum funksiya, $p(x),\ g(x),\ f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x)=0$ bo‘lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x)\neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi no‘ldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \;\; yoki \;\; \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \;\; \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo‘ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ va $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog‘langan, chunki $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-ta’rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog‘langan yoki chiziqli bog‘lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘lga teng bo‘ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli bo‘lsa ular chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi.

5. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p masalalari (1) tenglamada $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffitsiyentlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lib $p,\ g$ lar o‘zgarmas koeffitsiyentlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffitsiyentli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo‘ladi, bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rsatish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan yechimlar bo‘ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Shunday qilib, (3)bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $r -$ noma’lum son. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo‘lib,(3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \ \ yoki \ \ r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bьladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) $r_1 \; va \; r_2$ lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) $r_1 \; va \; r_2$ haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) $r_1 \; va \; r_2$ kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ va $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog‘lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + \beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - \beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,\quad y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun

$$y_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x\quad va\quad y_2=\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\qquad(8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y''+6y'+13y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{-6\pm4i}{2};$$

$r_1=-3+2i,\quad r_2=-3-2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha=-3,\ \beta=2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$$

bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y''-y'-2y=0$ differensial tenglamaning $x=0$ bo‘lganda $y=8,\quad y'=7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo‘lib, $r_1 = -1, \quad r_2 = 2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo‘lib , $x = 0$ bo‘lganda $y = 8, \quad y' = 7$ boshlang‘ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3, \quad C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2, \quad y' = 1, \; y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1;$ 2) $yy'' + y'^2 = 0;$ 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0;$ 4) $y'' y^3 = 1;$
5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3;$ 6) $y'' + y' tgx = \sin 2x;$ 7) $y'' + 2y'^2 = 0;$
8) $xy'' - y' tgx = e^x x^2;$ 9) $2yy'' = (y^1)^2;$ 10) $t\dfrac{d^2 s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 2) $y'' - 2y' - 5y = 0;$ 3) $y'' - y = 0;$
4) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$ 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0;$ 6) $y'' - 2y' + 50y = 0;$
7) $y'' - 4y' + 7y = 0;$ 8) $y'' + 6y' = 0.$

4. $y''+10y'+25y=0$ tenglamaning $x=1$ bo‘lganda, $y=e^{-5}$, $y'=3e^{-5}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?
2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?
3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?
4. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?
6. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?
7. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?
8. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?
9. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

10-mavzu. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Reja

1.Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar .

2. Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, birorta xususiy yechim, birorta xususiy yechimni tenglamaning o‘ng tomoni ko‘phad bo‘lganda topish, sinus va kosinus funksiyalar yig‘indisi bo‘lganda topish, aniqmas koeffitsiyentlar usuli, ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli, ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli, logistik chiziq, talab va taklifni differensial tenglama yordamida tahlili.

1.Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi,** bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\overline{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2)echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$funksiya:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x),$ bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k xarakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x),$ $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo‘lib, uning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \qquad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo‘lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bьlmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi ***aniqmas*** A, B *va* C ***koeffitsiyentlarni*** *topish* lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$$
$$y''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$e^{2x}\left[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)\right] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo‘ladi.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Uchta noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak $A = 5,\ B = -12,\ C = 3$ bo'ladi (buni bajarib ko'ring).

Demak, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo'ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan

$$y = \overline{y} + y_1 = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

bo'ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***<u>aniqmas koeffitsiyentlar usuli</u>*** deyiladi.

2-misol. $y'' - 4y' = 3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2 - 4r = 0$ bo'lib, $r_1 = 0;\ r_2 = 4$ uning ildizlari bo'ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{y}(x) = C_1 e^{0x} + C^2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}$$

bo'ladi. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo'lib, $\alpha = 0$ va no'l xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_1 = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechim

$y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, k xarakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari

$r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

bo‘ladi.

$\beta = 1; \quad i\beta = i$

bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya’ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topib,

$$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$

$$y_1''(x) = B\cos x - A\sin x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x +$$
$$+ (-2A - Bx)\sin x$$

berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x \qquad yoki$$

$$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0, \quad A = -\dfrac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamaning xarakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i; \quad r_2 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y'(x),\ \ y''(x)$ hosilalarni topib berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A+4B)\cos x + (4B-4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases} 4A+4B=2. \\ 4B-4A=-1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A=\frac{3}{8},\ B=\frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechiminitopamiz:

Umumiyechimdanhosila

$$y'(x) = -2e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x) - \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x$$

bo‘ladi, boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 *va* C_2 noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1 = \frac{5}{8},\quad C_2 = \frac{25}{8}$.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x}\left(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x\right) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

2. Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlari

Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1). *Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli.* Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflansin, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investitsiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1.$

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda c ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2). ***Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli*** Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib

$\frac{dP}{dQ} < 0$ bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \ \ a >, \ b > 0$$

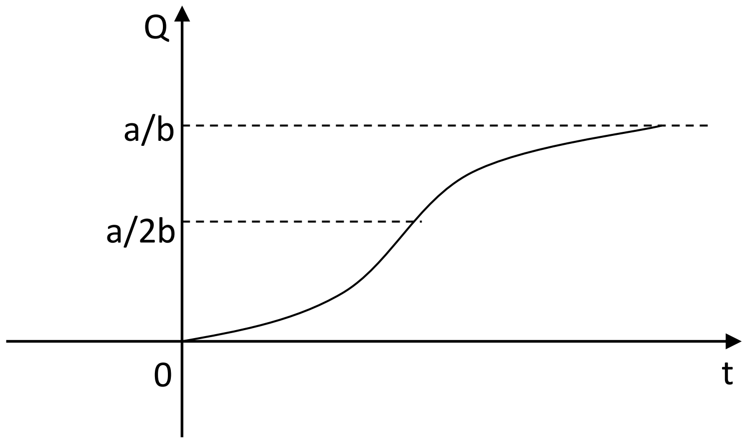
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \ \ yoki \ \ Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0 \ va \ Q = \frac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0,\ \ Q < \frac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \frac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\frac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



. 1-chizma.

3). *Talab va taklifni tahlil qilish*. Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan xarakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib ushbu bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \qquad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi xaridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o‘zgarishi orasidagi bog‘lanishni tahlil qilaylik. Ma’lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffitsiyentli, chiziqli, bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o‘zgarmas, ya’ni qaror topgan narxni olamiz, hamda buni (3) tenglamaga qo‘yib $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib (9) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ *da* $p(t) \to 3$ bo‘ladi, ya’ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo‘lganda, narx $p(0) = 4$ va o‘sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo‘lsin. $t = 0$ bo‘lganda $p(0) = 4$ bo‘lganligi uchun (10) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo‘lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4\sin t)$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;
6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglama uchun $x = 0$ bo‘lganda $y = 1,\ y' = \frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarda, Koshi masalasini yeching.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?
2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?
3. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli nimadan iborat?
4. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?
5. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?
6. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?
7. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

MUNDARIJA:

Qaydlar uchun

T.H.RASULOV
A.SH.RASHIDOV

OLIY MATEMATIKA

(o‘quv qo‘llanma)
(2-qism)

Muharrir: *E.Eshov*
Tex.muharrir: *D.Abduraxmonova*
Musahhih: *M.Shodiyeva*
Badiiy rahbar: *M.Sattorov*

Nashriyot litsenziyasi № 022853. 08.03.2022.
Original maketdan bosishga ruxsat etildi: 12.02.2023. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. “Times New Roman” garnitura 1/16. Ofset bosma usulida. Ofset bosma qog‘ozi.
Bosma tabog‘i 6,75 Adadi 20. Buyurtma № 37

KAMOLOT

“BUXORO DETERMINANTI” MCHJ
bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahar Namozgoh ko‘chasi 24 uy
Tel:. + 998 98 778 47 27