T.H.RASULOV
A.SH.RASHIDOV

OLIY MATEMATIKA

(o‘quv qo‘llanma)

“Durdona” nashriyoti
Buxoro - 2022

UO'K 512(075.8)
22.1ya73
R 25
Rasulov, T.H., Rashidov, A.Sh.
Oliy matematika [Matn] : o‘quv qo‘llanma / T.H. Rasulov, A.Sh. Rashidov.- Buxoro: "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona, 2022. -188 b.

KBK 22.1ya73

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi va Amaliy san`at ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallab yozilgan.

Taqrizchilar:

Teshayev Muxsin Xudoyberdiyevich	O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Buxoro bo‘linmasi bosh ilmiy xodimi, f.-m.f.d, professor
Rasulov Xaydar Raupovich	Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi, f.-m.f.n., dots.

O’quv qo’llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘tra maxsus ta’lim vazirligining 2022-yil 2-vagustdagi 257-sonli buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan.
Ro‘yxatga olish raqami 257-046.

ISBN 978-9943-8538-8-1

ANNOTATSIYA

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining 60111200 - Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi va 60210800-Amaliy san`at ta’lim yo‘nalishi uchun qabul qilingan davlat ta’lim standarti, malaka talablari asosida “Matematika” fanidan tuzilgan fan dasturi asosida shakllantirilgan. Qo‘llanma analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda ehtimolliklar nazariyasi qisqa kursini o‘z ichiga oladi. Mazkur qo‘llanmada asosan Oliy matematika fani dasturida keltirilgan barcha mavzulari to‘liq qamrab olingan. Barcha mavzularda nazariy ma’lumotlar, namunaviy masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo‘ljallangan test topshiriqlari keltirilgan.

АННОТАЦИЯ

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений по специальностям «Математика» 60111200 – Изобразительное искусство и инженерная графика и 60210800 – Прикладное искусство. Пособие включает краткий курс аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления и теории вероятностей. Предусмотрены теоретические и практические занятия по темам, а также тесты для самостоятельного выполнения.

KIRISH

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining 60111200 - Tasviriy san`at va muhandislik grafikasi va 60210800-Amaliy san`at ta’lim yo‘nalishi uchun qabul qilingan davlat ta’lim standarti, malaka talablari asosida “Matematika” fanidan tuzilgan fan dasturi asosida shakllantirilgan. Qo‘llanma analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda ehtimolliklar nazariyasi kurslarini o’z ichiga oladi.

Mazkur qo‘llanmada asosan Oliy matematika fani dasturida keltirilgan barcha mavzulari to‘liq qamrab olingan. Ular:

1-mavzu: Matematika faniga kirish

2-mavzu: To`plamlar va ular ustida amallar

3-mavzu: Matematik mantiq elementlari

4-mavzu: Matritsa va determinantlar

5-mavzu: Vektorlar. tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

6-mavzu: To`g`ri chiziq tenglamalari

7-mavzu: Tekislik tenglamalari

8-mavzu: Funksiya

9-mavzu: Funksiya limiti

10-mavzu: Funksiya hosilasi

11-mavzu:Aniqmas integral

12-mavzu: Aniq integral

13-mavzu: Kombinatorika elementlari

14-mavzu: Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

15-mavzu: Matematik modellar

Barcha mavzularda nazariy ma’lumotlar, namunaviy masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo‘ljallangan keys topshiriqlari keltirilgan. Bundan tashqari, qo‘llanmada keltirilgan mavzular bo‘yicha egallangan bilimlarni mustahkamlash uchun test topshiriqlari ham o‘z aksini topgan.

1-MAVZU: MATEMATIKA FANIGA KIRISH

REJA:

1. **Matematika faniga kirish. Matematika fanining rivojlanish tarixi va bosqichlari**
2. **Matematikaning aksiomatik qurilishi va uning usullarini jamiyat taraqqiyotidagi tutgan o'rni**
3. **Matematik belgilar va amallar**

Qadim ota-bobolarimiz dastlab bor narsalarni taqsimlash (masalan meros bo'lish) jarayonida, har bir shaxs yoki to'daning haqini ajratib berish hisobini olib borishgan. Turmush va hayotiy sharoitlar bunday hisoblar soni, sifatini oshirib borgan.

Fan sifatida eramizdan oldingi III asrda grek olimi **Evklid** yozgan (to'plagan) 5 tomdan iborat va «Nachalo» (Boshlang`ich) deb atalgan kitoblardan boshlanadi. To eramizning XVI asrigacha bu matematika tarraqqiyoti yo'lida bizning bobolarimiz ham sezilarli hissa qo'shishgan.

Al-Xorazmiy (787-850) Abdullo Muhammad ibn Muso al Majusiy «Hind hisobi» kitobini yozib arifmetika fanining asoschisi bo'lgan. Unda hozirda sizu-biz ya`ni butun dunyo foydalanadigan **o'nlik** sanoq sistemasi taklif qilingan.

Algebra atamasi Xorazmiyning «Al-kitob al muxtasar fi hisob Al-jabr val-muqobala» (Al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob) nomli risolasidagi «Al-jabr» so'zining lotincha yozilishidan olingan.

Bizgacha yetib kelgan nusxasi 1342 yili ko'chirilgan arabcha nusxasidir.

1145 yili **Robert Gester** ingliz tiliga, 1160 yili italiyalik **Gerardo** lotinchaga tarjima qilgan, 1486 yilda Iogan Vidman Leypsig universitetida qilgan dokladida Xorazmiy kitobidan olinganligini keltirgan.

«Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarni o'z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boylik bo'lish va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur».

(deb yozadi kitob muqaddimasida Al-Xorazmiy)

«Hind hisobi» kitobi undan keyingi arifmetikadan asar yozuvchi barcha olimlarga qolip bo'lib xizmat qilgan bo'lsa, «Al-jabr va-l-muqobala kitob» asari algebraga asos soldi. Undan oldin hyech kim algebra bo'yicha bunday kitob yozmagan.

Abu Rayxon (Beruniy) Muhammad Ibn Ahmad (973-1048)

Evklidning "Nachalo" sini, Ptolomeyning Al'magest asarlarini sanskritdan zamon tiliga aylantirgan «Astrolyabiya traktati», «Hindiston» asarlari bilan dunyoga mashhur geometr, faylasuf sifatida tanilgan.

U

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\sin 2a, \sin a/2,$$

$$\sin \alpha/4 = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos a}}$$

$$\sin a/4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos a}}}$$

… formulalarning birinchi ijodkoridir.

Umar Xayyom (1048-1131) (Xayyom Abul Fatx Omar Ibn-Ibroxim) Sa-marqandda (Xurosondan haydalib) yashagan davrida «Algebra va-l-muqobala asarlarining davomi haqida traktat», 1077 yili «Evklid asosiy postulatlari haqida kommentariylar» traktatini yozgan. Bularda egri chiziqli trapetsiya tushunchalariga asos solingan.

Abul-Vafo Al-Buzjoniy (940-998).

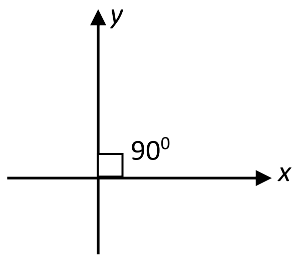
Abu-Ali Ibn Sino al- Xusayn ibn Abdullo (980-1037).

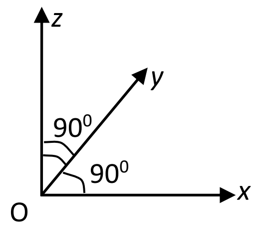
Nasritdin at Tusiy (1201-1274)-100 dan ortiq matematik asarlar avtori.

Al Koshi G'iyositdin Jamshid ibn Masud (1394-1449) Ulug'bek observatoriyasida ishlagan, 1427 yilda «Arifmetika kaliti» asarini yozgan.

Hurmatli o'quvchilar bu sohada ko'proq ma`lumot olishni istasangiz (1), (2) adabiyotlarga murojaat qilishingiz mumkin.

XV asrlardan boshlab matematikaning yangi amallari vujudga kela boshladi va XVIII asrga kelib biz hozirgi vaqtda «Oliy matematika» deb ataydigan qismi, to'la o'z asosi va isbotiga ega bo'lib, shakllandi. Bunda «Dekart o'zgaruvchi miqdorlari matematikada burilish nuqtasi bo'ldi, keyinchalik u differensial va integral hisob taraqqiyotiga asos bo'ldi» -deb yozadi F.Engels.





Dekartning matematikada olib borgan ishlari uni analitik geometriyaning buyuk asoschilaridan deb atashga imkon beradi. Juda ko’p tadbiqlarga ega bo’lgan Dekart spirali (p=a), Dekart qiyshiqligi, Dekart yaprog`i kabi chiziqlar matematikada anchagina bo’lib, uning nomi bilan ataladi.

Davrimiz (XX asr) da oliy matematika shunchalik zo’r taraqqiy etib ketdiki, u kirib bormagan fan, iqtisodiy yoki texnik soha yo’q. Unda ijod qilib, yangi-yangi sohalar ochayotgan olimlar besanoq. Bizning xalqimiz farzandlari ham bu ulkan fan oqimida o’z o’rinlariga ega. Masalan, T.A.Sarimsoqov, S.H.Sirojiddinovlar dunyoga taniqli , Toshkent ehtimollar nazariyasi maktabini vujudga keltirdilar.

Bugungi kunda biz, matematika zimmasiga tushgan barcha vazifalarga matematika tadbiq etilayotgan barcha sohalarga nazar solib, «U qanday fan ?” degan savolga yaxshigina javob olamiz. «Matematika bu borliqni shakliy ko’rinishda va miqdoriy munosabatlarda o’rganuvchi fan». Ha borliqning **mazmunini** uning **shakli va miqdori** belgilaydi. Shakl va miqdor o’zgarishi **hodisalar** deb ataladi.

Har bir hodisada bir va bir nyecha faktor ishtirok etadi. Har bir faktor o’z kattaligiga ega bo’lib, hodisa jarayonida yoki aktiv ishtirok etadi yoki shu hodisada namayon bo’ladi. Aynan bir hodisada ishtirok etayotgan barcha faktorlar o’zaro bog`liqdir. Ana shu bog’liklikni o’rganuvchi fan matematikadir.

O’rganishni osonlashtirish uchun matematika o’z simvol (belgi)lariga ega. Simvollar bu amal belgilari va faktor kattaliklari belgilaridir.

$(+,-,x,:,.....d,()',\lim....:)(x,y,z,t,v,w,f,.....)$

Masalan. *Y*=KX matematik ifoda bo’lib, hayotdagi ko’pgina hodisalarni ifodalay oladi.

a) X- yer maydoni (o’lchami ar, gektar, KBM,…..)

Y- yerdan olinadigan hosil miqdori, (sentner,tonna)

K- mutanosiblik koeffisiyenti (bog’liqlik koeffisiyenti: $\frac{\varphi}{2a}, \frac{T}{2a}, ...$) deb belgilaydigan bo’lsak, yerdan olinadigan hosil ekin maydoniga bog` liq ekan. Bu ikki faktor ishtirok etayotgan hodisa ekin ekib hosil olish hodisasidir.

b) Agar (a) bo’limdagi hosil olish protsessini chuqurroq tekshiradigan bo’lsak, yig’ib (yetishtirib) olinayotgan hosil miqdoriga yer maydonidan (X) tashqari yana bir qadar boshqa faktorlar ta’sir etayotganligini ko’ramiz.

Q- Ekinning o’sish davrida ekin qabul qilayotgan issiqlik (quyosh energiyasi) miqdori;

H- sepilgan o’git miqdori

H – namlik (suv, yomg`ir, qor suvi, ...)

Unda yig`ib olinayotgan hosil miqdorining unga ta’sir ko’rsatuvchi faktorlarga bog`liqligini $Y = K_1X + K_2Q + K_3N + K_4H + ...$ deb ifodalash mumkin.

Matematika fani o’zining o’rganish qurollariga-apparatlariga ega. Ana shu apparatlarning xususiyatlarini, ta’sir sohalarini va tadbiq doiralarini o’rganuvchi qismlariga uning xususiy bo’limlari deymiz. Sizga taqdim etilayotgan matematika «Oliy matematika» deyiladi. U quyidagi qismlarni o’z ichiga oladi.

1. Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari.
2. Matematik analizga kirish.
3. Bir o’zgaruvchi funktsiyaning differensial hisobi.
4. Aniqmas va aniq integral hisob.
5. Oddiy differensial tenglamalar.
6. Sonli va funksional qatorlar nazariyasi.
7. Ko’p argumentli funksialar, ularning differensial hisobi.
8. Karrali va egri chiziqli integrallar.
9. Maydon nazariyasi elementlari.
10. Operatsion hisob, uning tadbiq elementlari.
11. Matematik fizika tenglamalari.
12. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari

1.1.1-Jadval. Matematik belgilar

Belgilar	**Ma'nolari**
$+$	Qo'shish
-	Ayirish
$*$yoki $\times$ yoki $\cdot$	Ko'paytirish
/ yoki $\div$	Bo'lish
$\pm$	Qo'shish yoki ayirish
x^n	$n-$ daraja
∞	Cheksizlik
$\sqrt[n]{x}$	Ildiz yoki $n-$ darajali ildiz
$\sum_{i=k}^{l} x_i$ yoki $\sum_{i=k}^{l} x_i$	$i=k$ dan $i=l$ gacha x_i lar yig'indisi
$\in$	Tegishlilik belgisi
$\notin$	Tegishli emaslik belgisi
$\subset$	To'plam qismi
$<$	Kichik
$\leq$	Kichik yoki teng
$>$	Katta
$\geq$	Katta yoki teng
$=$	Teng
$\neq$	Teng emas
$\forall$	Ihtiyoriy, barcha
$\exists$	Mavjudlik belgisi
$\wedge$	Va
$\vee$	Yoki
$\Rightarrow$	Kelib chiqadi
$\Leftrightarrow$	Teng kuchlilik belgisi

1.1.2-Jadval. Grek harflari

Katta harflar	**Kichik harflar**	**Ingliz**	**O'qilishi**
A	α	alpha	Alfa
B	β	beta	Beta
Γ	γ	gamma	gamma
Δ	δ	delta	Delta
E	ε	epsilon	epsilon
Z	ζ	zeta	Zeta

Η	η	eta	Eta
Θ	θ	theta	teta
Ι	i	iota	iota
Κ	κ	kappa	kappa
Λ	λ	lambda	lambda
Μ	μ	mu	miu
Ν	ν	nu	niu
Ξ	ξ	xi	ksi
Ο	o	omicron	omicron
Π	π	pi	Pi
Ρ	ρ	rho	Ro
Σ	σ	sigma	sigma
Τ	τ	tau	tau
ϒ	υ	upsilon	upsilon
Φ	φ	phi	Fi
Χ	χ	chi	Xi
Ψ	ψ	psi	psi
Ω	ω	omega	omega

<u>Takrorlash uchun savollar</u>

1. Al-Xorazmiy nechanchi asrda yashab ijod etgan?
2. Arifmetika fanining asoschsi kim?
3. Algebra atamasi qaysi so’zdan kelib chiqqan?
4. O’nlik sanoq sistemasini kim amaliyotga joriy etgan?
5. “Al-jabr va-l-muqobala” risolasining bizgacha yetib kelgan nusxasi nechanchi yilda yozilgan?
6. Abu Rayxon Beruniy nechanchi asrda yashab ijod etgan?
7. Evklidning “Nachalo” sini, Ptolomeyning Al’magest asarlarini sanskritdan zamon tiliga kim aylantirgan?
8. Umar Xayyom nechanchi asrda yashab ijod etgan?
9. Trapetsiya tushunchalariga kim tomonidan asos solingan?
10. Abul-Vafo Al-Buzjoniy nechanchi asrda yashab ijod etgan?
11. Abul-Vafo Al-Buzjoniy Matematika faniga qo’shgan xissasi?
12. Al Koshi nechanchi asrda yashab ijod etgan

Testlardan namunalar

1. Sanoq davomida ishlatiladigan sonlar to`plami qanday nomlanadi?.
   a) Butun b) ratsional c) natural d) haqiqiy
2. Tenglamani yeching: $x^2+5x-6=0$.
   a) -6, 1 b)6, 1 c)-6, -1 d)6, -1
3. Kasr ko`rinishida yozish mumkin bo`lgan sonlar to`plami qanday nomlanadi?
   a) Butun b)ratsional c)natural d)natural
1. Tenglamaning yechimlari yig`indisini toping: $2x^2+10x-12=0$
   a) -6 b)0 c) -5 d)6
2. Qaysi formula noto`g`ri berilgan?
   a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c) $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$
   b) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ d) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
6. Haqiqiy sonlar to`plami qanday belgilanadi?
   a) Z b)N c) Q d) R
7. Qaysi formula noto`g`ri berilgan?
   a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ b) $(a-b)^2=a^2-2ab-b^2$ c) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
   b) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

8.O`zbekistonning matematika fanidagi yutuqlari bilan dunyo tan olgan atoqli olimning ismi sharifini ko`rsating?
   a) C.S.O`rozboyev c)V.K.Qobulov
   b) A.S.Sodiqov d)S.H.Sirojiddinov

9. Qaysi tenglik noto`g`ri berilgan?
   a) $(3+b)^2=9+6b+b^2$ b) $(a-1)^2=a^2-2a-1$
   c) $(2+b)(2-b)=4-b^2$ d) $(a+1)^2=a^2+1+2a$

10. Aksioma so`zining lug`aviy ma`nosi?
   a) hurmat, ehtirom
   b) isbot, tasdiq
   c) Yuqori, aniq
   d) sifatli, ko`rkam

2-MAVZU: TO‘PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

REJA:

1. *To‘plamlar va ularga doir tushunchalar.*
2. *To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari.*

2.1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar. To‘plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarnining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To‘plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang‘ich tushunchalardan biri bo‘lgani uchun u ta’rifsiz qabul etiladi. To‘plam deyilganda biror bir xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to‘plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami, firma xodimlari to‘plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘plami va hokazo. Matematikada to‘plamlar A,B,C,D,… kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,… to‘plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda mos ravishda kichik *a*,*b* ,*c* ,*d*,… kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «*a* element A to‘plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a \in A$ ($a \notin A$) kabi yoziladi.

1.2.1-*TA’RIF:* Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

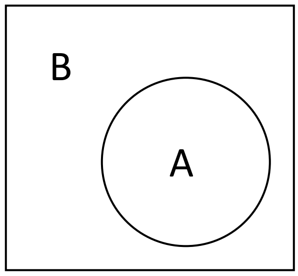
Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}=$\varnothing$, { perimetri 0 bo‘lgan kvadratlar }=$\varnothing$, { kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar }=$\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to‘plamlar nazariyasida $\varnothing$ to‘plam shunga o‘xshash vazifani bajaradi.

1.2.2-*TA’RIF:* Agar A to‘plamga tegishli har bir *a* element boshqa bir B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa ($a \in A \Rightarrow a \in B$), u holda A to‘plam B ***to‘plamining qismi*** deyiladi va $A \subset B$ (yoki $B \supset A$) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamimni ifodalasa, unda $A \subset B$ bo‘ladi.

1-



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak , unda A⊂B bo‘ladi.

Ta’rifdan ixtiyoriy A to‘plam uchun A⊂A va ∅⊂A tasdiqlar o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli to‘plamlar uchun ⊂ belgisi sonlar uchun ≤ belgiga o‘xshash ma’noga egadir.

1.2.<u>3-*TA’RIF:*</u> Agarda A va B to‘plamlar uchun A⊂B va B⊂A shartlar bir paytda bajarilsa, bu to‘plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, A={–1;1} va B={x^2–1=0 tenglama ildizlari}, C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to‘plamlari uchun A=B, C=D bo‘ladi.

2.2.To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari.

Algebrada *a* va *b* sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallari kiritilgan bo‘lib, ular

$a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik , ya’ni o‘rin almashtirish),

$a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya’ni guruhlash),

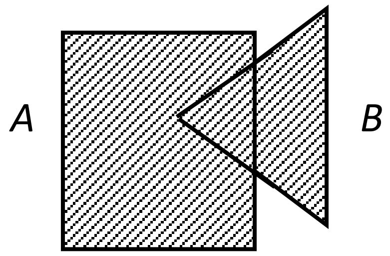
$a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya’ni taqsimot)

qonunlariga bo‘ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday *a* soni uchun $a+0=a$ va $a\cdot 0=0$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi.

Endi to‘plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

1.2.<u>4-*TA’RIF:*</u> A va B to‘plamlarning ***birlashmasi (yig‘indisi)*** deb shunday C to‘plamga aytiladiki, u A va B to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va A∪B kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lsa, unda ularning birlashmasi A∪B quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

2-rasm 

Shunday qilib $A\cup B$ to‘plam yoki A to‘plamga , yoki B to‘plamga, yoki A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo‘lsa $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$,
C={I navli mahsulotlar} va D={II navli mahsulotlar } bo‘lsa, unda
$C\cup D$={I yoki II navli mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni birlashtirish amali , sonlarni qo‘shish amali singari,

$$A\cup B = B\cup A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) \quad \text{(assosiativlik)}$$

qonunlarga bo‘ysunadi. Bulardan tashqari $A\cup\varnothing=A$ va, sonlardan farqli ravishda, $A\cup A=A$, $B\subset A$ bo‘lsa $A\cup B=A$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning barchasi to‘plamlar tengligi ta’rifidan foydalanib isbotlanadi. Misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$$x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \text{ yoki } x\in B \Rightarrow x\in A \Rightarrow (A\cup B)\subset A;$$

$$x\in A \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow A\subset (A\cup B)$$

Demak, $(A\cup B)\subset A$, $A\subset (A\cup B)$ va , ta’rifga asosan, $A\cup B = A$.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlarning yig‘indisi

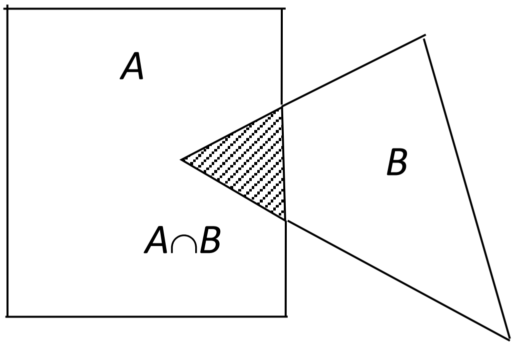
$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami sifatida aniqlanadi.

1.2.<u>5 -*TA’RIF:*</u> A va B to‘plamlarning ***kesishmasi (ko‘paytmasi)*** deb shunday C to‘plamga aytiladiki, u A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va $A\cap B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning $A\cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib $A\cap B$ to‘plam A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo‘ladi. Shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo‘lmasa, ya’ni kesishmasa, unda $A\cap B=\varnothing$ bo‘ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo‘lsa $A\cap B=\{2,4\}$, C={Tekshirilgan mahsulotlar} va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa, unda

$C\cap D$={Tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

$$A\cap B=B\cap A \quad \text{(kommutativlik)},$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad \text{(assotsiativlik)},$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad \text{(distributivlik)}$$

Shu bilan birga $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ va $B\subset A$ bo‘lsa $A\cap B=B$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tasdiqlarning o‘rinli ekanligiga Yuqorida ko‘rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

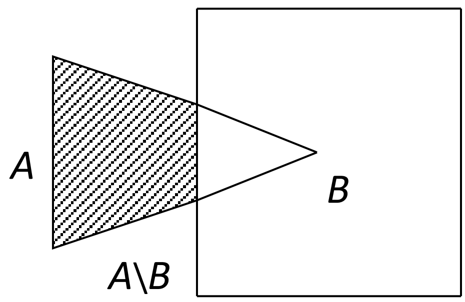
Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ to‘plamlarning kesishmasi

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2,\cdots,n$) to‘plamlarga tegishli bo‘lgan umumiy elementlardan tuzilgan to‘plam kabi aniqlanadi.

1.2.6-TA’RIF: A va B to‘plamlarning ***ayirmasi*** deb A to‘plamga tegishli, ammo B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlardan tashkil topgan to‘plamga aytiladi va $A\backslash B$ kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to‘plamini belgilasa, unda ularning $A\backslash B$ ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi :



4-rasm

Masalan, A={1,2,3,4,5} va B={1,3,7,9} bo‘lsa, unda A\B={2,4,5}, B\A={7,9};
C={Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va D={Sifatli mahsulotlar} bo‘lsa,
C\D={ Korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, A\B to‘plam A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan hosil bo‘ladi. To‘plamlar ayirmasi uchun

$$A\backslash A=\varnothing, \quad A\backslash\varnothing=A\ , \ \varnothing\backslash A=\varnothing$$

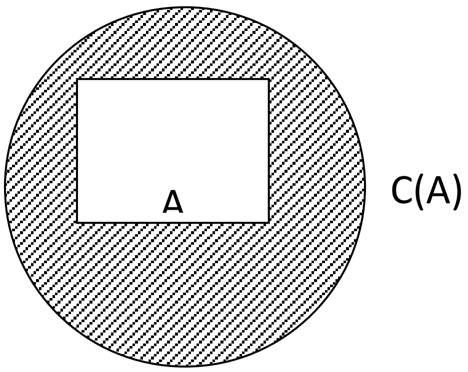
va $A\subset B$ bo‘lsa $A\backslash B=\varnothing$ munosabatlar o‘rinlidir.

1.2.<u>7-TA’RIF:</u> Agar ko‘rilayotgan barcha to‘plamalarni biror Ω to‘plamning qism to‘plamlari kabi qarash mumkin bo‘lsa, unda Ω ***universal to‘plam*** deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog‘liq barcha to‘plamlar uchun $\Omega=(-\infty, \infty)$, insonlardan iborat to‘plamlar uchun Ω={Barcha odamlar} universal to‘plam bo‘ladi.

1.2.<u>8 -TA’RIF:</u> Agar A to‘plam Ω universal to‘plamning qismi bo‘lsa, unda Ω\A to‘plam ***A to‘plamning to‘ldiruvchisi*** deb ataladi va C(A) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada Ω universal to‘plam doiradagi, A to‘plam esa uning ichida joylashgan to‘ri to‘rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo‘lsa, uning to‘ldiruvchisi C(A) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:



5-rasm

Demak, C(A) to‘plam A to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x \in A \Rightarrow x \notin C(A), \quad x \notin A \Rightarrow x \in C(A)$.

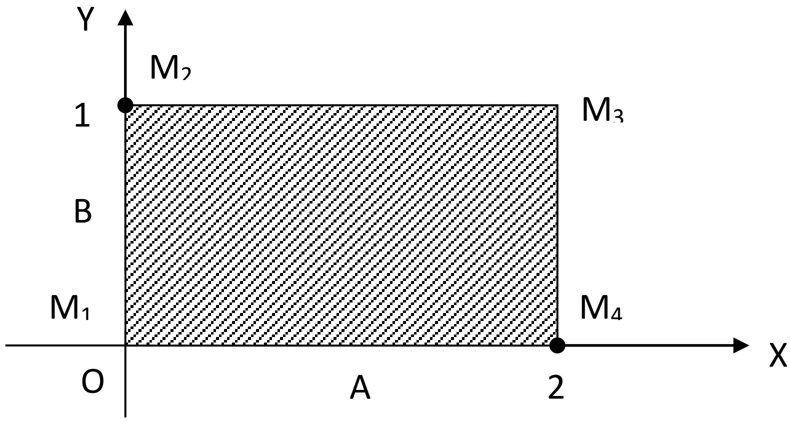
Masalan, Ω={Barcha korxonalar}, A={Rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda C(A)={ Rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi;

Ω={1,2,3, · · ·, *n*, · · ·}–natural sonlar to‘plami, A={2,4,6, · · · , 2*n*, · · ·}–juft sonlar to‘plami, B={5,6,7, · · ·, *n*, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda

C(A)={1,3,5, · · ·, 2*n*–1, · · ·}– toq sonlar, C(B)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

1.2.9-TA’RIF: A va B to‘plamlarning ***Dekart ko‘paytmasi*** deb A×B kabi belgilanadigan va (*x*, *y*) (*x*∈A, *y*∈B) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] bo‘lsa, A×B to‘plam tekislikdagi (*x*, *y*) (*x*∈A=[0,2], *y*∈B=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar C={Tajribali ishchilar} va D={Yosh ishcilar} bo‘lsa, unda C×D tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun A×B≠B×A, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. Masalan, A=[0,2] va B=[0,1] to‘plamlar uchun A×B asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , B×A esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda A×B≠B×A bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
2. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
3. To‘plam deganda nima tushuniladi?
4. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
5. To‘plamlarga misollar keltiring.
6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
7. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
8. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
9. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
10. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
12. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
13. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
14. Universal to‘plam nima?
15. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
16. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi ?

Testlardan namunalar

1. To‘plamlar nazariyasining asoschisi kim ?

A) Pifagor ; B) Dekart ; C) Kantor ; D) Ferma ; E) Gauss .

2. Quyidagi to‘plamlardan qaysi biri bo‘sh to‘plam emas?

A) Kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar;
B) sinx = 2 tenglama yechimlari to‘plami;
C) Ikkita burchagi o‘tmas bo‘lgan uchburchaklar to‘plami;
D) Kubi manfiy bo‘lgan sonlar to‘plami;
E) Ikkiga bo‘linmaydigan juft sonlar to‘plami.

3. Qachon A to‘plam B to‘plamning qismi deyiladi?

A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa.
C) Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamga tegishli bo‘lsa.

D) Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamga tegishli bo‘lsa.

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A) bo‘sh to‘plam barcha to‘plamlarning to‘plam ostisi bo‘ladi;

B) har bir to‘plam o‘zining to‘plam ostisi bo‘ladi;

C) Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $C\subset B$ bo‘ladi;

D) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cap B=B$ bo‘ladi;

E) Agar $B\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cup B=B$ bo‘ladi;

5. A va B to‘plamlar birlashmasi amali qayerda ifodalangan ?

A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

6. Agar $x\in A \cup B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?

A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;

D) $x\in A$, $x\in B$; E) barcha tasdiqlar o‘rinli bo‘ladi .

7. To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan ? (Ω – universal to‘plam, $\varnothing$ – bo‘sh to‘plam)

A) $A\cup B = B\cup A$; B) $A\cup\varnothing=A$; C) $A\cup A = A$;

D) $A\cup\Omega=\Omega$. E) Barcha xossalar to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

8. $A = [-3; 0]$ va $B = (-1; 5]$ to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $[-3; 5]$; B) $[-3; -1]$; C) $(-1; 0)$; D) $(0; 5]$;

E) $[-1; 5]$.

9. A va B to‘plamlar kesishmasi amali qayerda ifodalangan?

A) $A \cup B$; B) $A \cap B$; C) $A \subset B$; D) $A \supset B$; E) $A \setminus B$.

10. Agar $x\in A \cap B$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘ladi ?

A) $x\in A$, $x\notin B$; B) $x\notin A$, $x\in B$; C) $x\notin A$, $x\notin B$;

D) $x \in A$, $x \in B$;   E) barcha tasdiqlar o‘rinli emas .

11. Agar universal to‘plam $\Omega=(-\infty, \infty)$ va $A=(2,5]$ bo‘lsa, C(A) to‘plam qayerda to‘g‘ri ifodalangan ?
A) $C(A)=[-\infty,2]$;   B) $C(A)=(5, \infty]$;   C) $C(A)=[0,2] \cup (5, \infty)$;
D) $C(A)=(-\infty, 2] \cup (5, \infty)$;   E) to‘g‘ri javob keltirilmagan .

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A \cup B$, $A \cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:
$A=\{n-3, n-2, n-1, n, n+1\}$, $B=\{n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4\}$.

2. Quyidagi A va B to‘plamlar bo‘yicha $A \cup B$, $A \cap B$, A/B va B/A to‘plamlarni toping:
$$A=[n-3, n+1], \qquad B=(n-1, n+5)$$

3. Quyidagi A va B to‘plamlarning $A \times B$ va $B \times A$ Dekart ko‘paytmalarini aniqlang:
$$A=\{n-3, n-2, n-1\}, \quad B=\{n, n+1, n+2, n+3\}$$

3-MAVZU: MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

Reja:

1. **Bir o‘zgaruvchili tengsizliklar kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi.**
2. **Ikki o‘zgaruvchili tenglama, ularning sistemasi, ularni yechish usullari. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar va ularning grafigi.**
3. **Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklarning kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi, ularni grafik usulda yechish.**

3.1. Bir o‘zgaruvchili tengsizliklar kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi.

Ikkita bir o‘zgaruvchili $5x-3$ va $2x$ ifodalarni olamiz va ularni tenglik belgisi bilan birlashtiramiz, bunda $5x-3=2x$ jumla hosil bo‘ladi. Bu bir o‘zgaruvchili predikat bo‘lib, x o‘rniga son qo‘yilsa, u mulohazaga aylanadi. Masalan, $x=1$ desak, rost mulohaza, x ning boshqa qiymatlarida yolg‘on mulohaza hosil bo‘ladi. $5x-3=2x$

o‘zgaruvchili tenglik, ***bir o‘zgaruvchili tenglama*** deyiladi. O‘zgaruvchini ***noma’lum miqdor*** deb ham ataladi.

Ta’rif. Biror $f(x)$ va $\varphi(x)$ x o‘zgaruvchili ifodalar X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin, u holda $f(x)=\varphi(x)$ ko‘rinishdagi bir joyli predikat ***bir o‘zgaruvchili tenglama*** deyiladi.

O‘zgaruvchining tenglamani to‘g‘ri sonli tenglikka aylantiradigan X to‘plamdan olingan qiymati, tenglamaning ***yechimi (ildizi)*** deyiladi. Berilgan tenglamaning yechimlari to‘plamini topish, (ya’ni berilgan predikatning chinlik to‘plami T ni topish) bu *tenglamani yechish* demakdir. Biz kelajakda $f(x)=\varphi(x)$ $x\epsilon X$ predikatning chinlik to‘plamini tenglamaning *yechimlar to‘plami*, bu to‘plamga kiruvchi elementlarni esa *yechimi* deymiz.

Masalan, $(x+5)(x+6)(x-4)=0$ tenglama uchta –5, –6 va 4 ildizlarga ega. Demak, uning yechimlar to‘plami $T=\{-5;-6;4\}$.
Tenglamalarning yechimlar to‘plami bo‘sh bo‘lishi ham mumkin. Masalan, $3(5x+1)=15x+1$ tenglama x ning hech qanday qiymatida to‘g‘ri sonli tenglikka aylanmaydi.

Ta’rif. $f(x)=\varphi(x)$ va $F(x)=\Phi(x)$ tenglamalarning yechimlar to‘plami teng bo‘lsa, bu ikki tenglama ***teng kuchli*** deyiladi.

Masalan, $(x-3)(x+5)=0$ va $(x+1)^2=16$ tenglamalar teng kuchli, chunki birinchi tenglamaning yechimlar to‘plami {3;-5}, ikkinchi tenglamaning yechimlar to‘plami {-5; 3} ga teng.

Ta’rif. Agar $f(x)=\varphi(x)$ tenglamaning har bir ildizi, $F(x)=\Phi(x)$ tenglamaning ham ildizi bo‘lsa, $F(x)=\Phi(x)$ tenglama $f(x)=\varphi(x)$ tenglamaning ***natijasi*** deyiladi.

Masalan, $(x+1)^2=16$ tenglama $x+1=4$ tenglamaning natijasi bo‘ladi.

Ta’rif. Ikki tenglama teng kuchli deyiladi, faqat va faqat, qachonki ularning har biri ikkinchisining natijasi bo‘lsa.

Ba’zi hollarda berilgan tenglamadan unga teng kuchli tenglamaga o‘tmasdan uning natijasiga o‘tiladi. Bu holda yechimlar to‘plami kengayadi. Shuning uchun oxirida topilgan yechimlarni tenglamaga qo‘yib tekshirish kerak.

1-Teorema. Agar, $f(x)=\varphi(x)$ tenglama X to‘plamda berilgan va $h(x)$ shu to‘plamda aniqlangan ifoda bo‘lsa, u holda $f(x)=\varphi(x)$ va $f(x)+h(x)=\varphi(x)+h(x)$ tenglamalar X to‘plamda teng kuchli bo‘ladi.

1–natija. Agar tenglamaning ikkala qismiga ayni bir xil son qo‘shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

2–natija. Agar tenglamaning birorta qo‘shiluvchisini bir qismdan ikkinchi qismga ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgaritrib o‘tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

3–natija. Har qanday tenglama $F(x) = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga teng kuchli.

Haqiqatdan, $f(x) = \varphi(x)$ tenglamani $F(x) = 0$ ko‘rinishga keltirish uchun uning har ikkala qismiga $-\varphi(x)$ ni qo‘shish va $f(x) - \varphi(x) = F(x)$ deb belgilash kerak.

2-Teorema. Agar, $f(x) = \varphi(x)$ tenglama X to‘plamda berilgan hamda $h(x)$ shu to‘plamda aniqlangan va X to‘plamdagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydigan ifoda bo‘lsa, u holda $f(x) = \varphi(x)$ va $f(x)h(x) = \varphi(x)h(x)$ tenglamalar X to‘plamda teng kuchli bo‘ladi.

4–natija. Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli ayni bir songa ko‘paytirilsa (yoki bo‘linsa), berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi teoremalar va ularning natijalaridan foydalanib berilgan tenglamalarga teng kuchli tenglamalar hosil qilish mumkin. Agar ulardagi shartlar buzilsa, yangi tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo‘lmasdan qoladi.

Masalan, $x(x-5) = 7x$ tenglamani qaraymiz. Buning har ikkala tomonini x ga bo‘lsak, $x - 5 = 7$ hosil bo‘ladi. Topilgan tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli emas, chunki tenglikning har ikkala tomonini $X = R$ to‘plamning barcha nuqtalarida aniqlanmagan $\frac{1}{x}$ funksiyaga ko‘paytirildi, ya’ni 2–teorema sharti buzildi. Shuning uchun $x - 5 = 7$ dan $x = 12$ yechimning topilishi tenglamaning barcha yechimlari bo‘la olmaydi. Bu tenglamani to‘g‘ri yechish uchun uni $x(x-5) - 7x = 0$, $x(x-12) = 0$ deb yozish kerak. Bu holda yechimlar, $x = 0$ va $x = 12$ lardan iborat bo‘ladi. Teoremani noto‘g‘ri qo‘llash ildizlarning birining yo‘qolishiga sabab bo‘layapti. Shuni eslatib o‘tamizki, 1– va 2–teoremalarning sharti bajarilmasligi tufayli nafaqat ildizlar yo‘qolishi mumkin, balki chet ildizlar ham paydo bo‘lishi mumkin.

Masalan, $\frac{7x-49}{(x+1)(x-7)} = 0$ tenglama berilgan bo‘lsin. Uning har ikkala tomonini $(x+1)(x-7)$ ga ko‘paytirib, $7x - 49 = 0$ tenglamaga kelamiz. Uning yechimi $x = 7$ bo‘ladi. Bu ildiz berilgan tenglama uchun begonadir (chet ildiz). Bunga sabab tenglamaning chap tomoni $X = R$ to‘plamning $x = 7$ nuqtasida aniqlanmaganligidir.

Agar tenglamalar biror to‘plamda aniqlangan bo‘lib, hech biri bu to‘plamda yechimga ega bo‘lmasa, bunday holda ham tenglamalar teng kuchli deyiladi. Masalan, $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 1 = 0$ tenglamalarning hech biri $X = R$ to‘plamda yechimga ega emas. Ular R to‘plamda teng kuchli tenglamalar bo‘ladi. Bu tenglamalar kompleks sonlar to‘plamida teng kuchli emas.

Haqiqatdan, birinchi tenglama ikkita $x = \pm i$ yechimga, ikkinchi tenglama esa $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$ dan iborat to‘rtta yechimga ega.

Bir o‘zgaruvchili tengsizliklar: Bizga x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi aniqlanish sohasi X to‘plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif: $f_1(x) < f_2(x)$, $x\epsilon X$ yoki $f_1(x) > f_2(x)$, $x\epsilon X$ bir o‘rinli predikatlarga bir o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Bunday tengsizliklarni yechish deganda x ni o‘rniga qo‘yganda tengsizlikni chin tengsizlikga aylantiruvchi sonlar to‘plami T ni topish tushuniladi. Bu sonlar to‘plami tengsizlikni yechimlar to‘plami deyiladi. Bir tengsizlikni har bir yechimi ikkinchi tengsizlikni yechimi bo‘lishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchi tengsizlikning natijasi deyiladi. Masalan, $x > 3$ va $x > 6$ tengsizliklarni olaylik. Bundan 6 dan katta son 3 sonidan ham katta bo‘ladi. Shuning uchun $x > 3$ tengsizlik $x > 6$ tengsizlikning natijasi. Shu sababli berilgan tengsizlik natijasi bo‘lgan tengsizlikni yechimlar to‘plami Q berilgan tengsizlik yechimlar to‘plami T ni o‘z ichiga oladi ya’ni $T \subset Q$. Agar ikkita tengsizlik bir xil yechimlar to‘plamiga ega bo‘lsa u tengsizliklar teng kuchli deyiladi. U holda bu tengsizliklar bir-birining natijasi bo‘ladi.

Masalan, biror a soni 7 dan katta deyish bilan $a + 1$ soni 8 dan katta deyish teng kuchli. Shuning uchun $x > 7$ va $x + 1 > 8$ tengsizliklari teng kuchli. x ni o‘zida saqlovchi tengsizliklar predikatlar bo‘lgani uchun, ularni kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi to‘g‘risida gapirish mumkin.

Masalan a soni $3x - 8 > 1$ va $2x + 5 < 15$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u son tengsizliklarning $(3x - 8 > 1) \wedge (2x + 5 < 15)$

kon'yunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bu a soni esa 4 sonidan iborat. Maktab kursida kon'yunksiya deb aytmasdan, uni quyidagi sistema ko'rinishida yozish qabul qilingan:

$$\begin{cases} 3x - 8 > 1 \\ 2x + 5 < 15 \end{cases}$$

Agar biror a sonida ikki va undan ortiq tengsizliklardan kamida bitta tengsizlik chin qiymatga ega bo'lsa, u tengsizliklar diz'yunksiyasi shu a sonida chin qiymatga ega bo'ladi.

Masalan, –2 soni $(2x > 8) \vee (3x < -3)$ (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli. Haqiqatan ham bu sonni birinchi tengsizlikga qo'ysak, u holda $2 \cdot (-2) > 8$ degan yolg'on tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tengsizlikga qo'ysak, $3 \cdot (-2) < -3$ degan chin tengsizlik hosil bo'ladi. Demak, –2 soni (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli.

Agar 0 sonini olsak, bu son tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli emas, chunki 0 sonini (1) ga kiruvchi tengsizliklarga qo'ysak $2 \cdot 0 > 8$ va $3 \cdot 0 < -3$ degan yolg'on tengsizliklarga ega bo'lamiz. Qoidaga ko'ra tengsizliklar yechimlar to'plami cheksiz, buni koordinatalar o'qida ko'rgazmali tasvirlaydilar. Bunda yechimlar to'plami bir qancha jufti-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar va nurlar orqali ifodalanadi.

3-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda ixtiyoriy $x \epsilon X$ qiymatlarda aniqlangan bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x) + F(x) < f_2(x) + F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

4-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda barcha $x \epsilon X$ larda aniqlangan hamda X sohada musbat bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) < f_2(x)F(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Boshqacha aytganda, $F(x)$ manfiy bo'lmasa, u holda $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) \leq f_2(x)F(x)$ tengsizliklar ham teng kuchli.

1-natija. Agar a soni musbat ya'ni $a > 0$ bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) < af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchlidir.

2-natija. Agar $a < 0$ bo'lsa, $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) > af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Demak, tengsizlik manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlik belgisi teskariga olmashadi.

5-Teorema. $0 < f_1(x) < f_2(x)$ va $0 < \frac{1}{f_2(x)} < \frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng kuchli.

1-Misol. $3x - 4 > x + 6$ tengsizlik yechilsin.

Yechish:3-teoremaga asosan $3x - x > 4 + 6$ yoki $2x > 10$. 4-teorema natijalariga ko‘ra $x > 5$.

Demak tengsizlik yechimlar to‘plami $(5; +\infty)$ nurdan iborat.

2-Misol. $(2x - 3 < 5) \wedge (3x - 5 > 1)$ tengsizliklar kon’yunksiyasi yechilsin.

Yechish: Dastlab birinchi keyin ikkinchi tengsizlikni yechamiz.

$$2x - 3 < 5 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$$

$$3x - 5 > 1 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$$

Bu tengsizlik kon’yunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkita tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak. Shu sababli kon’yunksiya yechimlar to‘plami topilgan yechimlar to‘plamining kesishmasidan iborat bo‘ladi, ya’ni $x < 4$ va $x > 2$ nurlarning kesishmasidan iborat bo‘ladi. Demak, yechimlar to‘plami $2 < x < 4$ sonlar intervalidan iborat.

3.2. Ikki o‘zgaruvchili tenglama, ularning sistemasi, ularni yechish usullari. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklar va ularning grafigi.

$ax + by = c$ ko‘rinishdagi tenglamaga birinchi darajali ikki o‘zgaruvchili tenglama deyiladi. Ikkita x va y o‘zgaruvchiga ega bo‘lgan tenglama ikki o‘rinli predikat hisoblanadi. Ikki o‘zgaruvchili tenglamaning yechimi deb, shu tenglamani to‘g‘ri tenglikka aylantiradigan o‘zgaruvchilarning qiymatlari juftiga aytiladi.

Masalan, $(3;14)$ juftlik $2x + 4y = 62$ tenglamaning bitta yechimi hisoblanadi. Bu yechimdan boshqa $(1;15)$, $(5;13)$ va boshqa juftliklar ham bu tenglamaning yechimlari bo‘la oladi. Bundan ko‘rinadiki, ikki o‘zgaruvchili tenglamaga uning juftliklardan tashkil topgan ko‘pgina yechimlari mos keladi. Bu juftliklar esa x va y o‘zgaruvchilarni aniqlanish sohasi X va Y lardan olingan bo‘lishi kerak. $(a;\, b)$ juftliklarni ($a \epsilon X$ va $b \epsilon Y$) tekislikda a va b koordinatalarga ega bo‘lgan $M = M(a; b)$ nuqta bilan tasvirlash mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili tenglama yechimlar to‘plamini tekislikda joylashtirib tekislik nuqtalar to‘plamining to‘plam ostiga ega bo‘lamiz. Bu to‘plam ostiga tenglamaning grafigi deyiladi.

Odatda ikki o‘zgaruvchili tenglama cheksiz ko‘p yechimlarga ega. Shu sababli uning grafigi cheksiz ko‘p nuqtalarga ega.

Misol. $y - \mathrm{x} = 0$ tenglamani yechimi abssissasi va ordinatasi bir-biriga teng bo‘lgan $(a; a), a \epsilon R$ juftliklardan iborat. Agar tekislikda $M(a; a)$ ko‘rinishdagi nuqtalardan bir nechtasini olsak, ya’ni $M(1; 1)$, $M(2; 2)$,... bu nuqtalarni koordinata boshidan o‘tib, absissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan 45^0 burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘ramiz.

6-Teorema: Agar $f(x; y)$ ifoda x va y larning barcha qiymatlari uchun aniqlangan, hamda x va y ning hech bir qiymatida nolga aylanmasa, u holda $F(x; y) = \Phi(x; y)$ va $F(x; y) \cdot f(x; y) = \Phi(x; y) \cdot f(x; y)$ tenglamalar teng kuchli.

Tenglamalar sistemasi yechish usullari.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasi ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda a_1, b_1, c_1 va a_2, b_2, c_2 lar haqiqiy sonlar.

Agar (1) sistemada $c_1 = c_2 = 0$ bo‘lsa, tenglama

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi. (2) tenglamalar sistemasi bir jinsli sistema deyiladi.

Boshqacha aytganda $a_1 x + b_1 y = c_1$ tenglamaning yechimlar to‘plami B_1 va $a_2 x + b_2 y = c_2$ tenglamaning yechimlar to‘plami B_2 bo‘lsa, har ikkala tenglamaning qanoatlantiradigan, har ikki tenglama uchun umumiy bo‘lgan yechimlar B_1 va B_2 to‘plamlarning kesishmasidan, ya’ni $B_1 \cap B_2$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Tenglamalar sistemasini yechish uning barcha yechimlar to‘plamini topish demakdir.

Kamida bitta yechimga ega bo‘lgan sistema birgalikdagi sistema deb, bironta ham yechimga ega bo‘lmagan sistema birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.

Ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi usullari mavjud:

1) algebraik qo‘shish usuli: Bu usulda (1) sistemaning birinchi tenglamasini b_2 ga, ikkinchisini $-b_1$ ga ko‘paytirib, o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\cdot x = b_2c_1 - b_1c_2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamadan x topiladi.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{3}$$

birinchi tenglamani $-a_2$ga,ikkinchisini a_1 ga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\cdot y = a_1c_2 - a_2c_1$$

tenglama hosil bo‘ladi, bu tenglamadan y topiladi.

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{4}$$

topilgan x va y lar (1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

2) O‘rniga qo‘yish usuli.(1) sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yechish uchun tenglamadan biror o‘zgaruvchini ikkinchi o‘zgaruvchi orqali ifodalab, bu ifoda ikkinchi tenglamaga qo‘yiladi (odatda koeffitsienti kichik son bo‘lgan o‘zgaruvchi topiladi).

Masalan, birinchi tenglamadan y ni topamiz:

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$ $(b_1 \neq 0)$ buni (1) sistemaning

ikkinchi tenglamasiga qo‘ysak $a_2x + b_2\dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2$ bir o‘zgaruvchili tenglama hosil bo‘ladi. Bundan x o‘zgaruvchi aniqlanadi. x ning aniqlangan qiymatini $y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1}$ ifodaga qo‘yib, y topiladi.

3.3. Ikki o‘zgaruvchili tengsizliklaning kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi, ularni grafik usulda yechish.

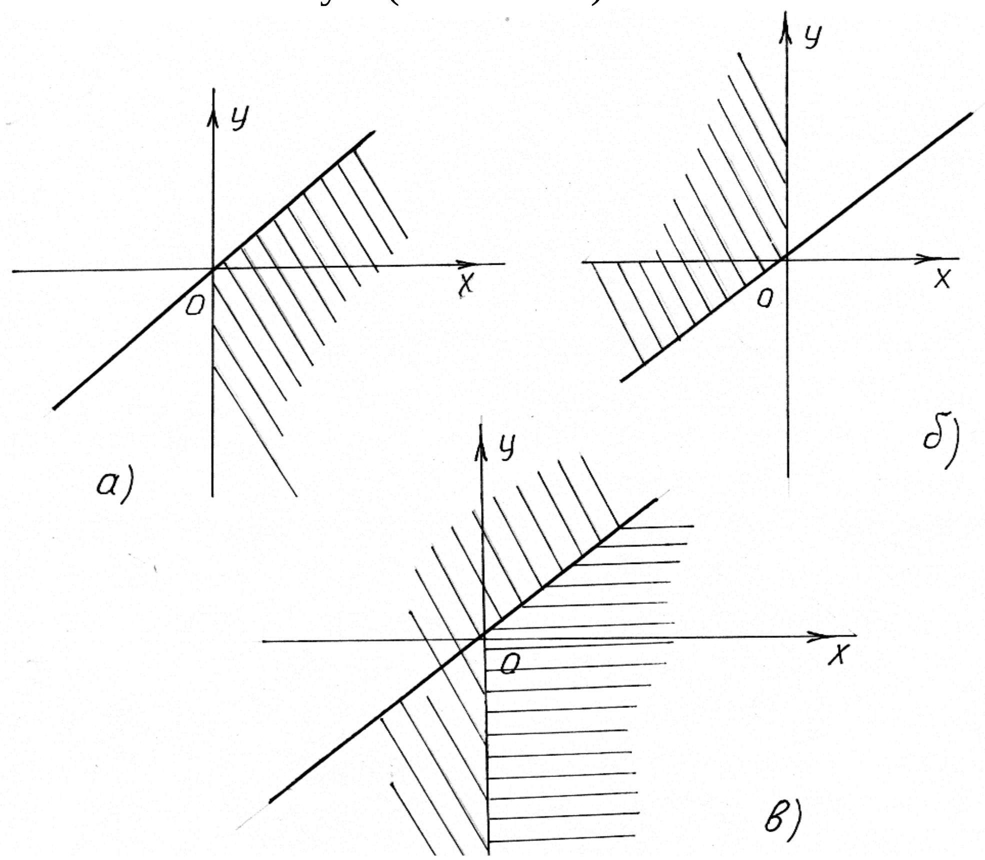
1-misol. Tekislikda a) $x(x-y)>0$ b) $|x|+|y|\le 1$ tengsizliklarning yechimlar to‘plamini ko‘rsating.

Yechimi: a) $x(x-y)>0$ tengsizlikni yechishda quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) $x>0$ va $x>y$ bo‘lgan hol, 2) $x<0$ va $x<y$ bo‘lgan hol.

1) holda tengsizlik $y = x$ to‘g‘ri chiziqdan pastdagi $x > 0$ o‘ng yarim tekislikni tasvirlaydi. (1-a chizma);

2) holda esa tengsizlik $y = x$ to‘g‘ri chiziqdan yuqoridagi chap yarim tekislikni tasvirlaydi (1-б chizma).



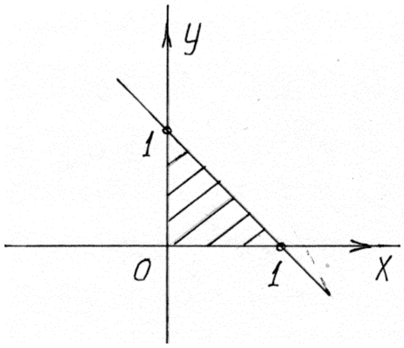
1-chizma.

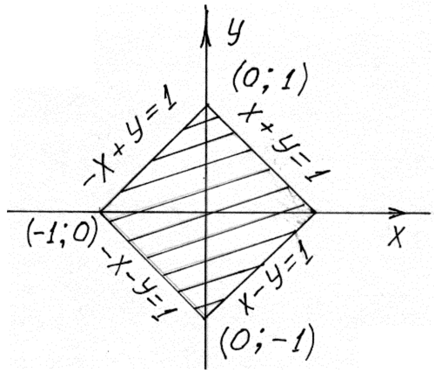
Tengsizlikning barcha yechimlar to‘plami esa chizmada ko‘rsatilgan shtrixlangan soha (1-b chizma). Shtrixlangan sohani chegaralovchi $x = 0$ va $y = x$ chiziqlar sohaga kirmaydi (chunki tengsizlik qat’iy tengsizlik).

b) dastlab $x \geq 0$ va $y \geq 0$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

$x + y = 1$ koordinata o‘qlaridan 1 birlik kesma kesuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasi $x + y = 1$ to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan shtrixlangan sohani ifodalaydi (2-a chizma). Qolgan choraklardagi sohalar ham yuqoridagi uchburchaklarga simmetrik bo‘ladi. Bu esa $(x; y)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan $(-x;y)$, $(x;-y)$, va $(-x;y)$ nuqtalar tengsizlikni qanoatlantirishidan yaqqol ko‘rinadi.(2-b chizma)

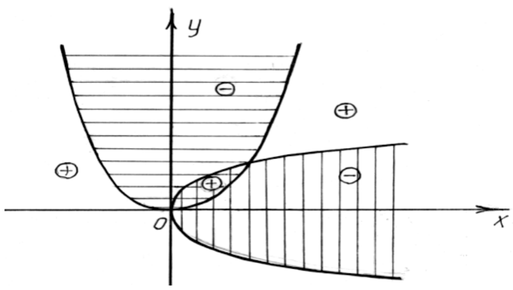




a) 2-chizma b)

2-misol. $z=(y-x^2)(x-y^2)$ funktsiyaning XOY tekislikda musbat yoki manfiy sohalarini ko‘rsating.

Yechimi: XOY tekislikda $y > x^2$ va $y < x^2$ shuningdek $x > y^2$ va $x < y^2$ sohalarni bir-biridan ajratuvchi $y = x^2$ va $x = y^2$ parabolalarni yasaymiz



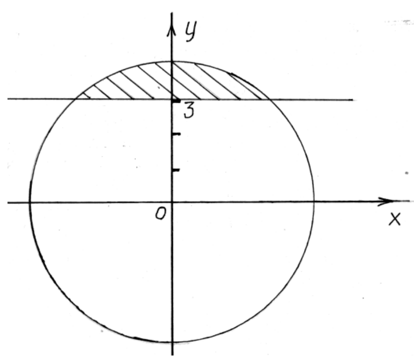
(3-chizma). Ikkita chizmani bir-biri ustiga joylashtiramiz. U holda kesishgan shtrixlar joylashgan, shtrixlanmagan soha musbat soha, qolganlari manfiy soha bo‘ladi. Umuman 5 ta soha mavjud bo‘lib undan ikkitasi manfiy, uchtasi musbat hisoblanadi.

Ikki o‘zgaruvchili tengsizlikni ikki o‘zgaruvchili predikat sifatida qarash mumkin. Shu sababli

$$\begin{cases} f(x;y) > 0 \\ g(x;y) < 0 \end{cases}$$

ko‘rinishdagi ikki noma’lumli tengsizliklar sistemasini bu tengsizliklarning $(f(x;y) > 0) \wedge (g(x;y) < 0)$ kon’yunksiyasi ko‘rinishida yozish mumkin.

Bu kon’yunksiyani yechimlar to‘plami har bir predikat chinlik to‘plamlari kesishmasidan iborat bo‘ladi.



3-misol. $y > 3 \wedge x^2 + y^2 = 25$ yoki

$$\begin{cases} y > 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Buni grafigi markazi koordinatalar boshida radiusi 5 ga teng doirani absissa o‘qiga parallel va undan 3 birlik yuqoridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan yuqorigi qismini ifodalaydi.

Ta’rif: $f(x;y) \geq 0$ yoki $f(x;y) \leq 0$ ko‘rinishdagi o‘zgaruvchili ifodalarga ikki o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Ikki o‘zgaruvchili $f(x;y) \geq 0$ yoki $f(x;y) \leq 0$ tengsizlikning yechimi deb, sonlarning tartiblangan barcha (a,b) juftlariga aytiladiki, bu sonlar tengsizlikdagi noma’lumlar o‘rniga qo‘yilgandan keyin chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Qisqa qilib, sonlarning $(a;b)$ jufti berilgan tengsizlikni qanoatlantiradi, deyiladi.

Masalan: $(4;2)$ juftlik $x^2 + y^2 < 25$ tengsizlikni yechimlar to‘plamiga tegishli, chunki x ni 4 ga y ni 2 ga almashtirsak $4^2 + 2^2 < 25$ chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Agar tengsizlikning yechimlari to‘plamidan olingan har bir $(x;y)$ juftga mos ravishda tekislikning $M(x;y)$ nuqtasini qo‘ysak, u holda berilgan tengsizlikka mos tekislik nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lamiz. Bunga berilgan tengsizlikning grafigi deyiladi.

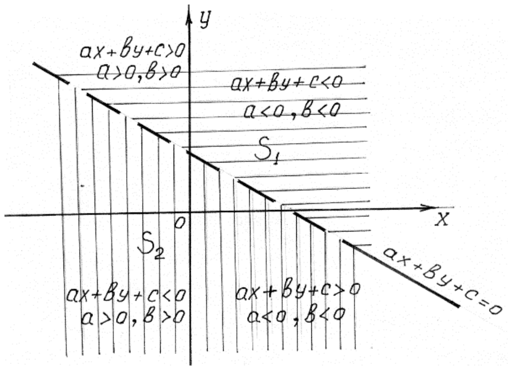
Odatda tengsizlik grafigi tekislik sohalaridan iborat bo‘ladi. $F(x;y) > 0$ tengsizlikni yechimlar to‘plamini tasvirlashda quyidagiga amal qilinadi: Dastlab tengsizlik belgisi tenglik belgisi bilan almashtiriladi va $F(x;y) = 0$ tenglamaga mos chiziq chiziladi. Bu chiziq tekislikni bir qancha bo‘laklarga bo‘ladi. Bu bo‘laklarni har birida bitta nuqta olinib, bu nuqtada $F(x;y) > 0$ tengsizlik bajarilishi tekshiriladi. Agar tengsizlik shu nuqtada bajarilsa, bu tengsizlik tekislikning shu bo‘lagida to‘la bajariladi. Shunday qismlar birlashtirilib berilgan tengsizlikning yechimlar to‘plami hosil qilinadi.

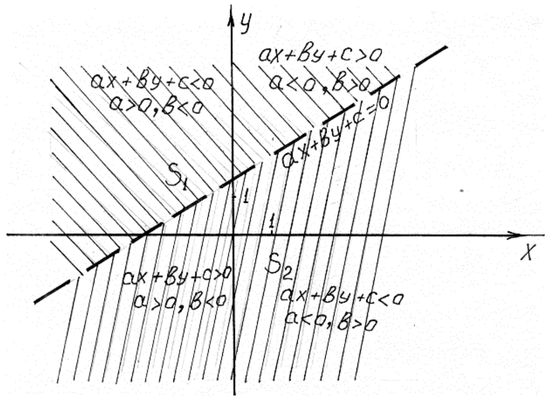
Uni koordinata tekisligida tasvirlash mumkin. Masalan,

$$ax + by + c > 0 \quad (1) \quad ax + by + c < 0 \quad (3)$$

$$ax + by + c \geq 0 \quad (2) \quad ax + by + c \leq 0 \quad (4)$$

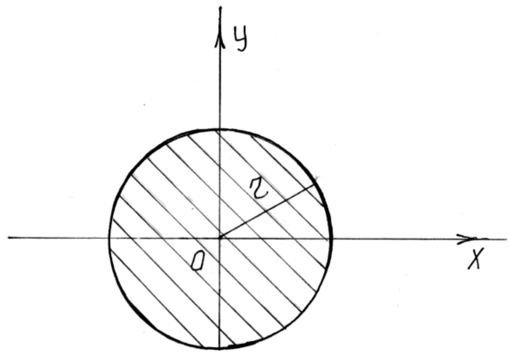
chiziqli tengsizliklar yechimlari to‘plami (1) va (3) tengsizliklar uchun a va b koeffitsientlar ishoralariga bog‘liq ravishda ochiq yarim tekisliklarni ifodalaydi. (4-a,b-chizmalar). Agar tengsizliklar noqat’iy bo‘lsa, ya’ni (2) va (4) ko‘rinishda bo‘lsa, yechimlar to‘plami yarim tekisliklardan iborat bo‘ladi, boshqacha aytganda yechimlar to‘plamiga $ax + by + c = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami ham kiradi.





a) 4-chizma b)

$x^2+y^2 \le r^2$ tengsizlikning yechimlari to‘plami markazi koordinatalar boshida va radiusi r bo‘lgan doiradan iborat (qat’iy tengsizlikda aylana chizig‘idagi nuqtalar yechimlar to‘plamiga tegishli emas), noqat’iy tengsizlikda aylana chizig‘idagi nuqtalar bu to‘plamga tegishli.



$x^2+y^2 > r^2$ tengsizlikning yechimlari to‘plami esa bu doiraning to‘ldirmasidir.

Test savollari:

1. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri ildizga ega emas?
   A) $3x^2-6x+2=0$ B) $3x^2-6x+4=0$
   C) $3x^2+6x-2=0$ D) $3x^2-6x-4=0$.
2. $x^2+5x+a=0$ tenglamaning bir ildizi 2 ga tengligi ma’lum. Uning ikkinchi ildizini toping.
   A) 3 B) -3 C) a D) -7
3. Tenglamani yeching: $\sqrt{-x}=x+2$
   A) ildizi yo‘q B) -1 C) -4 D) -1 va -4
4. Tenglamani yeching: $x^2-3|x|=0$
   A) 0 B) 3 C) -3 D) 0 va ± 3
5. Tenglamani yeching: $|x+2|+2|x-3|=7$
   A) -2 B) -2 va 3 C) 1 va $3\frac{2}{3}$ D) 3
6. Tenglamani yeching: $\log_2 x+2\log_4 x+4\log_{16} x=3$
   A) 1 B) 2 C) 4 D) 8
7. Tenglamani yeching: $(2x-1)^2=0$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 va -1 D) 1 va -2

8. Tenglamani yeching: $10^x = 5$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\lg 5$ D) $\log_5 10$

9. Tenglamani yeching: $3^x(3^x - 12) = -27$

A) 3 va 9 B) 3 va 2 C) 1 va 2 D) $\log_3 12$

10. Tengsizlikni yeching: $x^2 > x$

A) $(0;+\infty)$ B) $(1;+\infty)$ C) $(0;1)$ D) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

11. Tengsizlikni yeching: $\frac{1}{x} > 1$

A) $(0;1)$ B) $(1;+\infty)$ C) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ D) $(-\infty;0) \cup (0;1)$

12. Tengsizlikni yeching: $\log_{1/2} x > -1$

A) $0 < x < 2$ B) $x > 2$ C) $x < 2$ D) $x > \frac{1}{2}$

13. Tengsizlikni yeching: $\lg(x^2 + 2x) < 0$

A) $[-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}]$ B) $(0;+\infty)$

C) $(-1-\sqrt{2};-2) \cup (0;-1+\sqrt{2})$ D) $(-\infty;-1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2};+\infty)$

14. Tengsizlikni yeching: $2^x > 4^x$

A) $x > 0$ B) $x < 0$ C) $0 < x < 2$ D) bo‘sh to‘plam.

15. Tengsizlikni yeching: $(0,3)^{x^2-3} < (0,09)^x$

A) bo‘sh to‘plam B) $(-\infty;+\infty)$ C) $(-1;3)$ D) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Nazorat savollari:

1. Bir o‘zgaruvchili (noma’lumli) tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Ikki o‘zgaruvchili tengsizlikni ta’rifini ayting.
3. Tenglamalalarning teng kuchliligi haqidagi teoremalar va ularning natijalarini ayting.
4. Tengsizliklar kon’yuksiyasi va diz’yunksiyasini misollar yordamida yechib ko‘rsating.
5. Ikki o‘zgaruvchili tenglamalar sistemasini yechish usullarini misollar yordamida tushuntiring.

4-MAVZU: MATRITSA VA DETERMINANTLAR

Reja:

1. **Matritsa haqida tushuncha. Matritsalarning tengligi.**
2. **Matritsalar ustida amallar.**
3. **Ikki va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi.**

4.1. Matritsa haqida tushuncha. Matritsalaming tengligi.

1-Ta’rif: m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi $m{\cdot}n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m\times n$ tartibli ***matritsa,*** uni tashkil etgan sonlar esa ***matritsaning elementlari*** deb ataladi.

Matritsalar $A,B,C,\ldots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i-satr va j-ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 1 & -2 \\ 5 & 0.4 \end{pmatrix}$$

matritsa 3×2 tartibli, ya’ni 3 ta satr va 2 ta ustun ko‘rinishidagi 3·2=6 ta sondan tashkil topgan. Uning 1-satr elementlari a_{11} =2, a_{12} = 13; 2-satr elementlari a_{21} =1, a_{22} =-2 va 3-satr elementlari a_{31} =5, a_{32} =0.4 sonlardan iborat. Bu matritsaning 1-ustuni a_{11} =2; a_{21} =1 a_{31} =5; 2-ustuni a_{12} = 13 va a_{22} =-2, a_{32} =0.4 elementlardan tuzilgan

Agar biror A matritsaning tartibini ko‘rsatishga ehtiyoj bo‘lsa, u $A_{m\times n}$ ko‘rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n}$ =(a_{ij}) ko‘rinishda ifodalanadi.

2-Ta'rif: Agar matritsa n ta satr va n ta ustundan iborat bo‘lsa, u holda u ***n×n*** tartibli ***kvadrat matritsa*** deyiladi.

Agar matrisa faqat bitta satrdan iborat bo‘lsa, u holda bu matrisani — ***satr matritsa;*** agar faqat bitta ustundan iborat bo‘lsa, uni ***ustun matritsa*** deyiladi.

$\begin{pmatrix} -5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$—satr matrisa; $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$—ustun matrisa

A_{nxn} kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

3-Ta'rif: Agar ikkita A va B matritsalarning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, u holda ular ***teng matrirsalar*** deyiladi.

A va B matritsalarning tengligi A=B ko'rinishda belgilanadi.

$$A=\begin{pmatrix} -7+4 & 2\cdot 3 \\ 5-2 & 4:4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsalar o'zaro teng, ya'ni A=B bo'ladi.

4-Ta'rif: $A_{m\times n}$ matritsada i=j bo'lgan elementlar ***diagonal elementlar*** deyiladi.

Masalan, $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning diagonal elementlari a_{11} =0 va a_{22} =3 bo'ladi.

5-Ta'rif: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan kvadrat matritsa ***diagonal matritsa*** deyiladi.

$$A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B_2=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6-Ta'rif: Barcha diagonal elementlari birga teng bo'lgan diagonal matritsa ***birlik matritsa*** deyiladi.

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7-Ta'rif: Barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa ***nol matritsa*** deb ataladi.

$$O_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3\times 3}=O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Matritsalar ustida amallar.

8-Ta'rif: Ixtiyoriy tartibli $A_{m\times n}$ matritsaning istalgan λ ***songa ko'paytmasi*** deb bu matritsaning har bir elementini λ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi va λA kabi belgilanadi.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2\cdot A=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 6 & 2\cdot 7 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9-Ta’rif: Bir xil tartibli A va B matritsalarning mos elementlarining yig‘indisidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar yig‘indisi deyiladi va A+B ko‘rinishda yoziladi.

$$A = A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+9 & -3+(-5) \\ 1+0 & 0+13 \\ -1+(-1) & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ 1 & 13 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Matritsalarni songa ko‘paytirish va o‘zaro qo‘shish amallari quyidagi qonunlarga bo‘ysunishi bevosita ularning ta’riflaridan kelib chiqadi:

I. A+B=B+A (qo‘shish uchun kommutativlik qonuni);

II. A+(B+C) = (A+B)+C (qo‘shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (distributivlik qonuni).

Bundan tashqari yuqoridagi ta’riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas:

$$A+O=A, \quad A+A=2A, \quad 0\cdot A=O, \quad \lambda\cdot O=O.$$

10-Ta’rif: Bir xil tartibli A va B matritsalarning mos elementlarining ayirmasidan tashkil topgan matritsa A va B matritsalar ayirmasi deyiladi va A–B ko‘rinishda yoziladi.

$$A = A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-9 & -3-(-5) \\ 1-0 & 0-13 \\ -1-(-1) & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11-Ta’rif: $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$ ***matritsalarning ko‘paytmasi*** deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m; \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

yig‘indilar kabi aniqlanadi.

Ikki A va B matritsalarning ko‘paytmasi birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgandagina kiritiladi.

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow C_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -8 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

Matritsalar ko‘paytmasi va yig‘indisi quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo‘ladi:

I. $A(BC)=(AB)C$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B+C)=AB+AC$ (ko‘paytirish va qo‘shish amallari $(A+B)C=AC+BC$ uchun distributivlik qonunlari);

III. $AE=EA=A$, $\mathrm{O}\cdot A=\mathrm{O}$, $A\cdot\mathrm{O}=\mathrm{O}$, $0\cdot A=\mathrm{O}$.

12-Ta’rif: A kvadrat matritsani o‘zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan kvadrat matritsa A ***matritsaning m- darajasi*** deyiladi va A^m kabi belgilanadi.

Daraja ta’rifidan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m,k-natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\ A^m\cdot A^k=A^{m+k}\ ;\quad 2.\ (A^m)^k=A^{mk}\ ;$$

$$3.\ (\lambda A)^m=\lambda^m A^m\ ;4.\ E^m=E;\quad 5.\ \mathrm{O}^m=\mathrm{O}.$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 8 & 0\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}.$$

13-Ta’rif: Matritsaning yo‘l va ustunlar o‘rinlarini almashtirish transponirlash deyiladi.

A matritsaning transponirlangani A^{T} kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ o‘lchovli bo‘lsa, uning transponirlangani A^{T} $n\times m$ o‘lchovli bo‘ladi.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^T_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlash amali quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; 2. $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$ (λ– ixtiyoriy haqiqiy son);

3. $(A\pm B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}}$; 4. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

4.3. Ikki va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi.

14-Ta’rif: n noma’lumli m ta ***chiziqli tenglamalar sistemasi*** deb quyidagi ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Bu yerda a_{ij} va b_i (i=1,2, …, m; j=1,2, …, n) –berilgan va ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning ***koeffitsiyentlari***, b_i esa ***ozod hadlari*** deyiladi. Bu sistemada x_j (j=1, 2, … , n) noma’lumlar bo‘lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yig‘indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ , \quad i = 1, 2, \cdots, m\,. \tag{2}$$

Endi (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to‘rtburchakli A matritsani, x_j noma’lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Unda, matritsalarni ko‘paytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay bo‘lgan quyidagi matritsaviy ko‘rinishda yozish mumkin:

$$AX=B \tag{4}$$

15-Ta’rif: (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemaning ***yechimi*** deb shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo‘yilganda har bir tenglamani qanoatlantiriladi, ya’ni to‘g‘ri tenglikka aylanadi.

Sistemaning yechimlari

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

ustun matritsa koʻrinishda yozilsa, u (4) matritsaviy tenglamani toʻgʻri tenglikka aylantiradi. Bunda n ta sondan tuzilgan X ustun matritsa sistemaning bitta yechimi boʻlib hisoblanadi.

Masalan,

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-1\\4x_1+3x_2-x_3=-9\end{cases}\qquad(5)$$

n=3 noma'lumli m=2 ta tenglamalar sistemasi uchun x_1=–2, x_2= 0 va x_3=1 yoki

$$X=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim boʻladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5) sistema tenglamalariga qoʻysak,

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=2\cdot(-2)-0+3\cdot1=-1\\4x_1+3x_2-x_3=4\cdot(-2)+3\cdot0-1=-9\end{cases}$$

toʻgʻri tengliklarga ega boʻlamiz.

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&3&-1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\-9\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad AX=B$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&3\\4&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-9\end{pmatrix}.$$

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va yechim mavjud boʻlgan taqdirda, uni topish ***sistemani yechish*** deb ataladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol boʻlishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=-14\\2x_1-3x_2=19\end{cases}$$

sistema uchun x_1=2 va x_2=–5 yagona yechim boʻladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5) sistema uchun koʻrsatilgan yechimdan tashqari x_1=–5, x_2=26 va x_3=43 ham yechim boʻlishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig‘indisi bir paytning o‘zida ham 1, ham 0 bo‘ladigan sonlar mavjud emas.

Test savollari:

1. Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
   A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q;
2. Quyidagi *A* va *B* matritsalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

   A) *A*–*B*; B) *A*·*B*; C) *B*·*A*; D) *A*+*B*.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 4A + 3B = ?$
   A) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ D) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 25 \end{pmatrix}$
4. Matritsa mazmuni qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) sonlar yig‘indisi; B) sonlar ko‘paytmasi;
   C) sonlar to‘plami; D) sonlar jadvali.
5. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.
   A) 2×2; B) 2×3; C) 3×2; D) 3×3;
6. Elementlari a_{ij} bo‘lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?
   A) Barcha a_{ij} elementlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lsa;
   B) Barcha a_{ij} elementlari nolga teng bo‘lsa;
   C) Barcha a_{ij} elementlarning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa;
   D) Biror satridagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo‘lsa;
7. Quyidagi matritsalarning qaysi biri nol matritsa bo‘lmaydi?
   $A) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$
   D) Keltirilgan barcha matritsalar nol matritsa bo‘ladi.
8. Elementlari a_{ij} bo‘lgan kvadrat matritsa qachon birlik matritsa deyiladi?
   A) Barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa; B) a_{ii} =1 va a_{ij} =0 ($i \neq j$) bo‘lsa;
   C) Barcha a_{ii} diagonal elementlar birga teng bo‘lsa;

D) Biror satrdagi barcha a_{ij} elementlar birga teng bo‘lsa;

9. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

D) bu yerda birlik matritsa yo‘q.

11. Quyidagi matritsaning a_{23} elementini toping: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

A) -4 B) 4 C) 6 D) -2

12. Quyidagi matritsaga teng matritsani toping: $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

A) $\begin{pmatrix} 3*4 & 3-0 \\ 8:2 & 5-10 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3*4 & 3-0 \\ 8:2 & 5+10 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 3*4 & 3-0 \\ 4:2 & 5+10 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$

13. Quyidagilardan qaysi biri ustun matritsa bo‘ladi?

A) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ B) (0 -3 9) C) $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$

14. Quyidagi matritsaning transponirlanganini toping: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

A) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, C) $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

D) Barcha javoblar to‘g‘ri

15. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$ ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasini yozing.

A) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 62 \\ 73 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AX=B$

B) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 62 \\ 73 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AX=B$

C) $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 62 \\ 73 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AX=B$

D) $A = \begin{pmatrix} 62 \\ 73 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $AX=B$

Nazorat savollari:

1. Matritsalarni songa ko‘paytirish va o‘zaro qo‘shish amallari uchun distributivlik qonuni o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.
2. Matritsani songa ko‘paytirish va matritsalarni ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.
3. $A_{p\times q}=(a_{ij})$ matritsaning $p \neq q$ bo‘lganda m – darajasini (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) hisoblash mumkin emasligini ko‘rsating.
4. Istalgan tartibli matritsalarni ko‘paytirish mumkin emasligini ko‘rsating.
5. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow AX=B$ ekanligini ko‘rsating.

4-1-MAVZU: IKKINCHI VA UCHINCHI TARTIBLI DETERMINANT, UNING XOSSALARI. KRAMER FORMULALARI.

Reja:

1. Determinant tushunchasi va uni hisoblash.
2. Determinantlarning asosiy xossalari.
3. Kramer formulalari.

4-1.1. Determinant tushunchasi va uni hisoblash.

1-Ta’rif: Ixtiyoriy $n \times n$ o‘lchovli kvadrat matritsa

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

ning elementlaridan tuzilgan ushbu

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

ifoda (matritsa kabi n ta yo‘l va n ta ustunga ega bo‘lgan ifoda) A matritsaning ***n-tartibli determinanti*** deyiladi va $\det A$ (yoki $|A|$, yoki Δ) kabi belgilanadi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2-Ta’rif: Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan a_{ij} ($i,j=1,2, \ldots ,n$) sonlar determinantning ***elementlari***, gorizontal ko‘rinishda joylashgan a_{ij} ($j=1,2, \ldots ,n$) elementlar determinantning ***i- satri*** **(**$i=1,2, \ldots ,n$**)**, vertikal ko‘rinishda joylashgan a_{ij} ($i=1,2, \ldots ,n$) elementlar esa determinantning ***j ustuni*** **(**$j=1,2, \ldots ,n$**)** deyiladi.
Matritsa elementi determinantning ham elementi deyiladi.

Masalan, $n = 1$ bo‘lganda $A = (a_{11})$ bo‘lib, $detA = a_{11}$;
$n = 2$ bo‘lganda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bo‘lib,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22.$$

$n = 3$ bo‘lganda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ bo‘lib,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (2$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

)
bo‘ladi.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -10$$

Odatda (1) va (2) mos ravishda ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar deyiladi.

Demak, determinantlar sonlarni ifodalaydi.
Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo‘lsin. Bu determinantning biror a_{ik} $(i = 1,2,3;\ k = 1,2,3)$ elementini olib, shu element joylashgan yo‘lni hamda ustunni o‘chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik}kabi belgilanadi.

Ushbu $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$

miqdor a_{ik} elementning algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi.

Masalan:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

determinant uchun

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14$$

va hokazolar.

Teorema. Determinantning biror yo‘lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to‘ldiruvchilari bilan ko‘paytmasidan tashkil topgan yig‘indi shu determinantning qiymatiga teng bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli determinant, ta’rifga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

bo‘ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta’rifga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{31}\right) +$$

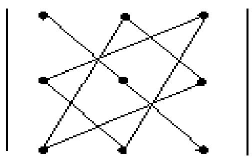
$$+ a_{13}\left(a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

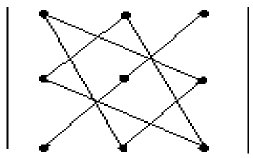
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -110.$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig‘indisidan iborat bo‘lib, ularning uchtasi musbat ishorali, uchtasi manfiy ishorali bo‘ladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo‘ladi,



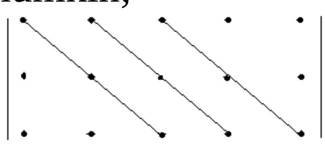


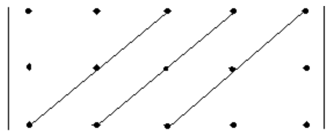
$+$ $-$

Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko‘rinishda yozib olsak

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

determinantning qiymatini Sarrius usuli deb ataluvchi usul bilan ham hisoblash mumkin;





$+$ $-$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 14 + 60 + 0 - (-5) - 0 - 84 = -5.$$

4-1.2. Determinantlarning asosiy xossalari.

- Agar determinantning biror satri (ustuni) faqat nollardan iborat bo‘lsa, determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot 7 + 2\cdot 0\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 6 - 1\cdot 0\cdot 5 -$$

$$-2\cdot 0\cdot 7 - 3\cdot 0\cdot 6 = 0.$$

- Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satri (ikkita ustuni) elementlari proporsional bo‘lsa, determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Agar determinantning biror satri (ustuni) biror λ o‘zgarmas songa ko‘paytirilsa, determinantning qiymati ham λ ga ko‘payadi.
- Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satrlari (ikkita ustunlari) o‘rinlarini almashtirilsa, determinant ishorasini o‘zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -6 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

- Agar determinantning bir satrini (ustunini) o‘zgarmas songa ko‘paytirib, uni boshqa satriga (ustuniga) qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2\cdot 2+3 & 2\cdot 1+4 & 2\cdot 0+5 \\ -6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -60.$$

- Agar determinantda har bir *i*-satr (*i*=1,2,3, ⋯,*n*) *i*-ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

- Agar determinantning ikkita satr (ustun) elementlari bir xil bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

- Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari umumiy λ ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -14.$$

- Agar determinantning biror *i*-satri ikkita qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat, ya’ni a_{ij} + b_{ij} ko‘rinishda bo‘lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+2 & 2 \\ 1+4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

- Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 5\cdot 2 = 40.$$

- Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa, u holda $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ tenglik o‘rinlidir.

Masalan,

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

4-1.3. Kramer formulalari.

Uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{3}$$

sistemani qaraymiz. Sistema uchta x, y va z noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsientlari, $b_1, b_2\ va\ b_3$ sonlar ozod hadlar deyiladi. Bu sistemaning koeffitsientlaridan quyidagi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

tenglamalar sisremasining uchinchi tartibli asosiy determinanti hosil qilamiz. So‘ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi yordamchi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, (1) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarga ega bo‘ladi.

Teorema. Agar

1) $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, u holda (1) sistema yagona (x, y, z) yechimga ega bo‘lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{4}$$

bo‘ladi;

2) $\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0$ bo‘lsa, u holda (3) sistema yechimga ega bo‘lmaydi;

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bo‘lsa, u holda (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish formulalari ***Kramer formulalari*** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ x + y + 2z = 7, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

Avvalo sistema koeffitsientlaridan tuzilgan Δ asosiy determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 1 - (-2) - (-4) - 3 = 18 \neq 0.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechimga ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 7 - (-1) - (-10) - 21 = 8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 20 - 1 - (-14) - 4 - 5 = 38,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 42 - 5 - 10 - (-14) - 3 = 40.$$

Unda

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9}; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$$

bo‘ladi.

Test savollari:

1. Quyidagi determinantning a_{32} elementini toping.

   $$detA = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

   A) 7 B) 2 C) 5 D) 0

2. Tenglamani yeching:

   $$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2-x & 2 \end{vmatrix} = 5$$

   A) $2\frac{1}{5}$ B) 1 C) -1 D) $\frac{1}{5}$

3. Quyidagi determinantning diagonal elementlari yig‘indisini toping.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

   A) 17 B) 13 C) 10 D) 6

4. Quyidagi determinantning a_{12} va a_{23} elementlari yig‘indisini toping.

   $$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

   A) -3 B) 2 C) 3 D) -2

5. Quyidagi determinantda a_{21}elementning algebraik to‘ldiruvchisini hisoblang

   $$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

   A) 0 B) 2 C) -2 D) 1

6. Determinantning a_{12} elementining minorini toping.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 5 B) -5 C) 4 D) -4

7. Ushbu determinantni hisoblang.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3

8. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

A) $(2;-4;10)$ B) $(2;-1;-2)$ C) $(-2;1;2)$ D) $(2;1;2)$

9. $(x_1;x_2)$ sonlar jufti $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ sistemaning yechimi bo‘lsa, $x_1 + x_2$ ni toping.

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1

10. Ushbu determinantni hisoblang.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 24 B) 12 C) 6 D) 8

11. Tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} 6 & x \\ x+1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

A) $x_1 = 3;\ x_2 = 2$ B) $x_1 = -3;\ x_2 = 2$

C) $x_1 = -3;\ x_2 = -2$ D) $x_1 = 3;\ x_2 = -2$

12. Quyidagi determinant a_{31}va a_{12} elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari
ayirmasini toping.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 2 C) -2 D) 3

13. Quyidagi determinant a_{11} va a_{22} elementlarining yig‘indisini toping.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

A) 4 B) 3 C) 5 D) 1

14. Ushbu determinant a_{11} va a_{21} elementlari minorlarining ko‘paytmasini toping.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 12 B) 30 C) 20 D) 15

15. Ushbu determinantni hisoblang.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

A) -22 B) 22 C) 18 D) -18

Nazorat savollari:

1. $detA = detA^T$ tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.
2. Ixtiyoriy 3-tartibli determinant qiymatini uning 2-satrining algebraik to‘ldiruvchilari yordamida hisoblang.
3. Ixtiyoriy 2 ta 3-tartibli determinant uchun $|A \cdot B|=|A|\cdot|B|$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating.
4. Ixtiyoriy 4-tartibli determinantni biror satr yoki ustuni bo‘yicha yoyib hisoblang.
5. Uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ shartlar bajarilganda cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishini ko‘rsating.

5-1-MAVZU: VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

<u>REJA:</u>

1. ***Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar.***
2. ***Vektorlar ustida amallar.***
3. ***Vektorlarning koordinatalari.***

5-1.1.Vektorlar va ular bilan bog‘liq tushunchalar. Hayotda uchraydigan harorat, bajarilgan ish, ish haqi, jismning massasi, ishlab chiqarish hajmi, tovarning narxi, partiyadagi mahsulotlar soni kabi kattaliklar ularni ifodalovchi sonli qiymatlar orqali to‘liq aniqlanadi.

<u>1-TA’RIF:</u> Sonli qiymatlari bilan to‘liq aniqlanadigan kattaliklar ***skalyarlar*** deb ataladi.

“Skalyar” atamasi lotin tilidagi “scala” so‘zidan olingan bo‘lib, “pog‘ona” degan ma’noni ifodalaydi. Skalyarlar a, b, c, … kabi harflar bilan belgilanadi.

Kuch, kuch momenti, tezlik, tezlanish, bosim, siljish, elektr maydonining kuchlanishi, oqim kabi kattaliklarni aniqlash uchun ularning sonli qiymatlaridan tashqari yo‘nalishlarini ham ko‘rsatish zarurdir.

<u>2-TA’RIF:</u> Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar ***vektorlar*** deyiladi.

“Vektor” lotincha ”vehere” so‘zidan olingan va “yo‘llovchi” ma’nosiga ega. Vektorlar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ yoki $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, … kabi belgilanadi.

<u>3-TA’RIF:</u> Har qanday $\boldsymbol{a}$ vektorning sonli qiymati uning ***moduli*** yoki ***uzunligi*** deb ataladi va $|\boldsymbol{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai-nazardan vektorlar yo‘naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Boshi A va oxiri B nuqtada bo‘lgan yo‘naltirilgan kesma bilan aniqlanadigan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta ***vektorning boshi***, B nuqta esa ***vektorning uchi*** deyiladi. Bu yerda AB kesma uzunligi vektor modulini ifodalaydi, ya’ni $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$ bo‘ladi.

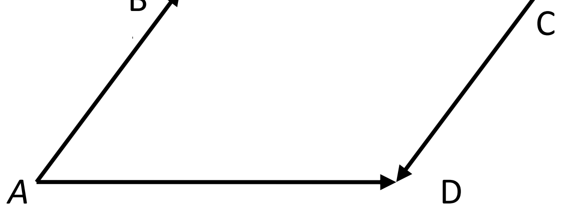
<u>4-TA’RIF:</u> Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo‘lgan vektor ***nol vektor*** deyiladi.

Nol vektor **0** kabi belgilanib, uning moduli $|\mathbf{0}|=0$ bo‘ladi. Nol vektorning yo‘nalishi to‘g‘risida so‘z yuritib bo‘lmaydi.

<u>5-TA’RIF:</u> Bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar ***kollinear vektorlar*** deb ataladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz.

Masalan, $ABCD$ parallelogramm bo‘lsa (9-rasmga qarang), unda



9-rasm

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, ammo $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kolllinear bo‘lmaydi.

Izoh. Nol vektor **0** har qanday ***a*** vektorga kollinear deb hisoblanadi.

6-TA’RIF: Quyidagi uchta shartlar bajarilganda ***a*** va ***b*** ***teng vektorlar*** deyiladi:

1. ***a***||***b*** , ya’ni bu vektorlar kollinear;
2. |***a***|=|***b***|, ya’ni bu vektorlar bir xil uzunlikka ega;
3. ***a*** va ***b*** vektorlar bir xil yo‘nalishga ega.

Agar ***a*** va ***b*** teng vektorlar bo‘lsa, ***a***=***b*** deb yoziladi. Masalan, yuqoridagi *ABCD* parallelogrammda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bo‘ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko‘chirish mumkinligi kelib chiqadi.

7-TA’RIF: Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar ***komplanar*** deyiladi.

Masalan, uchburchakning turli tomonlarida joylashgan vektorlar komplanar bo‘ladi.

5-1.2.Vektorlar ustida amallar. Endi vektorlar ustida arifmetik amallar kiritamiz.

8-TA’RIF: ***a*** vektorni λ songa (skalyarga) ko‘paytmasi deb quyidagi uchta shart bilan aniqlanadigan yangi bir ***c*** vektorga aytiladi:

1. |***c***|= |λ||***a***|, ya’ni ***a*** vektorning uzunligi |λ| marta o‘zgaradi;
2. ***c*** || ***a***, ya’ni bu vektorlar kollinear;
3. λ>0 bo‘lsa ***c*** va ***a*** bir xil yo‘nalgan, λ<0 bo‘lsa ***c*** va ***a*** qarama-qarshi yo‘nalgan.

a vektorni λ songa ko‘paytmasi λ***a*** kabi belgilanadi. Masalan, *ABCD* trapetsiya bo‘lib, uning *AD* va *BC* asoslarining uzunliklari |*AD*|=8 va |*BC*|=4 bo‘lsa, unda $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{CB}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Vektorlarni songa ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. λ(β***a***)=β(λ***a***)   2. (λ±β)***a***=λ ***a*** ±β ***a***   3. 0· ***a***=**0**.

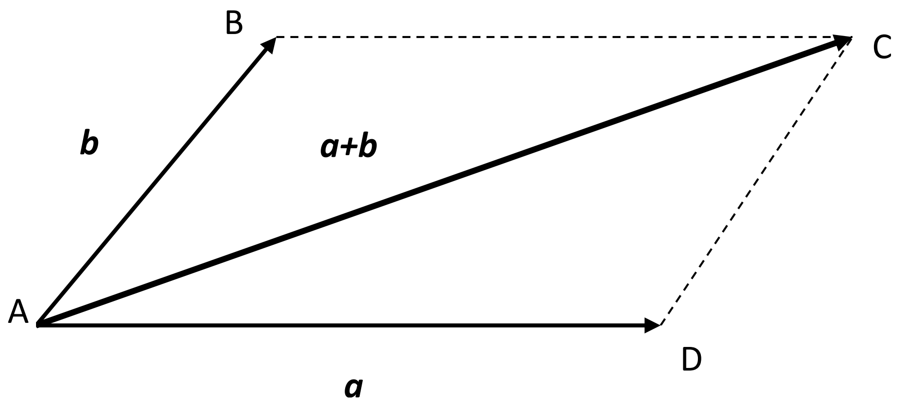
Bu yerda λ va β ixtiyoriy sonlarni, ***a*** esa ixtiyoriy vektorni ifodalaydi.

9-TA’RIF: (–1)***a*** vektor ***a*** vektorga ***qarama-qarshi vektor*** deyiladi va – ***a*** kabi belgilanadi.

Masalan, yuqorida ko‘rilgan $ABCD$ parallellogramda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ qarama-qarshi vektorlar, ya’ni $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ bo‘ladi.

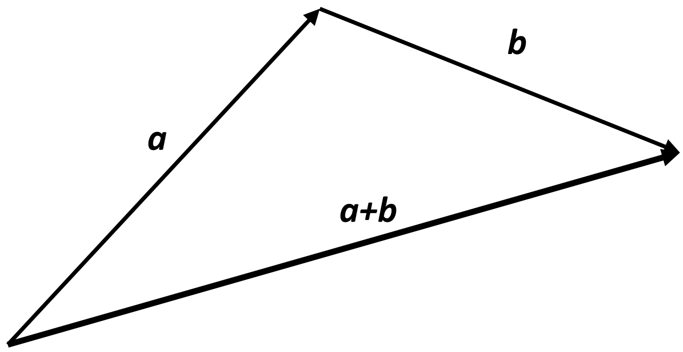
Endi ikkita ***a*** va ***b*** vektorlarni qo‘shish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko‘chirish orqali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni ***a***$=\overrightarrow{AD}$, ***b***$=\overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz (10-rasm).

<u>10-TA’RIF:</u> ***a*** va ***b*** ***vektorlarning yig‘indisi*** deb $ABCD$ parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va ***a***+***b*** kabi belgilanadi.



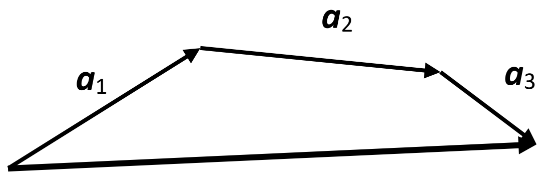
10-rasm

Vektorlar yig‘indisining bu usulda aniqlash ***parallelogramm qoidasi*** deyiladi va unga moddiy nuqtaga qo‘yilgan ikkita kuchning teng ta’sir etuvchisini topish asos qilib olingan. Bu yig‘indini ***uchburchak qoidasi*** deb ataladigan quyidagi usulda ham topish mumkin. Bunda dastlab parallel ko‘chirish orqali ***b*** vektorning boshi ***a*** vektorning uchi ustiga keltiriladi (11-rasm). So‘ngra ***a*** boshidan chiqib, ***b*** uchida tugaydigan vektor hosil qilinadi va u ***a***+***b*** yig‘indini ifodalaydi.



11-rasm

Bir nechta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, …, $\boldsymbol{a}_n$ ($n \geq 3$) vektorlarning yig‘indisi parallelogramm qoidasini bir necha marta ketma-ket qo‘llash yoki ***ko‘pburchak qoidasi*** deb ataladigan ushbu usulda topiladi. Bu usulda parallel ko‘chirish orqali $\boldsymbol{a}_1$ uchiga $\boldsymbol{a}_2$ boshi, $\boldsymbol{a}_2$ uchiga $\boldsymbol{a}_3$ boshi va hokazo $\boldsymbol{a}_{n-1}$ uchiga $\boldsymbol{a}_n$ boshi keltirib qo‘yiladi. Hosil bo‘lgan siniq chiziqning boshi ($\boldsymbol{a}_1$ vektor boshi) bilan oxiri ($\boldsymbol{a}_n$ vektor uchi) tutashtirilib, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+ \boldsymbol{a}_2+ \boldsymbol{a}_3+ \ldots+ \boldsymbol{a}_n$ yig‘indi vektor topiladi. Masalan, uchta $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ vektorlarning $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig‘indisini topish quyidagi 12-rasmda ko‘rsatilgan:



$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1+ \boldsymbol{a}_2+ \boldsymbol{a}_3$

12-rasm

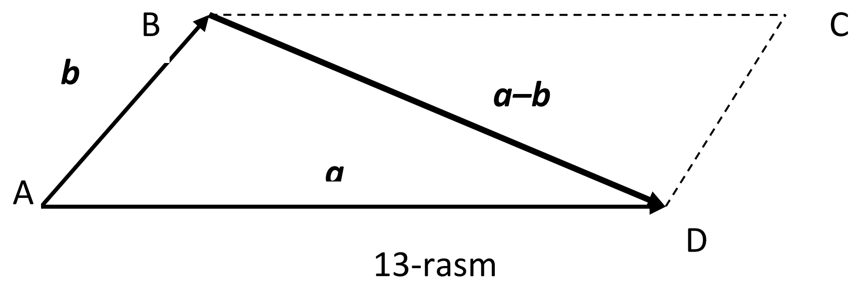
Agar $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_3$ bir tekislikda joylashmagan vektorlar bo‘lsa, ko‘pburchak qoidasi bilan topilgan $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ yig‘indi qo‘shiluvchi vektorlarni parallel ko‘chirish orqali umumiy bir 0 boshga keltirib hosil qilinadigan parallelepipedning 0 uchidan chiquvchi diagonali kabi ham topilishi mumkin. Bu ***parallelepiped qoidasi*** deb ataladi.

Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ — kommutativlik (o‘rin almashtirish) qonuni;
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ — assotsiativlik (guruhlash) qonuni;
3. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a}+ \lambda\boldsymbol{b}$; **4.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} =\boldsymbol{a}$.

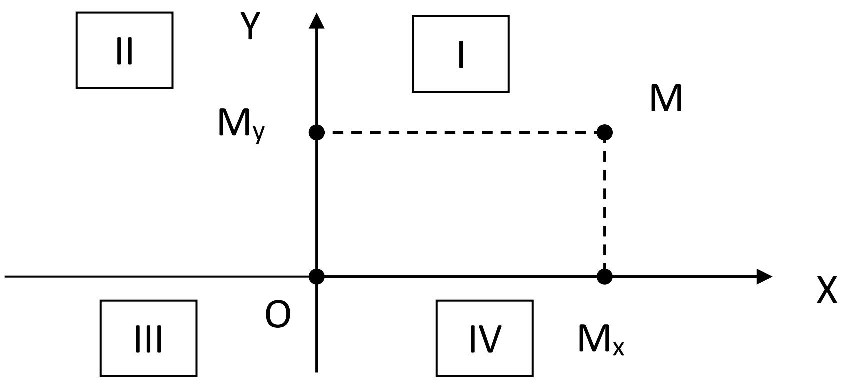
<u>11-TA’RIF:</u> ***a*** va ***b vektorlarning ayirmasi*** deb ***a*** va ***–b*** vektorlarning yig‘indisiga aytamiz.

a va ***b*** vektorlarning ayirmasi ***a***–***b*** kabi belgilanadi bu vektorlardan hosil qilingan *ABCD* parallelogrammning B uchidan chiquvchi $\overrightarrow{BD}$ diagonalidan iborat bo‘ladi (13-rasmga qarang).



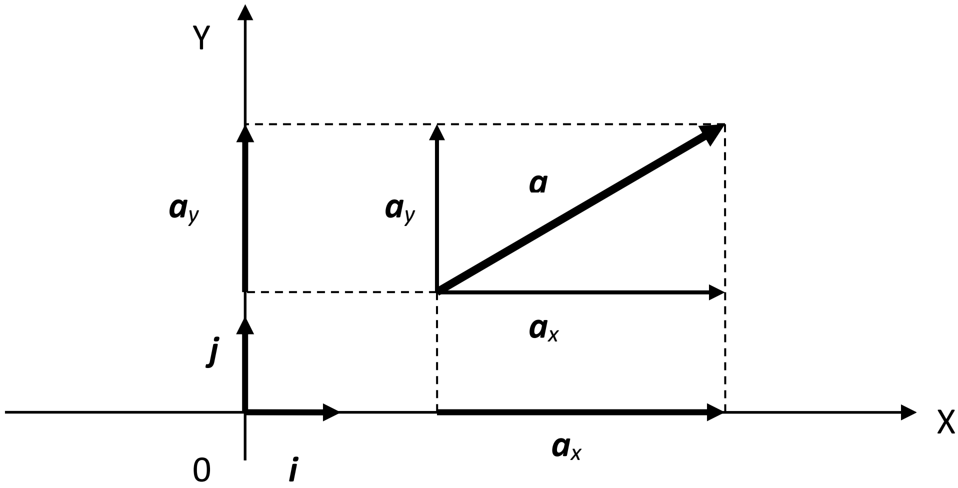
13-rasm

5-1.3.Vektorlarning koordinatalari. Dastlab tekislikdagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun tekislikda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan va O nuqtada kesishuvchi OX(abssissalar o‘qi) va OY (ordinatalar o‘qi) o‘qlaridan tuzilgan XOY Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Bu sistemada tekislikdagi har bir M nuqta o‘zining OX va OY o‘qlardagi proyeksiyalari bo‘lmish M_x va M_y nuqtalar orqali (14-rasmga qarang) quyidagicha aniqlanadi. M_x va M_y nuqtalardan O koordinata boshigacha bo‘lgan $|OM_x|$ va $|OM_y|$ masofalar orqali M ***nuqtaning koordinatalari*** deb ataladigan $x=\pm|OM_x|$ (abssissa) va $y=\pm|OM_y|$ (ordinata) sonlar aniqlanadi. Bunda (x,y) koordinatalarning ishoralari I–IV choraklarda mos ravishda (+,+), (–,+), (–,–) va (+,–) kabi olinadi. Shunday qilib, tekislikdagi har bir M nuqta o‘zining koordinatalari bo‘lmish (x,y) sonlar juftligi orqali bir qiymatli aniqlanadi va bu hol $M(x,y)$ kabi yoziladi.



14-rasm

Xuddi shunday tarzda tekislikdagi har bir ***a*** vektorni sonlar juftligi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishga ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan ***i*** va ***j*** vektorlarni kiritamiz (15-rasm).



15-rasm

Kiritilgan ***i*** va ***j*** vektorlar ***ort vektorlar*** yoki qisqacha ***ortlar*** deb ataladi. Endi berilgan ***a*** vektorni yo‘naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o‘qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar ham yo‘naltirilgan kesmalar bo‘lib, ular ***a*** vektorning OX va OY o‘qdagi ***proyeksiyalari*** deb ataladi va $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ kabi belgilanadi. Koordinatalar o‘qlarida joylashgan $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ vektorlar mos ravishda shu o‘qlardagi ***i***, ***j*** ortlarga kollinear bo‘ladi va shu sababli $\boldsymbol{a}_x = \pm|\boldsymbol{a}_x|\boldsymbol{i}$ hamda $\boldsymbol{a}_y = \pm|\boldsymbol{a}_y|\boldsymbol{j}$ deb yozish mumkin. Bunda proyeksiyalar va ortlar bir xil yo’nalishda bo‘lsa +, qarama-qarshi bo‘lsa – ishorasi olinadi. Unda vektorlarni qo‘shish ta’rifiga asosan quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\boldsymbol{a}= \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y= (\pm|\boldsymbol{a}_x|)\boldsymbol{i} +(\pm|\boldsymbol{a}_y|)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i} +y\boldsymbol{j} . \qquad (1)$$

<u>12-TA’RIF:</u> (1) tenglik ***a*** vektorning ortlar bo‘yicha ***yoyilmasi***, *x* va *y* sonlari esa uning ***koordinatalari*** deb ataladi .

Koordinatalari *x* va *y* , ya’ni (1) yoyilmaga ega bo‘lgan ***a*** vektor qisqacha $\boldsymbol{a}=(x,y)$ kabi ifodalanadi. Masalan, yoyilmasi $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ bo‘lgan vektorning koordinatalari $x=2$, $y= - 3$ bo‘ladi va $\boldsymbol{a}=(2,-3)$ deb yoziladi. Nol vektor uchun yoyilma $\boldsymbol{0} = 0\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=(0,0)$, ya’ni uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo‘ladi.

Shunday qilib tekislikdagi ixtiyoriy ***a*** vektor o‘zining x va y koordinatalari, ya’ni (x,y) sonlar juftligi bilan (1) tenglik orqali to‘liq aniqlanadi.

Xuddi shunday tarzda fazodagi nuqta va vektorlar uchun koordinatalar tushunchasi kiritiladi. Buning uchun fazoda o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan va O nuqtada kesishuvchi OX, OY va OZ (applikatalar) o‘qlarini kiritamiz. Bunda fazodagi har bir M nuqta o‘zining OX, OY va OZ o‘qlaridagi proyeksiyalari M_x , M_y va M_z orqali tekislikda qaralgani singari x, y va z koordinatalari bilan bir qiymatli aniqlanadi va bu M(x, y, z) kabi ifodalanadi.

Vektorlarning koordinatalarini aniqlash uchun oldin kiritilgan ***i*** va ***j*** ortlarga qo‘shimcha ravishda OZ koordinata o‘qida joylashgan ***k*** ort vektorni kiritamiz. Unda, fazodagi vektorlarni qo‘shishning parallelepiped qoidasidan foydalanib,

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a_x}+\boldsymbol{a_y}+\boldsymbol{a_z}=(\pm|\boldsymbol{a_x}|)\boldsymbol{i}+(\pm|\boldsymbol{a_y}|)\boldsymbol{j}+(\pm|\boldsymbol{a_z}|)\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (2)$$

yoyilmani hosil etamiz. Bu yerda x, y, z sonlar uchligi fazodagi ***a*** vektorning koordinatalari bo‘lib, $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ deb yoziladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi va ular ustidagi qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi. Bularni fazodagi vektorlar uchun ifodalaymiz. Tekisikdagi vektorlar uchun tegishli natijalar z=0 holda kelib chiqadi.

1-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlar teng bo‘lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya’ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Teoremaning isboti (2) yoyilmadan kelib chiqadi va o‘quvchiga havola etiladi.

2-TEOREMA: $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2, z_2)$ vektorlarning yig‘indisi yoki ayirmasining koordinatalari qo‘shiluvchilarning mos koordinatalari yig‘indisi yoki ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)=(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2, z_1\pm z_2). \qquad (3)$$

Isbot: Vektorlarning (2) yoyilmasi va ularni o‘zaro qo‘shish, songa ko‘paytirish amallarining xossalariga asosan

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1, z_1)\pm(x_2,y_2, z_2)=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=$$
$$=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}$$

tenglikni olamiz va undan (3) formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(4,-2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,9,0)$ vektorlar uchun

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4+5,-2+9,1+0)=(9,7,1)\ , \qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4-5,-2-9,1-0)=(-1,-11,1).$$

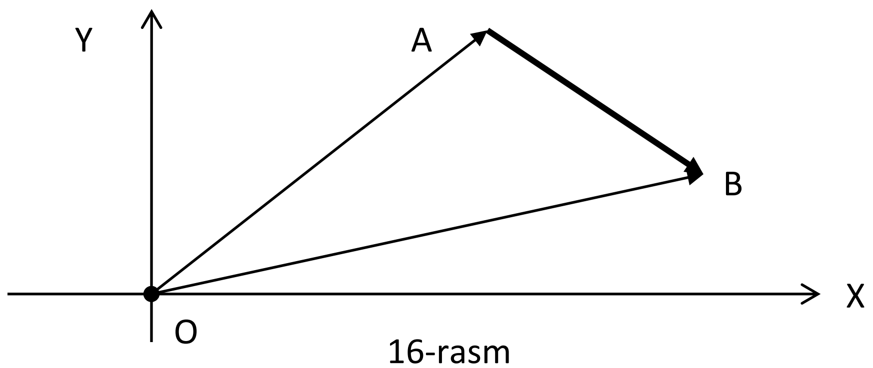
3-TEOREMA: Har qanday $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning ixtiyoriy λ songa ko‘paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya’ni $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\cdot(x, y, z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Teoremaning isbotini o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etamiz. Masalan, $\boldsymbol{a}=(3, -4, 1)$ va $\lambda=6$ bo‘lsa, $6\boldsymbol{a}=6(3, -4, 1)=(18, -24, 6)$ bo‘ladi.

Bu natijalardan foydalanib ushbu masalalarni yechamiz.

Masala № 1: Boshi $A(x_1, y_1, z_1)$ va uchi $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtada joylashgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan vektorning A boshi va B uchini koordinatalar boshi O bilan tutashtirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni hosil etamiz (16-rasmga qarang).



16-rasm

Bunda $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2, z_2)$ bo‘ladi va vektorlarning ayirmasi ta’rifi hamda 2-teoremaga asosan quyidagi natijani olamiz:

$\overrightarrow{AB}=(x, y, z)=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2, z_2)-(x_1, y_1, z_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. (4)

Demak, vektorning koordinatalarini topish uchun uchining koordinatalaridan boshini koordinatalarini ayirish kerak. Masalan, boshi A(5,–4, 2) va uchi B(7, 1, 0)
nuqtalarda joylashgan vektorning koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$x=x_2-x_1=7-5=2,\quad y=y_2-y_1=1-(-4)=5,\quad z=z_2-z_1=0-2=-2.$$

Masala № 2: Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan AB kesmani berilgan λ ($\lambda>0$) nisbatda bo‘luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: Oldingi masalaga asosan

$$\overrightarrow{AC}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1),\qquad \overrightarrow{CB}=(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0)$$

deb yozishimiz mumkin. Masala sharti, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifi va 3-teoremaga asosan ushbu tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{CB}| \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{CB} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)=\lambda(x_2-x_0, y_2-y_0,\ z_2-z_0) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)= (\lambda\, x_2-\lambda\, x_0, \lambda\, y_2-\lambda\, y_0, \lambda\, z_2-\lambda\, z_0).$$

Bu yerdan, 1-teoremaga asosan, izlanayotgan x_0 koordinata ushbu tenglamadan topiladi:

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)\Rightarrow(1+\lambda)x_0=\lambda x_2+x_1\Rightarrow x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ .$$

Xuddi shunday tarzdagi mulohazalar orqali izlangan nuqtaning koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (5)$$

formulalar bilan topilishini aniqlaymiz.

Masalan, uchlari A(2,–3, 1) va B(16, 11, 15) nuqtalarda joylashgan AB kesmani λ=2:5 nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari (5) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$x_0=\frac{2+\frac{2}{5}\cdot 16}{1+\frac{2}{5}}=6,\quad y_0=\frac{-3+\frac{2}{5}\cdot 11}{1+\frac{2}{5}}=1,\quad z_0=\frac{1+\frac{2}{5}\cdot 15}{1+\frac{2}{5}}=7$$

Xususiy, λ=1 bo‘lgan, holda AB kesmaning o‘rta nuqtasi koordinatalari uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}. \qquad (6)$$

Masalan, uchlari A(4,–1, 5) va B(2, 11, –13) nuqtalarda joylashgan AB kesmaning o‘rta nuqtasining koordinatalari (6) formulaga asosan quyidagicha bo‘ladi:

x_0=(4+2)/2=3, y_0=(–1+11)/2=5, z_0=(5+(–13))/2=–4 .

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyarlarga qanday misollar bilasiz?
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga qanday misollar bilasiz?
5. Vektorlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?

7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
11. Vektorni songa ko‘paytmasi qanday xossalarga ega?
12. Vektorlar yig‘indisi qanday aniqlanadi?
13. Vektorlar yig‘indisi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlarga tushuniladi?
15. Vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik sharti nimadan iborat?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?
19. Vektorning koordinatalari uning boshi va uchi bo‘yicha qanday topiladi?
20. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?
21. Kesma o‘rta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

Testlardan namunalar

1. Skalyar deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka skalyar deb aytiladi.
D) Yo‘nalgan kesmaga skalyar deb aytiladi.
E) Har qanday kattalik skalyar deyiladi.

2. Vektor kattalik deb nimaga aytiladi?

A) Faqat yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
B) Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
C) Ham son qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikka vektor deb aytiladi.
D) Har qanday kesmaga vektor deb aytiladi.

E) Har qanday kattalik vektor deyiladi.

3. Quyidagi kattaliiklardan qaysi biri vektor bo‘ladi ?
   A) sirt yuzasi; B) jism hajmi; C) kesma uzunligi;
   D) kuch; E) Birorta ham kattalik vektor bo‘lmaydi.
4. Qachon vektorlar kollinear deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
B) Har qanday ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar kollinear deb aytiladi.
D) Bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.
E) Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi ***a*** va ***b*** vektorlarga kollinear vektor deb aytiladi.

5. Qachon vektorlar teng deb aytiladi ?

A) Bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.
B) Bir xil uzunlikli ***a*** va ***b*** vektorlarga teng vektorlar deb aytiladi.
C) Bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lgan vektorlar teng deb aytiladi.
D) ***a*** va ***b*** vektorlar kollinear, bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng bo‘lsa, ular teng vektorlar deb aytiladi.
E) Kollinear va bir xil yo‘nalgan vektorlar teng deb aytiladi.

6. Ta’rifni to‘ldiring: Uchta vektor komplanar deyiladi, agar ular ··· joylashgan bo‘lsa.

A) bitta to‘g‘ri chiziqda ; B) bitta tekislik yoki parallel tekisliklarda ;
C) parallel to‘g‘ri chiziqlarda ; D) o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarda ;
E) o‘zaro perpendikulyar tekisliklarda.

7. Fazodagi ort vektorlar qanday aniqlanadi?

A) OX, OY, OZ koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalishda ega va uzunliklari birga teng bo‘lgan vektorlar;
B) Uzunliklari birga teng bo‘lgan uchta vektor;
C) O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta vektor;
D) O‘zaro kollinear bo‘lgan uchta birlik vektor;
E) Uchta komplanar birlik vektorlar.

8. ***a***=(2, –5) vektorning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar bo‘yicha yoyilmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan ?

A) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$; B) $\boldsymbol{a}=-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$; C) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$; D) $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$; E) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. Boshi A(n, $2n+3$, $5-2n$), uchi esa B($2n+3$, $2n-1$, n) nuqtada joylashgan $\boldsymbol{a}$ vektorning koordinatalarini toping.
2. Berilgan $\boldsymbol{a}=(n-2,\ n+3,\ n-1)$ va $\boldsymbol{b}=(n,\ n-4,\ n+2)$ vektorlar bo‘yicha $n\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ va $3\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ vektorlarni toping.
3. Boshi A($n-2$, $n+3$, n) va uchi B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtada joylashgan vektorning koordinatalarini toping.
4. Uchlari A($n-2$, $n+3$, n) va B($n+1$, $n-3$, $n-1$) nuqtalarda joylashgan AB kesmani $\lambda=(n-1):(n+2)$ nisbatda bo‘luvchi C(x,y,z) nuqta koordinatalarini aniqlang.

5-2-MAVZU: VEKTORLARNING SKALYAR KO‘PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI.

REJA:

1. ***Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari.***
2. ***Skalyar ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
3. ***Skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari.***

5-2.1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va uning xossalari. Biz vektorlarni songa ko‘paytirish, qo‘shish va ayirish amallarini ko‘rib o‘tdik. Endi vektorlarni o‘zaro ko‘paytirish masalasiga o‘tamiz. Buning uchun dastlab fizikadan kuch bajargan ishni hisoblash formulasini eslaymiz. Biror moddiy nuqtaga $\boldsymbol{f}$ kuch vektori ta’sir etib, uni $\boldsymbol{s}$ vektor bo‘yicha harakatlantirgan bo‘lsin. Bunda kuch va harakat vektorlari orasidagi burchak φ bo‘lsa, unda moddiy nuqtani ko‘chirishda bajarilgan ish $A=|\boldsymbol{f}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\varphi$ formula bilan hisoblanadi. Bu formulada $|\boldsymbol{f}|$ – kuch kattaligini, $|\boldsymbol{s}|$ – bosib o‘tilgan masofani ifodalaydi.

<u>1-TA’RIF:</u> Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***skalyar ko‘paytmasi*** deb ularning modullari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmalariga aytiladi.

a va ***b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ***a·b, ab*** yoki (***a,b***) kabi belgilanadi va , ta’rifga asosan,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda φ orqali ($0\leq\varphi\leq\pi$) ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchak belgilangan bo‘lib, u ***a*** vektordan ***b*** vektorgacha eng qisqa burilish burchagi kabi aniqlanadi. Ikki vektorni (1) ko‘rinishda ko‘paytirish natijasida son, ya’ni skalyar kattalik hosil bo‘ladi va shu sababli ***a·b*** vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ataladi.

Skalyar ko‘paytma ta’rifi bo‘yicha yuqorida ko‘rib o‘tilgan ish formulasini A=***f·s*** deb yozish mumkin. Demak, kuch va harakat lektorlarining skalyar ko‘paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi va bu skalyar ko‘paytmani mexanik ma’nosi bo‘ladi.

Skalyar ko‘paytmaning ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. ***a·b*** = ***b·a***, ya’ni skalyar ko‘paytma uchun kommutativlik qonuni bajariladi.

Haqiqatan ham, skalyar ko‘paytma ta’rifini ifodalovchi (1) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi = |\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$, ya’ni vektorni o‘ziga - o‘zining skalyar ko‘paytmasi (bu ba’zan vektorning skalyar kvadrati deyiladi va $\boldsymbol{a}^2$ kabi belgilanadi) uning moduli kvadratiga teng. Bu xossa ham skalyar ko‘paytma ta’rifini ifodalovchi (1) formuladan bevosita kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2 .$$

3. Ixtiyoriy λ soni uchun $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Dastlab $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ tenglikni o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. (1) formulaga asosan

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}||\lambda\boldsymbol{b}|\cos\varphi= (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}).$$

Endi $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ tenglikni to‘g‘riligini ko‘rsatamiz. Agar $\lambda\geq 0$ bo‘lsa

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Agar $\lambda<0$ bo‘lsa, $\lambda\boldsymbol{a}$ vektor ***a*** vektorga qarama-qarshi yo‘nalgan va shu sababli $\lambda\boldsymbol{a}$ bilan ***b*** vektor orasidagi burchak $\pi-\varphi$ bo‘ladi. Bu holda $\cos(\pi-\varphi)= -\cos\varphi$ va
$\lambda = -|\lambda|$ bo‘lgani uchun

$(\lambda \boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\varphi) =-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi= \lambda\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Jumladan $\lambda=0$ holda har qanday $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$ natijani olamiz.

4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$, ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun distributivlik qonuni bajariladi.

Bu xossani isbotsiz qabul etamiz.

2-TA'RIF: Agar $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'lsa, ular ***ortogonal vektorlar*** deyiladi.

Kelgusida $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning orthogonalligini $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ kabi belgilaymiz. Masalan, oldin kiritilgan $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ort vektorlar o'zaro ortogonal, ya'ni $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$ va $\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$ bo'ladi.

TEOREMA: Noldan farqli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi $\boldsymbol{ab}=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Dastlab teorema shartini zaruriyligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 90^0 =|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0;$$

Endi teorema shartini yetarli ekanligini ko'rsatamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi=0\ ,\ |\boldsymbol{a}| \neq 0\ ,\ |\boldsymbol{b}|\neq 0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\ .$$

5-2.2.Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Oldingi mavzuda koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida songa ko'paytirish, qo'shish va ayirish amallari oson bajarilishini ko'rib o'tgan edik. Endi bu masalani vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun qaraymiz. Tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Skalyar ko'paytmaning 2-xossasi va yuqoridagi teoremadan ortlar uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz:

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} =|\boldsymbol{i}|^2 =1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} =|\boldsymbol{j}|^2 =1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}= \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} =0\ .$$

Endi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning yoyilmasi hamda skalyar ko'paytmaning 3 va 4 - xossalaridan foydalanamiz:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (x_1\boldsymbol{i}+ y_1\boldsymbol{j})\cdot (x_2\boldsymbol{i}+ y_2\boldsymbol{j})= x_1x_2\, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+ x_1y_2\, \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} + y_1x_2\, \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} + y_1y_2\, \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} =$$

$$= x_1x_2\cdot 1+ x_1y_2\cdot 0+ y_1x_2\cdot 0+ y_1y_2\cdot 1= x_1x_2+ y_1y_2.$$

Demak

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1y_2+ y_1y_2 \qquad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,6)$ va $\boldsymbol{b}=(5,-2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1y_2+ y_1y_2=3\cdot 5+6\cdot(-2)=15-12=3.$$

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi uchun

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

5-2.3.Skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi skalyar ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko‘ramiz.

1-masala. Fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytmaning 2- xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = xx+yy+zz = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow |\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (4)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

(4) formulada $z=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x, y)$ vektorning moduli

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

formula bilan hisoblanishini ko‘ramiz.

2-masala. Fazodagi koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko‘paytma ta’rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}\,. \qquad (5)$$

Masalan, $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$ va $\boldsymbol{b}=(0,1,1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

(5) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

formula bilan topilishini ko‘ramiz.

3-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo‘ladi va shu sababli $\cos\varphi=0$. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\boldsymbol{a}=(3,–2,1)$ va $\boldsymbol{b}=(5,7, –1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot5+(–2)\cdot7+1\cdot(–1) = 15–14–1=0.$$

(6) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini topamiz:

$$x_1x_2+y_1y_2= 0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1,y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, boshi $A(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada va uchi $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtada bo‘lgan $\boldsymbol{a}$ vektorni hosil qilamiz. Ma’lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $\boldsymbol{a}=(x_2–x_1, y_2–y_1, z_2–z_1)$. Unda $d=|\boldsymbol{a}|$ va, (4) formulaga asosan,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Masalan, A(5, –3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d=\sqrt{(8-5)^2+(1-(-3))^2+(13-1)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$$

bo‘ladi.

(7) formulada $z_1=0$, $z_2=0$ deb tekislikda koordinatalari bilan berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa uchun

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

5-masala. Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulotlar tannarxi (z_i) va hajmi (q_i) bo‘yicha ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Iqtisodiy ko‘rsatgich	I mahsulot	II mahsulot	III mahsulot
Mahsulot tannarxi (z_i), so‘m	350	500	250
Mahsulot hajmi (q_i), dona	500	700	1200

Mahsulotlarni ishlab chiqarish xarajatlarini toping.

Yechish. Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning tannarx vektorini $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3)$, hajm vektorini $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ deb belgilasak, unda ishlab chiqarish xarajatlari

$$z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}\ ,$$

ya'ni ***z*** va ***q*** vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bizning masalada

$$\boldsymbol{q}=(500,\ 700,\ 1200),\qquad \boldsymbol{z}=(350,\ 500,\ 250),$$

$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{q}=z_1q_1+z_2q_2+z_3q_3=350\cdot500+500\cdot700+250\cdot1200=825000.$$

Demak ko'rsatilgan mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun korxona 825 ming so'm xarajat qilgan.

Takrorlash uchun savollar

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
2. Vektorlar skalyar ko'paytmasining mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Skalyar ko'paytma qanday xossalarga ega?
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?
5. Vektorlar ortogonalligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
6. Skalyar ko'paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi ?

Testlardan namunalar

1. ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko'paytmasi qayerda to'g'ri ifodalangan ?

   A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\varphi$;
   D) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{ctg}\varphi$.

2. Qaysi holda ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar ko'paytmasi $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$ sartni qanoatlantiradi ?

   A) ***a*** va ***b*** bir xil uzunlikka ega bo'lsa; B) ***a*** va ***b*** ort vektorlar bo'lsa;
   C) ***a*** va ***b*** orthogonal bo'lsa; D) ***a*** va ***b*** kollinear bo'lsa;
   E) hech qaysi ***a*** va ***b*** vektorlar uchun bu shart bajarilmaydi.

3. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasining xossasi qayerda noto‘g‘ri ifodalangan ?

A) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$; C) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

D) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$; E) Barcha xossalar to‘g‘ri.

4. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ort vektorlarning skalyar ko‘paytmalari boyicha quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?

A) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$; B) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$; C) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\mathbf{0}$;

D) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\mathbf{0}$;

E) $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i})=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\mathbf{0}$;

5-3-MAVZU: VEKTORIAL KO‘PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

REJA:

1. ***Vektorial ko‘paytma va uning xossalari.***
2. ***Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi.***
3. ***Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari.***

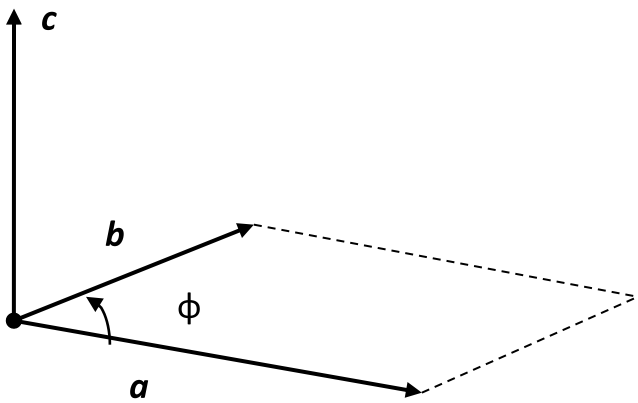
5-3.1.Vektorial ko‘paytma va uning xossalari. Ikkita $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi natijasida son hosil bo‘lishini ko‘rib o‘tdik. Endi bu vektorlarning shunday ko‘paytmasini aniqlaymizki, natijada yana vektor hosil bo‘lsin.

<u>1-TA’RIF:</u> Fazodagi $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarning ***vektorial ko‘paytmasi*** deb, quyidagi uchta shart bilan aniqlanuvchi yangi $\boldsymbol{c}$ vektorga (17-rasmga qarang) aytiladi:

1. $\boldsymbol{c}$ vektorning moduli $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo‘lib, $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ formula bilan aniqlanadi. Bunda φ berilgan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. $\boldsymbol{c}$ vektor $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar, ya’ni $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ bo‘ladi .

3. $\boldsymbol{c}$ vektor shunday yo‘nalganki, uning uchidan qaraganda $\boldsymbol{a}$ vektordan $\boldsymbol{b}$ vektorga eng qisqa burilish soat mili harakatiga teskari bo‘ladi.



17-rasm

a va ***b*** vektorlarning vektorial ko‘paytmasi ***a***×***b*** yoki [***a,b***] kabi belgilanadi.

Vektorial ko‘paytma ta’rifi fizikadan kuch tushunchasi bilan bog‘liq masaladan kelib chiqqan. Agar radius vektori ***r*** bo‘lgan moddiy A nuqtaga ***f*** kuch ta’sir etayotgan bo‘lsa, unda ***f***×***r*** vektorial ko‘paytma ***f*** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko‘paytma xossalari bilan tanishamiz.

1. Vektorial ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rni almashsa, natijada faqat ishora o‘zgaradi, ya’ni

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

Bu tasdiq vektorial ko‘paytma ta’rifining 3-shartidan bevosita kelib chiqadi. Demak, vektorial ko‘paytma uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

2. Vektorial ko‘paytmada o‘zgarmas λ ko‘paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$[\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}].$$

Jumladan, λ=0 holda har qanday ***a*** vektor uchun [***a*,0**]=[**0**, ***a***]=**0** ekanligini ko‘ramiz.

3. Vektorial ko‘paytma uchun taqsimot qonuni o‘rinli, ya’ni

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}.$$

4. Agar ***a*** va ***b*** kollinear vektorlar bo‘lsa, ularning vektorial ko‘paytmasi ***a***×***b*=0** bo‘ladi. Aksincha noldan farqli ***a*** va ***b*** vektorlar uchun ***a***×***b*=0** bo‘lsa, bu vektorlar kollinear bo‘ladi.

Isbot: 1) ***a*** va ***b*** kollinear vektorlar bo‘lsin. Bu holda ular orasidagi burchak φ=0 yoki φ=π va shu sababli sinφ=0 bo‘ladi. Unda vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-shartiga asosan

$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot 0=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ va $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ bo‘lsin. Unda

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\varphi=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=0 \Rightarrow \sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \text{ yoki } \varphi=\pi.$$

Bundan $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ kollinear vektorlar ekanligi kelib chiqadi.

Natija: Ixtiyoriy $\boldsymbol{a}$ vektor uchun $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ bo‘ladi.

Misol: $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ ko‘paytmani soddalashtiring.

Yechish: Vektorial ko‘paytmaning ko‘rib o‘tilgan xossalariga asosan $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-4\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-2\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\cdot\mathbf{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+4\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-2\cdot\mathbf{0}=5\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$

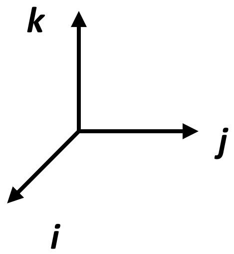
5-3.2.Vektorial ko‘paytmaning koordinatalardagi ifodasi. Endi fazoda koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Dastlab $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ va $\boldsymbol{k}$ ortlarning vektorial ko‘paytmalarini hisoblaymiz. Vektorial ko‘paytmaning 4-xossasidan kelib chiqqan natijaga asosan

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

Vektorial ko‘paytma va ortlar ta’riflaridan (18-rasm) quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

18-rasm



Yuqoridagi natijalarni 18-rasmdan topish uchun vektorial ko‘paytmadagi ikkinchi ko‘paytuvchidan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, vektorial ko‘paytmani topamiz. Masalan, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ ko‘paytmani topish uchun $\boldsymbol{j}$ ortdan soat miliga teskari yo‘nalishda burilib, $\boldsymbol{k}$ ort vektorga kelamiz.

Vektorial ko‘paytmaning 1- xossasiga binoan

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

tengliklarni olamiz. Bu natijalarni yuqoridagi rasmda soat mili bo‘yicha burilib topishimiz mumkin.

Yuqoridagi ortlar uchun tengliklar va vektorial ko‘paytma xossalaridan foydalanib ushbu natijaga kelamiz:

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+x_1y_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+x_1z_2\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+$

$+ y_1x_2\, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} + y_1y_2\, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} + y_1z_2\, \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} + z_1x_2\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} + z_1y_2\, \boldsymbol{k}\times c\boldsymbol{j} + z_1z_2\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} =$
$= x_1y_2\, \boldsymbol{k} - x_1z_2\, \boldsymbol{j} - y_1x_2\, \boldsymbol{k} + y_1z_2\, \boldsymbol{i} + z_1x_2\, \boldsymbol{j} - z_1y_2\, \boldsymbol{i} =$
$=(y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k} = (y_1z_2 - z_1y_2 ,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2).$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x, y, z)$ koordinatalari

$$x=y_1z_2 - z_1y_2 ,\quad y = z_1x_2 - x_1z_2 ,\quad z=x_1y_2 - y_1x_2$$

formulalar bilan topiladi. Ammo bu formulalarni esda saqlab qolish oson emas. Shu sababli bu natijalarni qulayroq ko‘rinishda yozish maqsadida koordinatalar uchun topilgan natijalarni ikkinchi tartibli determinantlar orqali ifodalaymiz:

$$x = y_1z_2 - z_1y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\qquad y = z_1x_2 - x_1z_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};$$
$$z = x_1y_2 - y_1x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \qquad (1)$$

Laplas teoremasidan foydalanib, ushbu uchinchi tartibli determinantga kelamiz:

$$\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\mathrm{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\mathrm{k} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini determinant orqali

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

formula bilan topish mumkin.

Misol: $\boldsymbol{a}=(2; 3; -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko‘paytmasini toping.

Yechish: (2) formulaga asosan

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k} = (-13, 5, -11). \qquad (3)$$

5-3.3.Vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari. Endi vektorial ko‘paytmaning tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni yechamiz.

1-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1 ,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$ vektorlardan hosil qilingan parallelogramm yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko‘paytma ta’rifining 1-sharti va (1) formulaga asosan parallelogramm yuzi S quyidagicha topiladi:

$$S=|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (4)$$

Misol: $\boldsymbol{a}=(2;\ 3;\ -1)$ va $\boldsymbol{b}=(3;\ -1;\ -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Bunda (3) tenglikdan $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-13\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}=(-13,\ 5,\ -11)$ ekanligi ma’lum. Shu sababli (4) formulaga asosan

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. $\boldsymbol{a}$ va $\boldsymbol{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (5)$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko‘rilgan vektorial ko‘paytmaning 4-xossasiga asosan $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun ularning vektorial ko‘paytmasi $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ bo‘lishi kerak. Unda (1) formuladan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$x=y_1z_2-z_1y_2=0;\quad y=z_1x_2-x_1z_2=0;\quad z=x_1y_2-y_1x_2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2};\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{z_1}{z_2};\ \frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2}\ \Rightarrow\ \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Demak, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (6)$$

shart bajarilishi, ya’ni ularning mos koordinatalari proporsional bo‘lishi kerak.

Misol: $\boldsymbol{a}=(m,3,2)$ va $\boldsymbol{b}=(4,6,n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.

Yechish: (6) kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{n}\Rightarrow m=2, n=4.$$

Takrorlash uchun savollar

Vektorial ko‘paytma qanday ta’riflanadi?
Vektorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
Vektorial ko‘paytma qanday xossalarga ega?
Ortlarning vektorial ko‘paytmasi qanday topiladi?
Vektorial ko‘paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
Ikkita vektordan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

Testlardan namunalar

1. Agar $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli emas ?
   A) $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$ (φ– ***a*** va ***b*** vektorlar orasidagi burchak);
   B) $\mathbf{c}\perp\boldsymbol{a}$; C) $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$; D) ***c***, ***a*** va ***b*** vektorlar bir tekislikda yotadi;
   E) Barcha tasdiqlar o‘rinli.
2. Qanday ***a*** va ***b*** vektorlarning skalyar va vektorial ko‘paytmalari o‘zaro teng bo‘ladi ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

3. Qaysi shartda ***a*** va ***b*** vektorlar uchun $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ tenglik o‘rinli ?

A) Bu vektorlar teng bo‘lsa; B) Bu vektorlar kollinear bo‘lsa;
C) Bu vektorlar ortogonal bo‘lsa; D) Bu vektorlar qarama-qarshi bo‘lsa;
E) Bunday vektorlar mavjud emas.

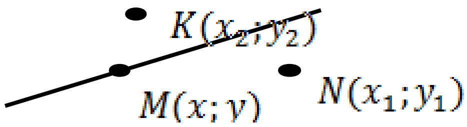
4. Agar $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=5$ va $\varphi=30^0$ bo‘lsa, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=?$
   A) 20 ; B) 10 ; C) $10\sqrt{3}$; D) 41 ; E) 0.

6-MAVZU:TO`G`RI CHIZIQ TENGLAMALARI

REJA:

1. **To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.**
2. **To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.**
3. **To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi.**

6.1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Bizga ma’lumki tekislikdagi ixtiyoriy 2 ta nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Bizga $N(x_1;y_1)$ va $K(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.



Berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikda yotgan to‘g‘ri chiziqda $M(x;y)$ nuqta olamiz. Bu yerda $|KN| = |NM|$ekanligidan

$|NM| = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ va $|KN| = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$ teng bo‘ladi. Bu tengliklardan

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1{}^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1{}^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2{}^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2{}^2$$

$$2xx_2 - 2xx_1 + x_1{}^2 - x_2{}^2 + 2yy_2 - 2yy_1 + y_1{}^2 - y_2{}^2 = 0$$

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + x_1{}^2 - x_2{}^2 + y_1{}^2 - y_2{}^2 = 0$$

kelib chiqib, $2x_2 - 2x_1 = A$, $2y_2 - 2y_1 = B$ va $x_1{}^2 - x_2{}^2 + y_1{}^2 - y_2{}^2 = C$ belgilash keritsak,

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (1)$$

to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi hosil bo‘ladi.
Unda A va B ***koeffitsiyentlar***, C esa ***ozod had*** deyiladi.
(1) tenglama orqali aniqlanadigan *n*=(A,B) ≠0 vektor bu tenglama ifodalaydigan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan perpendikular bo‘ladi va uning ***normal vektori*** deb ataladi.

Masalan, $2x-7y+9=0$ tenglama $M(-1;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $n=(2;-7)$ vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Endi (1) tenglama uchun ayrim xususiy hollarni ko'ramiz:

1. $A=0$ va $B\neq 0$ bo'lsa, $By+C=0$ bo'ladi va bundan $y=-\frac{C}{B}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasi absissa o'qiga parallel va $(0;-\frac{C}{B})$ nuqtadan o'tadi;

2. $A\neq 0$ va $B=0$ bo'lsa, $Ax+C=0$ bo'ladi va bundan $x=-\frac{C}{A}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasi ordinata o'qiga parallel va $(-\frac{C}{A};0)$ nuqtadan o'tadi;

3. $A\neq 0,\ B\neq 0$ va $C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ bo'ladi va berilgan to'g'ri chizig'imiz koordinata boshidan o'tadi.

4. C=0 va B=0 bo'lsa, Ax=0 yoki, A≠0 bo'lgani uchun ($A^2+B^2\neq 0$ shartga asosan), x=0 tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OX koordinata o'qi joylashgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

5. C=0 va A=0 holda y=0 tenglamaga kelamiz. Bu tenglama OY koordinata o'qi joylashgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Misol. Berilgan $N_1(3;1)$ va $N_2(-2;5)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (1) formulada

$$|N_1M|=|N_2M| \text{ ekanligidan}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)=(x^2+4x+4)+(y^2-10y+25)$$

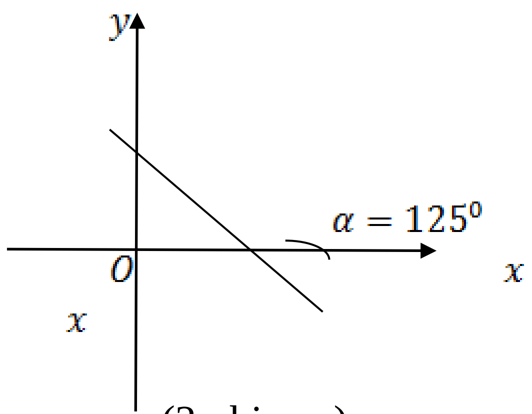
$$-6x+9-2y+1=4x+4-10y+25$$

$$-10x+10=-8y+24$$

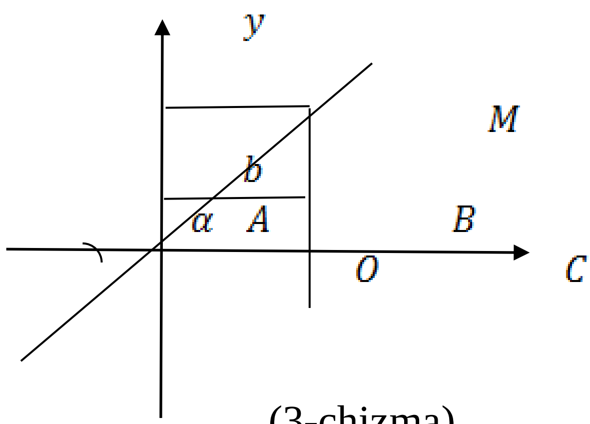
ekanligi ma'lum bo'ladi. Bundan kelib chiqib, N_1 va N_2 nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasi $10x - 8y + 14 = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

6.2.To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.

To'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to'g'ri chiziqning ordinatalar o'qidan ajratgan kesmasining kattaligini b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo'ladi. Masalan, $b = 3$, $\alpha = 125^0$ bo'lsa, uning holati aniq bo'ladi (2-chizma).



(2-chizma)



(3-chizma)

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to'g'ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (3-chizma). AMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha, \text{ bundan } BM = ABtg\alpha$$

3-chizmadan $y = BC + BM$ yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo'lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo'ladi. $tg\alpha$ to'g'ri chiziqning ***burchak koeffitsiyenti*** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to'g'ri chiziqning ***burchak koeffitsiyentli tenglamasi*** deyiladi. Bunda $b = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tib, tenglamasi $y = kx$ bo'ladi. $k = 1$ bo'lsa, $y = x$ bo'lib, bu birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasi bo'ladi.

Misol. OX o‘qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $B(0;2)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq OY o‘qini $B(0;2)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak $b=2$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o‘tkazamiz, hamda shu to‘g‘ri chiziq bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

Endi shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k=tg\,60^0=\sqrt{3},\ b=2$ bo‘lganligi uchun $y=\sqrt{3}\,x+2$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini k va b lar bo‘yicha tahlil qilamiz:

1. $k>0$ bo‘lsa, $tg\alpha>0$ bo‘ladi. Bunda $\alpha\in(0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow\alpha$ o‘tkir burchak;
2. $k<0$ bo‘lsa, $tg\alpha<0$ bo‘ladi. Bunda $\alpha\in(\frac{\pi}{2};\pi)\Rightarrow\alpha$ o‘tmas burchak;
3. $b>0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz ordinata o‘qini musbat tomoni bilan kesishadi;
4. $b<0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz ordinata o‘qini manfiy tomoni bilan kesishadi.

k va b larni o‘zaro kombinatsiyasidan quyidagilar kelib chiqadi:

1. $k>0,\ b>0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz koordinatalar sistemasining I, II va III choragidan o‘tadi;
2. $k>0,\ b<0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz koordinatalar sistemasining I, III va IV choragidan o‘tadi;
3. $k<0,\ b>0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz koordinatalar sistemasining I, II va IV choragidan o‘tadi;

4. $k < 0,\ b < 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqimiz koordinatalar sistemasining II, III va IV choragidan o‘tadi.

Misol. Umumiy tenglamasi $2x + 4y - 5 = 0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidan burchak koeffitsiyenti va boshlang‘ich ordinatasini topamiz:

$$2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow 4y = -2x + 5 \Rightarrow$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

hosil bo‘ladi. Bu yerda

$k = -\frac{1}{2},\qquad b = \frac{5}{4}$

ga teng bo‘ladi.

$M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formula bilan aniqlanadi.

Misol. $M_1(3; 2)$ va $M_2(4; 3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

Yechish: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formulaga ko‘ra $k = \frac{3-2}{4-3}$, bundan $k = tg\alpha = 1$

Demak, $\alpha = 45^0$.

6.3. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi.

$Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqni aniqlovchi $A(a; 0)$ nuqta OX o‘qida, $B(0; b)$ nuqta OY o‘qida yotsin (4-chizma).

$A(a; 0)$ va $B(0; b)$ nuqtalar $Ax + By + C = 0$ tenglamasini qanoatlantirgani uchun quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\begin{cases} Aa + B\cdot 0 + C = 0 \\ A\cdot 0 + Bb + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{C}{a} \\ B = -\dfrac{C}{b} \end{cases}$$

Bu to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tmagani sababli quyidagi natijaga kelamiz:

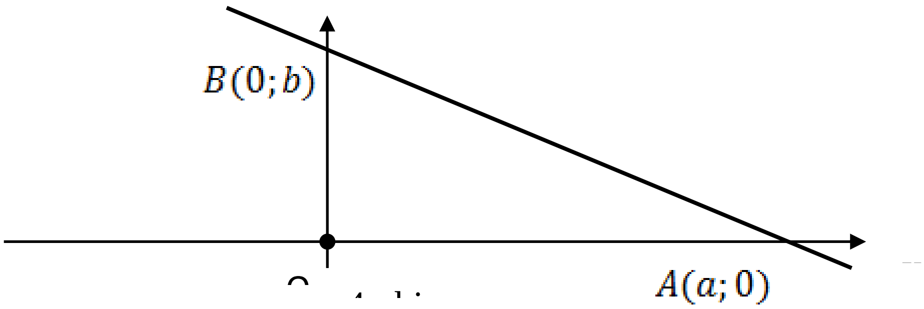
$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow -\frac{C}{a}x + (-\frac{C}{b})y + C = 0 \Rightarrow -C(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Bundan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3)$$

tenglama kelib chiqadi. Ushbu tenglama to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chizig‘imiz OX o‘qidan a uzunlikdagi kesmani, OY o‘qidan esa b uzunlikdagi kesmani ajratadi.



Masalan, To‘g‘ri chiziq tenglamasi $6x-4y-24=0$. Uning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz:

Kesishgan nuqtalarning koordinatalarini topish uchun, berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘g‘ri chiziqning koordinatalar o‘qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi (3) ko‘rinishiga keltiramiz (4-chizma).

$$6x-4y-24=0 \Rightarrow \frac{6}{24}x-\frac{4}{24}y-1=0 \Rightarrow \frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1.$$

Demak, koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari $A(4;0)$ va $B(0;-6)$ ga teng.

Test savollari:

1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ifodalanadi?
   A) $Ax+By+C=0$ B) $y=kx+b$ C) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ D) $y=x^2$
2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday ifodalanadi?
   A) $y=kx+b$ B) $y=\frac{1}{x}$ C) $y=x^2$ D) $y=\frac{1}{x-1}$
3. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri $x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziqda yotadi?
   A) $M(-1;2)$ B) $M(0;1)$ C) $M(0;2)$ D) $M(2;1)$
4. $M(5;1)$ nuqta $x-2y-5=0$ to‘g‘ri chiziqda yotadimi?
   A) yotadi B) yotmaydi C) 5 ga teng masofada yotadi

D) 7ga teng masofada yotadi

5. Tenglamalardan qaysi biri koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi?
A) $x-y=1$ B) $3x+y=1$ C) $x-3y-2=0$
D) $2x+y=0$

6. Ushbu $2x+3y-1=0$ tenglama bilan berilgan to’g’ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.
A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

7. $M(3;-2)$ nuqta orqali o‘tuvchi va yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}=(1;-1)$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
A) $x-y-5=0$ B) $y=x+5$ C) $x+y=5$
D) $x-y+5=0$

8. $4x+6y-3=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektorini ko‘rsating.
A) $\vec{n}=\{4;-3\}$ B) $\vec{n}=\{6;-3\}$ C) $\vec{n}=\{0;-3\}$ D) $\vec{n}=\{4;6\}$

9. $M_1(3;2)$ va $M_2(4;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.
A) 60^0 B) 30^0 C) 90^0 D) 45^0

10. OX o‘qi bilan 30^0 burchak tashkil etib $M(\sqrt{3};3)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
A) $\sqrt{3}x-y-5=0$ B) $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ C) $x-y=7$
D) t.j.yo‘q

11. $y=x+7$ to‘g‘ri chiziqning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagini toping.
A) 45^0 B) 30^0 C) 60^0 D) 75^0

12. k ning qanday qiymatida $y=kx+6$ to‘g‘ri chiziq $M(0{,}5;4{,}5)$ nuqtadan o‘tadi.
A) 3 B) -3 C) -2 D) 4

13. Berilgan $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$ to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlarini qaysi nuqtalarda kesib o‘tadi.
A) $(4;0)$ va $(0;5)$ B) $(1;0)$ va $(0;5)$
C) $(5;0)$ va $(0;4)$ D) $(1;0)$ va $(0;4)$

14. $6x+5y-4=0$ to‘g‘ri chiziqning k va b parametrlarini toping.
A) $k=\frac{4}{5}$ va $b=-\frac{6}{5}$ B) $k=-\frac{5}{6}$ va $b=\frac{5}{4}$

C)$k = 6$ va $b = -4$ D) $k = -\frac{6}{5}$ va $b = \frac{4}{5}$

15. $4x - 3y - 12 = 0$ to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.

A)$y = \frac{4}{3}x - 4$ B)$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ C) $4x - 3y = 12$

B)D) $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

Nazorat savollari:

1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollarini misollar yordamida tahlil qiling hamda koordinatalar o‘qida tasvirlang.
2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini k va b lar

   bo‘yicha misollarda tahlil qiling hamda uning grafigini dekart koordinatalar sistemasida tasvirlang.
3. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasini chizmada tushuntiring.
4. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan burchak koeffitsiyentli tenglamaga qanday o‘tiladi? Misollarda tushuntiring.
5. Qanday to‘g‘ri chiziqlar uchun ularning kesmalardagi tenglamasi mavjud bo‘ladi? To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan kesmalardagi tenglamaga qanday o‘tiladi?

6-1-MAVZU: TO‘G‘RI CHIZIQLARNING PARALLELLIK VA PERPENDIKULYARLIK SHARTLARI. IKKI TO‘G‘RI CHIZIQ ORASIDAGI BURCHAK. TO‘G‘RI CHIZIQLARNING KESISHISH NUQTASI VA UNI TOPISH USULLARI.

REJA:

1. **Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.**
2. **To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.**
3. **To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi va uni topish usullari.**

6-1.1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

Bizga $l_1$va l_2 to‘g‘ri chiziqlar quyidagi umumiy tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deganda, bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi (φ burchak 0^0 dan 90^0 gacha oraliqda o‘zgaradi).

$\overrightarrow{l_1} = \{A_1; B_1\}$ vektor l_1 to‘g‘ri chiziqning, $\overrightarrow{l_2} = \{A_2; B_2\}$ vektor l_2 to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektoridir. U holda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}) = \frac{\overrightarrow{l_1} \cdot \overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_1}| \cdot |\overrightarrow{l_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (3)$$

Masalan: Umumiy tenglamasi $x - y + 3 = 0$ va $7x + y - 7 = 0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Bizga berilgan $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $A_2 = 7$ va $B_2 = 1$ ekanligidan, yuqorida berilgan (3) formuladan foydalanib,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 \cdot 7 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{7 - 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}} = \frac{3}{5}$$

ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = arccos\frac{3}{5}$ ekanligi kelib chiqadi.

l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin (1-chizma).

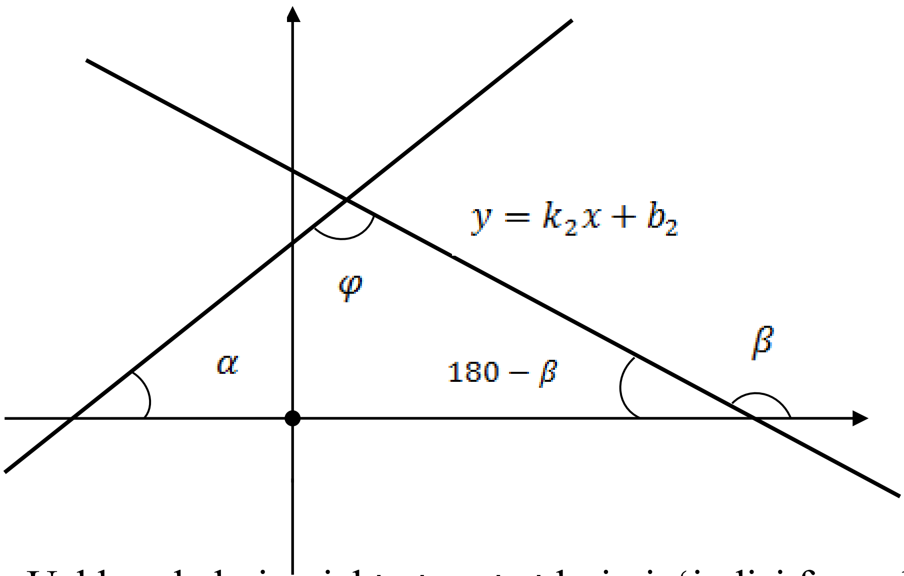
$l_1: y = k_1x + b_1$

$l_2: y = k_2x + b_2$

Bu holda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi φ burchakni topish uchun:

l_1 to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchakni α desak, bundan $tg\alpha = k_1$.

l_2 to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchakni β desak, bundan $tg\beta = k_2$ kelib chiqadi.



Uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi formulasidan

$$\alpha + 180 - \beta + \varphi = 180 \;\Rightarrow\; \varphi = \beta - \alpha \;\Rightarrow\; tg\varphi = tg(\beta - \alpha)$$

$$tg\varphi = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$$

kelib chiqadi. Yuqoridagi belgilashlardan foydalansak,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (4)$$

formula kelib chiqadi.

(4) formula to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lmagan holda ishlatiladi.

Masalan: $y = 3x + 1$ va $y = 2x - 3$ to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin, ular orasidagi burchakni toping

Bizga berilgan $k_1 = 3$ va $k_2 = 2$ ekanligidan, yuqorida berilgan (4) formuladan foydalanib,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{2 - 3}{1 + 3 \cdot 2} = -\frac{1}{7}$$

ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = -arctg\frac{1}{7}$ tengligi kelib chiqadi.

6-1.2. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

To‘g‘ri chiziqning parallellik alomatlari.

To‘g‘ri chiziqlar $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (5)$$

ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti hisoblanadi.

Masalan: Umumiy tenglamasi bilan berilgan $5x + \mu y + 1 = 0$ va $2x - 3y + 5 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar μ ning qanday qiymatida parallel bo‘ladi.

Bizga berilgan $A_1 = 5$, $B_1 = \mu$, $A_2 = 2$ va $B_2 = -3$ ekanligidan, yuqorida berilgan formuladan foydalanib,

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} = \frac{\mu}{-3} \quad \Rightarrow \quad \mu = -7{,}5$ ga teng bo‘ladi.

Ikkita $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

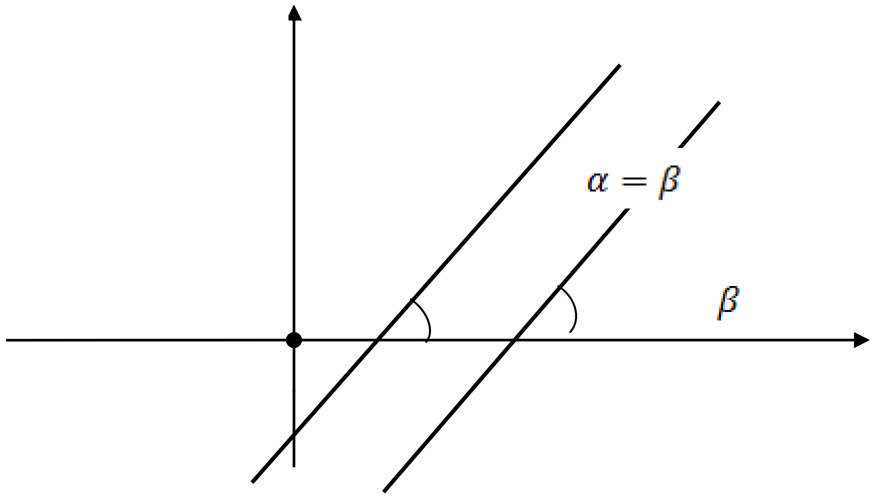
Agar $y = k_1x + b_1$ to‘g‘ri chiziq $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqga parallel bo‘lsa, ya’ni $\varphi = 0$ bo‘lganda, $tg\varphi = 0$ bo‘lib, $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$=0 bo‘ladi. Bu yerda $k_2 - k_1$=0 bo‘lsa, $k_1 = k_2$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar $\alpha = \beta$ bo‘lsa, $tg\alpha = tg\beta$ bo‘ladi. Bundan

$$k_1 = k_2 \qquad (6)$$

ekanligi kelib chiqadi. To‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lishi uchun ularning burchak koeffitsienti teng bo‘lishi kerak.

Masalan: $y = 4x + 7$ va $y = 4x - 2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel, chunki $k_1 = 4$, $k_2 = 4 \Rightarrow k_1 = k_2$.



To‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik alomatlari.

To‘g‘ri chiziqlar $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{7}$$

ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi.

Ikkita $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

Agar $y = k_1x + b_1$ to‘g‘ri chiziq $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar bo‘lsa, $tg\varphi = tg90^0$ bo‘ladi. $tg90^0$ mavjud bo‘lmasligi va aniqlanmagan bo‘lishi kerak. Bu uchun $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ bo‘lishi kerakligidan $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{8}$$

to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lishi uchun ularning burchak koeffitsientlari ham teskari ham qarama- qarshi ishorali bo‘lishi kerak.

Masalan: $y = 8x + 5$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni toping.

$y = 8x + 5$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni topish uchun yuqoridagi (8) formuladan foydalanib, $y = -\frac{1}{8}x + c$ ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

XOY tekisikdagi $l: y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq va koordinatalari $A(x_1; y_1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. A nuqtadan o‘tib l to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzaylik.

1-usul. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan $y = kx + c$ to‘g‘ri chiziq $A(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tishi uchun $y_1 = kx_1 + c$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

$c = y_1 - kx_1$ bu tenglikdan

$$y = kx + (y_1 - kx_1) \qquad (9)$$

kelib chiqadi.

2-usul. $A(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi

$$y - y_1 = d(x - x_1),$$

$$y = dx + y_1 - dx_1 \qquad (10)$$

ko‘rinishida ifodalaniladi.

Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $d = k$ bo‘lishi kerak. Bundan kelib chiqib,

$y = kx + y_1 - kx_1$

ko‘rinishidagi tenglamamiz **berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

Masalan: Berilgan $A(1; 2)$ nuqtadan o‘tib, $y = 2x + 4$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

1-usul. Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $N = k$ bo‘lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan $y = 2x + c$ formuladan

$$2 \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow 2 + c = 2 \Rightarrow c = 0$$

$y = 2x$

kelib chiqadi.

2-usul: Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $N = k$ bo‘lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan

$$y - 2 = k(x - 1) \Rightarrow \ y = kx - k + 2 \ \Rightarrow k = 2$$

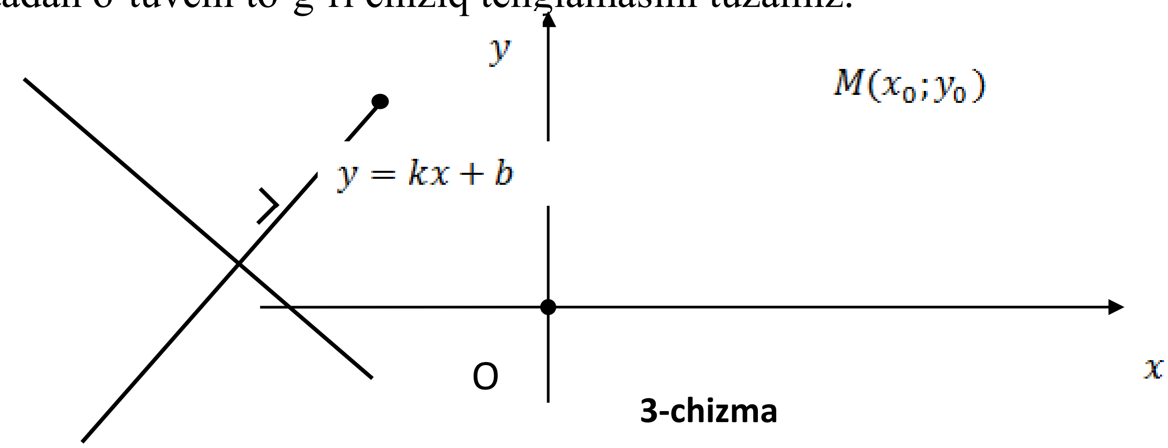
$$y = 2x - 2 + 2$$

$y = 2x$

kelib chiqadi. $A(1;2)$ nuqtadan $y = 2x + 4$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = 2x$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar tekisligida $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq va $M(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.



3-chizma

1-usul. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parpendikulyar bo‘lgan $y_0 = -\frac{1}{k}x_0 + c$

tenglamadan c ni topsak, $c = y_0 + \frac{1}{k}x_0$

$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-usul. $y - y_0 = d(x - x_0)$ tenglamadan d ni topsak,

$y = dx + y_0 - dx_0$

$d = -\frac{1}{k}$ ekanligi kelib chiqadi hamda

$$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0 \tag{11}$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasini topdik.

Masalan: Berilgan $M(3;-2)$ nuqtadan o‘tib berilgan $y = 3x + 5$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi toping.

Yuqorida berilgan (11) formuladan, $y = 3x + 5$ to‘g‘ri chiziq tenglamasiga perpendikulyar bo‘lgan $y = -\frac{1}{3}x + c$ tenglamasidan, c va d ni topamiz.

$$-2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + c \;\Rightarrow\; c = -1$$

$$(y + 2) = d(x - 3)$$

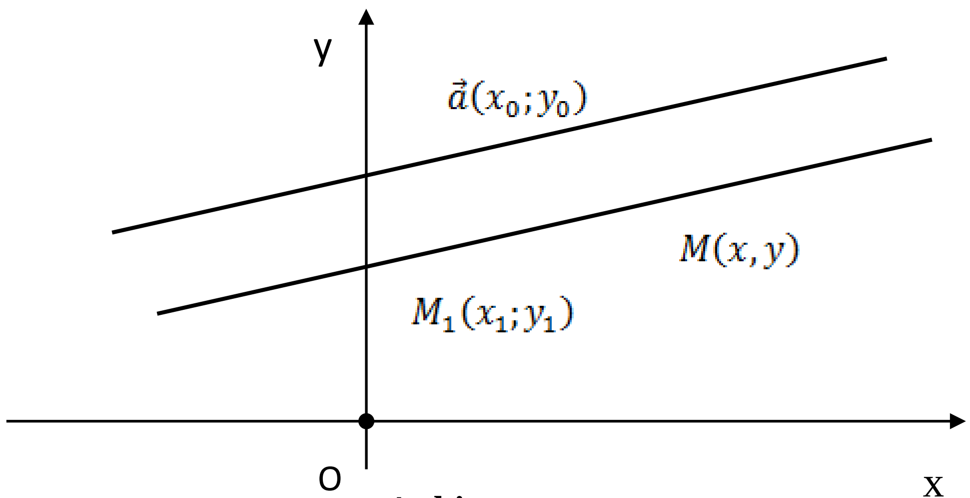
$$y + 2 = dx - 3d \;\Rightarrow\; y = dx - 3d - 2 \;\Rightarrow\; d = -\frac{1}{3}.$$

$M(3;-2)$ nuqtadan o‘tib berilgan $y = 3x + 5$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar
bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{1}{3}x - 1$ bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektor bo‘yicha yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}(x_0;y_0)$ vektor va $M_1(x_1,y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin.

M_1 nuqtadan o‘tib $\vec{a}$ vektor bo‘yicha yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzish uchun berilgan to‘g‘ri chiziqda yotgan ixtiyoriy M nuqtasini olamiz. Bundan x va y bog‘liqligini ko‘rsatib, to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.



4-chizma

Bu yerda $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$, $\vec{a} = \{x_0;\ y_0\}$. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinearligidan

$$\frac{x - x_1}{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0}$$

yoki

$$y_0x - x_0y + x_0y_1 - xy_0 = 0 \qquad (12)$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Masalan: $\vec{a}(-2;3)$ vektor va $A(1;4)$ nuqta berilgan. A nuqtadan o‘tib $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Berilgan (12) formuladan

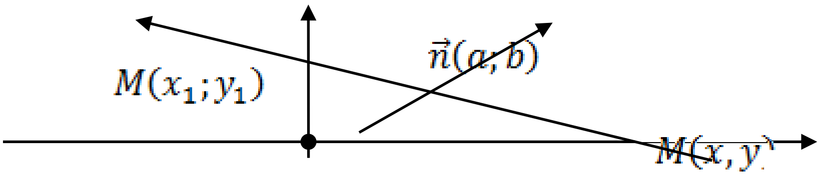
$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 4}{3} \Longrightarrow 3x - 3 = -2y + 8$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar tenglama $y = -1{,}5x + 5{,}5$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi esa, ushbu $3x + 2y - 11 = 0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{n}(a; b)$ vektor va to‘g‘ri chiziqda yotgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Buning uchun to‘g‘ri chiziq ustidan ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqta olib, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$ vektorni yasaymiz. $\vec{n}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar perpendikulyar bo‘lishi uchun skalyar ko‘paytmasi 0 ga teng bo‘lishi kerak.



Ya’ni, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$ va $\vec{n}(a; b)$, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$.

$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$

$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0 \qquad (13)$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasi $\vec{n}(a; b)$ vektorga perpendikulyar bo‘ladi va bu $\vec{n}(a; b)$ vektor to‘g‘ri chiziqning **normal vektori** deyiladi.

6-1.3. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi va uni topish usullari.

Umumiy tenglamasi bilan berilgan $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0; y_0)$ kesishish nuqtasini topish kerak bo‘lsin.

$M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasi ikkala to‘g‘ri chiziqlarga tegishli bo‘lgani uchun uning koordinatalari ham ikkala to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamalarini qanoatlantiradi. Demak, $M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasining koordinatalari ushbu chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1 \\ A_2x+B_2y=-C_2 \end{cases} \qquad (14)$$

Agar (14) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$$

shart bajarilsa, u yagona $(x_0;y_0)$ yechimga ega bo‘ladi va bu to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada kesishadi.

Agar (14) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi va bu to‘g‘ri chiziqlar ham cheksiz ko‘p nuqtalarda kesishadi, ya’ni ular ustma-ust tushadi.

Agar (14) sistemada

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilsa, u yechimga ega bo‘lmaydi va bu to‘g‘ri chiziqlar birorta ham nuqtada kesishmaydi, ya’ni ular parallel joylashgan bo‘ladi.

Masalan: Umumiy tenglamalari $2x+y-3=0$ va $x+y-2=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda (14) sistema va uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0, \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Demak, bu to‘g‘ri chiziqlar $M_0(1;1)$ nuqtada kesishadi.

Test savollari:

1. Ikkita $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini ko‘rsating.

A) $ctg\alpha=\dfrac{1+k_1k_2}{k_2-k_1}$; B) $tg\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$;

C) $tg\alpha = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1 k_2}$; D) $tg\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_1 k_2}$.

2. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartini ko‘rsating.
   A) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ B) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
   C) $A_1B_1 + A_2B_2 = 0$ D) To‘g‘ri javob yo‘q.
3. $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartini ko‘rsating.
   A) $k_1 = k_2$; B) $k_1 \cdot k_2 = 1$; C) $k_1 - k_2 = -1$;

   D) $k_1 \cdot k_2 = -1$

4. $2x + \mu y + 9 = 0$ va $3x - 5y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar μ ning qanday qiymatida perpendikulyar bo‘ladi.
   A) $\mu = 1{,}2$ B) $\mu = 3\frac{1}{3}$ C) $\mu = 5$ D) $\mu = 2$
5. $y = 3x + 9$ va $y = -2x - 7$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
   A) 90^0; B) 60^0; C) 45^0; D) 30^0.
6. Berilgan $M(0;1)$ nuqtadan o‘tib, $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa

   parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzing.
   A) $y = -3x - 2$ B) $y = 3x$ C) $y = -3x + 1$ D) $y = 3x + 1$

7. Berilgan $A(-1;2)$ nuqtadan o‘tib berilgan $y = -\frac{1}{5}x + 5$ to‘g‘ri

   chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi toping.
   A) $y = 5x + 7$ B) $y = 5x - 7$ C) $y = -5x + 7$ D) $y = \frac{1}{5}x + 7$

8. $A(2;-1)$ nuqtadan o‘tib $\vec{a}(1;-3)$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
   A) $3x + 2y - 8 = 0$ B) $3x - 2y - 8 = 0$
   C) $-3x - 2y - 11 = 0$ D) $-3x + 2y - 8 = 0$
9. $6x + 8y + 5 = 0$ va $2x - 4y - 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.
   A) $M(1;7)$ B) $M(-1;7)$ C) $M(0{,}1;-0{,}7)$ D) $M(-0{,}1;0{,}7)$

10. $3x-4y+16=0$ va $4x+3y-3=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 30^0; B) 60^0; C) 45^0; D) 90^0.

11. $-\mu x+9y+9=0$ va $2x-2\mu y+7=0$ to‘g‘ri chiziqlar μ ning qanday qiymatida parallel bo‘ladi.

A) $\mu=\pm3$ B) $\mu=3$ C) $\mu=-3$ D) $\mu=\pm9$

12. $y=\frac{2}{3}x-7$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

A) $k=-\frac{2}{3}$ B) $k=\frac{2}{3}$ C) $k=-\frac{3}{2}$ D) $k=\frac{3}{2}$

13. $y=\frac{2}{3}x-7$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

A) $k=-\frac{2}{3}$ B) $k=\frac{2}{3}$ C) $k=-\frac{3}{2}$ D) $k=\frac{3}{2}$

14. $y=x+4$ va $y=-\frac{1}{3}x+6$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining absissasini toping.

A) $1{,}5$ B) $-1{,}5$ C) $5{,}5$ D) $-5{,}5$

15. $4x-6y+1=0$ va $2x+2y+3=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining ordinatasini toping.

A) $-1{,}5$ B) $1{,}5$ C) $0{,}5$ D) $-0{,}5$

Nazorat savollari:

1. To‘g‘ri chiziqlarning umumiy tenglamasiga ko‘ra ularning kesishishi, parallel bo‘lishi, ustma-ust tushish shartlarini ifodalang. Bu shartlar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari soni bilan qanday bog‘langan?
2. Koordinatalar tekisligida ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak tangensi va kotangensi formulasini keltirib chiqaring. Misollarda ko‘rsating.
3. $A(3;1)$ nuqtadan o‘tuvchi va absissalar o‘qiga hamda ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamalarini yozing.
4. Ikkita to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima? Misollarda ko‘rsating.
5. Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday topiladi? Misollarda ko‘rsating.

7-MAVZU: TEKISLIK TENGLAMALARI

REJA:

1. **Bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi.**
2. **Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.**
3. **Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarga doir aralash masalalar.**

7.1. Bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi.

To‘g‘ri chiziqlar dastasi ikki xil bo‘ladi: kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi va parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasi. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalar bilan ifodalanuvchi to‘g‘ri chiziqlar biror nuqtada kesishsa, u nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi. Shu nuqta dasta markazi deyiladi.

Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqlarni yo‘naltiruvchi vektorlari parallel yoki ustma - ust tushsa, u holda shu yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziqlar parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining markazi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

bu yerda α va β lar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan har xil qiymatlarni qabul qiladi. Agar kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi markazining koordinatlari $(x_0;y_0)$ berilgan bo‘lsa, u holda dasta tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0 \qquad (1)$$

Masalan: To‘g‘ri chiziqlar $3x-2y+5=0$ va $2x+4y-3=0$ tenglamalar bilan berilgan. Shu to‘g‘ri chiziqlar va $M(-1;2)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Dastlab berilgan to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasini tuzamiz:

$$3x-2y+5+\lambda(2x+4y-3)=0 \qquad (*)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar dastasidan $M(-1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ajratib olishimiz kerak. Biz izlayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini M nuqta koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun M nuqta koordinatalarini (*) tenglamaga qo‘yamiz:

$$3\cdot(-1)-2\cdot2+5+\lambda(2\cdot(-1)+4\cdot2-3)=0; \qquad \lambda=\frac{2}{3}.$$

Bu qiymatni (*) tenglamaga qo‘yib izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini olamiz:

$$13x + 2y + 9 = 0.$$

Berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Izlangan L to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli $y = kx + b$ tenglamasidan foydalanamiz. Berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni $y_0 = kx_0 + b$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni oldingi tenglamadan hadma-had ayirib, masala javobini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (2)$$

Bunda burchak koeffitsiyenti k bir qiymatli aniqlanmaydi va uning qiymatini ixtiyoriy ravishda tanlash mumkin. Buning sababi shundan iboratki, berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqta orqali cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. (2) berilgan nuqtadan o‘tuvchi ***to‘g‘ri chiziqlar dastasi*** tenglamasi deyiladi.

Masalan, $M_0(5;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y + 3 = k \cdot (x - 5) \Rightarrow y = kx - (5k + 3)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar $k = 2$ desak, $M_0(5;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq bir to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y=2x-13$ hosil bo‘ladi.

Masalan: $(-2;5)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qi bilan 45^0 li burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = \operatorname{tg} 45^0 = 1$ ga teng. Shu sababli (2) tenglamadan foydalanib, topamiz:

$$y - 5 = 1 \cdot (x - (-2)) \text{ yoki } x - y + 7 = 0.$$

7.2. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga ma’lumki ikki nuqta orqali yagona to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Agar M_1va M_2 nuqtalarning $\{0;\vec{\imath};\vec{\jmath}\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari ma’lum bo‘lsa shu nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz.

Aytaylik $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ bo‘lsin. Izlanayotgan a to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta olamiz.

Agar $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ vektor $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ vektorga kollinear bo‘lsa, M nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi, bu deganimiz quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2} \qquad (3)$$

(3) munosabatda vektorlarni tengligiga asosan

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \text{ va } y - y_1 = t(y_2 - y_1) \qquad (4)$$

ga ega bo‘lamiz.

Bundan esa quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (5)$$

tenglama berilgan ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi. Bu tenglama $x_2 - x_1 \neq 0$ va $y_2 - y_1 \neq 0$ bo‘lganda o‘rinli. Agar $x_2 - x_1 = 0$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq OY o‘qqa parallel bo‘lib, tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

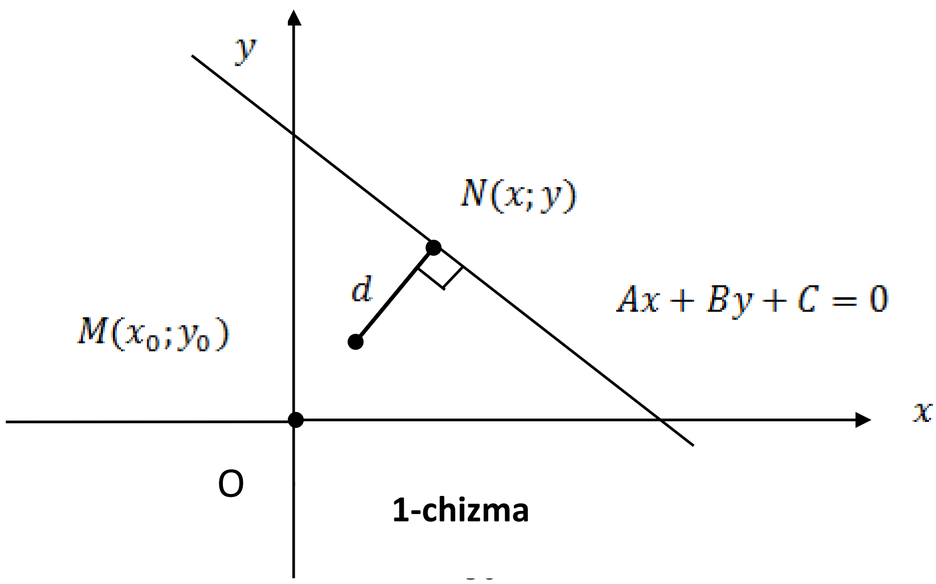
$$x - x_1 = 0 \text{ yoki } x = x_1.$$

Masalan: $M_1(-1; 1)$ va $M_2(2; 0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -(x+1) = 3(y-1) \Rightarrow x + 3y - 2 = 0.$$

7.3. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarga doir aralash masalalar. Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.

Dekart koordinatalar sistemasida biror bir $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasi va $M(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. $M(x_0; y_0)$ nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan d masofani topishimiz kerak. Bu $M(x_0; y_0)$ nuqta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lishi zarur.



1-chizma

$M(x_0; y_0)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (6)$$

Masalan: $M(2; -1)$ nuqtadan $3x - 5y + 1 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

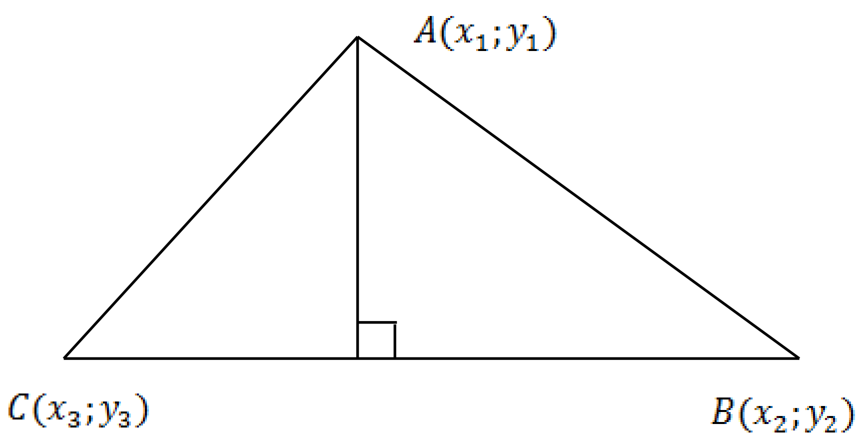
Berilganlarni (6) formulaga qo‘yamiz:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $\frac{6\sqrt{34}}{17}$ ga teng.

Uchburchakni uchlariga ko‘ra yuzini topish.

Uchlari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ va $C(x_3; y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzini topaylik. Buning uchun “Uchburchakning yuzi uning biror tomoni va shu tomonga tushirilgan balandlik ko‘paytmasining yarmiga teng” degan qoidadan foydalanamiz.



2-chizma

Demak, $S = \frac{1}{2}|BC| \cdot |h_{BC}|$, BC tomon uzunligi $|BC| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$ ga teng. h_{BC} ni topish uchun A

nuqtadan BC to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish yetarli. Buning uchun

$$BC: \ \frac{x-x_2}{x_3-x_2}=\frac{y-y_2}{y_3-y_2}$$

tomon tenglamasini umumiy holga keltiramiz.

$$x(y_3-y_2)-y(x_3-x_2)-x_2(y_3-y_2)+y_2(x_3-x_2)=0$$

$A(x_1;y_1)$ nuqtadan BC tomongacha bo‘lgan masofa esa

$$h_{BC}=\frac{|x_1(y_3-y_2)-y_1(x_3-x_2)-x_2(y_3-y_2)+y_2(x_3-x_2)|}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}\cdot$$

$$\frac{|x_1(y_3-y_2)-y_1(x_3-x_2)-x_2(y_3-y_2)+y_2(x_3-x_2)|}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_3-x_1y_2-x_3y_1+x_2y_1-x_2y_3+x_2y_2+x_3y_2-x_2y_2|=$$

$$=\frac{1}{2}|x_1y_3-x_1y_2-x_3y_1+x_2y_1-x_2y_3+x_3y_2|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

Demak,

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} \qquad (7)$$

uchburchakni uchlariga ko‘ra yuzini topish formulasini keltirib chiqardik.

Masalan: Uchburchakning uchlari $A(4;2)$, $B(6;5)$ va $C(-5;4)$ berilgan bo‘lsa uning yuzini toping.

Uchburchakni uchlariga ko‘ra yuzini topish formulasidan foydalanamiz.

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 1\\ -5 & 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 31=15\frac{1}{2}$$

Uchburchakning yuzi $15\frac{1}{2}$ ga teng.

Test savollari:

1. Qaysi tenglama $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi?
   A) $\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}$ B) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
   C) $y-y_0=k(x-x_0)$ D) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
2. Qaysi tenglama $A(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini ifodalamaydi?
   A) $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$ B) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
   C) $y+y_0=k(x+x_0)$ D) $y-y_0=k(x-x_0)$
3. $N(-2;5)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasini ko‘rsating.
   A) $y=kx-(2k-5)$ B) $y=kx-(2k+5)$
   C) $y=kx+(2k+5)$ D) $y=x+7$
4. $A(1;2)$ va $B(0;-3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
   A) $y=5x-3$ B) $y=3x-5$ C) $y=4x+3$ D) $y=7x-6$
5. $A(0;1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va umumiy tenglamasi $3x-y+3=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.
   A) $3x-y-1=0$ B) $x-3y+3=0$
   C) $3x-y+1=0$ D) $x+y+1=0$
6. $N(2;1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi $4x-3y=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.
   A) 2 B) -1 C) 3 D) 1
7. $y=2x-4$ to‘g‘ri chiziq hamda OX va OY koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchakning yuzasini toping.
   A) -4 B) 4 C) 8 D) -8

8. Uchburchakning uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3;4)$, $B(12;-6)$, $C(13;14)$. AB tomonining tenglamasini tuzing.
   A) $10x+9y-66=0$ B) $x+19y-6=0$
   B) $2x+9y+56=0$ D) $13x-7y+2=0$
9. $3x-y+4=0$ va $2x+3y-2=0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar va $A(2;0)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
   A) $12x+90y+5=0$ B) $7x+16y-14=0$
   B) $2x-9y+6=0$ D) $20x+4y-8=0$
10. Uchlari $A(4;3)$, $B(0;0)$ va $C(10;-5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.
   A) 25 B) $15\sqrt{5}$ C) $15+5\sqrt{5}$ D) $20\sqrt{5}$
11. $M(\sqrt{7};2)$ nuqtadan $\sqrt{7}x+3y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.
   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
12. $M(4;5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $2x-3y+6=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
   A) $3x+2y-22=0$ B) $2x-3y+6=0$
   B) $3x+2y+66=0$ D) $2x-9y-7=0$
13. Uchlari $A(0;5)$, $B(-3;1)$ va $C(-1;-2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning B nuqtasidan tushirilgan balandligining uzunligini toping.
   A) $5\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
14. Umumiy tenglamasi $4x-5y+20=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini toping.
   A) 10 B) 9 C) 8 D) 7
15. $A(-3;5)$ va $B(2;1)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing
   A) $5x+4y=0$ B) $4x+5y-13=0$ C) $x=5$ D) $y=-3$

Nazorat savollari:

1. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?

3. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?
4. To‘g‘ri chiziq va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzasini topish formulasini keltirib chiqaring.
5. Koordinatalari bilan berilgan uchburchakning yuzasi qanday topiladi?

8-MAVZU: FUNKSIYA

REJA:

1. **Funksiya tushunchasi.**
2. **Funksiyaning berilish usullari.**
3. **Funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi, algebraik va transsendent funksiyalar.**

8.1. Funksiya tushunchasi.

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o‘zgaruvchi va o‘zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba’zilari o‘zgarmaydi, ba’zilari o‘zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to‘rtburchaklarda burchaklarining to‘g‘riligi, ularning soni to‘rtta bo‘lishligi va yig‘indisi 360^0 ga tengligi o‘zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o‘zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o‘z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo‘lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o‘zgarib turadi.

Ma’lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo‘lgan miqdorlar ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Ma’lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo’lgan miqdorlar ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Odatda o‘zgarmas miqdorlarni *a, b, c, d, ...,* o‘zgaruvchi miqdorlarni *x, y, z, u, v, . . .* harflari bilan belgilaydilar.

Matematikada ko‘pincha o‘zaro bir-biriga bog‘liq ravishda o‘zgaradigan miqdorlar bilan ish ko‘riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o‘zgarishiga qarab o‘zgaradi, ya’ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog‘lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni qaraymiz.

Funksiya tushunchasi matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x \in X$ to‘plamda, $y \in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif : Agar x miqdorning X to‘plamdagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko‘ra y miqdorning Y to‘plamdan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X to‘plamdagi funksiyasi deyiladi va $y = f(x)$ kabi yoziladi.

Argument qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plami funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, funksiyaning o‘zi qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plami funksiyaning o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi.
Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar sohasini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga ***erkli o‘zgaruvchi*** yoki ***argument***, y ga esa ***erksiz o‘zgaruvchi*** yoki x ***ning funksiyasi*** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan: 1) $f: X(-\infty; +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan;

2) f har bir $x \in [0, \ +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, \ +\infty)$ bo‘ladi.

Misol. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma'lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to'plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo'lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$\begin{cases} x-3\geq 0, \\ 4-x>0 \end{cases}$$

bo'lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo'ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3$, $x<4$ bo'lib, ya'ni $3\leq x<4$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,4)$ bo'ladi.

8.2. Funksiyaning berilish usullari.

Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma'lum tartibdagi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$ qiymatlari jadval holida beriladi:

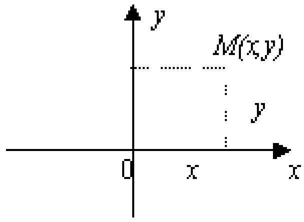
x	1	2	3	...	n	
y	1	2	3	...	n	

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko'rsatish mumkin. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazishda foydalaniladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma'lumki, sonlar o'qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanadi. Endi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o'zaro perpendikulyar bo'lgan OX va OY sonlar o'qini chizamiz. Gorizontal holda tasvirlangan sonlar o'qi ordinatalar o'qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikulyarlarning absissalar o‘qidagi proyeksiyasiga mos keluvchi sonining absissasi, koordinatalar o‘qidagi proyeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va $M(x; y)$ tartibida yoziladi.



1-chizma.

Demak, to‘g‘ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma’lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi: $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinatalari $y = f(x)$ ni to‘g‘ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo‘lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi.

Endi savol tug‘iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyani ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar chizamiz, agar bu to‘g‘ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyani ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyani ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi: formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y = x^2$,$y = kx + b$, $y = a^x$, $y = lgx$, $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = 2x^3 - x + 4$ funksiyalar analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to‘g‘risida alohida shart qo‘yilmagan bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ da o‘ng tomonda turuvchi ifoda ma’noga ega bo‘ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y = x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzini ifodalovchi bog‘lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo‘ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko‘raylik. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = \frac{3}{x}$. *Yechimi*. Ma’lumki, kasr ma’noga ega bo‘lishi uchun uning maxraji noldan farqli bo‘lishi kerak. Demak, $x \neq 0$ yoki $x \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y=\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$. *Yechimi.*Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1\neq 0$ yoki $2x\neq 1$, $x\neq \frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};+\infty)$ dan iborat.

3. $y=\sqrt{3x+2}$. *Yechimi*. Kvadrat ildiz ma’noga ega bo‘lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo‘lmasligi kerak, ya’ni $3x+2\geq 0$, bunda $x\geq -\frac{2}{3}$ Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3},+\infty)$ dan iborat.

4. $y=\frac{1}{\sqrt{4x-5}}$. *Yechimi*. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda $4x-5>0$ bo‘ladi. Bundan $>\frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4},+\infty)$ dan iborat.

5. $y=\lg(2x-1)$. *Yechimi*. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, $2x-1>0$ bo‘lishi kerak. Bundan $x>\frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2},+\infty)$ dan iborat.

6. $y=\frac{1}{\lg(2x-1)}$. *Yechimi*. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1>0$, $2x-1\neq 1$ bo‘ladi. Bundan $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$ kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2};+1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o‘rganish jarayonida juda ko‘p uchraydigan usuldir, lekin ba’zi hollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo‘ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to‘plam bo‘lganda, uning barcha qiymatlarini ko‘rsatib bo‘lmaydi:

C) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o‘zgartirishlarini ko‘rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (hususiy holda to‘gri chiziq), ba’zi hollarda biror nuqtalar to‘plami bo‘ladi.

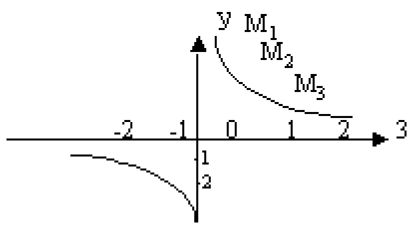
Funksiya grafigini chizish: $y=f(x)$ funksiyaning grafigini hosil qilish uchun $M(x;f(x))$ nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo‘lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

Misol. 1) $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x \neq 0$ haqiqiy sonlar to‘plami, ya’ni $x \epsilon (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.dan iborat.

Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

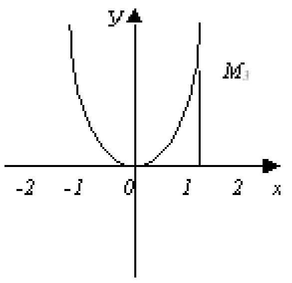
x	1	2	3	$\frac{1}{2}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2

Koordinata tekisligida $M_1(1;1)$, $M_2(2;\frac{1}{2})$, $M_3(3;\frac{1}{3})$ nuqtalarni hosil qilamiz. Bir-biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo‘ladi.

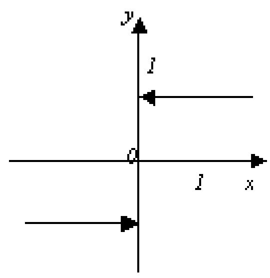


2-chizma.

2) $y=x^2$ funksiyaning grafigi chizilsin.



3-чизма.



4-чизма.

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2
$y=x^2$	0	1	4

$M_1(1;1)$, $M_2(2;\frac{1}{2})$, $M_3(3;\frac{1}{3})$,…nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri chizig‘i hosil bo‘ladi.(3-chizma)

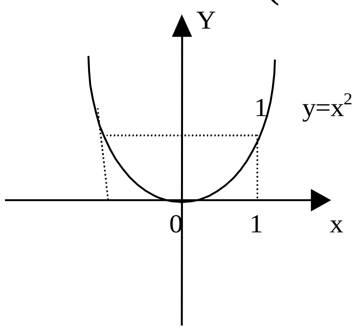
3) 4-chizmada

$$y = \begin{cases} 1, \ agar \, x > 0 \ bo'lsa, \\ 0, \ agar \, x = 0 \ bo'lsa, \\ -1, agar \, x < 0 \ bo'lsa \end{cases}$$ funksiyaning grafigi ko‘rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo‘lib, abssissalar o‘qiga tik bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko‘p bo‘lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funksiyani ifoda qiladi.

8.3. Funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi, algebraik va transsendent funksiyalar.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o‘zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lsa va bunda $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya ***juft funksiya*** deyiladi. Masalan, $f(x) = x^2$ funksiya juft funksiyadir. Haqiqatdan, bu funksiya $\boldsymbol{R}$ to‘plamda aniqlangan va demak, aniqlanish sohasi har qanday x bilan $-x$ ni o‘z ichiga oladi. Bundan tashqari, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ tenglik bajariladi. Juft funksiya grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (5-chizma).



5-chizma

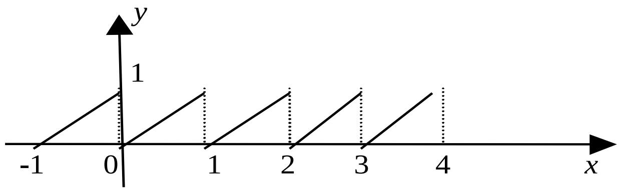
$y = \cos\alpha$ juft funksiyadir. Haqiqatdan ham, har qanday α va $-\alpha$ uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan (7-chizma). Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekani kelib chiqadi. Bu kosinus ta’rifiga ko‘ra, har qanday α da quyidagi tenglik to‘g‘ri ekanini bildiradi: $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$. Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrikdir.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lsa va bunda $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya ***toq funksiya*** deyiladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya toq funksiyadir. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya’ni $f(-x)= -f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lib, kubik paraboladan iboratdir.

$y=2x+5$, $y=x^2+x^3$, $y=\sin x+\cos x$ funksiyalar juft ham, toq ham emas. Demak funksiyalar har doim juft yoki toq bo‘lishi shart emas ekan.

Davriy funksiyalar.

Ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+T$ va $x-T$ lar aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lib, $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ ***davriy funksiya*** deb ataladi. T sonlarni eng kichigi funksiyaning *davri* deyiladi.



6-chizma

Misol. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=x-[x]$ davriy funksiyalardir.

Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so‘ngra uni chapga va o‘ngga cheksiz ko‘p marta ko‘chirish kerak.

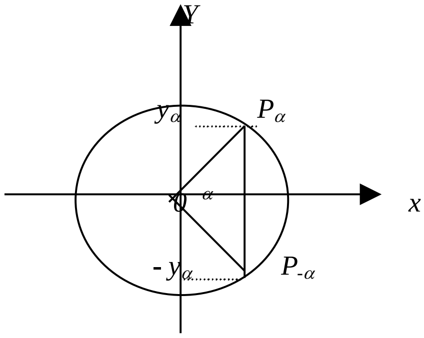
Misol. $f(x)=x-[x]$ funksiya berilgan. Bunda $[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi.

$f(x)=x-[x]=\{x\}$ funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya’ni $f(1)=0$; $f(1{,}05)=0{,}05$; .....

$f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $T=1$ dir. Haqiqatdan,

$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)$.

Demak, har qanday butun son ham davr bo‘ladi. Funksiyaning grafigi 6-chizmada ko‘rsatilgan.

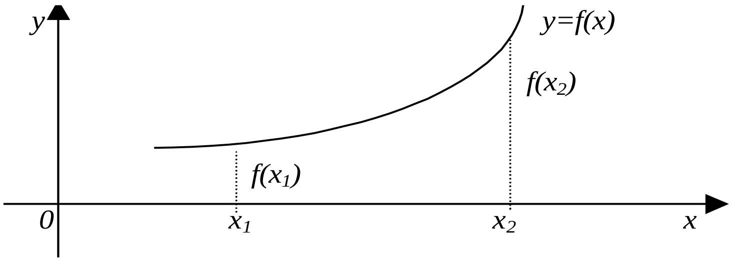


7-chizma

Monoton funksiyalar.

Ta'rif: $y = f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita $(x_1; x_2)$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya X sohada ***o'suvchi*** funksiya deyiladi.

Yuqorida, aytib o'tilgan ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ko'rsatishimiz mumkin.

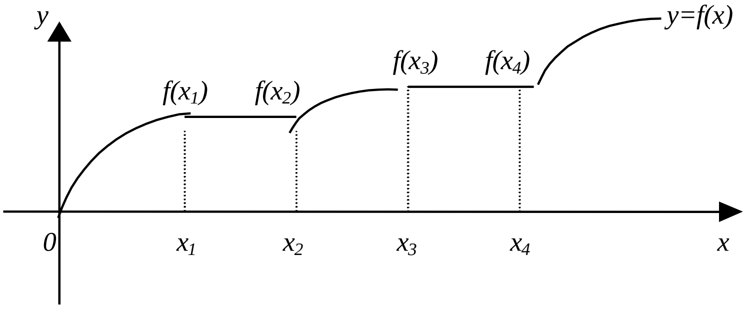


Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, funksiya biror oraliqda o'suvchi bo'lishi uchun shu oraliqdagi argumentning kichik qiymatiga funksiyaning kichik qiymati, argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelar ekan.

1) $y = 2^x$ funksiya butun sonlar o'qida o'suvchi.

2) $y = tgx$ funksiya ham o'suvchi funksiyadir.

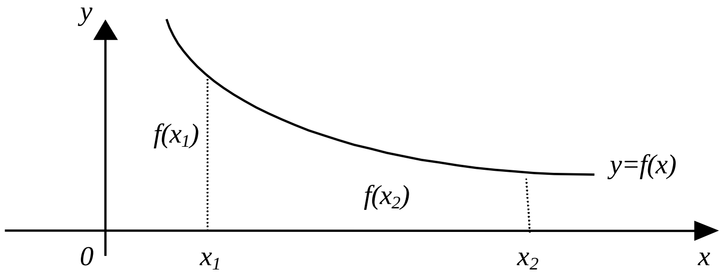
Ta'rif: $y = f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita $(x_1; x_2)$ qiymatlari uchun $x_1 \le x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $(x_1; x_2)$ oralig'ida ***kamaymaydigan*** funksiya deyiladi.



Ta'rif: $y = f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita $(x_1; x_2)$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya X sohada ***kamayuvchi*** funksiya deyiladi.

1-Misol: $y = x^2$ funksiya $(-\infty; 0)$ oralig'ida kamayuvchi, $(0; +\infty)$ oralig'ida o'suvchi funksiyadir.

2-Misol: $y = \sin x$ funksiya $(0; \frac{\pi}{2})$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib, $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ oraliqda monoton kamayuvchidir.



Ta'rif: $y = f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita $(x_1; x_2)$ qiymatlari uchun $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $(x_1; x_2)$ oralig'ida ***o'smaydigan*** funksiya deyiladi.

Ta'rif: Biror $(x_1; x_2)$ oralig'ida o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Ta'rif: Funksiyani aniqlovchi formuladagi argument x ustida faqat algebraik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilgan bo'lsa, u funksiyaga algebraik funksiya deyiladi. Algebraik funksiyaga ko'phadlar va ratsional kasrlar misol bo'la oladi.

Ta'rif: Algebraik funksiyada ildiz chiqarish amali ham qatnashsa, u irratsional funksiya deyiladi.

Masalan: $y = \dfrac{3x^5 + \sqrt{x^3}}{2\sqrt[5]{x^2} + 3x}$

Ta'rif: Algebraik bo'lmagan boshqa barcha funksiyalar transtsendent funksiyalar deyiladi.

Masalan: 10^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ va h.k.

Test savollari:

1. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri juft funksiya?

A) $y = x + 1$ B) $y = x^3 - 3$ C) $y = x - 2$ D) $y = x^2$

2. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri toq funksiya?
A) $y = x^2$ B) $y = x^3 - x$ C) $y = x^3 - 3$ D) $y = x^4 - 1$
3. Quyidagi nuqtalarning qaysi biri funksiyaning grafigiga tegishli? $f(x) = -3x + 4$
A) $(3;-5)$ B) $(-3;5)$ C) $(5;-3)$ D) $(2;4)$
4. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $(-\infty;0)$ oraliqda oʻsuvchi?
A) $y = 6 - 3x$ B) $y = \frac{3}{x}$ C) $y = 3x + 2$ D) $y = x^2$
5. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $(0;+\infty)$ oraliqda kamayuvchi?
A) $y = 3 - x$ B) $y = x + 8$ C) $y = -\frac{4}{x}$ D) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$
6. $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ funksiya aniqlanish sohasini toping.
A) $(-\infty;1)$ B) $(1;+\infty)$ C) R D) $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$
7. Agar $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$ boʻlsa, $f(x+1)$ ni toping.
A) $f(x+1) = x^2 - 3x$ B) $f(x+1) = \frac{1}{x+3}$
C) $f(x+1) = x+3$ D) $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$
8. $y = 1 + \lg(x+2)$ funksiyaga teskari funksiyani toping.
A) $y = -2 + 10^{x-1}$ B) $y = 10^{x+1}$ C) $y = 10^{x+2}$ D) $y = e^{x+1}$
9. Agar $y = 1 + x,\ z = \cos y,\ v = \sqrt{1 - z^2}$ boʻlsa, v ni x orqali ifodalang.
A) $v = \cos(1+x)$ B) $v = \sqrt{1+x}$ C) $v = \sin(1+x)$ D) $v = \cos\frac{1}{\cos x}$.
10. $y = e^{-x}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.
A) $(0;+\infty)$ B) $(-\infty;0)$ C) $[-1;\ 1]$ D) $(-\infty;\ \infty)$
11. Qaysi funksiyalar toq:
1. $3x - x^3$ 2. $\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ 3. $a^x + a^{-x}$
4. $\ln\frac{1-x}{1+x}$ 5. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
A)1,3 B) birortasi juft ham, toq ham emas C) 1,4,5 D)1
12. $y = \frac{1}{x^3 - x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
A) $x = R \setminus \{0\}$ B) $X = R \setminus \{-1, 0, 1\}$ C) $X = R \setminus \{\pm 1\}$
D) $X = R \setminus \{1\}$
13. Quyidagi funksiyaning davrini aniqlang: $y = x^4 \sin 3x$

A) $\frac{2\pi}{5}$ B) π C) 2π D) 3π

14. Quyidagi funksiyalarning davrlarini aniqlang: $y = \lg \cos x$

A) $\frac{2\pi}{5}$ B) π C) 2π D) 3π

15. Quyidagi funksiyalarni o‘zgarish sohasini toping: $y = 3\cos x - 1$

A) $[0;4]$ B) $[-4;2]$ C) $(0;1]$ D) $(-1;3)$

Nazorat savollari:

1. Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi qanday aniqlanadi?
2. Funksiyaning o‘suvchi, kamayuvchiligi, chegaralanganligi, monotonligi qanday aniqlanadi?
3. Sodda elementar funksiyalarga qaysi funksiyalar kiradi?
4. Algebraik va transtsendent funksiyalar deganda qanday funksiyalar tushunasiz?
5. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasi deb qanday to‘plamga aytiladi.

9-MAVZU: FUNKSIYA LIMITI

REJA:

1. **Funksiya limiti.**
2. **Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Ajoyib limitlar.**
3. **Funksiyaning uzluksizligi, elementar funksiyalar uzluksizligi.**

9.1. Funksiya limiti.

1-Ta’rif: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun unga bog‘liq shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x \epsilon D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $y = f(x)$ ***funksiyaning*** $\boldsymbol{x \to a}$ ***bo‘lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta’rifdagi tasdiq

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ko‘rinishda yoziladi.

Misol:

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

ekanligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatamiz. Bu yerda $x \to 3$ bo‘lgani uchun $2 < x < 4$, ya’ni $|x+3| < 7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$|f(x) - A| = |x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun $|x-3| < \varepsilon/7$, ya’ni $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta’rifiga asosan, $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-Ta’rif: Agar har qanday katta $N > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(N) > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x \epsilon D\{f\}$ uchun $|f(x)| > N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ ($a-$chekli son) bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ($+\infty$ yoki $-\infty$) ega deyiladi.

Ta’rifdagi tasdiq $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x^3-8)^2} = +\infty$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda $x \to 2$ bo‘lgani uchun $1 < x < 3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan $N > 0$ soni bo‘yicha $\delta = \delta(N) > 0$ sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2} = \frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2} > \frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2} =$$

$$= \frac{1}{361(x-2)^2} > N \Rightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{361N} \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{19\sqrt{N}} = \delta(N) \quad .$$

Demak, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz bo‘ladi.

3-Ta’rif: Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday katta $M = M(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x| > M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \epsilon D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to \pm\infty$ bo‘lganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

ekanligini ko‘rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ uchun

$$|f(x)-A| = \left|\frac{x+1}{x}-1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} = M(\varepsilon),$$

ya’ni $M(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

4-Ta’rif: Agar har qanday katta $N > 0$ soni uchun shunday $M = M(N)$ son mavjud bo‘lsaki, $|x| > M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \epsilon D\{f\}$ uchun $|f(x)| > N$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to \pm\infty$ bo‘lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta’rifdagi tasdiq $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, ta’rifdan foydalanib, $\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

1-Teorema: Agar $x \to a$ bo‘lganda $y = f(x)$ funksiya limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu limit yagona bo‘ladi.

5-Ta’rif: $y = f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap $(x < a)$ yoki o‘ng $(x > a)$ tomondan yaqinlashib borganda ($x \to a - 0$ yoki $x \to a + 0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo‘lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o‘ng limiti*** deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o‘ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

funksiya uchun $x = 0$ nuqtadagi chap va o‘ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0) = \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0-0} (-1) = -1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1.$$

2-Teorema: Biror a nuqtada $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uning shu a nuqtadagi chap va o‘ng limitlari o‘zaro teng va $f(a-0) = f(a+0) = A$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo‘lavermaydi.

Masalan, $y = sgn(x)$ funksiya $x \to 0$ bo‘lganda limitga ega emas, chunki bu holda $sgn(0-0) = -1$ va $sgn(0+0) = 1$ bo‘lib, $sgn(0-0) \neq sgn(0+0)$.

9.2. Funksiya limitini hisoblash qoidalari. Ajoyib limitlar.

Funksiya limitini uning ta’rifi bo‘yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

Lemma: $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uni $f(x) = A + \alpha(x)$ ko‘rinishda bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Asosiy teorema: Agar $x \to a$ bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo‘lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x) = CA \ (C\text{=const.}), \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B \qquad (4)$$

va, agar $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (5)$$

tengliklar o‘rinlidir.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x) = C$ (C-const.) o‘zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o‘ziga teng bo‘lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to 1} x^2 e^x = \lim_{x\to 1} x^2 \cdot \lim_{x\to 1} e^x = 1 \cdot e = e, \quad \lim_{x\to 1}(x^2 + e^x) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} e^x = 1 + e,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} e^x}{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \frac{e}{1} = e, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x} = \lim_{x\to\infty}(2 - \frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 2 - 0 = 2.$$

Funksiya limitining mavjudlik shartlari. Yuqorida ko‘rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo‘lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Oldin bu savolga chap va o‘ng limitlar orqali (2-teoremaga qarang) javob berilgan edi. Endi bu savol bo‘yicha quyidagi teoremalarni keltiramiz.

3-Teorema: Agar $x = a$ nuqtaning biror atrofida $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x \to a$ bo‘lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A$$

shart bajarilsa, u holda $x \to a$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, barcha $x \ne 0$ uchun

$$-\frac{1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

4-Teorema: Agarda $x \to a$ nuqtaning biror atrofida $y = f(x)$ funksiya o‘suvchi (yoki kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \le M \quad (\text{yoki} \lim_{x\to a} f(x) \ge m)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $x > 1$ bo‘lganda

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^2}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan $m = 2$ soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2 + \frac{3}{x^2}) = 2$$

bo‘lib, teorema tasdig‘i o‘rinlidir.

Ajoyib limitlar. Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{(I)},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281.... \qquad \text{(II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$$
(III),
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$
(IV),
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \qquad \text{(V).}$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi.

9.3. Funksiyaning uzluksizligi, elementar funksiyalar uzluksizligi.

6-Ta'rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya o'zining aniqlanish sohasiga biror atrofi bilan kiruvchi x_0 nuqtada
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (6)$$
shartni qanoatlantirsa, bu funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, oldingi paragrafda $f(x)=x^2$ funksiya uchun $x\to 3$ holda hisoblangan limit qiymatidan foydalanib,
$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x^2=9=3^2=f(3)$$
ekanligini ko'ramiz. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Yuqoridagi funksiya uzluksizlik shartini, $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini hisobga olib,
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)$$
kabi yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o'rnini almashtirish mumkin bo'lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay. Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo'lsa, $x-x_0$ ayirma ***argument orttirmasi*** deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)-f(x_0)$ ayirma ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx orttirma argumentning o'zgarishini, Δf esa funksiya o'zgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo'lsa, u holda $\Delta x\to 0$ bo'ladi. Bundan, $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (6) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \qquad (7)$$

ko‘rinishida yozish mumkin. Bu shartni o‘z navbatida, $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (8)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Demak $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning “kichik” Δx o‘zgarishiga funksiyaning ham “kichik” Δf o‘zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y = f(x) = x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (8) shart yordamida ko‘rsatamiz:

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x;$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

7-Ta’rif: Berilgan $y = f(x)$ funksiya biror (a, b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu ***oraliqda uzluksiz funksiya*** deyiladi.

Masalan, yuqorida ko‘rsatilganga asosan, $f(x) = x^2$ funksiya ixtiyoriy (a, b) oraliqda uzluksizdir. $y = (1 - x^2)^{-1}$ funksiya esa $(-1,1)$ va uning ichida joylashgan ixtiyoriy oraliqda uzluksiz bo‘ladi, ammo $x = \pm 1$ nuqtalardan kamida bittasi kirgan sohalarda uzluksiz bo‘lmaydi.

Geometrik nuqtai-nazardan biror (a, b) oraliqda uzluksiz funksiyani grafigi shu oraliqda yaxlit bir (uzluksiz) chiziqdan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Masalan, $y = x^2$ funksiya grafigi ixtiyoriy (a, b) oraliqda uzluksiz bo‘lgan paraboladan iborat.

5-Teorema: Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Agarda qo‘shimcha ravishda $g(x_0) \neq 0$ shart bajarilsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir.

6-Teorema: Agar $y = g(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z = f(y)$ funksiya esa $y = g(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, unda $f(g(x)) = F(x)$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Natija: Barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

8-Ta'rif: Berilgan $y = f(x)$ funksiya biror $x = a$ nuqtada aniqlangan bo'lib, bu nuqtada uning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad (\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = f(a))$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $f(x)$ funksiya a nuqtada ***o'ngdan(chapdan) uzluksiz*** deyiladi.

Masalan,

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 3 \\ 2x-1, & x < 3 \end{cases}$$

funksiya $x = 3$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x+1) = 7 = f(3).$$

Ammo bu funksiya $x = 3$ nuqtada chapdan uzluksiz emas, chunki

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x-1) = 5 \neq f(3).$$

Aksincha,

$$y = f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

funksiya $x = 1$ nuqtada chapdan uzluksiz, o'ngdan esa uzluksiz emas.

Oldin ko'rib o'tilgan

$$y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada chapdan ham, o'ngdan ham uzluksiz bo'lmaydi, chunki

$sgn(0-0) = -1 \neq 0 = sgn(0),$

$sgn(0+0) = 1 \neq 0 = sgn(0).$

7-Teorema: Berilgan $y = f(x)$ funksiya qaralayotgan $x = a$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun bu nuqtada u ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.

Izoh: $y = f(x)$ funksiya uchun $x = a$ nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud hamda ular o'zaro teng, ya'ni $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A$ ekanligidan har doim ham uni bu nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

funksiya uchun, 1-ajoyib limitga asosan,

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1\neq 0=f(0).$$

Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada funksiya chapdan ham, o‘ngdan ham uzluklidir.

Kesmada uzluksiz funksiyalar uchun asosiy teoremalar. Dastlab funksiyaning kesmada uzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

9-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz, $x=a$ $(x=b)$ chegaraviy nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz bo‘lsa , bu funksiya $[a,b]$ ***kesmada uzluksiz*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$, $y=x^2$ funksiyalar har qanday $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, uning grafigini shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo‘ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

8-Teorema: Agarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (yoki x_2) nuqta mavjudki, har qanday $x\epsilon[a,b]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ (yoki $f(x_2)\leq f(x)$) munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ ***kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati*** deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=M\,,\qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)=m$$

kabi belgilandi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\epsilon[2;4]$ funksiya uchun $x_1=2$, $x_2=4$ bo‘ladi, chunki bu kesmada $m=4\leq x^2\leq 16=M$, ya’ni $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ munosabat o‘rinli.

10-Ta’rif: $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlikka qo‘yiladigan shartlardan kamida bittasi bajarilmaydigan nuqtalar uning ***uzilish nuqtalari,*** funksiyaning o‘zi esa bu nuqtalarda ***uzlukli*** deb ataladi.

Ta’rifga asosan, biror $x = a$ nuqtada $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo‘lmasa, bu nuqta $y = f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘ladi.

Masalan, $f(x) = (1 - x^2)^{-2}$ funksiya uchun $x = \pm 1$ uning uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki bu nuqtalarda $\lim\limits_{x\to \pm 1} f(x) = \infty$. Signum funksiya uchun $x = 0$ uzilish nuqtasi bo‘ladi, chunki $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ mavjud emas.

11-Ta’rif: Agar $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ uzilish nuqtasida $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ limit mavjud, ammo $a \notin D\{f\}$ yoki $f(a) \neq A$ bo‘lsa, unda $x = a$ funksiyaning ***tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi*** deyiladi.

Bu yerda $x = a$ funksiyaning tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi deyilishiga sabab shuki, agar $f(a) = A$ deb olsak, unda funksiya $x = a$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi. Masalan, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiya uchun $f(0) = 0$ demasdan, $f(0) = 1$ desak, u hamma joyda uzluksiz bo‘ladi.

Test savollari:

1. $y = 2x^2 + 5x - 1$ funksiyaning $x \to 2$ bo‘lgandagi limiti topilsin.

   A) 10; B) 12; C) 17; D)21.

2. Funksiya limiti ta’rifini to‘ldiring: $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda A soniga teng limitga ega deyiladi, agarda ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki , $|x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x uchun … bo‘lsa.

   A) $|f(x) + A| < \varepsilon$; B) $|f(x) - A| > \varepsilon$;
   C) $|f(x) + A| > \varepsilon$; D) $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ limitni hisoblang:

   A) 0; B) $+\infty$; C) $-\infty$; D) 3.

4. Ushbu funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi chap limitini toping:

$$y = \begin{cases} 3x - 1, & x < 1; \\ 2x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

   A) –2; B) –1; C) 1; D) 2.

5. Ushbu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi o‘ng limitini toping:

$$y = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1, & x \le 0; \\ 2x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$$

A) –2; B) –1; C) 1; D) 3.

6. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizlik sharti qayerda noto‘g‘ri ifodalangan ?
   A) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; B) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$;
   C) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$; D) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.
7. Teoremani yakunlang: Asosiy elementar funksiyalar … uzluksiz.
   A) barcha nuqtalarda; B) ba’zi bir nuqtalarda;
   C) (0;∞) sohada; D) aniqlanish sohasiga tegishli har bir nuqtada.
8. Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzluksiz bo‘lishi shart emas?
   A) $f(x) + g(x)$; B) $f(x) - g(x)$; C) $f(x) \cdot g(x)$; D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
   E) Barcha funksiyalar uzluksiz bo‘ladi.
9. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz va $g(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, shu nuqtada quyidagi funksiyalarning qaysi biri uzluksiz bo‘lmaydi?
   A) $f(x) \pm g(x)$; B) $f(x) \cdot g(x)$; C) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
   D) Ko‘rsatilgan barcha funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.
10. Qaysi shartda $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada chapdan uzluksiz bo‘ladi?
    A) $f(a + 0) = f(a)$; B) $f(a - 0) = f(a)$;
    C) $f(a - 0) = f(a + 0)$; D) $f(a - 0) \neq f(a + 0)$.
11. Qaysi shartda $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada o‘ngdan uzluksiz bo‘ladi?
    A) $f(a + 0) = f(a)$; B) $f(a - 0) = f(a)$;
    C) $f(a - 0) = f(a + 0)$; D) $f(a - 0) \neq f(a + 0)$.
12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ limitni hisoblang.
    A) 3 B) 6 C) 0 D) 9

13. $y=\frac{x}{x-4}$ ni uzilish nuqtasini aniqlang.

A) 4 B) 0 C) -4 D) 1

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$ limitning qiymatini toping.

A) 0. B) –1. C) –2. D) 0,5

15. $\lim\limits_{n\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{8x-7}-3}$ ni hisoblang.

A) $-\frac{3}{16}$ B) $\frac{3}{16}$ C) ∞ D) 1

Nazorat savollari:

1. Funksiya limiti yagonami?
2. Limiti mavjud bo‘lmagan funksiyaga misol keltiring.
3. Limit tushunchasining iqtisodiy tadbig‘iga misol keltiring.
4. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
5. Tuzatib bo‘ladigan uzilish nuqtasi nima?

10-MAVZU: FUNKSIYA HOSILASI

REJA:

1. **Funksiya hosilasining ta’rifi, uning geometrik va mexanik ma’nosi.**
2. **Differensiallash qoidalari. Hosilalar jadvali.**
3. **Hosilani amaliy masalalarni yechishga tadbiqi.**

10.1. Funksiya hosilasining ta’rifi, uning geometrik va mexanik ma’nosi.

Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya’ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning $\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So‘ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

1-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x) = x^2$ funksiya hosilasini uning ta’rifiga asosan topamiz:

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ =>

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Demak, $(x^2)' = 2x$. Shunday tarzda $x' = 1$ va $(x^3)' = 3x^2$ ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Harakat tenglamasi $S = S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ natijadan $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)$ formulani hosil qilamiz.

Demak, $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o‘zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma’nosi*** deyiladi.

Endi $y = \varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$$ formuladan

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \varphi'(x_0)$$ natijaga kelamiz.

Demak, $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma’nosi*** deyiladi.

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0, y_0) = M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (2)$$

ko‘rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x) = x^2$ parabolaning $x_0 = 3$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$, $f'(x_0) = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot 3 = 6$ va shu sababli, (2) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi $y = 6(x-3)+9$ => $y = 6x-9$ ko‘rinishda bo‘ladi.

10.2. Differensiallash qoidalari. Hosilalar jadvali.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, ya’ni hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\Delta x \to 0$ ∂a $\alpha \to 0$ bo‘lib, bunda α cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Demak, $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x$ bo‘ladi. Bunga **funksiya orttirmasi uchun formula** deyiladi.

2-Ta’rif: Funksiya orttirmasining $y'\Delta x$ bosh qismiga ***funksiya differensiali*** deyiladi va dy bilan belgilanadi.

Ta’rifga asosan, $dy = y'\Delta x$

bunda $y = x$ bo‘lsa, $dx = x'\Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo‘lib, funksiya differensiali $dy = y'dx$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Elementar funksiyalarning differensiali jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \ \ (x > 0)$; 2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \ \ (a > 0, a \neq 1)$;

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx \ \ (x > 0, a > 0, a \neq 1)$; 4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;

5. $d(\sin x) = \cos x dx$; 6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;

7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$; 8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;

9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$; 12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

3-Ta’rif: Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y = f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi.

Funksiyani $f'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

1-Teorema: Agarda $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

4-Ta’rif: Berilgan $y = f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y = x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y = |x|$ funksiya esa $x = 0$ nuqtani o‘z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo $x = 0$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo‘lmaydi.

Differensiallash qoidalari. Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo‘yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y = f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin.

1-qoida: O‘zgarmas funksiya, ya’ni ixtiyoriy C o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng , ya’ni

$$(C)'=0 \qquad (C\text{–const}). \tag{3}$$

Masalan, $(3{,}2)' = 0$, $(-7)' = 0$, $(\sin 25^0)' = 0$, $(\pi)' = 0$ va hokazo.

2-qoida: Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y = u(x) \pm v(x) = u \pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{4}$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Masalan,

$$(x^2 + sinx)' = (x^2)' + (sinx)' = 2x + cosx,$$

$$(5 - cosx)' = (5)' - (cosx)' = 0 - (-sinx) = sinx\,.$$

1-natija: Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni qo‘shsak, uning hosilasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x) + C)' = f'(x) + C' = f'(x) + 0 = f'(x)$

3-qoida: Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{5}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Masalan,

$$(e^x \cdot sinx)' = (e^x)' \cdot sinx + e^x \cdot (sinx)' = e^x \cdot sinx + e^x \cdot cosx = (sinx + cosx) \cdot e^x.$$

2-natija: O‘zgarmas C ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

$$[C \cdot f(x)]' = C' \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + C \cdot f'(x) = C \cdot f'(x).$$

Masalan, $(5x^2)' = 5 \cdot (x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$.

4-qoida: Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v = v(x) \neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y = u(x)/v(x) = u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{6}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

H O S I L A L A R   J A D V A L I

I. DARAJALI FUNKTSIYALAR			
1	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$	2	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \ u = u(x)$
3	$(x)' = 1, \ (x^2)' = 2x, \ (x^3)' = 3x^2,$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(u^2)' = 2uu', \ (u^3)' = 3u^2 u',$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \ (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
II. KO‘RSATGICHLI FUNKTSIYALAR			
5	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	6	$(a^u)' = a^u u' \ln a, u = u(x)$
7	$(e^x)' = e^x, \ (10^x)' = 10^x \ln 10$	8	$(e^u)' = e^u \cdot u', \quad u = u(x)$
III. LOGARIFMIK FUNKTSIYALAR			
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} = \frac{u' \log_a e}{u}, u = u(x)$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u', \quad u = u(x)$
IV. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
13	$(\sin x)' = \cos x,$ $(\cos x)' = -\sin x$	14	$(\sin u)' = \cos u \cdot u',$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
15	$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$ $(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR			
17	$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
19	$(\mathrm{arctg} x)' = -(\mathrm{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	20	$(\mathrm{arctg} u)' = -(\mathrm{arcctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI			
1	$(C)'=0$, (C–const.), $(C\cdot u)' = C\cdot u'$	2	$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$
3	$(u\pm v)' = u' \pm v'$, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$	4	$[f(u)]'_x = f'_u(u)\cdot u'$, $u = u(x)$
5	$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)}$, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$	6	$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

10.3. Hosilani amaliy masalalarni yechishga tadbiqi. Funksiyaning monotonlik oraliqlari.

2-Teorema: I. Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya biror (a, b) oraliqda o‘suvchi [kamayuvchi] bo‘lsa, bu oraliqda uning hosilasi $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] shartni qanoatlantiradi.

II. Agar differensiallanuvchi bo‘lgan $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi biror (a, b) oraliqda $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] shartni qanoatlantirsa, unda bu (a, b) oraliqda funksiya o‘suvchi [kamayuvchi] bo‘ladi.

Masalan, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiya uchun $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ sohadan iborat va shu sababli bu sohada berilgan funksiya o‘suvchi bo‘ladi. $x = 0$ nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, bu funksiya $(-1; 0) \cup (0; 1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko‘ramiz.

Funksiya ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng yoki uzilishga ega bo‘ladigan nuqtalari ***kritik nuqtalar*** deyiladi.

5-Ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga*** ega deyiladi.

6-Ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***minimumga*** ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga ***ekstremum nuqtalari*** deyiladi.

Ekstremumning yetarli sharti. Birinchi qoida. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya ***maksimumga***;

2) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya ***minimumga*** ega bo'ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi tartibli hosila nolga teng, ikkinchi tartibli hosila noldan farqli bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va:

$f''(x_0) < 0$ bo'lsa, ***maksimum*** nuqtasi;

$f''(x_0) > 0$ bo'lsa, ***minimum*** nuqtasi bo'ladi.

1-misol. $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaning ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz: $f'(x) = x^2 - x - 6,\ x^2 - x - 6 = 0,$ bunda $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1\pm 5}{2};$ bo'lib, $x_1 = -2,\ \ x_2 = 3$ bo'ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o'tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),\ \ x < -2$ bo'lsa, $x + 2 < 0,\ x - 3 < 0$ bo'lib,

$(x+2)(x-3)>0,$ bo‘ladi, ya’ni ishora musbat $(+)$. $x>-2$ bo‘lsa, $x+2>0$; $x-3<0$, $(x+2)(x-3)<0$, ya’ni ishora manfiy (-). Demak, $x_1=-2$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1=-2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $y_{\max}=\frac{1}{3}(-2)^3-\frac{1}{2}(-2)^2-6(-2)+8/3=10$.

Endi -2<x<3 bo‘lsa, $(x+2)>0$; $(x-3)<0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)<0$, hosilaning ishorasi manfiy $(-)$, $x>3$ bo‘lsa, $(x+2)>0$; $(x-3)>0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)>0$, musbat $(+)$ bo‘ladi. Demak, $x_2=3$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2=3$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\min}=1/3\cdot 3^3-1/2\cdot 3^2-6\cdot 3+8/3=-65/6.$$

2-misol. $f(x)=1/4\cdot x^4-2x^3+11/2\cdot x^2-6x+9/4$ funksiyaning ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x)=x^3-6x^2+11x-6, \qquad f''(x)=3x^2-12x+11.$$

Endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6=$$

$$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)=$$

$$=(x-1)(x^2-5x+6), \qquad x^2-5x+6=0, \; x-1=0$$

bundan, $x=1$ va $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$; $x_2=2$, $x_3=3$ bo‘ladi.

Demak, kritik nuqtalar: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ bo‘ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1+11=2>0,$$

$$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1<0,$$

$$f''(3)=3\cdot 3^3-12\cdot 3+11=2>0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo‘lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1=1$, $x_3=3$ nuqtalarda minimum, $x_2=2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $\min f(1)=0$; $\max f(2)=0.25$; $\min f(3)=0$.

Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo’ladi.

Misol. $y=f(x)=x^4-2x^2+5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. $y'=4x^3-4x,\quad 4x^3-4x=0,\quad 4x(x^2-1)=0$,

bundan, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ kritik nuqtalar bo‘ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini

$$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2+5=16-8+5=13,$$

hisoblaymiz: $f(-1)=4;\ f(0)=5;\ f(1)=4\ \ \textit{ва}\ \ f(3)=3^4-2\cdot 3^2+5=$

$$=81-18+5=68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{экич}=4,\ y_{экат}=68$ bo‘ladi.

Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o‘zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

8) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

9) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

Test savollari:

1. $y = f(x)$ funksiyaning Δx argument orttirmasiga mos keladigan Δf orttirmasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?
   A) $\Delta f = f(x) - f(\Delta x)$; B) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(\Delta x)$;
   C) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$; D) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)$.
2. $y = x^3$ funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) $3x^2\Delta x + (\Delta x)^3$; B) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;
   C) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2$; D) $3x(\Delta x)^2(x + 3\Delta x)$;
3. $y = x^3$ funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ orttirmalar nisbatini toping.
   A) $3x^2 + (\Delta x)^2$; B) $3x(x + 3\Delta x)$;
   C) $3x^2 + 3x\Delta x$; D) $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$.
4. $y = f(x)$ funksiya hosilasini ta’rif bo‘yicha hisoblashda quyidagilardan qaysi biri bajarilmaydi?
   A) argument orttirmasi Δx hisoblanadi;
   B) funksiya orttirmasi Δf hisoblanadi;
   C) orttirmalar nisbati $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ hisoblanadi;
   D) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ bo‘lgandagi limiti hisoblanadi;
   E) ko‘rsatilganlarning barchasi bajariladi.
5. $y = f(x)$ funksiya hosilasining ta’rifi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta f}{\Delta x}$; B) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta f}$;
   C) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$; D) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta x}{\Delta f}$.
6. Hosilaning mexanik ma’nosi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
   A) harakatda bosib o‘tilgan masofa; B) harakatda sarflangan vaqt;
   C) harakatda oniy tezlik; D) harakatda to‘xtash holati.
7. $y = x^3$ kubik parabolaning $x_0 = -1$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini aniqlang.

A) $y = 3x + 2$; B) $y = 3x + 4$; C) $y = 3x - 2$; D) $y = 3x - 4$.

8. Differensiallash qoidasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ (C-const.); B) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

C) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

9. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar $\frac{u}{v}$ nisbatining hosilasini hisoblash formulasi to‘g‘ri yozilgan javobni ko‘rsating.

A) $\frac{u'v + uv'}{v}$; B) $\frac{u'v + uv'}{v^2}$; C) $\frac{u'v - uv'}{v^2}$; D) $\frac{u'v - uv'}{v}$.

10. $y = \frac{x^2}{\sin x}$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y' = \frac{x^2}{\cos x}$; B) $y' = \frac{2x}{\sin x}$;

C) $y' = \frac{2x}{\cos x}$; D) $y' = \frac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$.

11. Ikkita u va v diffrentsiallanuvchi funksiyalar $u \cdot v$ ko‘paytmasining hosilasini hisoblash formulasi qayerda to‘g‘ri yozilgan?

A) $u'v'$; B) $u'v' + uv$; C) $u'v + uv'$; D) $u'v - uv'$.

12. $y = x^2 \sin x$ funksiyaning y' hosilasini hisoblang.

A) $y' = x^2 \cos x$; B) $y' = x(x\sin x - 2\cos x)$;

C) $y' = 2x \sin x$; D) $y' = x(x\cos x + 2\sin x)$.

13. $y = 5x^2 + 10x - 2$ funksiyani ekstremumini toping.

A) $f_{min}(-1) = -7$; B) $f_{min}(0) = -1$; C) $f_{max}(1) = 14$;

D) $f_{max}(2) = 28$.

14. $y = (x + 1)^2$ funksiya grafigiga $(-1;0)$ nuqtada o‘tkazilgan urunma tenglamasini aniqlang. 1) $y = x + 1$, 2) $y = -x - 1$, 3) $y = 0$

A) 3 B) 1;3 C) 1 D) 2

15. $f(x) = x^2$; funksiyaning berilgan $[a, b] = [-1; 0,5]$ kesmadagi eng katta qiymatini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2;3

Nazorat savollari:

1. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi ta’rifi qanday ifodalanadi?
2. Qachon funksiya oraliqda differensiallanuvchi deyiladi?
3. Teskari funksiyaning hosilasi qaysi shartda mavjud va qanday topiladi?

4. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday hisoblanadi?
5. Funksiyalar algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi bo‘lsa, qo‘shiluvchilar differensiallanuvchi bo‘lishi shartmi?

11-MAVZU: ANIQMAS INTEGRAL

REJA:

1. **Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.**
2. **Aniqmas integral xossalari. Asosiy integrallar jadvali.**
3. **Aniqmas integralda integrallash usullari.**

11.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.

1-Ta’rif: Biror chekli yoki cheksiz (a, b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang‘ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $x \epsilon (-\infty, \infty)$, funksiya uchun $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x) = \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x = f(x)$$

tenglik o‘rinlidir.

Xuddi shunday $F(x) = \frac{x^5}{5}$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x) = x^4$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ tenglik bajariladi.

Berilgan $y = F(x)$ funksiyaning $y' = F'(x) = f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y = x^2$ funksiya yagona $y' = 2x$ hosilaga ega. Ammo $y = f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C o‘zgarmas son uchun $F(x) + C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x) + \mathrm{C})' = F'(x) + (\mathrm{C})' = f(x) + 0 = f(x)$$

va ta’rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o‘zgarmasda x^2+C boshlang‘ich funksiyalar bo‘ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang‘ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonni ifodalaydi.

Lemma: Agar $y=Q(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi $Q'(x)=0$ bo‘lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o‘zgarmas, ya’ni $Q(x)=C$ (C - const) bo‘ladi.

1-Teorema: Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsa, u holda biror C o‘zgarmas sonda $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-Ta’rif: Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi .

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang‘ich funksiya bo‘yicha

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanadi.
(2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ ***integral ostidagi funksiya*** , $f(x)dx$ ***integral ostidagi ifoda***, x esa ***integrallash o‘zgaruvchisi*** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C\ , \qquad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+C\ , \qquad \int 2xdx = x^2+C$$

11.2. Aniqmas integral xossalari. Asosiy integrallar jadvali.

Aniqmas integral ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1-xossa. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

2-xossa. Aniqmas integral differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx\,.$$

3-xossa. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C\,.$$

4-xossa. Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o'zgarmas yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

5-xossa. O'zgarmas k ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\,.$$

Masalan, $\int 10xdx = \int 5\cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2 + C) = 5x^2 + 5C = 5x^2 + C\,.$

6-xossa. Ikkita funksiya algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\,.$$

Masalan, $\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2xdx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C\,.$

7-xossa. Agar a va b o'zgarmas sonlar bo'lsa, unda quyidagi tasdiq o'rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,.$$

Masalan, $\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + C \Rightarrow \int (2x-3)^4 dx = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-3)^5}{5} + C = \dfrac{(2x-3)^5}{10} + C\,.$

Integrallar jadvali. Hosilalar jadvali, oldin hisoblangan hosilalar va aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, asosiy integrallar jadvalini yozamiz.

INTEGRALLAR JADVALI

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int xdx = \dfrac{x^2}{2} + C$

4. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ 6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 8. $\int e^x dx = e^x + C$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 10. $\int \cos x dx = \sin x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx = \mathrm{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

14. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

15. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C \\ -\mathrm{arcctg} x + C \end{cases}$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu formulalarning to‘g‘riligini tenglikning o‘ng tomonidan hosila olish (differensiallash) orqali tekshirish mumkin. Natijada integral ostidagi funksiya hosil bo‘lishi kerak.

Masalan, $d\left(\frac{x^n + 1}{n + 1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n + 1} + C\right)' dx = \frac{(n + 1)x^n}{n + 1} dx = x^n dx.$

Differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo‘ldi. Demak, integral javobi to‘g‘ri ko‘rsatilgan.

Misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 5 va 6-xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9) dx = \int x^3\, dx + 5\int \sin x\, dx - 9\int dx$$

bo‘ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 9) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \ 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \ -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak, $\int (x^3 + 5\sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3).$

$C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$, $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C$.

11.3. Aniqmas integralda integrallash usullari.

Yoyish usuli. Bu usulda dastlab berilgan integral ostidagi murakkabroq $f(x)$ funksiya soddaroq (masalan, integrallari bevosita jadval orqali topiladigan) $f_k(x)$ (k=1,2,…,n) funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasiga yoyiladi. So‘ngra bu chiziqli yoyilma integralidan foydalanilib hisoblanadi. Bu usulni matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\int f(x)dx = \int [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_n f_n(x)]dx =$$
$$= A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + \cdots + A_n \int f_n(x)dx$$

Misol. 1) $\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx = \int (\frac{7}{x} - 5 + \frac{1}{x^2})dx = 7\int \frac{dx}{x} - 5\int dx + \int \frac{dx}{x^2} =$

$$= 7\ln|x| - 5x - \frac{1}{x} + C;$$

2) $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C;$$

3) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a}[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}]dx = \frac{1}{2a}[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}] =$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli. Bu usul aniqmas integralning ushbu ***invariantlik xossasi*** orqali amalga oshiriladi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C. \qquad (3)$$

Bunda $u = u(x)$ ixtiyoriy differentsiallanuvchi funksiyani ifodalaydi. Shunday qilib, integrallash o‘zgaruvchisi x biror differentsiallanuvchi $u = u(x)$ funksiya bilan almashtirilsa, integral javobida ham x o‘rniga $u = u(x)$ funksiya qo‘yiladi.

Ko‘p hollarda bu usulni qo‘llash uchun dastlab integral ostidagi funksiyaning bir qismi differensial ostiga kiritiladi va integral kerakli ko‘rinishga keltiriladi.

Misol sifatida quyidagi integrallarni hisoblaymiz.

1. $\int \ln x d\ln x = (u = \ln x) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

2. $\int (x+4)^{99} dx = \int (x+4)^{99} d(x+4) = (u = x+4) =$

$$= \int u^{99} du = \frac{u^{100}}{100} + C = \frac{(x+4)^{100}}{100} + C.$$

Bu yerda $dx = d(x+4)$ ekanligidan foydalandik.

3. $\int \text{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = (u = \cos x) =$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Bu usul yordamida quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni ham hisoblash mumkin:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \ ,$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C \ .$$

O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli. Bu usulda berilgan $\int f(x)dx$ integraldagi “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga biror $x = \varphi(t)$ funksiya orqali o‘tamiz. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va u differensiallanuvchi, hosilasi uzluksiz hamda teskari funksiyasi $t = \varphi^{-1}(x)$ mavjud deb olinadi. Bu holda

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

tenglik (o‘zgarmas son aniqligida) o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi integral hisoblangandan keyin, t o‘zgaruvchi o‘rniga $t = \varphi^{-1}(x)$ qo‘yilib, berilgan integral javobi olinadi.

Misol.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+4} = t, \ x+4 = t^2 \\ x = t^2 - 4, \ \ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} =$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = 2 \cdot \frac{1}{2\cdot 2} \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

2) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = (a \neq 0) = \begin{bmatrix} x = at, \quad t = x/a, \\ dx = d(at) = adt \end{bmatrix} = \int \frac{adt}{a^2t^2 + a^2} =$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\text{arctg} t + C = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Bo‘laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differentsialini yozamiz:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Bu yerdan

$$udv = d(uv) - vdu$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini hadma-had integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\,.$$

Bundan, ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int udv = uv - \int vdu\,. \tag{5}$$

Bu natija ***bo‘laklab integrallash formulasi*** deyiladi.

Misol. $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz.

Bunda $u = x$, $dv = e^x dx$ deb olamiz. Bundan $du = dx$, $v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$ bo‘ladi. Bu yerda $C = 0$ deb va (5) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\,.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni qaraymiz:

$$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^2, \quad dv = \sin x dx, \\ du = 2xdx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, \quad dv = \cos x dx, \\ du = dx, \;\; v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C\,.$$

Kvadrat uchhadli integrallarni hisoblash. Ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \qquad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,.$$

Avvalo maxrajdagi kvadrat uchhaddan to‘liq kvadratni ajratib olamiz:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\right] =$$

$$=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})\right]=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2\right].$$

Bu yerda, $\pm k^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{D}{4a^2}$ belgilash kiritilgan. Bunda, agar kvadrat uchhad diskriminanti $D=b^2-4ac>0$, ya'ni uning ildizlari haqiqiy sonlar bo'lsa, k^2 manfiy ishora bilan; $D<0$ bo'lsa k^2 musbat ishora bilan olinadi. Ikkala holda ham $k\neq 0$ bo'lishini ta'kidlab o'tamiz. $D=0$ holni keyinchalik ko'ramiz.

Yuqoridagi tenglik asosida I_1 integralni o'zgaruvchilarni almashtirish usulida quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm\kappa^2}=\left[\begin{array}{l}t=x+\frac{b}{2a},\\ dt=d(x+\frac{b}{2a})=dx\end{array}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\kappa^2}$$
.

Bu tenglikning o'ng tomonida jadval integrali turibdi va

$$\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C,\qquad \int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

ekanligini eslatib o'tamiz.

Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblashga misollar keltiramiz.

1) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2^2}=\left[\begin{array}{l}t=x+1,\\ dt=dx\end{array}\right]=$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

2) $\int\frac{dx}{x^2-6x-7}=\int\frac{dx}{(x-3)^2-4^2}=\left[\begin{array}{l}t=x-3,\\ dt=dx\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^2-4^2}=$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right|+C.$$

Trigonometrik ifodali integrallar. Bu yerda biz trigonometrik funksiyalar qatnashgan

$$IT=\int R(\sin x,\cos x)dx$$

ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda *R*(sin*x*,cos*x*) ifoda sin*x* va cos*x* ustida faqat arifmetik amallar bajarilgan ifodani belgilaydi. Bu integral $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirma yordami bilan hamma vaqt ratsional kasrning integraliga keltirilishi mumkinligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

va

$$\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}t\Rightarrow x=2\mathrm{arctg}t\ ,\ dx=2d\mathrm{arctg}t=\frac{2dt}{1+t^2}$$

ekanligidan $\sin x$, $\cos x$, x, dx kiritilgan t orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli $t=tg\frac{x}{2}$ ***universal almashtirma*** deb ataladi.Demak, universal almashtirma orqali *IT* integral ratsional kasrli integralga keltiriladi:

$$IT=\int R(\sin,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt.$$

Misol sifatida ushbu

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$$

trigonometrik ifodali integralni hisoblaymiz. Buning uchun $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirmadan foydalanib, bu integralni quyidagi ko‘rinishga keltirib hisoblaymiz:

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}dt=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int\frac{d(2+t)}{(2+t)^2}=-\frac{1}{2+t}+C=-\frac{1}{2+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Test savollari:

1. Quyidagilardan qaysi biri $f(x)=\ln x$; uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi?

A) $\frac{1}{x}$; B) $x\ln x$; C) $x\ln x + x$; D) $x\ln x - x$.

2. Teoremani to'ldiring: Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, unda ixtiyoriy C o'zgarmas soni uchun .... funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.
A) $C \cdot F(x)$; B) $F(x - C)$; C) $F(x) + C$; D) $C/F(x)$.

3. Agar $F(x)$ biror $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, unda $\int f(x)dx$ aniqmas integral ta'rif bo'yicha qanday aniqlanadi?
A) $C \cdot F(x)$; B) $F(x + C)$; C) $F(x) + C$; D) $C/F(x)$.

4. Qaysi darajali funksiyaning aniqmas integrali to'g'ri yozilgan?
A) $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$; B) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$;
C) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$; D) $\int \sqrt[3]{x}dx = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$.

5. Aniqmas integralni hisoblashning qaysi usuli mavjud emas?
A) ko'paytirish usuli; B) o'zgaruvchini almashtirish usuli;
C) differensial ostiga kiritish usuli; D) bo'laklab integrallash usuli.

6. $\int \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2}dx$ integralni yoyish usulida hisoblang.
A) $2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + C$; B) $2x - 3\ln|x| + \frac{5}{x^2} + C$;
C) $2x - \frac{3}{x} - \frac{5}{3x^3} + C$; D) $2x - 3\ln|x| - \frac{5}{x} + C$.

7. $\int f(x)dx$ aniqmas integralda $x = \varphi(t)$ almashtirma bajarilganda u qanday ko'rinishga keladi?
A) $\int f(\varphi(t))\varphi(t)dt$; B) $\int f(t)\varphi'(t)dt$;
C) $\int f(\varphi(t))dt$; D) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

8. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10} - 1}}$ integral qaysi almashtirma orqali jadval integraliga keltiriladi?
A) $t = x^2$; B) $t = x^3$; C) $t = x^4$; D) $t = x^5$.

9. Qaysi tenglik bo'laklab integrallash usulini ifodalaydi?

A) $\int f(x)dx = F(x)+C$; B) $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

C) $\int f(x)dx = \int \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)dx$; D) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

10. $\int x^2 \ln x dx$ integralni hisoblash uchun integral ostidagi ifodani qanday bo‘laklash kerak?

A) $u = x,\ dv = x\ln x\, dx$; B) $u = x^2,\ dv = \ln x\, dx$;

C) $u = \ln x,\ dv = x^2 dx$; D) $u = x\ln x,\ dv = xdx$.

11. Trigonometrik funksiyali ifodalarni ratsional kasrga ketiruvchi universal almashtirmani ko‘rsating.

A) $\sin x = t$; B) $tg\frac{x}{2} = t$; C) $tgx = t$; D) $\cos x = t$.

12. Noto‘g‘ri tenglikni aniqlang?

A) $\int \sin x dx = \cos x + c$, B) $\int \cos x dx = \sin x + c$,

C) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c, x > 0$, D) $\int e^x dx = e^x + c$

13. Aniqmas integralni toping. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

A) $ln|x^2+x+1|+C$, B) $ln|2x+1|+C$, C) $ln|x+1|+C$,

D) $ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|$+C

14. Noto‘g‘ri tenglikni aniqlang?

A) $\int a^x dx = a^x \ln a + c$; B) $\int e^x dx = e^x + c$,

C) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c, x > 0$; D) $\int e^{-x} dx = -e^{=x} + c$

15. Quyidagi integralni hisoblang. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

A) $\sqrt{x}+C$; B) $2\sqrt{x}+C$; C) $ln|\sqrt{x}|+C$; D) $ln|2\sqrt{x}|+C$.

Nazorat savollari:

1. Boshlang‘ich funksiya qanday xossalarga ega?
2. Integrallash va differensiallash amallari o‘zaro qanday bog‘langan? Integral hisoblash natijasini qanday tekshirish mumkin?
3. Ko‘rsatkichli funksiya qanday integrallanadi?
4. Trigonometrik funksiyalarning integrallarini yozing.

5. Qanday ko‘rinishdagi aniqmas integrallarni bo‘laklab integrallash usulida hisoblash mumkin? Bo‘laklab integrallashda qanday hollar bo‘lishi mumkin?

12-MAVZU: ANIQ INTEGRAL

REJA:

1. **Aniq integral, uning geometrik ma’nosi, xossalari.**
2. **Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari.**
3. **Aniq integralning tadbiqlari.**

12.1. Aniq integral, uning geometrik ma’nosi, xossalari.

Berilgan $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

bo‘linish nuqtalari yordamida *n* ta

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo‘lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, 3, …, n) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ (i=1, 2, 3, …, n) qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ (i=1, 2, 3, …, n) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib ushbu yig‘indini tuzamiz:

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

1-Ta’rif: (1) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig‘indi $y = f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesma bo‘yicha ***integral yig‘indi*** deb ataladi.

$S_n(f)$ integral yig‘indi ta’rifidan ko‘rinadiki uning qiymati $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalar uzunligi Δx_i ularning soni n va tanlangan ξ_i nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi. $\Delta_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

2-Ta’rif: Agar $S_n(f)$ integral yig‘indilar ketma-ketligi $n \to \infty$ va $\Delta_n \to 0$ bo‘lganda x_i bo‘linish nuqtalari hamda $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan biror chekli $S(f)$ limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati $S(f)$

berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan ***aniq integral*** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = S(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (2)$$

Bu yerda a – aniq integralning ***quyi chegarasi***, b – ***yuqori chegarasi***, $[a,b]$ –integrallash kesmasi, x–integrallash o‘zgaruvchisi, $f(x)$ – ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ – ***integral ostidagi ifoda*** deyiladi.

3-Ta’rif: Agar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo‘lsa, unda $f(x)$ bu kesmada ***integrallanuvchi funksiya*** deb ataladi.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi $S = \int_a^b f(x)dx$,

O‘zgaruvchi kuch bajargan ish $A = \int_a^b f(x)dx$,

Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V = \int_a^b f(t)dt$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma’nolari deb olishimiz mumkin.

1-Teorema: Berilgan $[a,b]$ kesmada chegaralangan va unda chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

Natija: Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

Aniq integralning xossalari. Avvalo yuqorida ko‘rib o‘tilgan aniq integral ta’rifiga ikkita qo‘shimcha kiritamiz.

Agar aniq integralda quyi *a* va yuqori *b* chegaralar ($a < b$) o‘rinli almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli deb qabul qilamiz.

(3) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (4)$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi.

1-xossa: Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni k o‘zgarmas son bo‘lsa, unda

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \qquad (6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

3-xossa: Agar $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ va integrallanuvchi bo‘lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (7)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

4-xossa: Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x) \leq g(x)$ bo‘lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (8)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

5-xossa: Agar $a < c < b$ va $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo‘lsa, unda u $[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (9)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

6-xossa: Har qanday $[a,b]$ kesmada o‘zgarmas $f(x)=1$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a \tag{10}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

7-xossa: Agar $[a,b]$ kesmada $(a<b)$ integrallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo‘lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a) \tag{11}$$

qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

8-xossa: Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx \tag{12}$$

9-xossa(O‘rta qiymat haqidagi teorema): Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \tag{13}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

4-Ta’rif: (13) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***o‘rta qiymati*** deb ataladi.

12.2. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralni hisoblash usullari.

Berilgan $f(x)=x$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan

$$I=\int_a^b xdx$$

aniq integralni uning ta’rifidan foydalanib hisoblaymiz.

$$I=\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}]=$$

$$=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot 1]=(b-a)\cdot\frac{b+a}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

natijani olamiz. Demak,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}. \qquad (14)$$

2-Teorema: Agar (14) tenglikda $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa, unda $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi va

$$\Phi'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x) \qquad (15)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3-Teorema: Agar $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (16)$$

tenglik o‘rinlidir.

5-Ta’rif: (16) tenglik aniq integralni hisoblashning ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Misol.

1) $\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$; 2) $\int_a^b e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b=\frac{e^{4b}-e^{4a}}{4}$;

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \ln x d\ln x=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\frac{\ln^2 e-\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}\ln^2 e=\frac{1}{2}$;

4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=2-1=1.$

Bo‘laklab integrallash usuli. $u=u(x)$ va $v=v(x)$ differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu holda $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ ekanligidan $u\cdot v$ funksiya $u'v+uv'$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Shu sababli, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b [u'v+uv']dx=uv\Big|_a^b$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, aniq integralning 2-xossasi va $u'dx=du$, $v'dx=dv$ ekanligidan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (17)$$

6-Ta'rif: (17) tenglik aniq integralni ***bo'laklab integrallash formulasi*** deb ataladi.

Misol.

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \begin{bmatrix} u = x, & dv = \cos xdx \\ du = dx, & v = \sin x \end{bmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2};$$

Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli. Berilgan uzluksiz $y = f(x)$ funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan.

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni ba'zi hollarda biror $x = \varphi(t)$ differensiallanuvchi funksiya orqali "eski" x o'zgaruvchidan "yangi" t o'zgaruvchiga o'tish usulida hisoblash mumkin bo'ladi. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va unga quyidagi shartlar qo'yiladi:

1. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
2. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar $t \in [\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz;
3. $f[\varphi(t)]$ murakkab funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz.

Bu shartlarda ushbu formula o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (18)$$

7-Ta'rif: (18) tenglik aniq integralda ***o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi*** deb ataladi.

Ushbu aniq integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi yordamida hisoblaymiz.

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1, dx = 2tdt \\ \alpha = \sqrt{0+1} = 1, & \beta = \sqrt{3+1} = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$2\int_1^2 (t^2 - 1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

12.3. Aniq integralning tadbiqlari.

Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma'lumki, $y = f(x) \geq 0$ funksiya grafigi, $x = a$ va $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar hamda $y = 0$, ya'ni OX koordinata o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (19)$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $x\epsilon[\frac{\pi}{2}, \pi]$ holda $y = \cos x \leq 0$ va bunda hosil bo'ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \right| = \left| \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right| = |0 - 1| = 1.$$

Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash. Maktab geometriyasidan biz faqat eng sodda jismlar bo'lmish prizma, piramida, konus, silindr va shar hajmlarini hisoblash formulalarini bilamiz. Aniq integral yordamida bir qator murakkabroq jismlarning hajmini hisoblash imkoniyatiga ega bo'lamiz.

Jism hajmini uning ko'ndalang kesimi yuzasi bo'yicha hisoblash. Bizga biror J jism berilgan bo'lib, uni OX o'qiga perpendikular tekisliklar bilan kesganimizda hosil bo'ladigan kesimlarning yuzasi ma'lum va bu yuza biror uzluksiz $S(x)$, $x \in [a, b]$, funksiya orqali ifodalansin. Bu holda J jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a, b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo'lakka ajratamiz va bu nuqtalar orqali OX o'qiga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. Bu tekisliklar jismni J_i (i=1, 2, ⋯, n) qatlamlarga ajratadi. Bu qatlamlarning hajmlarini ΔV_i (i=1, 2, ⋯, n) deb belgilasak, unda izlangan V hajmni $V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots + \Delta V_n$ yig'indi ko'rinishida yozish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan x_i bo'linish nuqtalari orqali hosil qilingan har bir $[x_{i-1}; x_i]$ kesmachalardan (i=1, 2, ⋯, n) ixtiyoriy bir ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Endi J_i (i=1, 2, ⋯, n) qatlamlarning har birini balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, asosining yuzasi esa $S(\xi_i)$ bo'lgan silindrik jismlar bilan almashtiramiz. Bu holda $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ taqribiy tenglik o'rinli ekanligini nazarga olsak, yuqoridagi yig'indidan

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = V_n$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu taqribiy tenglikda bo‘laklar soni n qanchalik katta va $\Delta_n = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ qanchalik kichik bo‘lsa, V_n yig‘indi izlanayotgan V hajm qiymatiga shunchalik yaqin bo‘ladi deb olish mumkin. Shu sababli J jismning hajmi V yuqoridagi V_n yig‘indilar ketma-ketligining $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ bo‘lgandagi limiti deb olinadi. Unda V_n yig‘indi $S(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi ekanligini hisobga olib va aniq integral ta’rifidan foydalanib, berilgan J jismning V hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi $S(x)$ bo‘yicha hisoblash uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} V_n = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx \qquad (20)$$

Aylanma jismlarining hajmini hisoblash. Endi $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigi orqali hosil qilingan egri chiziqli trapetsiyaning OX koordinata o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan J aylanma jismning V hajmini topish masalasini ko‘ramiz.

Bunda aylanma jismning ko‘ndalang kesimlari doiralardan iborat bo‘lib, ularning yuzasi $S(x)=\pi f^2(x)$ funksiya bilan ifodalanadi. Demak, (20) formulaga asosan, aylanma jism hajmi V uchun ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (21)$$

Misol sifatida oldin ko‘rib o‘tilgan doiraviy konusning hajmini yana bir marta hisoblaymiz. Bu konusni uning $y=\frac{Rx}{h}$ tenglamali yasovchisini OX koordinata o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma jism deb qarash mumkin va shu sababli, (21) formulaga asosan,

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2x^2}{h^2}dx = \left.\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\right|_0^h = \frac{\pi R^2h^3}{3h^2} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

Test savollari:

1. Aniq integralning geometrik ma’nosini ko‘rsating.

A) egri chiziqli trapetsiyaning og‘ma tomoning burchak koeffitsiyenti;

B) egri chiziqli trapetsiyaning perimetri;
C) egri chiziqli trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uzunligi;
D) egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi.

2. Aniq integralning mexanik ma’nosini ko‘rsating.
A) o‘zgaruvchi kuchning eng katta qiymati;
B) o‘zgaruvchi kuchning eng kichik qiymati;
C) o‘zgaruvchi kuchning momenti;
D) o‘zgaruvchi kuchning bajargan ish.

3. Aniq integralning iqtisodiy ma’nosini ko‘rsating.
A) mahsulot ishlab chiqarishda mehnat unumdorligi;
B) ishlab chiqarilgan mahsulot tannarxi;
C) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi;
D) ishlab chiqarilgan mahsulot chakana narxi.

4. $[a,b]$ kesma bo‘yicha $y=f(x)$ funksiya uchun $S_n(f)$ integral yig‘indi tuzishda quyidagi amallardan qaysi biri bajarilmaydi?
A) $[a,b]$ kesma x_i (i=1, 2, ⋯, n–1) va $x_0=a$, $x_n=b$ nuqtalar bilan n bo‘lakka ajratiladi;
B) $[x_{i-1};x_i]$ (i=1, 2, ⋯, n) kesmalardan ξ_i nuqtalar olinadi;
C) tanlangan ξ_i nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi;
D) $[x_{i-1};x_i]$ (i=1, 2, ⋯, n) kesmalarning uzunliklari $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ topiladi;
E) ko‘rsatilgan barcha amallar bajariladi.

5. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun tuzilgan.

$$S_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

integral yig‘indi orqali uning aniq integrali qanday aniqlanadi?
A) $\int\limits_a^b f(x)dx=S_n(f)$; B) $\int\limits_a^b f(x)dx=\max S_n(f)$;
C) $\int\limits_a^b f(x)dx=\min S_n(f)$; D) $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ \max\Delta x\to 0}} S_n(f)$;
E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

6. $[a,b]$ kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun $\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integral qanday shartda doimo mavjud bo‘ladi?
A) yuqoridan chegaralangan; B) quyidan chegaralangan;

C) o‘suvchi; D) kamayuvchi; E) uzluksiz.

7. Aniq integralning xossasi qayerda xato ko‘rsatilgan?

A) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

B) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$;

C) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

D) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\ (k - const.)$.

8. Aniq integral xossasini ifodalovchi $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ tenglik bajarilishi uchun c nuqta qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

A) $c < a$; B) $c > b$; C) $c = a$ yoki $c = b$; D) $a < c < b$;

9. Aniq integral uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri o‘rinli emas?

A) $\int_a^a f(x)dx = 0$; B) $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$;

C) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

10. Agar $y = F(x)$ berilgan $[a,b]$ kesmada $y = f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, unda aniq integral uchun Nyuton–Leybnits formulasi qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

A) $\int_a^b f(x)dx = F(x)$; B) $\int_a^b f(x)dx = F(a)\cdot F(b)$;

C) $\int_a^b f(x)dx = F(b)+F(a)$; D) $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

11. $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{3}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

12. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 xdx$ aniq integral qiymatini Nyuton–Leybnits formulasi yordamida toping.

A) π; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{3}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

13. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini ko‘rsating.

A) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$; B) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int\limits_a^b vdu$;

C) $\int\limits_a^b udv = \int\limits_a^b vdu$; D) $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b$.

14. $y = x^3$, $x = 2$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini toping.

A) $S = 1$; B) $S = 2$; C) $S = 3$; D) $S = 4$.

15. $y = \sqrt{5}x^2$, $x\epsilon[2;3]$ parabola yoyini OX koordinata o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma jismning V hajmini toping.

A) $V = 5\pi$; B) $V = 211\pi$; C) $V = 24\pi^2$;
D) $V = (5\pi)^2$;E).

Nazorat savollari:

1. Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
2. Nyuton-Leybnits formulasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
4. Aylanma jismning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. Integrallash kesmasida manfiy bo‘lgan funksiyadan shu kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymati haqida nima deyish mumkin?

13-MAVZU: KOMBINATORIKA ELEMNTLARI

Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to’plamdan uning qandaydir xossaga ega bo’lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to’g’ri keladi.

Ta’rif. Biror chekli to’plam elementlari ichida ma’lum bir xossaga ega bo’lgan elementlaridan iborat qism to’plamlarni tanlab olish yoki to’plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog’liq masalalar <u>kombinatorik masalalar</u> deyiladi.

Masalan, o’nta ishchidan to’rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligini (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarni almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo’yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo’nalishlarida qo’llanishini ko’rsatadi.

Ta’rif. Kombinatorik masalalar bilan shug’ullanadigan matematik fan <u>kombinatorika</u> deyiladi.

Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo’lib olmon matematigi G.Leybnits o’rgangan va 1666 yilda “Kombinatorika san’ati haqida” asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo’shish va ko’paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

<u>Qo’shish qoidasi</u>. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo’lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda “α yoki β” tanlovni amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ yoki } \beta) = = m(\alpha) + m(\beta)$ formuladan topiladi.

<u>Ko’paytirish qoidasi</u>. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo’lsa, u holda “α va β” tanlovni (yoki (α, β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ va } \beta) = \quad = m(\alpha) \cdot m(\beta)$ formuladan topiladi.

Kombinatorik masalalarni yechishda ko’p qo’llaniladigan tushunchalardan biri o’rin almashtirish tushunchasidir.

Ta’rif. Chekli va n ta elementdan iborat to’plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o’zgartirib qism to’plam hosil qilish n elementli o’rin almashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o’rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi.

Teorema. n ta elementdan iborat o’rin almashtirishlar soni $P_n = n!$ formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ – en faktorial deb o’qiladi va $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ kabi aniqlanadi. Bunda $0! = 1$ deb olinadi. Masalan, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ va hokazo. Faktoriallarni hisoblashda $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay bo’ladi. Masalan, $n = 3$ elementli $\{a, b, c\}$ to’plamdan hosil bo’ladigan o’rin almashtirishlar $\{a, b, c\}$, $\{b, a, c\}$, $\{c, b, a\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$ bo’lib, ularning soni $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. bo’ladi.

Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya tushunchasidir.

Ta’rif. Chekli va n ta elementli to’plamning k $(k < n)$ ta elementli va kamida bitta element bilan farqlanadigan qism to’plam hosil qilish n elementdan k ta olingan kombinatsiya deyiladi.

Masalan, $\{a, b, c\}$ ko’rinishdagi $n = 3$ elementli to’plamdan ikkita elemenli kombinatsiyalar $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$ bo’lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b; a\} = \{a; b\}$, $\{a; c\} = \{c; a\}$, $\{b; c\} = \{c; b\}$ deb olinadi.

n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formula yordamida hisoblanadi.

Bu formula orqali kiritilgan C_n^k sonlar yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Bu tenglikda n ixtiyoriy natural son bo'lib, u $(a+b)^2$ va $(a+b)^3$ qisqa ko'paytirish formulalarining umumlashmasini ifodalaydi va uni Nyuton binomi deb ataladi. Unga kiruvchi C_n^k sonlari binomial koeffitsentlar deb ataladi.

Agar Nyuton binomida $a=b=1$ yoki $a=1,\ b=-1$ deb olsak, unda $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n,\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar formulada k o'rniga $n-k$ qo'yilsa yoki $k=0$ yoki $k=n$ deb olinsa, unda $C_n^k = C_n^{n-k},\ \ C_n^0 = C_n^n = 1$ tengliklar hosil bo'ladi. Bular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

Kombinatorik masalalarni yechishda o'rinlashtirish deb ataluvchi tushunchadan ham foydalaniladi.

Ta'rif. Chekli va n ta elementdan iborat to'plamdan bir-biridan yoki elementlari yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to'plamlarni hosil qilish n elementdan k tadan o'rinlashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o'rinlashtirishlar soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)] \quad \text{yoki} \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a,b,c\}$ to'plamdan $n=3$ elementdan $k=2$ tadan o'rinlashtirishlar $\{a;b\},\ \{b;a\},\ \{a;c\},\ \{c;a\},\ \{b;c\},\ \{c;b\}$ bo'lib, ularning soni $A_3^2 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ yoki $A_3^2 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6.$

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α - erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo'lsin. U holda, shartga ko'ra, $m(\alpha)=10,\ \ m(\beta)=8$ bo'lgani uchun bitta xodimni $m(\alpha \ yoki\ \beta) = m(\alpha)+m(\beta) = 10+8 = 18$ usulda tanlash mumkin.

2. 10 ta talabadan iborat guruhga ikkita yo'llanma ajratildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

Yechish: α birinchi yo'llanmani, β esa ikkinchi yo'llanmani tarqatishni ifodalasin. U holda $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 9$, chunki bitta talabaga birinchi yo'llanma berilganda, ikkinchi yo'llanmaga to'qqizta talaba davogar bo'ladi. Demak, ikkinchi yo'llanmani tarqatishlar soni $m(\alpha \ va \ \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta) = = 10 \cdot 9 = 90$ ga teng bo'ladi.

3. Qurilishda 10 ta suvoqchi va 8 ta bo'yoqchi ishlaydi. Ulardan bir suvoqchi va bir bo'yoqchidan iborat juftlikni necha usulda tanlash mumkin?

Yechish: $m(\alpha) = 10$ va $m(\beta) = 8$ bo'lgani uchun $m(\alpha \ va \ \beta) = = m(\alpha) \cdot m(\beta) = 10 \cdot 8 = 80.$

4. Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o'rinlashtirishlardan iborat.

Ya'ni, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi.

5. Ishlab chiqarish korxonasini tekshirish uchun besh kishidan iborat guruh ajratildi. Shu besh kishidan tarkibida uch kishi bo'lgan guruhni necha xil usulda tuzish mumkin.

Yechish: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formuladan foydalanamiz. Bizda $n = 5$, $k = 3$ bo'lgani uchun $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10.$

6. Tikuvchilik fabrikasida ishlayotgan xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini $n = 7$ elementli $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ to'plam sifatida qarasak, dam olish kunlari $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}, \ldots$ kabi juftliklardan iborat bo'ladi. Bunda $\{i, j\}$ va $\{j, i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash $n = 7$ elementdan $k = 2$ tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va ularning soni $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$ bo'ladi.

7. Talaba 4 ta fan bo'yicha qo'shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo'ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlari uchun haftaning tanlagan kunlarini $k = 4$ ta elementli $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to'plam, hafta kunlarini esa $n = 7$ elementlidan iborat $H = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ to'plam sifatida qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo'lib, uni hosil etish $n = 7$ elementlidan $k = 4$ tadan o'rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bu holda elementlarning joylashishi tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\{2,4,6,7\}$ taqsimotda birinchi fanga dushanba (2), ikkinchi fanga chorshanba (4), uchinchi fanga juma (6) va to'rtinchi fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo'ladi. Unda $\{4,2,6,7\}$, $\{6,4,2,7\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$ usulda tanlashi mumkin.

8. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo'nalishining birinchi kursida 10 ta fan o'qitiladi va har kuni 4 xil dars o'tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo'yilishi mumkin?

Yechish: Darslarning barcha mumkin bo'lgan kunlik taqsimoti o'n elementdan to'rttadan olib tuzish mumkin bo'lgan barcha o'rinlashtirishlardan iborat. Uni $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ formuladan foydalanib topamiz. Bizda $n = 10, k = 4$ bo'lgani uchun

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

9. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo'lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: Izlangan son 9 ta qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlardan iborat. Ya'ni,

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Buni $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(k-1)]$ formuladan ham topish mumkin. Unga asosan $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi ifodalarning qiymati topilsin:

1) $\frac{14!}{12!}$; 2) $\frac{16!}{18!}$; 3) $\frac{9!}{5! \cdot 4!}$; 4) 8!+9!.

2. Quyidagilarni isbotlang:

1) $\frac{(m+3)!}{m!} = (m+1)(m+2)(m+3)$;

2) $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+2)(n-m+1)$,bunda $n > m$.

3. Amallarni bajaring:

1) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$;   2) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.

4. To'qqizta har xil qiymatli raqam bilan nechta to'qqiz xonali son yozish mumkin?

Javob: 362880.

5. 12 kishilik ovqat hozirlangan stolga 12 kishini necha turli o'tqazish mumkin?

Javob: 479001600.

6. Musobaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O'rinlarni ular o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

7. Talaba 6 ta kitobdan 4 tasini necha usul bilan ajratishi mumkin?

8. Ma'lum bo'limda ishlash uchun 20 nafar ishchidan 6 nafar ishchini ajratish kerak. Buni necha usul bilan amalga oshirish mumkin?

9. Tenglik to'g'riligini isbotlang:

1) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; 2) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.

10. Ifodani soddalashtiring:

$\frac{3}{2(2n-1)} C_n^{2n-3}$.

11. Musobaqada 12 ta jamoa ishtirok etadi. Uchta turli medalni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Javob: $A_{12}^3 = 1320$.

12. Gruppada 30 ta o'quvchi bor. Ularning ichidan 3 kishini kompyuterda ishlash uchun ajratish kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin?

Javob: $C_{30}^3 = 4060$.

13. Turli rangdagi 5 to'p mato bor. Bu matolardan har bir mato faqat bitta polosani egallaydigan qilib nechta turli besh rangli bayroqlar tayyorlash mumkin?

Javob: $P_5 = 5! = 120$.

14. Tenglamani yeching:

1) $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72$;   2) $A_x^4 = A_{x-2}^2$.

Javob: 1) 7; 2) $\emptyset$.

14-MAVZU: EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

REJA:

1. **Ehtimollar nazariyasining predmeti va uning iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati.**
2. **Ehtimollik, uning klassik va geometrik ta'rifi.**
3. **Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari.**

14.1. Ehtimollar nazariyasining predmeti va uning iqtisodiy, texnik masalalar uchun ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasi "tasodifiy tajribalar", ya'ni natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o'rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o'zgarmas (ya'ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo'lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro'y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko'p marta takrorlash mumkin bo'ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o'tishida natijalari turlicha bo'lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro'y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo'lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro'y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o'yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarihini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo'lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog'liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug'illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandir. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli oʻlaroq nisbatan qisqa, ammo oʻta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy maʼlumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda oʻrganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga toʻgʻri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik oʻlchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, oʻlish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sugʻurtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar boʻlgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarning oʻrganishdan emas, balki eng sodda qimor oʻyinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo boʻlishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor oʻyinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bogʻliqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bogʻliqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi “katta sonlar qonuni” tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bogʻliqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, maʼlum boʻldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol oʻynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar “markaziy limit teoremalar” deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi boʻlib ehtimollar nazariyasi asoslarini qatʼiy va sistematik ravishda taʼrifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bogʻliqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli maʼlumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – “kichik kvadratlar usuli”ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini oʻq uzish masalalariga qoʻlladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol oʻynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga Rossiya olimlari V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M. Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I. Romanovskiy (1879-1954), A.N. Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo‘shdilar. O‘zbekistonda butun dunyoga taniqli Sarimsokov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta’kidlab o‘tish joizdir.

14.2. Ehtimollik va uning ta’rifi.

Ehtimollikning klassik ta’rifi. Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{k}{n} \tag{1}$$

Klassik ta’rif bo‘yicha aniqlangan ehtimollik xossalari.

1. Muqarrar hodisaning ehtimolligi 1 ga teng.

$$P(\Omega)=\frac{n(\Omega)}{n}=\frac{n}{n}=1$$

2. Mumkin bo‘lmagan hodisalarning ehtimolligi 0 ga teng.

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3. Ixtiyoriy hodisaning ehtimolligi uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$0\le P(A)\le 1$$

4. Mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng

$$P(\varnothing)=0.$$

5. Qarama-qarshi hodisalarning ehtimolliklari yig‘indisi birga teng

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

6. Agar $A\subseteq B$ bo‘lsa, u holda $P(A)\le P(B)$.
7. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
8. $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

9. Agar birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar to‘la gruppani tashkil etsa, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ bo‘lsa u holda

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

1-misol. Yashikda o‘lchamlari va og‘irligi bir xil bo‘lgan uchta ko‘k, sakkizta qizil va to‘qqizta oq shar bo‘lib, sharlar yaxshilab aralashtirilgan. Yashikdan tavakkaliga 1 ta shar tanlab olingan. Tanlangan sharning yoki ko‘k, yoki qizil, yoki oq chiqish ehtimolliklarini toping.

Yechish. Istalgan sharning chiqishini teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin bo‘lganligidan, jami $n = 3+8+9 = 20$ ta elementar hodisaga egamiz. A, B, C orqali mos ravishda ko‘k, qizil va oq shar chiqishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. . Ehtimollikning klassik ta’rifga ko‘ra

$$P(A) = \frac{3}{20} = 0{,}15;$$
$$P(B) = \frac{8}{20} = 0{,}4;$$
$$P(C) = \frac{9}{20} = 0{,}45;$$

2-misol. Ikkita o‘yin kubigi tashlanganda tushgan ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng bo‘lish ehtimolligini toping.

Yechish. Ikkita o‘yin kubigini tashlanganda har birida 1, yoki 2, yoki 3, yoki 4, yoki 5, yoki 6 ochko tushishi mumkin. Bir o‘yin kubigining har bir yog‘ini boshqasining har bir yog‘i bilan kombinatsiyasini olish mumkin. Mumkin bo‘lgan hamma kombinatsiyalarni quyidagi jadval ko‘rinishida ifodalash mumkin. (“birinchi” o‘yin kubigida tushgan ochkolar soni birinchi qilib, “ikkinchi” o‘yin kubigida tushgan ochkolar soni esa ikkinchi qilib yozilgan.):

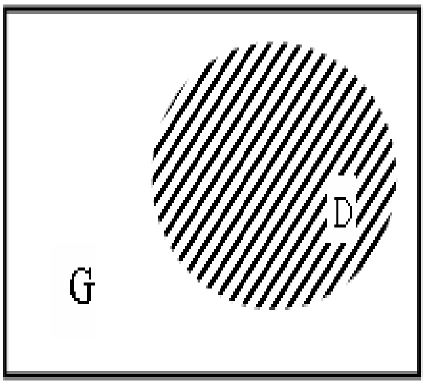
11	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**
12	**22**	**32**	**42**	**52**	<u>62</u>
13	**23**	**33**	<u>43</u>	**53**	**63**
14	**24**	<u>34</u>	**44**	**54**	**64**
15	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**
16	<u>26</u>	**36**	**46**	**56**	**66**

A = {tushgan ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng bo‘lish hodisasi}.

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, ikkita o‘yin kubigi tashlanganda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan teng imkoniyatli hodisalar 6·6=36 ga teng. Ular orasida faqat 4ta holatda (ular jadvalda tagiga chizib ko‘rsatilgan) ochkolar ko‘paytmasi 12 ga teng. Ehtimollikning klassik ta’rifiga ko‘ra

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Ehtimollikning geometrik ta’rifi. Ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra, Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo‘lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz.



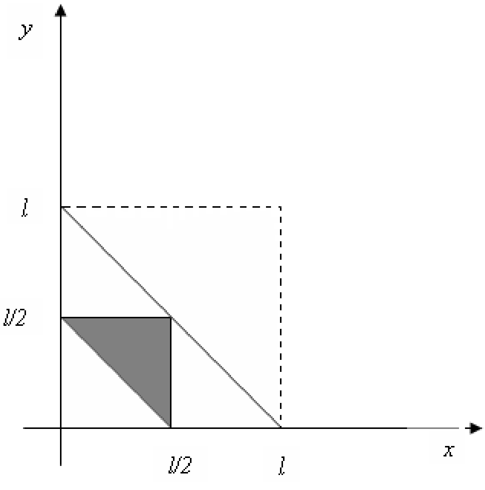
O‘lchovli biror G soha berilgan bo‘lib, u D sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko‘ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi. $A=\{X\in D\}$-X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo‘lsin.

A hodisaning **geometrik ehtimolligi** deb, D soha o‘lchovini G soha o‘lchoviga nisbatiga aytiladi, ya’ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

3-misol. *l* uzunlikdagi sterjen tavakkaliga tanlangan ikki nuqtada bo‘laklarga bo‘lindi. Hosil bo‘lgan bo‘laklardan uchburchak yasash mumkin bo‘lishi ehtimolligini toping.



Birinchi bo‘lak uzunligini *x*, ikkinchi bo‘lak uzunligini *y* bilan belgilasak, uchinchi bo‘lak uzunligi *l-x-y* bo‘ladi. Bu yerda $\Omega=\{(x,y):0<x+y<l\}$, ya’ni $0<x+y<l$ sterjenning bo‘laklari uzunliklarining barcha bo‘lishi mumkin bo‘lgan kombinatsiyasidir.

Bu bo'laklardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: $x+y>l-x-y,\quad x+l-x-y>y,$ $y+l-x-y>x$.

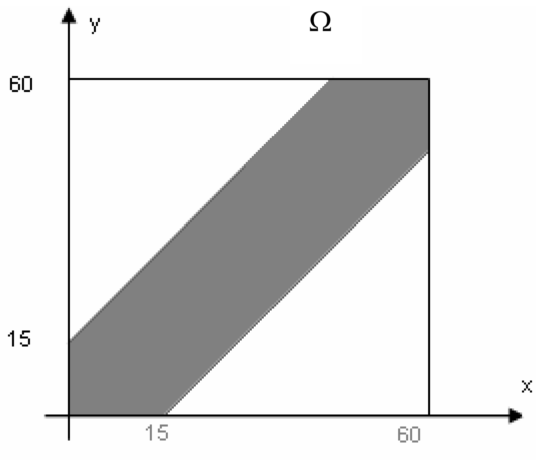
Bulardan $x<\frac{l}{2},\quad y<\frac{l}{2},\quad x+y>\frac{l}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu tengsizliklar yuqoridagi rasmda bo'yalgan sohani bildiradi. Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra:

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\cdot l\cdot l}=\frac{1}{4}.$$

4-misol. (Uchrashuv haqida). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Birinchi kishi kelgan momenti *x*, ikkinchisinikini *y* bo'lsin: $0\le x\le 60$, $0\le y\le 60$. U holda ularning uchrashishlari uchun $|x-y|\le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. *x* va *y* larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz.



U holda

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

14.3. Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari.

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz. Kombinatirikada **qo'shish** va **ko'paytirish** qoidasi deb ataluvchi ikki muhim **qoida (prinsiplari)** mavjud.

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni *n* va B to'plam elementlari soni *m* bo'lib, $A\cdot B=\varnothing$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A+B$ to'plam elementlari soni *n*+*m* bo'ladi.

Ko‘paytirish qoidasi: A va B to‘plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to‘plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo‘ladi.

1-Teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisadan istalgan birining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

NATIJA. Har ikkitasi birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalar-dan istalgan birining ro‘y berishi ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

2-Teorema. Ikkita erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

NATIJA. Bir nechta erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarini ko‘paytmasiga teng:

$P(A_1 A_2 \ldots . A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots . \cdot P(A_n)$

3-Teorema. Ikkita bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng.

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

NATIJA: Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytirilganligiga teng, shu bilan birga, har bir keyingi hodisaning ehtimoli oldingi hamma hodisalar ro‘y berdi degan farazda hisoblanadi:

$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \ldots . \cdot P(A_n/ A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$

4-Teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan hodisadan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalarning ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolining ayirmasiga teng:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Agar A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa , $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(B)P(A/B)$ bog‘liq bo‘lmasa $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ formulalaridan foydalanamiz.

5-Teorema. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan A_1, A_2, … A_n hodisalaridan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli 1dan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... $\overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollari ko‘paytmasining ayirmasiga teng:

$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})$

Ehtimollikni topishga doir masalalarni yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o‘ynaydi, shuni e’tiborga olib kombinatorikaning ba’zi formulalari ustida to‘xtalib o‘tamiz.

O‘rin almashtirish deb, n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi kombinatsiyalarga aytiladi. Ularning soni $P_n = n!$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1.$

5-misol. 5, 6, 7 raqamlaridan nechta uch xonali son hosil qilish mumkin?

$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

O‘rinlashtirish deb, n ta turli elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarda, elementlari yoki ularning tartibi bilan farq qilishiga aytiladi.

Ularning soni $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.

6-misol. 5,6,7,8 raqamlaridan nechta 2 xonali son hosil qilish mumkin?

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 3\cdot 4 = 12.$$

Gruppalashlar deb, bir-biridan hech bo‘lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinatsiyalarga aytiladi.

Ularning soni $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.

m ta elementdan iborat bo‘lgan har bir gruppalash mumkin bo‘lgan hamma o‘rin almashtirishlardan so‘ng $P_m = m!$ ta, n ta elementdan m tadan olib tuzilgan gruppalashlarning hammasi esa C_n^m ta bo‘lgani uchun barcha o‘rinlashtirishlarning umumiy soni A_n^m,

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

bo‘ladi. Bundan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad \text{yoki} \quad C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m}. \qquad (2)$$

(2) tenglikning o‘ng tomonini $(n-m)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-m)$ ga ko‘paytirib va bo‘lib, grupplashlar formulasini boshqacha, chunonchi

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{3}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Bu formulada *m* sonini *n-m* bilan almashtirsak, u vaqtda

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{4}$$

hosil bo'ladi.

(2) va (4) formulalarning o'ng tomonlari o'zaro bir-biriga teng, demak, ularning chap tomonlari ham teng, ya'ni

$$C_n^m = C_n^{n-m} \tag{5}$$

m=*n* bo'lsin, u vaqtda (3), (4) va (5) formulalardan mos ravishda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1, \quad C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1 \text{ va } C_n^n = C_n^0.$$

7-misol. Yashikdagi 10 ta detalni 2 tadan qilib nechta usulda olish mumkin?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45.$$

Test savollari:

1. A hodisaning **...** ehtimolligi deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni $P(A) = \frac{mes\{D\}}{mes\{G\}}$, bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan. Nuqtalar o'rnini to'ldiring.
   A) klassik B) geometrik C) statistik D) bunday ehtimollik ta'rifi yo'q.
2. . A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi. Ushbu hodisaning ehtimolligi qaysi ta'rifga to'g'ri keladi?
   A) klassik B) geometric C) statistik D) bunday ehtimollik ta'rifi yo'q.
3. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasida guruhlashlar soni: *n* ta elementdan *m* ($0 < m \leq n$) tadan guruhlashlar soni qaysi formula orqali hisoblanadi?
   A) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ B) $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ C) $P_n = n!$ D) $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

4. Bitta o‘yin kubigi tashlanadi. Kubikning tushgan yoqlaridagi ochkolar juft son bo‘lish ehtimolligini toping.
A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$
5. Ikkita o‘yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig‘indisi 6 ga teng bo‘lishi ehtimolligini toping.
A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{5}{36}$ D) $\frac{1}{5}$
6. Ikkita o‘yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig‘indisi 5 ga teng bo‘lishi ehtimolligini toping.
A) $\frac{4}{36}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{4}{6}$ D) $\frac{5}{36}$
7. Ikkita o‘yin kubigi tashlanadi. Kubiklarning yoqlarida tushgan ochkolar yig‘indisi 6 ga ko‘paytmasi 5 ga teng bo‘lishi ehtimolligini toping.
A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{18}$
8. Tanga bir marta tashlanadi. “Gerb”li tomon tushish ehtimolligini toping.
A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 2 D) 0,5
9. Tanga ikki marta tashlanadi. Ikki marta “Raqam”li tomon tushish ehtimolligini toping.
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{4}$ D) 1
10. Tomoni 2 ga teng kvadratga aylana ichki chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanaga tushish ehtimolligini toping.
A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$
11. Gruppada 12 ta talaba bo‘lib, ulardan 8 tasi a’lochi. Ro‘yxat bo‘yicha tavakkaliga 9 ta talaba ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 ta a’lochi talaba bo‘lish ehtimolligini toping.
A) $\frac{14}{55}$ B) $\frac{5}{55}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{5}{9}$
12. Yashikda 50 ta bir xil detal bor, ulardan 45 tasi bo‘yalgan. Tavakkaliga 1 ta detal olinadi. Olingan detal bo‘yalmagan bo‘lish ehtimolligini toping.
A) 0,5 B) 0,1 C) 0,4 D) 0,9
13. Qopda 45 ta qora va 5 ta oq shar bor. Tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan shar oq bo‘lish ehtimolligini toping.
A) 0,5 B) 0,3 C) 0,1 D) 0,2

14. Beshta bir xil kartochkaga T,K,O,B,I harflari yozilgan. Kartochkalarni tasodifiy joylashtirilganda “KITOB” so‘zi hosil bo‘lish ehtimolligini toping.

A) $\frac{1}{120}$ B) 120 C) $\frac{1}{12}$ D) 25

15. Oltita bir xil kartochkaning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: *a, l, m, p, c, o* Kartochkalar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta kartochkada “*olma*” so‘zini o‘qish mumkinligi ehtimolligini toping.

A) $\frac{1}{300}$ B) $\frac{1}{360}$ C) $\frac{1}{60}$ D) $\frac{4}{6}$

Nazorat savollari:

1. Ehtimollikning klassik ta’rifi keltiring.
2. Kombinatirikaning asosiy prinsiplarini ayting, misollar keltiring.
3. Ehtimolliklar nazariyasini kelib chiqishi tarixini qisqacha gapirib bering.
4. Klassik ehtimollikning asosiy xossalari qanday? Nima uchun ehtimollikning klassik ta’rifi yetarli emas?
5. Ehtimollikning geometrik ta’rifi nima? Uning qo‘llanishiga doir misollar keltiring.

15-MAVZU: MATEMATIK MODELLAR

REJA:

1.Modellashtirish nazariyasini predmeti.

2.Tizimlarni tarkok kilishda modellashtirishni urni va ahamiyati.

3.Modellarni sinflari.

4.Bilish va boshqarish jarayonlarida modellashtirish.

5.Modellashtirish ob’ektlarini sinflari.

6.Modellashtirishni asosiy bosqichlari.

15.1.Modellashtirish nazariyasini predmeti

Xayoliy modellar haqiqiy dunyoni nazariy tushinish va aks ettirish shakli bo`lib, uni fizik bilish uchun katta o`rin egallaydi. Shuning uchun nazariy bilish va uslubiy jixatdan modellarni shakillantirish masalasi, ularni bilishda qo`llash va boshqa modellar, xayoliy va real tajribalar, gipoteza, nazariyalar bilan aloqasi katta ahamiyat kasb etadi.

Modellar-ilmiy gipoteza bo`lib, fanni rivojlantirish shakli sifatida ko`rib kelgusidagi takomillashgan nazariya modellari ko`rinishida urganiladi.

Xayoliy va material modellarni quyidagicha tariflash mumkin:

Modellashtirish - bu biror bir ob’ektni (orginalni) boshqasi (model bilan) almashtirish va orginalni xususiyatlarini modelni xususiyatlarini tadqiq etish yo`li bilan o`rganishdan iborat. Almashtirishdan asosiy maqsad orginal xususiyatlarini o`rganishni aniqlashni tezlashtirish, soddalashtirish, narxini kamaytirish imkonini beradi. Umuman ob’ekt-original sifatida ixtiyoriy tabiiy yoki sun’iy, real (haqiqiy) yoki xayoliy tizim bo`lishi mumkin.

Modellashtirish usuli hozirgi zamonda ko`pdan ko`p olimlar tomonidan tadbik etilmoqda. Misol sifatida mexanika, fizika (kattik jismlar) ximiya, biologiya, meditsina, iqtisodiyot va boshqa sohalarni ko`rish mumkin. Modellashtirish konsepsiyasidan maqsad asosan modellarni nazariya yaratish jarayoniga kiritishdan iboratdir, chunki ideal modellar nazariyani boshlangich bosqichi bo`lishi mumkin yoki nazariyani interpretatsiya qilish modeli ham bo`lishi mumkin.

Gipotezalar nazariyaning ideallashtirilgan ob’ektlardan farkli bo`lib, nazariyani interpretatsiya kilish modeli yoki dastlabki pogonadagi model kurinishida tasvirlash mumkin. Gipotezalar shakillantirilayotgan modellarni dastlabki kadamlari (pogonalari) sifatida kurilishi mumkin.

Dastlabki modelni ishlab chiqishda tadqiqotchi intuitsiyasi katta rol uynaydi. Boshlangich vaktlarda kata mikdordagi modellar oldinga surilishi mumkin. Ammo tadqiq etish jarayonida ularning soni kamayadi.

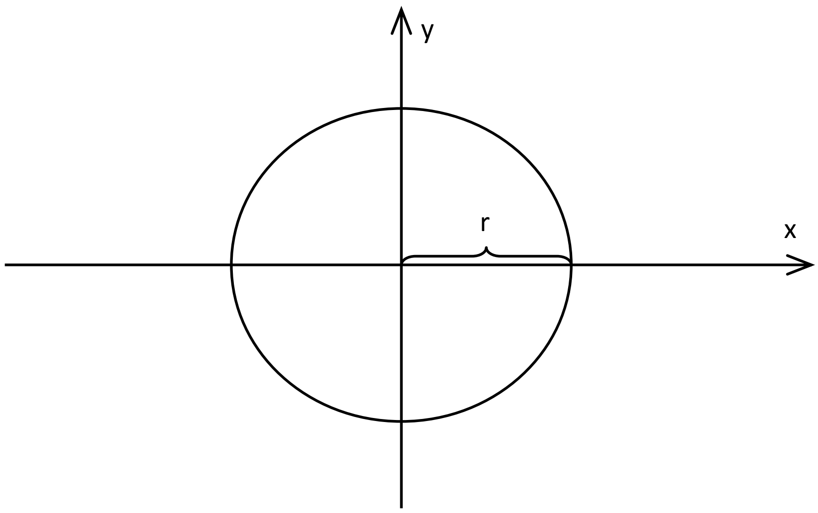
Model bilan ishlash shakli sifatida xayoliy tajriba kuriladi. Ayrim xollarda xayoliy tajribalarni ideallashtirilgan deyiladi, chunki ular real tajribalar bilan boglikdir. Ma’lum mikiyosda xayoliy tajriba real tajribani ma’lum tomonlarini (xususiyatlarini) xayoliy obrazli rekonstruksiya kilishdan iboratdir. Chunki, aytiladiki «fikirlash ongda tajriba utkazish maxsulidir». Xayoliy tajriba shartsiz ravishda haqiqiy tajribaga karaganda kulaydir. Fikrlar bizda xar doim mavjud va xakikatga nisbatan ongda tajribalarni yigish (tuplash) onsondir. (Engelmayer suzlari bo`yicha)

Tajriba ob’ekt orginalni ma’lum tomonlarini (xususiyatlarini) modelda aks ettirishni adekvatlik kriteriyasi bo`lib kelmoqda. Tajriba xakam rolida bo`lib, model yordamida olingan ta’savurlarni olib kolish yoki tashlab yuborish tugrisida yechimini kabul kiladi.

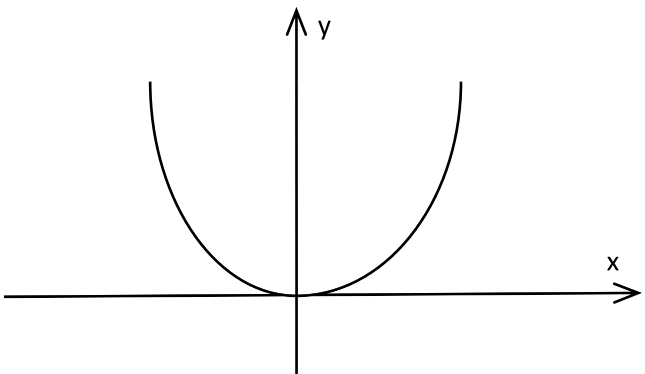
O`rganilayotgan xodisa, jarayon yoki ob’ektni matematik ifodalar (munosabatlar) va formulalar yordamida ta’savvur etish jarayoni matematik model deyiladi. Tadqiq etilayotgan ob’ektni modellashtirish ob’ektni shakillashtirishdan boshlanadi, ya’ni mos matematik modelni tuzishdan iborat. Buning uchun uning ahamiyati kasb etgan tomonlari (xususiyatlari) ajratib olinadi (tanlanadi) va matematik munosabatlar yordamida yoziladi.

Matematik model tashkil etilgandan so`ng, ya’ni masalaga matematik shakl berilgandan so`ng uni urganish uchun matematik usullardan foydalanishimiz mumkin.

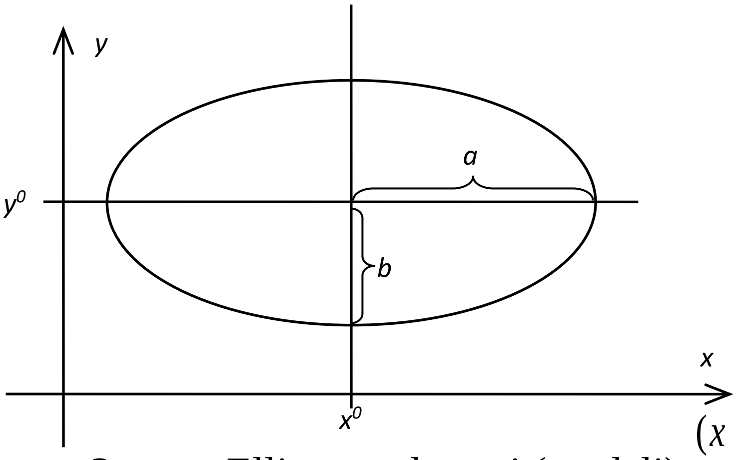
Matematik modellarga misollar:



1-rasm. Aylanani tenglamasi (modeli) $x^2+y^2=r^2$



2-rasm. Parabolani tenglamasi (modeli) $y=ax^2$



3 rasm. Ellips tenglamasi (modeli) $\frac{(x-x^0)^2}{a^1}+\frac{(y-y^0)^2}{b^2}=1$

1- masala: yozuv stoli sirtini yuzini topish talab etiladi.

$S = a \cdot b$

Bu shuni anglatadiki, real ob’ekt (yozuv stoli) tugri burchakli abstrakt matematik modeli bilan almashtirilgan. Tugri turt burchakka ulchovlar berilgan. Bu ulchovlar ulchash natijasida olingan va bunday tugri burchakning yuzi kidirilayotgan yuzaning taxminiy kiymati olinadi. Tugri turtburchak modelini tanlash biz asosan uzimizning kurish xususiyatlarimizga asoslanadi. Ammo inson kuzi yukori aniklikka ega bo`lgan ulchash asbobi emas.

Modellashtrish asosan modelda tadqiq kilishga xalakit beruvchi orginalni alomatlari mavjud bulmagan xollarda, yoki modelni xususiyatlarini urganish va belgilash imkonini beruvchi parametrlar mavjud bo`lgan da maqsadga muvofikdir.

Modellashtirish nazariyasi o`zaro bir-biriga boglik bo`lgan nizomlar, ta’riflar, modellarni yaratish va tadqiq etish usullari, vositalri tuplamidan iborat. Bu nizomlar, tariflar, usullar, vositalar va modellar modellashtirish nazariyasini predmetini tashqil etadi.

Modellashtirish nazariyasini asosiy masalasi tadqiqotchilarni modellarni yaratish texnologiyasiga o`rgatishdan iborat. Bunday texnologiya orginallarini urganilayotgan xususiyatlarini yetarli aniklik va tula ravishda tadqiq etish imkoniyatini beradi.

Ob’ekt -original sifatida asosan xisoblash tizmlari kurilgan bo`lib, modellashirishni predmet soxasini tashqil etadi. Xisoblash tizmi tushunchasi bu yerda keng ma’noga ega bo`lib, bir protsessorli ma’lumotlarni qayta ishlash tizmidan turli dasturiy ta’minotli taksimlangan xisoblash tizmlarigacha va turli vazifalarga muljallangan tizmlar kiradi. Xisoblash tizmlari - bu sun’iy, muxandislik tizmlari bo`lib, uning xamma parametri ma’lum. Demak, bu parametrlarni tadqiq etish, aniklash imkoni bor. Shuning uchun xisoblash tizmlarini modellashtirishni prinsipial imkoni bor.

15.2.Tizimlarni tadqiq etishda modellashtirishni o`rni va ahamiyati

Modellashtirishni ilmiy kidiruv ishlarida, muxandislik ijod soxasida va umuman inson xayotida baxolash murakkab masaladir. Ixtiyoriy xar kanday tizmni bilish yoki urganish moxiyati bo`yicha uning modelini yaratishga olib kelinadi. Xar bir kurilma yoki inshoatni yaratishdan avval uning model loyixasi ishlab chikiladi. San’oatni xar kanday asari haqiqiy dunyoni borlikni belgilovchi modeldir. Inson biror bir xarakat kilishdan oldin mumkin bo`lgan xarakatlar ketma-ketligini uylab kuradi yoki sinovdan utgan xarakatlar modeli bo`yicha boshkaradi.

Konstruktiv modellar, ya’ni sistemani xarakteristikalarini uning parametrlariga boglanishni tadbik etuvchi va xususiyatlarini belgilash imkoni beruvchi modellar aloxida ahamiyat kasb etadilar. Bunday modellar tizmlarini ishlashini optimallashtirish imkonini yaratadi. Optimallashtiruvchi modellar-murakkab tizmlar nazariyasini asosini tashqil etadi.

Modellashtirish ilmiy bilish usuli va texnik masalalarni yechish usuli sifatida xar doim yukori baxolanib kelingan. Texnikani rivojlantirish bilan mexanizm, mashina va inshoatlar fizik modellashtirish keng kullanila boshlandi.

Matematikaning yutuklari turli tabiatga ega bo`lgan ob’ekt va jarayonlarni matematik modellashtirishni keng kulamda tarkalishiga olib keladi. Shuni aytib utish kerakki, fizik tabiati turlicha bo`lgan tizmlarni ishlash dinamikasi bir turdagi boglanishlar yordamida yoziladi, ya’ni bir turdagi modellar yordamida tasvirlash yoki ifodalash mumkin. Turli -tuman tizmlarni taxlil va sintez kilishda muxandislar foydalanadigan xisoblash formulalari bunday tizmlarni matematik modellardan keltirib chikarilgan.

Imitatsion modellashtirish uslubiyatini ishlab chiqish natijasida modellashtirish yanada sifatli yangi pogonaga kutarildi. Bu shundan iboratki, modellashtirish yordamida tadqiq etiladigan tizmlar sinfi yanada kengaydi. Hozirgi zamonaviy xisoblash texnikasini yangi imkoniyatlarini chukurlashuvi va kengayishi modellashtirishdan foydalanish soxalarini yanada kengayishiga va rifojlanrishiga olib keladi. Hozirgi sharoitlarda ilmiy-texnik progressni jadallashuvi natijasida chegaralangan moddiy, ish, energetik va vakt resurslari asosida yukori samaradorlikka erishish shartlari bo`yicha modellashtirish aloxida ahamiyatga ega bulmokda.

Hozirgi davrda modellashtirish kullanilmaydigan inson faoliyati soxasini topish kiyindir. Masalan, avtomobillarni ishlab chikarish modeli, bugdoyni yetishtirish, inson organlarini ishlash modellari, Azov dengizini xayot faoliyati, atom urishining okibatlari va x.k. Kelgusida xar bir tizmni uzining modellari yaratilishi mumkin, xar bir texnik yoki tashqiliy loyixani ishlatishdan (kullanishdan) avval uni modellashtirish zarur.

Mutaxassislarni aytishi bo`yicha xisoblash tizmlarining asosiy vazifasi modellashtirishdan iborat buladi. Xakikatdan hozirgi davrda xisoblash texnikasini amaliyotda tadbik eish texnologik jarayonlarni boshqarishni avtomotlashtirilgan tizmlarga, tashqiliy-iktisodiy komplekslari va loyixalash jarayonlarini avtomatlashtirilgan boshqarish tizmlarini xamda ma’lumotlar omborini keng kulamda yaratish kabi yunalishlarda kullanilmokda. Ammo xar kanday boshqarish tizmi boshkariladigan ob’ekt yoki jarayon xakidagi axboratga muxtoj buladi. Shuning uchun xisoblash texnikasi modellashtirish uchun ishlatish (foydalanish) birinchi darajali ahamiyatga egadir.

Hisoblash tizmlari murakkab va kimmat baxoga ega bo`lgan liklari uchun moslashtirish ob’ektlari bulishlari mumkin va zarur.

Modellashtirish xisoblash tizmlarini loyixalash bosqichida, mavjud ishlatilayotgan tizmlarni ishlashini elektromol sharoitlarda taxlil etish yoki tizmni tarkibi, strukturasi, boshqarish turlari yoki ish xajmini uzgarishini urganish jarayonlari uchun foydalaniladi. Dastlab tanlab olingan loyixa yechimini taxlil kilish modellashtirish bilan amalga oshiriladi. Bu esa uz navbatida kelajakdagi tizmning kutiladigan xarakteristikalarini aniklashni imkonini beradi, uning kuchli va kuchsiz tomonlarini aniklashga asos buladi. Agar uning xarakterstikalari kuyilgan talablarni kanoatlantirmasa taxlil asosida loyixada uzgartirishlar kiritiladi. So`ngra yana modellashtirish utkaziladi. Bu jarayon ishlab chikilayotgan tizmni ishlash sifat kursatkichlari talab darajasiga yetguncha davom ettiriladi.

Hozirgi davrda ishlab turgan tizmlarni modellashtirish yordamida tizmlarni ishlash jarayonini chegaraviy shartlarini aniklashda, ektrimal sharoitlarni imetatsiya kilishda foydalaniladi. Bunday sharoitlari sun'iy yaratish bir kancha kiyinchiliklarga olib keladi va noxush okibatlarga olib kelishi mumkin.

15.3.Modellarni sinflari

Fizik modellar. Modellarni sinflarga ajratishga asos kilib, modelni orginaldan abstraksiyalash (mavxumlash) darajasi olingan. Dastlab xamma modellarni ikki guruxga ajratish mumkin. Moddiy (fizik) va abstrak (matematik).

Fizik model deb orginalga ekvivolent yoki uxshash bo`lgan tizmlar tushiniladi. Boshkacha ytganada ishlash jarayoni orginalga uxshash bo`lgan u yoki bu fizik tabiatga ega bo`lgan tizmlarga aytiladi. Fizik madellarni kuyidagi turlarini kursatish mumkin: naturali, kvazinaturavi, masshtab va analog modellar.

Naturaviy modellar - bu real tadqiq etilayotgan tizmlardir. Ularni maketlar yoki tajriba kurinishi deyiladi. Bunday modellar tizm-orginallarga tula adekvat buladi va natijada modellashtirish natijalarini yukori anikligini va ishonchliligini ta'minlaydi. Xisoblash tizmlarini loyixalash jarayoni tajriba kurinishlarini sinash bilan yakunlanadi.

Kvazinaturaviy modellar -naturaviy va matematik modellar majmuasidan iborat. Masshtab modellar - bu orgenallik kanday fizik tabiatga ega bulsa shunday tabiatli tizm bo`lib, fakat masshtablari bilan farklanadigan tizmdir. Masshtab modellashtirishni uslubiyat asosi bo`lib, uxshashlik nazariyasi olingan. Bu nazariya bo`yicha orginal bilan model geometrik uxshashlik saklanishi lozim va ularni parametlari mos masshtablarda bulishi lozim.

Analog modellar - deb shunday modellarga aytiladiki, orginaldan fizik tabiatga nisbatan fark kiluvchi, ammo ishlash jarayoni orginalga uxshash bo`lgan modellarga aytiladi. Bunday modellarda asosiy shartlardan biri bu urganilayotgan ob'ekt bilan model parametrlari orasida bir kiymatli mos kelishlik bulishi, xamda bu tizmlardagi jarayonlarni ulchamga ega bulmagan matematik yozilishi ayniyat shaklida bulishi zarur. Analog modellarni yaratish uchun urganilayotgan tizmlarni matematik tafsiflash zarur. Analog modellar sifatida mexanik, gidravlik, pnevmatik tizmlar ishlatilishi mumkin. Ammo ko`pgina xollarda elektr va elektron analog modellar keng kullaniladi. Chunki tokni kuchi va kuchlanish boshka tabiatga ega bo`lgan fizik kattaliklar analogi buladi. Analog modellarni asosiy xususiyatlari parametrlarni mikdoriy uzgarishi va ulchamlariga adaptatsiya (moslashtirish) kilinishi sodda va tezkordir. Analog modellar xisoblash texnikasini vositalarini mantikan elementlar va elektr zanjirlari satxida tadqiqot utkazishda yoki tizm satxida tizmlar ishlashi, masalan: differensional yoki algebrik tengliklar yordamida yozilish satxida foydalaniladi.

Matematik modellar-matematik model tizmini abstrakt tilda formal tafsiflashdan iborat. Masalan, xususan tizmni ishlashini matematik ifodalar yordamida modelni yaratish uchun ixtiyoriy matematik vositalar - algebrik, differensial va integral xisoblash, tuplamlar nazariyasi, algoritmlar nazariyasi va boshkalar ishlatilishi mumkin. Moxiyati bo`yicha xamma matematika ob’ekt va jarayonlarni modellarini yaratish va tadqiq etish uchun yaratilgan.

Modellashtirish maqsadi va orginalning xarakterli tomonlari modellarni jixatlarini va ularni tadqiq etish usullarini aniklaydi. Masalan: matematik modellarni deterministik va extimollik (staxastik) sinflarga ajratish mumkin. Birinchisi modelni xarakteristikasi va parametrlari orasidagi o`zaro mos kelishlikni aniklasa, ikkinchisi bu kattaliklarni statistik kiymatlari orasidagi moslikni aniklaydi. U yoki bu turdagi modelni tanlash tasodifiy faktorlarni xisobga olish zarurligi darajasiga asoslangan. Matematik modellarni tadqiq etish usullari kuyidagi turlarga bulinadi; analitik, sonli, imitatsion.

Analitik model deb tizmni shunday formal tavfsiflashga aytiladiki, ma’lum matematik apparatdan foydalanilgan xolda tenglama yechimini yakkol kurinishda olish imkonini beradi.

Sonli model - shunday turdagi boglanish bilan xarakterlanadiki, anik boshlangich sharoitlar va modelni mikdoriy parametrlari uchun fakat xususiy yechimlarini topish imkonini beradi.

Imitatsion model - bu tashqi va ichki ta’sirlar ostidagi tizmlarni yozish majmuasi va tashqi ta’sirlar, tizmning ishlash algoritmlari yoki tizmni xolatlarini uzgarish koidasidan iborat. Bu algoritm va koidalar mavjud bo`lgan anatomik va sonli yechimlarni aniklashni imkonini bermaydi, ammo tizmni ishlash jarayonini imitatsiya kilish (kuchirish) va kiziktirayotgan xarakteristikalarni (kursatkichlarni) ulchash yoki aniklash imkonini beradi.

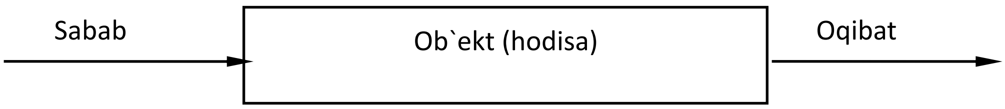
Imitatsion modellar anatomik va sonli modellardan farklirok keng sinfdagi ob’ekt va jarayonlar uchun yaratilishi mumkin.

Imitatsion modellardan foydalanish uchun odatda imitatsion modellarni tasvirlash (yozish) vositalari universal yoki maxsus algoritmik tillar xizmat kiladi. Imitatsion modellar ko`prok darajada xisoblash tizmlarini pogonada tadqiq etishga muljallangan.

15.4.Bilish va boshqarish jarayonlarida modellashtrish

Modellashtirish muammosi bilan biz asosan ikki xolda duch kelamiz: birinchidan, bilish jarayonlarida, ya'ni ob'ekt va jarayonlarni bilish modelini tuzishda, ikkinchidan boshqarish jarayonlarida, ya'ni ob'ektni maqsadga tomon yunaltirilgan boshqarishda, ya'ni inson tomonidan kuyilgan maqsadga erishish uchun.

Bilish jarayonida bilish modeli yaratiladi. Bu model zaruriy kurinishda ob'ektni ishlash mexanizmni aks ettiradi. Bunday modellashtirishga misol sifatida bizni urab turgan tabiatni urganishni olish mumkin. Tabiat xususiyatlarini tushintira olish, ularni o`zaro boglanishi, mexanizmlarni taxlil etish va x.k. -mana bunday modellashtirishni asosiy masalalarni tashqil etadi. Bunday modellashtirish bilishdan kam farklanadi. Modellarni asosiy maqsadi shunday modellar yaratish kerakki ular inson uchun muxim bo`lgan tabiat ob'ektlarini aks ettiruvchi modellar ishlab chiqishdan iborat. Bunday xususiyatlar xar bir ob'ekt yoki xodisadagi sabab - okibat boglanishlarini turlicha kurinishda aks ettirilishi bilan ifodalanadi. Bunday boglanishlarni biror bir sababni okibatga «uzgartiruvchi» kurinishda tasvirlash mumkin.



4 rasm. Bilish ob'ektini tasvirlash.

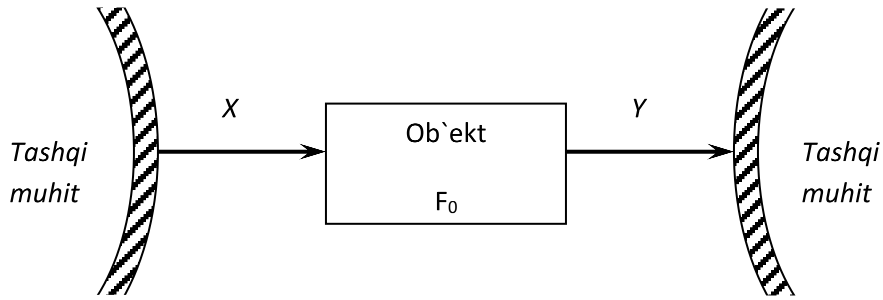
«O`zgartiruvchi» ni «ishlashini» biror bir tilda yozish model deyiladi. Demak model deyilganda shunday fikrlash tushiniladiki (ixtiyoriy tilda - matematik, grafik, algoritmik, suzlashuv va x.k.) kuzatilayotgan xodisani imitatsiya kilish imkonini bersin. Konkret maqsadlar model yoziladigan tilni xam aniklashtiradi. Ma'lumki, ko`pgina texnik va fizik modellarni yozish matematika tilidan amalga oshiriladi.

Sababni X bilan, okibatni esa Y bilan belgilaymiz. Bular orasidagi boglanishni shartli ravishda kuyidagi kurinishda yozamiz

$$Y=F(X),$$

Bunda F- sababini X-oqibatga Y- ozgartirish qoidasi. Bu modelni tashqil etadi. F ni modelni operatori deyiladi.

5 **rasm**. Ob’ektni tashqi muxit bilan o`zaror ta’siri.



Quyidagi 5-rasmda modellashtirilayotgan ob’ektni tashqi muxit bilan o`zaro ta’siri ko` rsatilgan. Bu o`zaro ta’sirlar X va Y kanallari bo`yicha sodir buladi. X kanali bo`yicha tashqi muxit ob’ektiga ta’sir etadi, Y kanali bo`yicha ob’ekt tashqi muxitga ta’sir etadi.

Modellashtirish masalasi operator F ni topishga muljallangan bo`lib, operator F ob’ektni kirish va chiqishlarini boglab turadi.

Faraz qilaylik $x_1,x_2, \ldots ,x_N$ ob’ektni kirishini kuzatish bo`lsin, $y_1,y_2,\ldots\ y_N$ mos ravishda diskret vaqt daqiqalaridagi 1,2,…№ chiqishni kuzatishlari bo`lsin. Bu kuzatishlar ob’ektni noma’lum operatori F_0 bilan boglagan, ya’ni

$$Y_i=F_0(x_i) \qquad (i=1,2,...,N)$$

Modellashtirish masalasi shunday model operatori F ni tuzimdan (sintez kilishdan) iboratdir, ya’ni F_0 kuzatishlar bo`yicha $x_i$ va $y_i$ ni bahosini olishdan iborat. Tabiyki biror bir kriteriy bo`yicha model operatori F ob’ekt opreratori F_0 yaqin bo`lishligi talab etiladi, ya’ni $F \sim F_0$.

Bilish modellarini ahamiyatli xususiyatlari shundan ibratki ob’ekt yoki xodisa mexanizmlari opreator F strukturasida aks etirilishidir, ya’ni ob’ektdagi modellashtirish jarayonida aniqlangan hamma sabab - oqibat bog`lanishlari aks ettirilishidir. Agar bu o`zaro bog`lanishlarni hisobga olmaslik modelni bilish tomonlari ma’lum kamchiliklarga olib kelishi mumkin. Ya’ni bilish uchun qanday bu jarayon sodir bo`lishi yetarli bo`lmay balki nima uchun bu jarayon sodir bulish sabablarini ham aniqlash kerak.

Modellashtirishni boshqa turdagi ko`rinish –bu ob’ektni boshqarish talablariga bevosita boglangan bo`lib, boshqarishga nisbatan yordamchi xarakterga ega. Haqiqatdan boshqarish uchun oldindan nimani boshqarish kerakligini, ya’ni ob’ekt modeliga ega bo`lish va unda boshqarishni oqibatini sinab ko`rish va ulardan eng yaxshisini tanlab olish zarur. Shuning uchun bu turdagi modellashtirish jarayonlarida shunday model yaratish kerakki, u boshqarish talablariga javob berishi kerak.

Shu sababli, «boshqarish» tushinchasi nimani angalatadi va boshqariladigan ob’ektni modeliga talablar quyilishini aniqlab olish kerak. Boshqarish deb - ob’ektga shunday maqsadaga yo`naltirilgan ta’sir ko`rsatish jarayoni tushiniladiki, natijada boshqarishgacha nisbatan ob’ekt ma’lum ma’noda quyilgan maqsadlarni bajarishga «yaqinroq» bo`ladi.

Bu yerda X -boshkarilmaydigan, ammo nazorat qilinadigan tashqi etuvchi; *U* -boshqariladigan tashqil etuvchi; *Y* -ob’ekt holati haqidagi axborot;

Boshqarishni tashqil qilish(sintez) uchun dastlab maqsadni *Z* aniqlash kerak, ya’ni ob’ektga ta’sir qilish jarayonida boshqarish qurilmasi nimaga intilishi kerak va boshqarish nuktasi nazaridan ob’ekt qanday bo`lishi zarur. Ammo bundan tashqari boshqarish algoritmi A ham berilishi zarur, ya’ni bu maqsadga qanday erishish mumkinligi ko`rsatilishi kerak.

Shunday qilib boshqarish quyidagi to`rtlik bilan amalga oshiriladi.

$<U, I=<X,Y>, A, Z>$,

Bu yerda *U* boshqarish tasviri; $I=<X,Y>$ tashqi muxit va ob’ekt xolati xakidagi axborat; A algoritm; *Z* boshqarish maqsadi.

15.5. Modellashtirilayotgan ob’ektlarni sinflari.

Modellashtirish masalasi moxiyati ob’ektni sifat va miqdori tomonlarini aks ettiruvchi model operatorini tuzish (yaratish) maqsadidan iboratdir. Bu masalani keltirilayotgan sxema yordamida shakillantirish va yechish mumkin. Tarixiy nuqtaiy nazaridan mavjud yechish usullari bir-biridan mustaqil ravishda ishlab chiqilib turli masalalarni yechimini topish bilan bog`liqdir. Bu usullarni vujudga keltirgan masalalar sinflari dinamik va statik ob’ektlar tushunchalari asosida amalaga oshirilishi mumkin.

Modellashtirish protsidurasiga jalb etilgan eng dastilabki va oddiy ob’ektlar sifatida determinsktik (stoxastik bo`lmagan) ob’ektlar olingan, ya’ni ob’ekt kirish va chiqishlarni bog`lovchi regulyar funksiyadir. Bunday holat modellashtirish nazariyasida dastlabki yondoshishni kelib chiqishiga olib keladi. Bu yondoshish matimatik tahlilda taxminiy funksiyalarni ko`p hadlar bilan almashtirish ko`rinishida ma’lum va o`zining boshlangich bosqichlarini P.L. Chebishev ishlaridan oladi. Bu yo`nalish funksiyalarni biror-bir funksiyalar tizmi bo`yicha taqsimlash (ko`pgina hollarda polinomlar tizmi bo`yicha) bilan bog`langan. Bu nazariyada ikkita yo`nalish mavjud: approksimaksiyalash nazariyasi va axborot nazariyasi.

Stoxastik ob’ektlarni identifikasiyalash uchun esa matematik statistika usullaridan foydalaniladi. Bu yo`nalishda ikkita nazariya bor. Baholash nazariyasi va tajribalarni rejalashtirish.

Baxolash nazariyasini asosiy masalasi bo`lib, tasodifiy ta’svirlar va xalaqitlar mavjud bo`lganda kuzatishlar bo`yicha ob’ektni noma’lum parametrlarini baholashdan iborat.

Tajribalarni rejalashtirish nazariyasida stoxastik ob’ektlarni noma’lum parametrlarni aniklash maqsadida aktiv va passiv tajribalarni o`tkazish jarayonlari ko`riladi.

Dinamik ob’ektlarni modellashtirishga bo`lgan uchinchi yondoshish avtomatik boshqarish tizimlari nazariyasini usullari hisoblanadi. Bu nazariyada dinamik ob’ektlarni normal tabiiy ishlatish rejimida (ya’ni xalaqitlar va tasodifiy ta’svirlar ostida) maxsus modellashtirish usullari ishlab chiqarilgan.

15.6.Modellashtirishning asosiy bosqichlari

Modellashtirish uchun modelni yaratish va uni tadbiq etish zarur. Modelni yaratishdan avval modellashtirish maqsadi aniqlanadi. Tadbiq etilgandan so`ng modellashtirish natijalari tahlil etiladi. Modelni yaratish bir necha bosqichlardan iborat. Bu ob’ektni va tashqi ta’sirlarni o`rgatishdan boshlanadi va matematik modelni tanlash yoki ishlab chiqish bilan yoki hisoblash sistemalari uchun dastur ishlab chiqish bilan tugaydi.

Ba’zi bir matematik modellar hisoblash texnikasi vositalarisiz tadbiq etishlishi mumkin, ammo kelgusida tadbiq etilgan modellar albatta hisoblash texnikasi yordamida tadbiq etiladi. Shunday qilib hisoblash sistemalari yordamida o`tkazilgan modellashtirish jarayonini quyidagi kattalashtirilgan bosqichlaradan iborat: maqsadni shakllantirish, ob'ektni organish, tavsifli modellashtirish, matematik modellashtirish, masalani yechimini topish usulini tanlash yoki ishlab chiqish, EHM uchun dastur tayyorlash, EHMda dasturni o`tkazish, olingan modellashtirish natijalarini tahlil qilish va yechim qabul qilish.

Ob'ektlarni (jarayonlarni, hodisalarni) modellashtirish bosqichlari:

1. Maqsadni shakillantirish. Har qanday modellashtirish masalasi, muammosi asosida sub'ekt (inson) ob'ektdan nimani kutadi, nimaga intilish zarur kabi axborot yotadi, ya'ni uning maqsadi $\{Z\}$ nimadan iborat. Aynan mana shu axborot ob'ektni aniqlaydi. Bunday paradokslar soda yechiladi. Sub'ekt o`zining maqsadini shakillantirayotganda ob'ekt hakida har doim dastlabki tasavvurlarga ega bo`ladi. Bu tasavvurlar taxminiy bo`lib, modellashtirish maqsadini samarali shakillantirish uchun yetarli bo`lgan ob'ekt xususiyatlarini aks ettiradi. Odatda modellashtirish masalalarda maqsad funksiya ko`rinishida berilgan biror bir kriteriyni maksimallashtirish yoki minimallashtirish yo`li bilan erishiladi.

2. Ob'ektni o`rganish. Bunda sodir bo`layotgan jarayon o`rganiladi, ob'ektni ko`rib turgan tashqi muxit chegarasi aniqlanadi. Bundan tashqari bu bosqichda tadqiq etilayotgan ob'ektni hamma kirish va chiqish parametrlari tadqiq etiladi va ularni modellashtirish maqsadiga erishishga bo`lgan ta'siri u\o`rganiladi.

3. Tavsifli modellashtirish. Ob'ektni kirish va chiqish parametrlarini o`zaro boglanishini belgilash va so`z bilan yozish.

4. Matematik modellashtirish. Tavsifli modelni matematik formal tilga o`girish. Maqsadni biror bir maqsad funksiya deb aytiluvchi funksiya ko`rinishida yozish. Ob'ektni harakati ma'lum bir ifodalar yordamida yoziladi. Bu ifodalar ob'ektni kirish va chiqish parametlari orasidagi bog`lanishni ifodalaydi. Bu bosqichda ob'ektni murakkabligiga qarab matematik xarakterga xos bo`lgan qiyinchiliklar mavjud bo`ladi. Bunday masalalarga matematik dasturlash, chiziqli algebra, differensial va integral hisoblash va boshqalar bo`lishi mumkin.

5. Masalani yechish usulini tanlash yoki yaratish. Bu bosqichda vujudga kelgan matematik masala uchun mos keluvchi usul

tanlanadi. Usul tanlashda asosan usulning murakkabligiga va talab etuvchi hisoblash resurslariga e’tibor berish mumkin. Agar mavjud bo`lgan usullar talabiga javob bermasa yangi usul ishlab chikarishga tugri keladi. Ko`pgina xollarda xisoblash xarakteristikalari bo`yicha samarali bo`lgan ishlab chikiladi.

6.Masalani EHM da yechish uchun dastur tanlash yoki ishlab chiqish.

Bu bosqichda tanlab olingan usulni EHMdan o`tkazish uchun mos dastur tanlanadi. Agar bunday dastur mavjud bo`lmasa yangi dastur yaratish zarur.

7.EHMda masalani yechish

Masalani yechish uchun zarur axborot EHM xotirasiga dastur bilan kiritiladi. Mos dastur yordamida maqsadli axborotni qayta ishlanadi va qulay ko`rinishda yechish natijalari olinadi.

8. Olingan yechimni tahlil qilish.

Yechim tahlili ikki ko`rinishda bo`ladi: formal (matematik) ya’ni bunda tuzilgan matematik modeldan olingan yechimni mosligi va mazmuniy (iqtisodiy, texnologik va h.k.) ya’ni olingan natijalarni modellashtirilgan ob’ektga mosligini tekshirish. Tahlil kilish natijasida modelga o`zgartirishlar yoki aniqliklar kiritilishi mumkin va ko`rilgan jarayon qaytadan takrorlanishi mumkin. Tanlangan ko`rsatkich bo`yicha ob’ekt faoliyatini yetarli aniqlikda ifodalasa model yaratilgan va tugallangan hisobanadi. Ana shundan so`ng modelni turli hisoblashlarda foydalanish mumkin.

Nazorat savollari.

1. Modellashtirish mohiyati nimadan iborat?
2. Bilish jarayonlarida modellashtirishni o`rni va ahamiyati.
3. Tizmlarni tatqiq etishda modellarni qanday turlaridan foydalaniladi?
4. Modellarni sinflari.
5. Modelning tarifi.
6. Matematik model tarifi.
7. Boshqarish masalalarida modellashtirishni o`rni.
8. Modellashtirilayotgan ob’ektlar sinflari.
9. Ob’ektlarni (jarayonlarni, hodisalarni) modellashtirish bosqichlari.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Jo‘raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-2-tom. T.: «O‘zbekiston». 1995, 1999 y.

2. Farmonov Sh. va boshq. “Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika”. T.: “Turon-Bo‘ston”, 2012 y.

3. Tojiev Sh.I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. T.: «O‘zbekiston». 2002 y.

4. O‘rinboeva L.O‘. Matematika. O‘quv qo‘llanma. T. : “Innovatsiya-Ziyo”, 2020. 312 b.

5. Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada, 2011.

6. Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, Printed in the United States of America, 2010.

Qo‘shimcha adabiyotlar

1. Mirziyoev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent, “O‘zbekiston”, 2017 yil, 488 bet.

2. Mirziyoev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat’iy tartib intizom va shaxsiy javobgarlik - har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo‘lishi kerak. Toshkent, “O‘zbekiston”, 2017 yil, 104 bet.

3. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. ”Matematika” – Gumanitar yo‘nalishlar talabalari uchun o‘quv qo‘llanma. T.: ”Jahon-Print” 2007y.

4. Azlarov T.A., Mansurov X. “Matematik analiz” 1-qism. T.: “O‘qituvchi”, 1994y.

5. Baxvalov S.B. va boshq. “Analitik geometriyadan mashqlar to‘plami”. T.: Universitet, 2006 y.

6. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (High School) SQA Advanced Higher Mathematics. Unit 1. This edition published in 2009 by Heriot-Watt University SCHOLAR. Copyright 2009 Heriot-Watt University.

7. College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University

8. Introduction to Calculus, Volume I,II by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, Copyright 2012, All rights reserved Paper or electronic copies for noncommercial use may be made freely without explicit.

Axborot manbaalari

9. www.tdpu.uz
10. www.pedagog.uz
11. www.edu.uz
12. www.nadlib.uz (A.Navoiy nomidagi O‘z.MK)
13. http://ziyonet.uz — ”Ziyonet” axborot-ta’lim resurslari portali

MUNDARIJA

T.H.RASULOV
A.SH.RASHIDOV

OLIY MATEMATIKA
(o‘quv qo‘llanma)

Muharrir: *A. Qalandarov*
Texnik muharrir: *G. Samiyeva*
Musahhih: *Sh. Qahhorov*
Sahifalovchi: *M. Bafoyeva*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 06.09.2022. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog`ozi. Bosma tobog`i 11,7. Adadi 100. Buyurtma №442.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45