

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

12/2025

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz

12/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2025, № 12, dekabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoira Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, dotsent

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, professor

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
MATEMATIKA *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
Abdullayev S.A.	3x3 matrisaning sonli tasviri	4
Abdullayev S.A.	Blok operatorli matrisalarning sonli obrazlari	9
Muxtorova Sh.N.	Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning ta’rifi va talqini	13
Shog’dorova Q.S., Omonov O.I.	Qatorlarning yaqinlashishini tahlil qilishda d’alamber alomati va unga o’xshash alomatlar	18
Utayev A.T.	Ikki o’lchamli simpleksda aniqlangan V – tartibli bistoxastik operatorlar oilasi dinamikasi	26
Мамедов К.А., Жуманиязов Н., Азаматов А.Ш.	Интегрирование уравнения мкдф с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности, в случае простых собственных значений	32
Арзикулов З.О., Абдужабборов А.А.	Автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с четырьмя переменными	43
Жабборов Н.М., Хусенов Б.Э., Бобохонов Ш.С.	Автоморфизмы и лемниската	55
Бойназаров А.Н.	Решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, с квадратом оператора бесселя	64
Сулаймонов Ф.У., Эшдавлатов З.З., Холбоева Х.Ф.	Численное решение задачи аномальной переноса вещества в трещиновато-пористой среде	71
Omonova A.N.	Initial-boundary value problem for a degenerate second order equation with fractional caputo derivative and riemann-liouville integral	77
Axmedov S.A., Ablazova K.S., Dexqonboyeva S.A.	Jarayonlar stabilligini nazorat qilishning uch komponentli tizimi	86
Baratov B.S.	On dynamics of a separable cubic stochastic operators in S^2	91
Elmuradova H.B.	An inverse problem of determining the kernel pseudo-integro-differential equation	97
G’iyosova F.U.	Kasr tartibli to’lqin tarqalish tenglamasi uchun aralash masala	110
Akilov J.A., Djabbarov M.S., G’aybulov Y.Sh.	Neft quduqlarini shtangli nasoslar yordamida ishlatishda Gidrodinamik bosim	115
Ishankulov T., Umarov S.S.	Laplas tenglamasi uchun koshi masalasining karleman funksiyasi	124
Kuldoshova M.J.	The controlling problem for the heat exchange equation in an inhomogenous rod	129
Muradov R.S.	Noinformativ kuzatuvlar statistik modeli uchun kramér–rao bahosining yangi isboti	134
Sulaymonov I.A.	Fractional parabolic systems of vector order with riemann-liouville fractional derivative	139

Xolliyev F.B.	Fraktal tuzilishga ega bo'lgan g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishi masalasidagi hosila tartibini tiklash	146
Даминова М.С., Шодиева С.Р., Абдижабборов М.А.	Нелокальная задача с интегральным условием склейки для нагруженного уравнения смешанного типа с дробной производной Капуто	153
Зокиров М.С.	Численное моделирование процессов плоскорадиальной фильтрации с дробными производными	160
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Abdug'aniyev Y.A.	Yevropiy bilan legirlangan kremniyda magnitlanishning gisterezisi	167
Axmedova U.F., Ro'ziyev T.R.	Erkin tebranishlar tushunchasi va fizik mohiyati	171
Axmedjanov F.R., Boltabaev A.F., Elboyeva M.I.	Camoo ₄ kristallarida akustik to'lqinlarda kollinear yorug'lik difraksiyasi	176
Eshbo'riyev R., Ubaydullayeva M.A., Fayzullayeva M.L., Abdusamadova D.I.	Uran va plutoniy izotoplarini boyitilishi va ularni yadro reaktorlarida qo'llanilishi	180
Axmedjanov F.R., Maharov N.M., Avdievich V.N.	Kubik simmetriyali kristallarining akustik xossalari anizotropiyasi va relaksatsiya vaqtlari	185
Mavlonov G.H., Uralbaev Kh., Tachilin S.A., Isakov B.O., Ibodullaev Sh.N.	Thermal stability of electrical parameters of silicon with nanoclusters of manganese atoms	191
Qo'chqorova F.T., Mannonova M.S., Kengboyev S.A., Dusanova G.M.	Dinamikaning asosiy masalalari: moddiy nuqtaning dinamik harakat qonunlarini aniqlash usullari	197
Qodirov M.Q., Tuxtayev U.U., Muxammedov A.K., Ulasheva M.A., Nabiyev A.A.	Artezian quduq suvi tarkibidagi tabiiy (²²⁶ ra, ²³⁸ u, ²³² th, ⁴⁰ k) va texnogen ¹³⁷ cs izotoplarining miqdori	202
Axmedov A.A., Tursunov A.R.	Datchiklarning asosiy va maxsus tavsiflari	208
Мадалиев М.Э., Носирова Н.А., Мухаммадёкубов Х.Э.	Численное моделирование трёхмерного течения за обратной ступенькой с использованием les-модели	215
Илиев Х.М., Мухаммаджонов У.Х.	Цифровое моделирование процесса многоатомной диффузии в кремнии методом функционала плотности	224
Шоабдурахимова М.М.	Особенности неустойчивостей тока в компенсированном кремнии	228
Эргашева М.А., Кучкарова М.О.	Определение микроскопических параметров поверхности лазерным сканированием	233
Djuraev D.R., Sharipov M.Z.,	Hajmiy ferromagnit kristallardagi bir o'lchamli mikromagnit tizimlarning domen tuzilishi	237

Fayziyev Sh.Sh., To‘xtayeva Sh.Q., Mo‘minov Sh.H.		
Ибрагимов Ж.К., Эшбекова С.О., Абдуразаков М., Ашуров Н.Р.	Исследование термодинамического поведения композитов с изотактическим полипропиленом	243
Izzatillayev X.X., Quchqarov B.H.	Gaas/gainas/gainp/algaas geterostrukturalarning modellashtirish natijalari	252
Soatov A.K., Turayev A.R.	Pressure-induced phase transitions and memristive behavior in mn- and co-doped zno oxide structures	258
Ergasheva A.A., Xalilov U.B.	Irmof-8 ning nukleatsiyaoldi yig‘ilish mexanizmi: Reaxff md asosidagi atomistik tahlil	263
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Хасанов И.Х., Остонова Н.Х.	Пути повышения продуктивности пастбищ бухарской области	269
INFORMATIKA *** INFORMATICS *** ИНФОРМАТИКА		
Toshpo‘latova Sh.B.	SQLda ma’lumotlarni filtrlashda funksiyalardan foydalanish samaradorligi	273
Xo‘jayev S.S.	“Btec” xalqaro dasturi qanday samara beradi?	278
Tursunov A.R., Axmedov A.A.	O‘lchash qurilmalarida neyron tarmoqlardan foydalanish	281
Turdimatov M.M., Aliyev M.G‘.	Tashkilotlarda biznes uzluksizligini boshqarish tizimini modellashtirish usullari	287
Kabulov A.V., O‘rinov N.T.	Universitet hisoblash tarmog‘i zaiflik ko‘rsatkichlarini modellashtirishga asoslangan axborot xavfsizligi tizimi	292
TEXNIKA *** TECHNIQUIS *** ТЕХНИКА		
Hamrayev J.H., Farmonov L.B.	Gtl korxonalari bug‘ qozonlarida bug‘ tayyorlash jarayonlarini mukammal boshqarish tizimlarini ishlab chiqish	302

3x3 MATRISANING SONLI TASVIRI

Abdullayev Sarvar Anvar o'g'li,

Buxoro davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada 3×3 o'lchamli o'z-o'ziga qo'shma sonli matrisaning sonli tasviri, uning xos qiymatlari va sonli tasvir bilan spektr orasidagi bog'liqlik o'rganilgan. Matritsaning sonli tasviri uchun umumiy teoremlar isbotlangan hamda ayrim maxsus holatlar uchun lemma va misollar orqali aniq ifodalar keltirilgan. Natijalar orqali sonli matritsalar spektrining joylashuv oralig'i va ularning sonli tasviri orasidagi uzviylik tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: sonli tasvir, xos qiymat, spektr, chiziqli operator, o'z-o'ziga qo'shma matrisa, Gilbert fazosi, rezolventa.

NUMERICAL RANGE OF A 3×3 MATRIX

Abstract. Ushbu maqolada 3×3 o'lchamli o'z-o'ziga qo'shma sonli matrisaning sonli tasviri, uning xos qiymatlari va sonli tasvir bilan spektr orasidagi bog'liqlik o'rganilgan. Matritsaning sonli tasviri uchun umumiy teoremlar isbotlangan hamda ayrim maxsus holatlar uchun lemma va misollar orqali aniq ifodalar keltirilgan. Natijalar orqali sonli matritsalar spektrining joylashuv oralig'i va ularning sonli tasviri orasidagi uzviylik tahlil qilingan.

Keywords: sonli tasvir, xos qiymat, spektr, chiziqli operator, o'z-o'ziga qo'shma matrisa, Gilbert fazosi, rezolventa.

ЧИСЛОВОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ МАТРИЦЫ РАЗМЕРА 3×3

Аннотация. В данной статье исследуется числовое изображение самосопряжённой числовой матрицы размера 3×3 , её собственные значения и взаимосвязь между спектром и числовым образом. Приведены и доказаны основные теоремы и леммы, а также рассмотрены конкретные примеры для специальных случаев. Полученные результаты позволяют определить взаимосвязь между спектром матрицы и интервалом её числового образа.

Ключевые слова: числовое изображение, собственные значения, спектр, линейный оператор, самосопряжённая матрица, гильбертово пространство, резольвента.

H Gilbert fazosi va $A: H \rightarrow H$ aniqlanish sohasi $D(A) \subset H$ bo'lgan chiziqli operator bo'lsin.

Ushbu

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

to'plamga A operatorning sonli tasviri deyiladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $W(A)$ to'plam kompleks sonlar tekisligining qismi bo'ladi va $W(A)$ to'plamning geometrik xossalari A operator haqida bir qancha ma'lumotlarni tavsiflaydi.

Gilbert fazosidagi chiziqli operatorning sonli tasvirni o'rganish bunday operatorlar spektrining joylashuv o'rnini o'rganishdagi muhim usullardan biri hisoblanadi.

Matrisaning sonli tasviri uning barcha xos qiymatlarini o'z ichiga oladi.

Faraz qilaylik, C kompleks sonlar to'plami bo'lsin. C^3 fazoda ushbu

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ko'rinishidagi sonli matrisani qaraymiz, bu yerda a_{ii} , $i = 1, 2, 3$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar, a_{ij} , $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ lar esa ixtiyoriy kompleks sonlar.

M matrisaning elementlariga qo'yilgan bunday shartlarda bu matrisa C^3 dagi chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma bo'lgan operatorni ifodalaydi. Shu sababli uning barcha xos qiymatlari haqiqiydir.

1-lemma. M matrisaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sonlari M matrisaning xos qiymatlaridir.

Isbot. Faraz qilaylik, M matrisa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ xos qiymatlarga ega bo'lsin. M matrisaning $\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ xos qiymatiga mos keluvchi birlik xos vektorlarni X bilan, $\max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ xos qiymatiga mos keluvchi birlik xos vektorlarni Y bilan belgilaymiz, u holda

$$(MX, X) = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad (MY, Y) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1 \text{ munosabatlar o'rinlidir.}$$

Ko'rinib turibdiki, (Mz, z) kvadratik formaning $\|z\| = 1$ birlik sfera bo'yicha eng kichik qiymati X da, eng katta qiymati esa Y erishiladi. Demak,

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

1-lemma isbot bo'ldi.

2-lemma. Agar $a_{12} = a_{23} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \max\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}]$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, $a_{12} = a_{23} = 0$ bo'lsin, u holda

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

M matrisaning xos qiymatlari

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0$$

xarakteristik tenglamaning nollari bo'ladi. Bundan esa M matrisaning xos qiymatlari $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \lambda_3 = a_{33}$ ekanligi kelib chiqadi. 1-lemmaga ko'ra,

$$W(M) = [\min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}]$$

3-lemma. Agar $a_{12} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{11}, \lambda_-\}, \max\{a_{11}, \lambda_+\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}$$

Isbot. Faraz qilaylik, $a_{12} = 0$ bo'lsin, u holda

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & \bar{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

M matrisaning xarakteristik tenglamasi esa

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - |a_{23}|^2(a_{11} - \lambda) = 0 \quad (1)$$

bo'ladi.

$$(a_{11} - \lambda)((a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - |a_{23}|^2) = 0$$

Bizga ma'lumki, xarakteristik tenglamaning yechimlari M matrisaning xos qiymatlaridir. (1)-tenglamani yechish $a_{11} - \lambda = 0$ va $\lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda - |a_{23}|^2 = 0$ tenglamani yechishga keladi.

Bundan esa,

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}.$$

Quyidagicha

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{33})^2 + 4|a_{23}|^2}}{2}$$

belgilash kiritaylik. 1-lemmaga ko'ra,

$$W(M) = [\min\{a_{11}, \lambda_-\}, \max\{a_{11}, \lambda_+\}]$$

4-lemma. Agar $a_{23} = 0$ bo'lsa, u holda

$$W(M) = [\min\{a_{33}, \mu_-\}, \max\{a_{33}, \mu_+\}]$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda

$$\mu_{\pm} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2}}{2}.$$

1-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

matrisaning sonli tasvirini toping.

Bu matrisa uchun

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{12} = i, \quad a_{23} = 1+i, \quad |a_{12}|^2 = 1, \quad |a_{23}|^2 = 2$$

p_0, q_0 va φ_0 qiymatlarni topish formulalariga asosan

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{11} - a_{33})^2 + (a_{22} - a_{33})^2\} - |a_{23}|^2 - |a_{12}|^2 =$$

$$-\frac{1}{6}\{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2\} - 1 - 2 = -3$$

$$q_0 = a_{33}|a_{12}|^2 + a_{11}|a_{23}|^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - \frac{2}{27}(a_{11} + a_{22} + a_{33})^3 +$$

$$+ \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - |a_{23}|^2 - |a_{12}|^2)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) =$$

$$= \frac{1}{3}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 - 2)(1 + 1 + 1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-\frac{2}{27} \cdot 27 = -2 + 2 = 0$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3q_0}{2p_0}\sqrt{-\frac{3}{p_0}}\right) = \arccos\left(-\frac{3 \cdot 0}{2 \cdot (-3)}\sqrt{-\frac{3}{(-3)}}\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

ga teng.

U holda

$$\gamma_k = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 2\sqrt{-\frac{p_0}{3}}\cos\frac{\varphi_0 + 2(k-1)\pi}{3} =$$

$$= 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3}, \text{ bu yerdak } = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{6} = 1 + \sqrt{3}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_2 = 1 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = 1 + 2\cos\frac{5\pi}{6} = 1 - \sqrt{3}$$

1-teoremaga ko'ra matrisaning sonli tasviri $W(M) = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$ bo'ladi.

2-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 \\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i & 2 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

matrisani sonli tasvirini topaylik.

Bizga ma'lumki,

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = 2, \quad a_{33} = 0, \quad a_{12} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad a_{23} = -i, \quad |a_{12}|^2 = 4,$$

$$|a_{23}|^2 = 1$$

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(1-2)^2 + (1-0)^2 + (2-0)^2\} - 4 - 1 = -6$$

$$q_0 = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 - 1)(1 + 2 + 0) - \frac{2}{27} \cdot 27 - 1 \cdot 2 \cdot 0 +$$

$$+ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -3 - 2 + 1 = -4$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3 \cdot (-4)}{2 \cdot (-6)} \sqrt{-\frac{3}{(-6)}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

U holda,

$$\gamma_k = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2(k-1)\pi}{3}, \quad k = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1 + 2 = 3 \text{ ga}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_2 = 1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} = 1 - \sqrt{2\sqrt{3} + 4} \text{ ga teng.}$$

1-teoremaga ko'ra, matrisaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = \left[1 - \sqrt{2\sqrt{3} + 4}; 3\right]$$

tenglik o'rinalidir.

3-Misol.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 3 \end{pmatrix}$$

matrisaning sonli tasvirini toping.

Bizga ma'lumki,

$$a_{11} = 2, a_{22} = 1, a_{33} = 3, a_{12} = i, a_{23} = -i, |a_{12}|^2 = 1, |a_{23}|^2 = 1$$

Sodda hisoblashlarni bajarib, p_0 , q_0 va φ_0 ning qiymatini topamiz:

$$p_0 = -\frac{1}{6}\{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2\} - 1 - 1 = -3$$

$$q_0 = \frac{1}{3}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 - 1 - 1)(2 + 1 + 3) - \frac{2}{27} \cdot 27 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5 - 22 + 18 = 1$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot (-3)} \sqrt{-\frac{3}{(-3)}}\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

U holda,

$$\gamma_k = 2 + 2\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2(k-1)\pi}{3}, \quad k = 1, 2$$

$$k = 1 \text{ da } \gamma_1 = 2 + 2\cos\frac{\pi}{9}$$

$$k = 2 \text{ da } \gamma_2 = 2 + 2\cos\frac{7\pi}{9}$$

1-teoremaga ko'ra, matrisaning sonli tasviri uchun ushbu

$$W(M) = \left[2 + 2\cos\frac{\pi}{9}, 2 + 2\cos\frac{7\pi}{9}\right]$$

tenglik o'rinalidir.

Ushbu maqolada 3×3 o'lchamli o'z-o'ziga qo'shma sonli matritsaning sonli tasviri va uning xos qiymatlari orasidagi bog'liqlik tahlil qilindi. Matritsaning sonli tasviri orqali xos qiymatlar to'plamining joylashuv oralig'i aniqlanib, bu holat uchun umumiy teorema va lemmalar isbotlandi. Keltirilgan misollar asosida sonli tasvirning spektr bilan bevosita bog'liqligi amaliy tarzda ko'rsatildi. Olingan natijalar chiziqli operatorlar va matritsalar spektral nazariyasini yanada chuqurroq o'rganishda hamda funksional analiz masalalarida qo'llash imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. Т.А.Саримсоков. Функционал анализ курси. Тошкент, ўқитувчи 1980, 9-73-bet

2. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. *Funksional analiz*. Toshkent-Samarqand 2009, 110-367-bet.
3. R. A. Horn, Ch. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press. London, New York, New Rochelle, 1990.
4. R. Bhatia. *Matrix analysis*. Springer-Verlag, New York, 1996.
5. C. Tretter. *Spectral theory of block operator matrices and applications*. – London:Imperial College Press, 2008.
6. T. H. Rasulov, C. Tretter. *Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices*. Preprint 2011, Bern, pp. 1-36.
7. М. Руд, Б. Саймон. *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*. М.: Мир. 1982.
8. Т. Като. *Теория возмущения линейных операторов*. Изд-во «Мир», Москва, 1972.
9. T. H. Rasulov, R. Q. G'aybullayev. 3x3 sonli matrisa xos qiymatlarining monotonligi haqida. *Buxoro davlat universiteti ilmiy axborotnomasi*, 2012 yil, № 4 (48), 27-31 betlar.
10. T. H. Rasulov, R. Q. G'aybullayev. 3x3 sonli matrisa xos qiymatlarining ba'zi xossalari. "Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2013", Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, 15--16 aprel 2013, Namangan, 151-154 betlar.
11. Т. Х. Расулов, Р. К. Гайбуллаев. О монотонности собственных значений числовой матрицы 3x3. Тезисы 44-й Всероссийской молодежной школа-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2013, С. 283-284.
12. Uzoqboyev, A., Abdullayev, S., & Abriyev, N. (2023). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. *Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук*, 3(1), 92-100.
13. Barotov, A. S., & Abdullayev, S. A. (2022, May). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. In *International scientific and practical conference on "Modern problems of applied mathematics and information technologies"*.
14. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Ko'phad rezultatining tenglamalar sistemasini yechishga tadbirlari. *Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali*, 4(4).
15. Saxayev M. "Elementar matematika masalalari to'plami" I.II qismlar."O'qituvchi" Toshkent 1970.1972. 220-236 bet.
16. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning integralini. *Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali*, 4(4).

BLOK OPERATORLI MATRISALARNING SONLI OBRAZLARI

Abdullayev Sarvar Anvar o‘g‘li,

Buxoro davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolada blok operatorli matrisalarning sonli, kvadratik va kubik sonli obrazlari tushunchalari hamda ularning asosiy xossalari tahlil qilinadi. Chiziqli chegaralangan operatorlarning blok shaklidagi tasviri orqali ularning spektral xususiyatlari, sonli obrazlar to‘plamining chegaralanganligi va yopiq bo‘lishi, shuningdek, operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shmalik holatlarida yuzaga keluvchi aloqalar o‘rganilgan. Tadqiqot natijalari funksional analiz va operatorlar nazariyasidagi ayrim muammolarni yechishda qo‘llanilishi mumkin.

Kalit so‘zlar: blok operatorli matrisa, chiziqli operator, sonli obraz, kvadratik sonli obraz, kubik sonli obraz, Gilbert fazosi, xos qiymat, spektr.

NUMERICAL RANGES OF BLOCK OPERATOR MATRICES

Abstract. This article examines the numerical, quadratic, and cubic ranges of block operator matrices and their fundamental properties. Using the block representation of bounded linear operators, the study explores spectral characteristics, the boundedness and closedness of numerical ranges, and their interrelations in the case of self-adjoint operators. The obtained results can be applied to solving certain problems in functional analysis and operator theory.

Keywords: block operator matrix, linear operator, numerical range, quadratic numerical range, cubic numerical range, Hilbert space, eigenvalue, spectrum.

ЧИСЛОВЫЕ ОБРАЗЫ БЛОЧНО-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Аннотация. В данной статье рассматриваются числовые, квадратные и кубические образы блочно-операторных матриц и их основные свойства. С помощью блочного представления линейных ограниченных операторов исследуются спектральные характеристики, ограниченность и замкнутость множеств числовых образов, а также их взаимосвязь в случае самосопряжённых операторов. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач функционального анализа и теории операторов.

Ключевые слова: блочно-операторная матрица, линейный оператор, числовой образ, квадратный числовой образ, кубический числовой образ, пространство Гильберта, собственные значения, спектр.

Faraz qilaylik, H_1 va H_2 lar Gilbert fazolari bo‘lib, H orqali ularning to‘g‘ri yig‘indisini belgilaymiz, $L(H)$ esa H ni H ga o‘tkazuvchi chiziqli chegaralangan (uzluksiz) operatorlar fazosi bo‘lsin. Bizga ma‘lumki, har qanday $A \in L(H)$ operator

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

blok operatorli matrisa ko‘rinishda tasvirlanadi, bu yerda

$A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$, $i, j = 1, 2$ elementlar chiziqli chegaralangan operatorlar. Agar A operator uchun $A_{11} = A_{11}^*$, $A_{11} = A_{22}^*$, $A_{21} = A_{21}^*$, tengliklar bajarilsa, u holda A o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi, ya‘ni $A^* = A$. $(\cdot, \cdot)_i$ va $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$ lar orqali H_i fazodagi mos ravishda skalyar ko‘paytma va normani belgilaymiz.

$f = (f_1, f_2) \in H$, $\|f_i\|_i = 1$, $i = 1, 2$ elementlar uchun

$$A_f = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}$$

A_f matrisaning barcha xos qiymatlari to‘plamiga $A \in L(H)$ blok operatorli matrisaning (1)-ko‘rinishiga mos keluvchi kvadratik sonli obrazi deyiladi va $W^2(A)$ kabi belgilanadi, ya‘ni

$$W^2(A) = \bigcup_{\substack{\|f_i\| \\ i=1,2}} \sigma_p(A_f)$$

bu yerda, $\sigma_p(A_f)$ orqali A_f ning nuqtali spektri belgilangan. $A_f - 2 \times 2$ sonli matrisa bo'lganligi uchun $\sigma_p(A_f)$ to'plam A_f matrisaning xos qiymatlaridan iborat bo'ladi.

H Gilbert fazosining turli yoyilmalariga turli kvadratik sonli obrazlar to'g'ri keladi.

Masalan, ushbu

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix}$$

sonli matrisaning $C^2 \oplus C^2$ va $C^3 \oplus C^1$ yoyilmalariga mos kvadratik sonli obrazlar turlicha bo'ladi.

Ba'zi hollarda kvadratik sonli obrazning quyidagi ekvivalent ta'rifidan foydalanish qulaydir, bunda f_1 va f_2 lar nolmas bo'lib, normasi 1 ga teng bo'lishi shart emas.

$f_i \in H_i \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ element uchun

$$\hat{A}_f = \left(\frac{(A_{ij}f_j, f_i)_i}{\|f_i\|_i \cdot \|f_j\|_j} \right)_{i,j=2}^2$$

matrisani qaraymiz va

$$\Delta(f_1, f_2; \lambda) = \det \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 - \lambda(f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 - \lambda(f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}$$

bo'lsin.

U holda

$$W^2(A) = \bigcup_{f_i \in H_i \setminus \{0\}, i=1,2} \sigma_p(\hat{A}_f) = \{\lambda \in C: \exists f_i \in H_i \setminus \{0\}, \quad i = 1, 2,\}$$

munosabat o'rinli.

Chiziqli operatorning kvadratik sonli obrazi hamisha uning sonli obrazida saqlanadi:

$$W^2(A) \subset W(A).$$

Agar A operator yuqori yoki quyi uchburchak ko'rinishiga ega bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ yoki } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, u holda}$$

$W^2(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22})$ tenglik o'rinlidir. Chiziqli chegaralangan blok operatorli matrisaning kvadratik sonli obrazi C kompleks sonlar to'plamining chegaralangan qism to'plami bo'ladi:

$$W^2(A) \subset \{\lambda \in C: |\lambda| \leq \|A\|\}$$

Agar $\dim H < \infty$ bo'lsa, u holda $W^2(A)$ yopiq to'plam bo'ladi. Sonli obrazdan farqli ravishda kvadratik sonli obraz umuman olganda qavariq to'plam bo'lmasligi ham mumkin, bu to'plam ko'pi bilan ikkita komponentdan iborat bo'lishi mumkin.

Agar $a, b, c, d \in C$ sonlar orqali aniqlangan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sonli matrisada $a, d \in R$ va $c = \bar{b}$ bo'lsa, u holda uning xos qiymatlari

$$\lambda_1 = \max\{a, d\} + |b| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2|b|}{|a-b|} \right);$$

$$\lambda_2 = \min\{a, d\} - |b| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{2|b|}{|a-b|} \right).$$

ko'rinishida tasvirlanadi.

$f_i \in H_i \setminus \{0\}$ element uchun

$$dis_A(f_1, f_2) = \left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} - \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right)^2 + 4 \frac{(A_{11}f_1, f_1)_1 \cdot (A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_1\|_1^2 \cdot \|f_2\|_2^2}$$

belgilashni kiritamiz. Agar $dis_A(f_1, f_2) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\lambda_{\pm} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} + \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(A_{11}f_1, f_1)_1}{\|f_1\|_1^2} - \frac{(A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_2\|_2^2} \right)^2 + 4 \frac{(A_{11}f_1, f_1)_1 \cdot (A_{22}f_2, f_2)_2}{\|f_1\|_1^2 \cdot \|f_2\|_2^2}}$$

belgilashni kiritamiz. Agar o'z-o'ziga qo'shma bo'lsa, u holda $W^2(A) \subset R$ bo'ladi va

$$W^2(A) = \Lambda_-(A) \cup \Lambda_+(A)$$

tenglik o'rinaldir, bu yerda

$$\Lambda_{\pm}(A) = \left\{ \lambda_{\pm} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : f_i \in H_i \setminus \{0\}, i = 1, 2 \right\}$$

Shunday qilib, chiziqli chegaralangan blok operatorli matrisalarning kvadratik sonli obrazini o'rganishda sonli matrisaning xos qiymatlari muhim o'rin egallar ekan.

Endi chiziqli operatorning kubik sonli obrazini qaraymiz. Agar operatorning spektri uchta kesishmaydigan kesmalar birlashmasidan iborat bo'lsa, u holda bu operatorning sonli obrazi ham, kvadratik sonli obrazi ham spektri yetarlicha o'rganish imkonini bera olmaydi. Quyida biz kubik sonli diopozon va uning ba'zi xossalarga to'xtalamiz.

H_1, H_2 va H_3 lar Gilbert fazolari, H esa bu fazolarning to'g'ri yig'indisi, ya'ni

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$$

bo'lsin. U holda istalgan $A \in L(H)$ operator

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

ko'rinishidagi 3×3 blok operatorli matrisa kabi tasvirlanadi, bunda $A_{ij}: H_j \rightarrow H_i$,

$i, j = 1, 2, 3$ lar chiziqli chegaralangan operatorlar.

Sorqali H dagi birlik sferani belgilaymiz, ya'ni

$$S = \{f \in (f_1, f_2, f_3) \in H : \|f_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3\}$$

$f \in S$ element uchun ushbu

$$A = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1) & (A_{12}f_2, f_1) & (A_{13}f_3, f_1) \\ (A_{21}f_1, f_2) & (A_{22}f_2, f_2) & (A_{23}f_3, f_2) \\ (A_{31}f_1, f_3) & (A_{32}f_2, f_3) & (A_{33}f_3, f_3) \end{pmatrix}$$

3×3 matrisani qaraymiz.

U holda

$$W^3(A_f) = \bigcup_{f \in S} \sigma_p(A_f)$$

to'plamga $A_{3 \times 3}$ blok operatorli matrisaning (2) ko'rinishiga mos kubik sonli obrazi deyiladi.

Ma'lumki, har bir uchun

$$\sigma_p(A_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A_f - \lambda) = 0\}.$$

tenglik o'rinaldir. Shu sababli, $W^3(A)$ to'plam uchun quyidagi ekvivalent formula o'rinni:

$$W^3(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists f \in S, \quad \det(A_f - \lambda) = 0\}.$$

Chiziqli operatorning kubik sonli obrazi hamisha uning sonli obrazida yotadi, ya'ni

$$W^3(A) \subset W(A).$$

Agar A operator yuqori yoki quyi uchburchak ko'rinishda bo'lsa, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \text{ yoki } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, u holda $W^3(A)$ uchun

$$W^3(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22}) \cup W(A_{33})$$

tenglik o'rinlidir.

Chiziqli chegaralangan blok operatorli matrisaning kubik sonli obrazi C kompleks sonlar to'plamining chegaralangan qism to'plamidir, ya'ni

$$W^3(A) \subset \{\lambda \in C : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Agar $\dim H < \infty$ bo'lsa, u holda $W^3(A)$ yopiq to'plam bo'ladi. Kubik sonli obraz ko'pi bilan uchta komponentlardan iborat bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan shuni xulosa qilish mumkinki, 3×3 blok operatorli matrisa kubik sonli obrazini o'rganishda 3×3 sonli matrisa xos qiyatlari muhim o'rin egallaydi.

ADABIYOTLAR:

1. T.A.Саримсоков. Функционал анализ курси. Тошкент, ўқитувчи 1980, 9-73-bet
2. J.I.Abdullayev, R.N.G'anixo'jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz. Toshkent-Samarqand 2009, 110-367-bet.
3. R. A. Horn, Ch. R. Johnson. Matrix analysis. Cambridge University Press. London, New York, New Rochelle, 1990.
4. R. Bhatia. Matrix analysis. Springer-Verlag, New York, 1996.
5. C. Tretter. Spectral theory of block operator matrices and applications. – London: Imperial College Press, 2008.
6. T. H. Rasulov, C. Tretter. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices. Preprint 2011, Bern, pp. 1-36.
7. М. Руд, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.
8. Т. Като. Теория возмущения линейных операторов. Изд-во «Мир», Москва, 1972.
9. T. H. Rasulov, R. Q. G'aybullayev. 3×3 sonli matrisa xos qiymatlarining monotonligi haqida. Buxoro davlat universiteti ilmiy axborotnomasi, 2012 yil, № 4 (48), 27-31 betlar.
10. T. H. Rasulov, R. Q. G'aybullayev. 3×3 sonli matrisa xos qiymatlarining ba'zi xossalari. "Yosh matematiklarning yangi teoremlari-2013", Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari, 15--16 aprel 2013, Namangan, 151-154 betlar.
11. Т. Х. Расулов, Р. К. Гайбуллаев. О монотонности собственных значений числовой матрицы 3×3 . Тезисы 44-й Всероссийской молодежной школа-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 2013, С. 283-284.
12. Uzoqboyev, A., Abdullayev, S., & Abriyev, N. (2023). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. Евразийский журнал математической теории и компьютерных наук, 3(1), 92-100.
13. Barotov, A. S., & Abdullayev, S. A. (2022, May). Robototexnik mexanizmlarning maxsusliklarini izlashda matritsaviy usulning qo'llanishi. In International scientific and practical conference on "Modern problems of applied mathematics and information technologies.
14. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Ko'phad rezultatining tenglamalar sistemasini yechishga tadbiqlari. Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali, 4(4).
15. Saxayev M. "Elementar matematika masalalari to'plami" I.II qismlar. "O'qituvchi" Toshkent 1970.1972. 220-236 bet.
16. Anvar o'g'li, A. S. (2024). Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning integralini. Buxoro davlat pedagogika instituti jurnali, 4(4).

TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONNING TA'RIFI VA TALQINI

Muxtorova Shohida Negmat qizi,

Qarshi davlat texnika universiteti o'qituvchisi
muxtorovashohida1998@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning nazariy asoslari, ularning matematik ta'rifi hamda ehtimollik nuqtayi nazaridan talqini yoritilgan. Tarmoqlanuvchi jarayon — bu vaqt o'tishi bilan elementlarning ko'payishi yoki yo'qolishi ehtimoli orqali rivojlanadigan tasodifiy tizim sifatida qaraladi. Maqolada bunday jarayonlarning Markov xossasi, stasionarlik, o'sish tezligi va yo'qolish ehtimoli kabi asosiy xususiyatlari tahlil qilinadi. Shuningdek, Galton–Watson modeli misolida tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning amaliy talqini va uning populyatsiya dinamikasini modellashirishdagi ahamiyati ko'rsatib o'tilgan. Tadqiqot natijalari tarmoqlanuvchi jarayonlarning biologiya, demografiya, epidemiologiya va axborot tizimlaridagi qo'llanilishini nazariy jihatdan asoslashga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayon, ehtimollik modeli, Markov xossasi, Galton–Watson jarayoni, stasionarlik, populyatsiya dinamikasi.

DEFINITION AND INTERPRETATION OF THE BRANCHING RANDOM PROCESS

Abstract. This article examines the theoretical foundations of branching stochastic processes, providing their mathematical definition and probabilistic interpretation. A branching process is considered as a stochastic system that evolves over time through the probabilistic reproduction or extinction of its elements. The paper analyzes key properties such as the Markov property, stationarity, growth rate, and extinction probability. The Galton–Watson model is presented as an example to illustrate the practical interpretation of branching stochastic processes and their role in modeling population dynamics. The results of the study contribute to the theoretical justification of branching process applications in biology, demography, epidemiology, and information systems.

Keywords: branching stochastic process, probabilistic model, Markov property, Galton–Watson process, stationarity, population dynamics.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Аннотация. В данной статье рассматриваются теоретические основы ветвящихся случайных процессов, их математическое определение и вероятностная интерпретация. Ветвящийся процесс рассматривается как стохастическая система, которая развивается во времени за счёт вероятностного размножения или исчезновения элементов. Проанализированы основные свойства таких процессов, включая марковское свойство, стационарность, скорость роста и вероятность вырождения. В качестве примера приведена модель Гальтона–Уотсона, демонстрирующая практическое применение ветвящихся случайных процессов при моделировании динамики популяций. Результаты исследования способствуют теоретическому обоснованию применения ветвящихся процессов в биологии, демографии, эпидемиологии и информационных системах.

Ключевые слова: ветвящийся случайный процесс, вероятностная модель, марковское свойство, процесс Гальтона–Уотсона, стационарность, динамика популяции.

Bu maqolada biz bir turdagi zarrachalar bilan berilgan eng sodda tur Markov tarmoqlanuvchi jarayonlarini o'rganamiz. Vaqtga nisbatan bir jinsli Markov jarayonlarini $\square = \{1, 2, \dots\}$ holatlar fazosida qaraymiz. Markov jarayonining o'tish ehtimolligi $P_{ij}(t)$, $t \in T$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$P_{ij}(t) \geq 0 \quad (1)$$

barcha $i, j \in \square$ va $t \in T$ uchun (nomanfiylik sharti);

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1 \quad (2)$$

ixtiyoriy $i, j \in \square$ va $t \in T$ da (normalanganlik sharti);

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(t-u) \quad (3)$$

ixtiyoriy $i, j \in \square$ va $0 \leq u \leq t, u, t \in T$ (markovlik xossasi);

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{boshlang'ich shart})$$

(4).

Ta'rif 1.1.1. Agar $P_{ij}(t)$ o'tish ehtimolligi $P_{ij}(t)$ ning n -karrali taqsimot kompozitsiyasi

$$P_{ij}(t) = P_{1j}^{*i}(t) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_i = j} P_{1j_1}(t) P_{1j_2}(t) \dots P_{1j_i}(t) \quad (5)$$

(tarmoqlanish sharti)ga ega bo'lsa, Markov jarayoni $\square$ da tarmoqlanuvchi deyiladi, xususan, $i = 0$ da (1.1.5) shart $P_{0j}(t) = \delta_{0j}$ ni bildiradi [14].

T ning qism to'plamlari nomanfiy butun sonlar to'plami $\square_0 = \{0\} \cup \square$ yoki $t \in [0, \infty)$ bo'lishi mumkin. Birinchi holatda *diskret vaqtli*, ikkinchi holatda *uzluksiz vaqtli* tarmoqlanuvchi jarayonlar haqida gapiramiz.

$t \in [0, \infty)$ uzluksiz bo'lgan holatda odatda yana qo'shimcha

$$\lim_{t \uparrow 0} P_{ii}(t) = 1 \quad (6)$$

uzluksizlik sharti ishlatiladi. (6), (1) va (2) shartlardan birdaniga har bir i uchun barcha $j \neq i$ larda bir tekis

$$\lim_{t \downarrow 0} P_{ij}(t) = 0, \quad (7)$$

(3) shartdan esa barcha $P_{ii}(t)$ o'tish ehtimolliklarining $\forall t \geq 0$ da uzluksizligi kelib chiqadi.

(5) tarmoqlanish shartlari ko'rib chiqilayotgan tarmoqlanuvchi jarayonlar sinfini Markov jarayonlaridan ajratib turadi. Bunday tanlash ikki nuqtayi nazardan asoslanadi. Bir tomondan, tarmoqlanuvchi jarayonlar fizikada, kimyoda, biologiyada, texnikada, demografiyada va boshqalarda real hodisalarning ancha keng sinfini tavsiflaydi. Boshqa tomondan, juda qulay matematik apparat bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar tarmoqlanuvchi jarayonlarni chuqur o'rganish imkonini beradi. Tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasida ularning o'ziga xos muammoli bayonlari va ularni hal qilish usullari tabiiy ravishda ajralib turadi [3].

Kelgusida biz fizik va kimyoviy hodisalar bilan bog'liq bo'lgan tarmoqlanuvchi jarayonlarining haqiqiy mazmunini aks ettiruvchi vizual terminologiyaga amal qilamiz. Bizga bir xil turdagi zarrachalar berilgan bo'lsin. Tizimning holati zarrachalar soni bilan aniqlanadi. t vaqtdagi zarrachalar sonini $X(t)$ bilan belgilaylik. Faraz qilaylik, t vaqtda bir zarracha, kelib chiqishi va boshqa zarrachalar mavjudligidan qat'iy

nazar, $P_{1n}(t)$ ehtimollik bilan n ta zarrachaga aylanadi va $\sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(t) = 1$. Bundan agar dastlabki vaqtda k ta

zarracha mavjud bo'lsa, keyin t vaqt o'tishi bilan ular $X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t) + \dots + X^{(k)}(t)$ zarrachaga aylanadi,

bu yerda $X^{(i)}(t)$ - i - zarrachaning avlodlar soni, barcha $X^{(i)}(t), i = 1, 2, \dots, k$ lar bog'liqsiz va bir xil

$P_{1n}(t) = P\{X^{(i)}(t) = n\}$ taqsimotga ega. Shunday qilib, t vaqt ichida $P_{kn}(t)$ ning k zarrachadan n ta zarrachaga o'tish ehtimoli uchun $P_{1n}(t)$ ning k -karrali kompozitsiyasi, ya'ni

$$P_{kn}(t) = P_{1n}^{*k}(t) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} P_{1n_1}(t) P_{1n_2}(t) \dots P_{1n_k}(t)$$

o'rinni.

Bundan tashqari, biz zarrachalarning o'zgarishi oldingi davrdagi tarixiga bog'liq emas, deb faraz qilganimiz uchun, $X(t)$ jarayon Markov jarayonidir, ya'ni $P_{kn}(t)$ o'tish ehtimolligi (3) shartni qanoatlantiradi [13].

Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayon — bu ehtimollik nazariyasida o'ziga xos o'rin egallagan, avlodlar bo'yicha takrorlanadigan stoxastik tizim bo'lib, uning asosiy strukturasini elementlarning mustaqil replikasiya mexanizmi tashkil etadi. Har bir element ma'lum ehtimollik taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy sonli avlod hosil qilishi bilan jarayonning keyingi holati aniqlanadi. Shuning uchun tarmoqlanuvchi jarayonlarning dinamikasi diskret vaqtli va tasodifiy ko'payish mexanizmiga ega bo'lgan Markov jarayoni sifatida qaraladi.

Tarmoqlanuvchi jarayonni tavsiflashda asosiy parametrlar quyidagilardan iborat:

1. Avlodlar taqsimoti

Jarayonning rivojlanishi $p_k = P(X = k)$ ehtimollik taqsimoti orqali belgilanadi. Bu taqsimot har bir element nechta avlod hosil qilishi mumkinligini ko'rsatadi. Avlodlar taqsimoti jarayonning barqarorligi va uzoq muddatli xatti-harakatini aniqlovchi asosiy omildir.

2. Matematik kutilma:

Jarayonning o'sish yoki yo'qolish holati quyidagi kutilma bilan aniqlanadi:

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Agar ($m < 1$) bo'lsa — jarayon degeneratsiyalanuvchi, ya'ni yo'q bo'lib ketadi.

Agar ($m = 1$) bo'lsa — kritik holat, jarayonning uzoq muddatli barqarorligi sezilarli darajada tasodifiylikka bog'liq.

Agar ($m > 1$) bo'lsa — jarayonning cheksiz o'sish ehtimoli mavjud bo'ladi.

3. Generatsiya funksiyasi

Tarmoqlanuvchi jarayonlarning matematik tahlilida quyidagi generatsiya funksiyasi muhim rol o'ynaydi:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

Bu funksiya jarayonning avlodlar soniga oid barcha ehtimollik xususiyatlarini o'zida mujassamlashtiradi. Jarayonning asimptotik tavsifi va yo'qolish ehtimoli aynan ushbu funksiyaning qat'iy matematik xususiyatlari orqali aniqlanadi.

4. Yo'qolish ehtimoli:

Jarayonning yo'qolish ehtimoli q generatsiya funksiyasining quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi eng kichik musbat ildizidir:

$$q = G(q).$$

Bu matematik mezon jarayonning uzoq muddatli barqarorligini baholashda asosiy nazariy vosita hisoblanadi.

5. Tarmoqlanuvchi jarayonlarning qo'llanilish sohalari:

Ushbu jarayonlar ko'plab amaliy sohalarda qo'llaniladi:

Biologiya — populyatsiya o'sishini modellashtirish

Genetika — nasl zanjiri va mutatsiya jarayonlarining rivojlanishi

Epidemiologiya — infeksiya tarqalishi zanjiri

Yadroviy fizika — neytronlarning ko'payish jarayoni

Axborot tizimlari — tarmoqlanuvchi ma'lumot oqimlarining modellarini yaratish

Har bir sohada jarayonning o'ziga xos interpretatsiyasi mavjud bo'lib, ular orqali murakkab tizimlarning tasodifiy rivojlanish qonuniyatlari aniqlanadi.

6. Tarmoqlanuvchi jarayonning talqini:

Tarmoqlanuvchi jarayon nafaqat matematik model, balki tizimlarning o'z-o'zidan rivojlanishiga oid universal konsepsiya sifatida qaraladi. U tizimdagi har bir elementning mustaqil qaror qabul qilishi yoki mustaqil ko'payish mexanizmi mavjud bo'lgan holatlarni aniqlashda qo'llanadi. Shuning uchun ushbu jarayon tasodifiy tizimlarning o'z-o'zidan tashkil bo'lishi va o'sish dinamikasini tushuntiruvchi fundamental nazariy model sanaladi.

Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi XIX asrning ikkinchi yarmida yashagan angliyalik statistiklar Galton va Vatsonlar nomlari bilan bog'liq. Ular familiyalarni yo'qolib ketishi masalasini

yechishda o'zlarining matematik modelini taklif etishgan. Keyinchalik bu model umumlashmasi bilan bog'liq jarayonlar (diskret vaqtli) Galton-Vatson jarayonlari deb nom oldi. Galton-Vatson jarayonining uzluksiz vaqtda umumlashmasi esa tarmoqlanuvchi Markov jarayonlaridir. Demak, Galton-Vatson jarayoni tarmoqlanuvchi jarayonlarning eng sodda ko'rinishi ekan. Jarayonda ishtirok etayotgan alohida zarrachalar evolyusiyasi zarrachalar o'tmishi va soniga bog'liq bo'lmagan holda amalga oshadi. Bunday bog'liqsizlik real jarayonlar uchun juda kuchli chegaralanishdek tuyulsada, ko'plab holatlar uchun bunday chegaralanish mutlaqo tabiiydir. Yuqoridagi kabi masalalarni o'rganishda eng yaqin model bo'lgani uchun ham tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi keyingi vaqtda tez suratlarda bilan rivojlanmoqda. Tarmoqlanuvchi jarayonlarni o'rganishda juda kuchli matematik apparat bo'lgan hosil qiluvchi funksiyalar apparatidan foydalanish imkoniyati bu rivojlanishdagi yana bir muhim mezonidir. Bugungi kunga kelib, tarmoqlanuvchi jarayonlarning ko'plab modellari mavjud va rivojlanmoqda. 1957 yilda B.A.Sevastyanov tomonidan ta'riflangan immigratsiyali jarayonlar 1948 - yilda AQShlik olimlar Bellman va Xarrislar tomonidan kiritilgan zarrachalar yoshiga bog'liq jarayonlar, migratsiyali jarayonlar, diffuziyali jarayonlar, energiyali zarralar uchun tarmoqlanuvchi jarayonlar, tug'ilish va o'lim jarayonlari va hokazolar shular jumlasidandir. Deyarli barcha klassik teoremlar dastlab Galton-Vatson jarayonlari uchun isbotlangan va keyin boshqa modellar uchun umumlashtirilgan.

Uzluksiz vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlar ba'zi hollarda kimyoviy zanjir reaksiyalarining dastlabki bosqichlarini yaxshi tasvirlashi mumkin. Biror muhitda (masalan, molekulalar, ionlar, alohida atomlar va boshqalar) oz miqdordagi faol zarrachalar bo'lsin. Faraz qilaylik, reaksiya faol zarrachalar muhit zarrachalari bilan to'qnashganda sodir bo'lsin. Har bir bunday to'qnashuv natijasida ma'lum bir ehtimollik bilan ikkita faol zarracha paydo bo'lishi yoki yutilish sodir bo'lishi mumkin. Reaksiyaning dastlabki bosqichida faol zarrachalar kam bo'lgani uchun ularning bir-biri bilan to'nashuvini e'tiborsiz qoldirishimiz mumkin. So'ngra faol zarralarning har biri boshqalardan mustaqil ravishda yangi faol zarrachalarni hosil qiladi. Shuning uchun bunday reaksiyani uzluksiz vaqt bilan mos keladigan tarmoqlanish jarayoni bilan juda yaxshi tasvirlash mumkin [12].

Quyida biz illyustratsiya sifatida tarmoqlanish jarayonlarini qo'llash mumkin bo'lgan turli misollarni keltiramiz. Xususan, bir necha turdagi zarrachalar bilan berilgan tarmoqlanuvchi jarayonlar kimyoviy zanjir reaksiyalarini tavsiflash uchun ko'proq mos keladi, chunki reaksiyada odatda bir necha turdagi molekulalar yoki ularning qismlari ishtirok etadi.

Xulosa. Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning nazariy asoslarini o'rganish natijasida ushbu jarayonlarning murakkab ehtimollik tuzilmasiga ega ekani aniqlangan. Ularning rivojlanish mexanizmi har bir avlod elementlarining tasodifiy tarmoqlanish jarayoni orqali ifodalanadi, bu esa tizimning vaqt bo'yicha o'sishi yoki yo'qolish ehtimolini aniqlash imkonini beradi. Tadqiqot davomida tarmoqlanuvchi jarayonlarning Markov xossasi, stasionarlik shartlari, shuningdek, Galton-Watson modeli misolida ularning o'sish dinamikasi matematik jihatdan tahlil qilindi.

Olingan nazariy natijalar tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning matematik modellashtirish usullarini yanada takomillashtirish, ularning chegaraviy taqsimotlarini o'rganish va turli sohalarda (biologiya, demografiya, epidemiologiya, axborot tizimlari) qo'llash imkoniyatlarini kengaytirish uchun ilmiy asos yaratadi. Mazkur tadqiqot natijalari tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining rivojiga hissa qo'shadi hamda murakkab tasodifiy tizimlarni tavsiflashda yangi tahliliy yondashuvlarni shakllantirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR:

1. Feller, W. (1968). **An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I-II.** New York: John Wiley & Sons.
2. Harris, T. E. (1963). **The Theory of Branching Processes.** Berlin: Springer-Verlag.
3. Athreya, K. B., & Ney, P. E. (1972). **Branching Processes.** New York: Springer-Verlag.
4. Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2001). **Probability and Random Processes.** Oxford: Oxford University Press.
5. Karlin, S., & Taylor, H. M. (1975). **A First Course in Stochastic Processes.** New York: Academic Press.
6. Нагорный, В. П. (1982). **Стохастические процессы и их приложения.** Москва: Наука.
7. Чистов, Н. В. (1990). **Ветвящиеся случайные процессы и их математические модели.** Москва: Наука.

8. Ходжаев, А. А. (2008). **Tasodifiy jarayonlar nazariyasi.** Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti.
9. Эргашев, М. И. (2016). **Ehtimolliklar nazariyasi va tasodifiy jarayonlar.** Toshkent: Fan va texnologiya.
10. Ross, S. M. (2014). **Introduction to Probability Models.** 11th ed. Academic Press.
11. Mode, C. J. (1971). **Multitype Branching Processes: Theory and Applications.** New York: Elsevier.
12. Назаров, Б. Б. (2021). **Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning ehtimollik modellari va ularning amaliy qo'llanilishi.** – **O'zbekiston matematika jurnali**, №3, 45–56-betlar.
13. Qodirov, R. A., & Jo'rayev, Sh. M. (2019). **Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika asoslari.** Toshkent: Fan va texnologiya nashriyoti.
14. Karimov, U. S. (2017). **Tasodifiy jarayonlarning matematik modellari va ularning amaliy qo'llanilishi.** Toshkent: TATU nashriyoti.
15. To'xtayev, N. A. (2020). **Matematik modellashtirish va ehtimollik usullari.** Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti.

QATORLARNING YAQINLASHISHINI TAHLIL QILISHDA D’ALAMBER ALOMATI VA UNGA O‘XSHASH ALOMATLAR

Shog‘dorova Qunduz Samad qizi,

O‘zbekiston milliy pedagogika universiteti talabasi

qunduzshogdarova@gmail.com

Omonov Olim Isoqovich,

O‘zbekiston milliy pedagogika universiteti katta o‘qituvchisi

Annotatsiya. Klassik D’alamber alomati — matematik analizda musbat hadli qatorlarning yaqinlashishini aniqlashda qo‘llaniladigan muhim alomatlardan biridir. Ushbu maqolada D’alamber alomatidagi limit mavjud bo‘lgan holatda uning Koshi alomati bilan ekvivalentligi isbotlanadi. Shuningdek, shunday $k \in \mathbb{N}$ son uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ limitining mavjudligi asosida qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar: limit, ketma-ketlik, Shtolts teoremasi, musbat ketma-ketlik, D’alamber alomati, Koshi alomati.

ПРИЗНАК Д’АЛАМБЕРА И АНАЛОГИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ В АНАЛИЗЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

Аннотация. Классический признак Д’Аламбера является одним из важных признаков в математическом анализе для определения сходимости рядов с положительными членами. В данной статье доказывается эквивалентность признака Д’Аламбера с признаком Коши в случае существования соответствующего предела. Кроме того, на основе существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ проводится анализ сходимости или расходимости ряда.

Ключевые слова: предел, последовательность, теорема Штольца, положительная последовательность, признак Д’Аламбера, признак Коши.

THE D’ALEMBERT TEST AND ITS ANALOGUES IN THE ANALYSIS OF SERIES CONVERGENCE

Abstract. The classical D’Alembert test is one of the important criteria in mathematical analysis for determining the convergence of series with positive terms. In this article, the equivalence of the D’Alembert test with the Cauchy test is proved in the case when the corresponding limit exists. In addition, based on the existence of the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$ for some $k \in \mathbb{N}$, the convergence or divergence of the series is analyzed.

Keywords: limit, sequence, Stolz theorem, positive sequence, D’Alembert test, Cauchy test.

Kirish. Cheksiz qatorlar ko‘plab amaliy masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi, ilm-fan va muhandislikning turli sohalarida keng qo‘llaniladi. XVIII asrda fransuz matematigi J. D’Alamber tomonidan taklif etilgan D’Alamber alomati cheksiz qatorlarning yaqinlashishini aniqlashda asosiy usullardan biri bo‘ldi. D’Alamber limitlar nazariyasini qat’iy matematik asosda shakllantirish zarurligini ilgari suradi [10]. Aynan shu g‘oya D’Alamber alomatining rivojlanishiga olib keldi.

1.1-teorema (D’alamber alomati [1]). Agar

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (1.3)$$

mavjud bo‘lsa, u holda:

- agar $p < 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi;
- agar $p > 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi;
- agar $p = 1$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Bugungi kunda ham D’Alamber alomati oliy ta’lim muassasalarida matematik analiz fanining asosiy mavzularidan biri sifatida o’qitilib kelinmoqda. Shu bilan birga, ushbu alomatning qo’llanish doirasi cheklangan: agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

bo’lsa, qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida aniq xulosa chiqarib bo’lmaydi. Aynan mana shu noaniqlik yangi yaqinlashish alomatlari — Koshi, Raabe, Gauss, Bertrand, va boshqalar — ishlab chiqilishiga turtki bo’lgan.

1.2-teorema (Koshi alomati [1]). Agar

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \quad (1.4)$$

mavjud bo’lsa, unda:

- agar $q < 1$ bo’lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi;
- agar $q > 1$ bo’lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi;
- agar $q = 1$ bo’lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo’ladi.

1834-yilda nemis matematigi J. Raabe [11] D’Alamber alomatining umumlashtirilgan shakli sifatida tanilgan Raabe alomatini taklif etdi. Shuningdek, yana bir nemis matematigi K. Gauss qatorlar nazariyasida hozirda Gauss alomati nomi bilan mashhur bo’lgan yaqinlashish alomatini ishlab chiqdi.

Ali [9] tomonidan 2008-yilda ikkinchi nisbat alomat deb nomlangan yangi alomat taklif etilgan bo’lib, u Raabe va Gauss alomatlarining o’rnida qo’llanishi mumkin. Quyidagi teorema ushbu alomatning matematik ifodasini beradi:

1.3-teorema (ikkinchi nisbat alomat). $\{a_n\}$ — musbat hadlardan iborat ketma-ketlik bo’lsin. Agar

$$L = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}$$

va

$$l = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \right\}.$$

U holda

a) Agar $L < \frac{1}{2}$ bo’lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashadi.

b) Agar $l > \frac{1}{2}$ bo’lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashadi.

c) Agar $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ bo’lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida yakuniy xulosa chiqarib bo’lmaydi.

Monoton kamayuvchi ketma-ketliklar uchun Koshining quyidagi natijasi mavjud:

1.4-teorema. $\{a_n\}$ — musbat va monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo’lsin. Shunda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi uchun $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ qatorning yaqinlashishi zarur va yetarli.

Keyingi holda, Ali [9] Ikkinchi nisbiy alomatda ishlatiladigan ikkita nisbatdan foydalangan holda nisbiy taqqoslash alomatining quyidagi ko’rinishini isbotlagan:

1.5-teorema (Ikkinchi nisbiy taqqoslash alomati). $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ musbat sonlardan iborat ketma-ketliklar bo’lsin. Faraz qilaylik, barcha yetarlicha katta n lar uchun quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{b_{2n}}{b_n} \text{ va } \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{2n+1}}{b_n}.$$

U holda:

(i) agar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatori yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashadi;

(ii) agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashadi.

Ma’lumki, ko’p hollarda, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarining nisbatidan tuzilgan $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligini tadqiq etishda Shtolts teoremasidan foydalaniladi.

1.5-teorema (Shtolts [2]). Faraz qilaylik, $\{y_n\}$ — o’suvchi va limiti cheksiz ketma-ketlik bo’lsin, va $\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo’lib, uning limit qiymati a ga teng bo’lsin. Unda $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va uning limiti ham a ga teng bo’ladi.

Shunday qilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a. \quad (1.5)$$

Ushbu maqolaning maqsadi — D'Alembert alomatida limit mavjud bo'lgan taqdirda, Koshi alomatidagi limit ham mavjud bo'lishini va bu ikki alomatning o'zaro ekvivalentligini isbotlashdan iborat.

Olingan natijalar. Faraz qilaylik, $\{a_n\}$ —musbat ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Quyidagi nisbat barcha $n \in \mathbb{N}$ uchun aniqlangan bo'lsin:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1.2-teorema. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = p$ limiti mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ bo'ladi.

Isbot. Avvalo, $p \geq 0$ ekanligini e'tiborga olamiz, chunki $a_n > 0$ bo'lganda $r_n > 0$ bo'ladi. Endi ikki holatni ko'rib chiqamiz:

1-holat. $p = 0$ bo'lsin. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $r_n \rightarrow 0$ bo'lganligi sababli mavjud $n_0 \in \mathbb{N}$ shundayki $n \geq n_0$ uchun $r_n < \varepsilon$. Shundan kelib chiqib:

$$a_n = a_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} r_k \leq a_{n_0} \varepsilon^{n-n_0}.$$

Bu tengsizlikdan

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{n_0}} \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}}$$

kelib chiqadi. Ma'lumki, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n_0}} = 1$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{n-n_0}{n}} = \varepsilon$, shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varepsilon.$$

Shuningdek, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy tanlanganligi sababli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$. Musbatlikdan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 0$ ekanligi ayon, demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 = p.$$

2-holat. $p > 0$ bo'lsin. Ma'lumki, har bir a_n ni oldingi hadlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (2.1)$$

Endi bu tenglikning har ikki tomonidan n -ildiz olamiz:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \right)^{1/n}. \quad (2.2)$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini logarifmlab yozamiz:

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k}. \quad (2.3)$$

Endi ushbu ifodani tahlil qilib, Stolts teoremasini qo'llash uchun zarur shaklga keltiramiz:

$$r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Shunday qilib,

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k. \quad (2.4)$$

Agar $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = p$ mavjud bo'lsa, unda $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln r_k = \ln p$. Endi quyidagi yig'indini qaraymiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k.$$

U holda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \frac{S_n}{n}.$$

Stolts teoremasiga ko'ra, agar $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln r_k = \ln p$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \ln p.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \ln p. \quad (2.5)$$

Shunday qilib, (2.2) va (2.5) formulalardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k \right) = \ln p.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\ln p} = p.$$

Teorema isbotlandi.

2.1-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ limitni hisoblang.

Yechish. $a_n = n!$ teng bo'lib, $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$ ga teng. Demak, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$, 2.1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

2.2-misol. Hisoblang

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^n}{(n!)^n}}.$$

Yechish. $a_n = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^n}{(n!)^n}$ teng. Shunday qilib,

$$a_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} k^k}{((n+1)!)^{n+1}} = \frac{(\prod_{k=1}^n k^k) (n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^{n+1}}.$$

Nisbati

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} (n!)^n}{((n+1)!)^{n+1}}.$$

Lekin $(n+1)! = (n+1)n!$, shuning uchun

$$((n+1)!)^{n+1} = (n+1)^{n+1} (n!)^{n+1}.$$

Bularni o'rniga qo'yib, oddiylashsak:

$$r_n = \frac{(n+1)^{n+1} (n!)^n}{(n+1)^{n+1} (n!)^{n+1}} = \frac{1}{n!}.$$

Demak,

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n!}$$

bunga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ va 2.1-teoremadan yoki yuqoridagi tahlildan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

2.3-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ limitni hisoblang.

Yechish. r_n topamiz

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n}.$$

Endi $(n+1)! = (n+1)n!$ bo'lgani uchun:

$$r_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ma'lum limitga ko'ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Shuning uchun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = e.$$

2.1-teoreмага ko'ra, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = e$, u holda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

2.1-natija. Agar ushbu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ limit mavjud bo'lsa, u holda Dalamber va Koshi alomatlari ekvivalent bo'ladi.

Demak, (1.3) limit mavjud bo'lganda Dalamber va Koshi alomatlari ekvivalent bo'lib, ular qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqida bir xil xulosaga olib keladi.

2.4-misol. Quyidagi qator $p = q$ bo'lishini tekshiring:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Yechish. (1.5) dan ma'lumki har bir a_n oldingi hadlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^k}{(k+1)^k}. \quad (2.6)$$

Har ikki tomonidan n -ildiz olib:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k^k}{(k+1)^k} \right)^{1/n}. \quad (2.7)$$

Ushbu tenglikning ikki tomonini logarifmlab yozamiz:

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \ln \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{k^k}{(k+1)^k}. \quad (2.8)$$

Endi ushbu ifodani tahlil qilib, Stolts teoremasini qo'llash uchun zarur shaklga keltiramiz:

$$r_k = \frac{k^k}{(k+1)^k}.$$

Shunday qilib,

$$\ln \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k. \quad (2.9)$$

Ma'lumki, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{e}$ bo'ladi. Shunda $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_k = -1$. Endi quyidagi yig'indini qaraymiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k.$$

U holda

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = \frac{S_n}{n}.$$

Stolts teoremasiga ko'ra, agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln r_k = -1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = -1.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = -1. \quad (2.10)$$

Shunday qilib, (2.8) va (2.10) formulalardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln r_k = -1.$$

Bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Demak,

$$q = \frac{1}{e} < 1.$$

Dalamber mezoniga ko'ra esa:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e}.$$

Demak, $p = q = \frac{1}{e}$.

2.1-izoh. Agar (1.3) limit mavjud bo'lmasa, bu holatda (1.4) limitning ham mavjud emasligini anglatmaydi.

2.5-misol. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{n}$ qatorni qaraylik, D'Alamber alomati:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2-(-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{2-(-1)^n}{n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n}.$$

Agar n juft bo'lsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n} = 3.$$

Agar n toq bo'lsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2-(-1)^{n+1}}{2-(-1)^n} = \frac{1}{3}.$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ limit mavjud emas.}$$

Koshi alomati:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-(-1)^n}{n} \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-(-1)^n)^{1/n}}{n^{1/n}} = 1.$$

2.3-teorema. Agar $k \in \mathbb{N}$ shunday son topilib, ushbu

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} \quad (2.11)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

(a) agar $d < 1$ bo'lsa, (1.2) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

(b) agar $d > 1$ bo'lsa, (1.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot. (a) Faraz qilaylik, (2.11) limit mavjud bo'lin. $d < 1$ bo'lganligi sababli, shunday kichik $\varepsilon > 0$ sonni tanlash mumkinki,

$$d_0 = d + \varepsilon < 1. \quad (2.12)$$

Limit ta'rifiga ko'ra, shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} < d_0. \quad (2.13)$$

Demak,

$$a_{n+k} < d_0 a_n, n > n_0. \quad (2.14)$$

Endi (2.14) tengsizlikni ketma-ket qo'llaymiz:

$$a_{n_0+k} < d_0 a_{n_0}, a_{n_0+2k} < d_0 a_{n_0+k} < d_0^2 a_{n_0}, \dots,$$

va umuman olganda, barcha $m \in \mathbb{N}$ uchun

$$a_{n_0+mk} < d_0^m a_{n_0}. \quad (2.15)$$

Endi ixtiyoriy $n > n_0$ ni qaraymiz. U holda $n = n_0 + mk + r$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $0 \leq r < k$.

(2.15) dan quyidagi baho hosil bo'ladi:

$$a_n \leq a_{n_0+mk} < d_0^m a_{n_0}. \quad (2.16)$$

Endi berilgan (1.2) qatorni quyidagi geometrik qator bilan solishtiramiz:

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_0^m a_{n_0} = a_{n_0} \sum_{m=0}^{\infty} d_0^m = \frac{a_{n_0}}{1-d_0}, \quad (2.17)$$

u $0 < d_0 < 1$ bo'lgani uchun yaqinlashuvchi bo'ladi.

(2.16) dan ko'rinadiki, a_n hadlari ushbu geometrik qator hadlari bilan chegaralangan, shuning uchun (1.2) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

(b) Faraz qilaylik,

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} > 1. \quad (2.18)$$

Demak, limit ta'rifi ko'ra, shunday musbat son $\varepsilon > 0$ va natural son n_0 topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} > 1 + \varepsilon.$$

Bu tengsizlikdan:

$$a_{n+k} > (1 + \varepsilon)a_n. \quad (2.19)$$

Endi (2.19) ni ketma-ket m marta qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} a_{n_0+k} &> (1 + \varepsilon)a_{n_0}, \\ a_{N+2k} &> (1 + \varepsilon)a_{N+k} > (1 + \varepsilon)^2 a_N, \\ &\dots, \\ a_{n_0+mk} &> (1 + \varepsilon)^m a_{n_0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Endi $a_{n_0} > 0$ bo'lgani uchun (2.20) dan quyidagini olamiz:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_0+mk} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_0} (1 + \varepsilon)^m = +\infty.$$

Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0.$$

Demak, $p > 1$ bo'lsa, a_n hadlari nolga intilmaydi. Shuning uchun (1.2) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2.2-izoh. Agar $d = 1$ bo'lsa, (1.2) qatorning yaqinlashishini aniqlash uchun boshqa usul qo'llanadi.

2.3-izoh. Agar $k = 1$ bo'lsa, D'alambertning klassik alomatiga aylanadi.

Xulosa. Maqolada D'Alamber va Koshi alomatlari o'rtasidagi bog'liqlik isbotlandi. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mavjud bo'lsa, bu ikki alomat ekvivalentligi ko'rsatildi. Shuningdek, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = d$ bo'lganda, $d < 1$ uchun qator yaqinlashishi, $d > 1$ uchun esa uzoqlashishi isbotlandi. Bu natijalar D'Alamber alomatining qo'llanish doirasini kengaytiradi va qatorlarning yaqinlashishini tahlil qilishda yangi imkoniyatlar yaratadi.

ADABIYOTLAR:

1. Azlarov T.A., Mansurov H. (1986, 1989). *Matematik analiz (1 va 2-qismlar)*. T.: O'qituvchi.
2. Sa'dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G., & G'ulomov R. (1993, 1995). *Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami (1 va 2-qismlar)*. T.: O'zbekiston.
3. Зорич, А. (1981). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. (1979). *Математический анализ (Т. 1–2)*. М.: Наука.
5. Фихтенгольц Г.М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления (Т. 1–3)*. М.: Физ-матгиз.
6. Демидович Б.П. (1972). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. М.: Наука.
7. Кубрякцев Л.Д., Кумасов А.Д., Шеглов В.И., Шабунин М.И. (1984, 1986). *Сборник задач по математическому анализу (Т. 1–2)*. М.: Наука.
8. Виноградова И.А., Олехник С.Н., & Садовничий В.А. (1988). *Задачи и упражнения по математическому анализу (Т. 1)*. Издательство Московского Университета.
9. Ali, S. (2008). *The mth Ratio Test: New Convergence Tests for Series*. Amer. Math. Monthly.

10. d'Alembert, J. (1768). *R'eflexions sur les Suites Divergentes ou Convergentes*. Opuscles Math'ematiques ou M'emoires sur Diff'erens Sujets de G'eom'etrie.
11. Raabe, J. (1834). *Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen*. Journal f'ur die reine und angewandte Mathematik.
12. Tong, J. (1994). *Kummer's Test Gives Characterization for Convergence or Divergence of all Positive Series*. Amer. Math. Monthly.

IKKI O'LCHAMLI SIMPLEKSDA ANIQLANGAN V — TARTIBLI BISTOXASTIK
OPERATORLAR OILASI DINAMIKASI

Utayev Azizbek Toyir o'g'li,

Qarshi davlat universiteti

Matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrası o'qituvchisi

azizbekutayev42@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ish ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan nochiziqli bistoxastik operatorlar dinamikasini o'rganishga bag'ishlangan. Ikki o'lchamli simpleksda V — tartibli bistoxastik operatorlarning aniq bir oilasi qurilgan. Ushbu operatorlarning invariant to'plamlar va qo'zg'almas nuqtalar xossalari o'rganilgan. Ko'rib chiqilayotgan operatorlar oilasi uchun qo'zg'almas nuqtalar to'plami va traektoriyalarning xatti-harakati tavsiflovchi teorema shakllantirilgan va isbotlangan.

Kalit so'zlar: qo'zg'almas nuqta, stoxastik operator, bistoxastik operator, simpleks, majorizatsiya.

DYNAMICS OF THE FAMILY OF V — TH ORDER BISTOCHASTIC OPERATORS
DEFINED ON A TWO-DIMENSIONAL SIMPLEX

Abstract. This work is devoted to the study of the dynamics of nonlinear bistochastic operators defined on a two-dimensional simplex. A specific family of bistochastic operators of order V on the two-dimensional simplex is constructed. The properties of the invariant sets and fixed points of these operators are investigated. A theorem describing the set of fixed points and the behavior of trajectories for the considered family of operators is formulated and proven.

Keywords: Fixed point, stochastic operator, bistochastic operator, simplex, majorization.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА БИССТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ V ГО ПОРЯДКА
ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Аннотация. Данное исследование посвящено изучению динамики нелинейных бистохастических операторов, определенных на двумерном симплексе. На двумерном симплексе построено конкретное семейство бистохастических операторов порядка V . Исследованы свойства инвариантных множеств и неподвижных точек этих операторов. Для рассматриваемого семейства операторов сформулирована и доказана теорема, описывающая множество неподвижных точек и поведение траекторий.

Ключевые слова: Неподвижная точка, стохастический оператор, бистохастический оператор, симплекс, мажоризация.

Kirish. Tabiatshunoslik, aholi genetikasi, tur populyatsiyasi va boshqa ko'plab sohalarda jarayonning vaqt o'tishi bilan o'zgarishini modellashtirish muhim ahamiyatga ega. Bunday jarayonlarni o'rganishda diskret vaqtli dinamik sistemalarlar nazariyasi asosiy vositadir. Shu o'rinda, stoxastik operatorlar orqali ifodalangan diskret dinamik sistemalar alohida o'rin tutadi, chunki ular ehtimollik taqsimotlarining evolyutsiyasini tavsiflash imkonini beradi.

Stoxastik operatorlar orasida, barcha kordinatalari bo'yicha simmetrik xususiyatga ega bo'lgan bistoxastik operatorlar alohida o'rganiladi. Ushbu operatorlar majorizatsiya tushunchasi bilan chambarchas bog'liq bo'lib, ma'lum bir tartibni saqlab qolish xususiyatiga ega. Shuning uchun ularni o'rganish nafaqat matematik, balki qo'llash jihatidan ham muhimdir.

Ikki o'lchamli simpleks - bu uch komponentli ehtimollik taqsimotlarining to'plami bo'lib, eng soddagi chiziqli bo'lmagan dinamikani o'rganish uchun qulay model hisoblanadi. Ushbu maqolada ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan, ma'lum bir tartibdagi chiziqli bo'lmagan bistoxastik operatorlarning bir oilasi qaraladi.

Ishning asosiy maqsadi shu operatorlar oilasi uchun invariant to'plamlarni, operatorning qo'zg'almas nuqtalar to'plamini topish va boshlang'ich shartga bog'liq ravishda traektoriyalarning xatti-harakatini (ya'ni

limit xossasini) aniqlashtirishdan iborat. Isbotlangan teorema orqali, ko'rib chiqilayotgan operatorlar dinamikasining barcha asosiy xususiyatlari to'liq tavsiflanadi.

Asosiy ta'rif va tushunchalar. Bizga $N_{\leq q} = \{1, 2, 3, \dots, q\} \subset N$ (bu yerda $q \in N$) to'plam va berilgan bo'lsin.

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j \geq 0, j \in N_{\leq m}\}$$

to'plamga R^m dagi $m-1$ o'lchamli simleks deyiladi. $S_{>}^{m-1}$ orqali S^{m-1} simpleksning ichki nuqtalari to'plamini belgilaymiz, ya'ni

$$S_{>}^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j > 0, j \in N_{\leq m}\}.$$

S^{m-1} simpleksning chegarasini ∂S^{m-1} orqali belgilaymiz. $e_k = (e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \dots, e_m^{(k)})$, ($k \in N_{\leq m}$) orqali S^{m-1} simpleksni uchini belgilaymiz, ya'ni

$$e_k^{(k)} = 1 \text{ va } e_j^{(k)} = 0 \text{ barcha } j \neq k, k \in N_{\leq m} \text{ uchun.}$$

Elementlari haqiqiy sonlardan tashkil topgan $m \times m$ kvadrat matritsani $A = (a_{ij})$ orqali belgilaymiz.

Agar A - $m \times m$ kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{ij} \geq 0$, $\forall i, j \in N_{\leq m}$ va $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$, $j \in N_{\leq m}$ tengliklar

o'rinli bo'lsa, u holda A stoxastik matritsa deyiladi. S_n orqali $n \in N$ ta elementning o'rin almashtirishlari guruppasini belgilaymiz.

Tarif 1.1. Ixtiyoriy $\nu \in N$ uchun, quyidagi operator

$$S: x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \square^m \rightarrow \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)) \in \square^m \quad (1.1)$$

ν -tartibli stoxastik operator deyiladi, agar $S \geq \theta$ va

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu}, \quad x \in \square^m, \quad k \in N_{\leq m} \quad (1.1.1)$$

bu yerda

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} \geq 0, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad k = \overline{1, m} \quad (1.1.2)$$

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = P_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(\nu)}, k}, \quad k = \overline{1, m} \quad (1.1.3)$$

ixtiyoriy $\pi \in S_m$ o'rin almashtirish uchun, va

$$\sum_{k=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = 1, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}. \quad (1.1.4)$$

Yuqoridagi (1.1.2) - (1.1.4) shartlardan

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^\nu, \quad x \in \square^m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ko'rinib turibdiki, S operator S^{m-1} simpleksni o'zini o'ziga akslantiruvchi operatordir. $\nu=1$ bo'lganda S operator chiziqli stoxastik operator deyiladi, $\nu=2$ bo'lganda S operator kvadratik stoxastik operator deyiladi, $\nu=3$ bo'lganda S operator kubik stoxastik operator deyiladi va hokazo. $S^{[\nu]}$ orqali ν -tartibli stoxastik operatorni belgilaymiz.

Elementlari haqiqiy sonlardan tashkil topgan $m \times m$ kvadrat matritsani $A = (a_{ij})$ orqali belgilaymiz.

Agar A - $m \times m$ kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{ij} \geq 0$, $\forall i, j = \overline{1, m}$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$,

$\forall i, j = \overline{1, m} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1, \quad \forall i, j = \overline{1, m}$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda A matritsa bistoxastik

matritsa deyiladi. Ba'zan bistoxastik matritsa, $\square^m$ dagi bistoxastik operator deb ham ataladi. Ko'rishimiz mumkinki chiziqli bistoxastik operator uchun $A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Endi umumiy holda bistoxastik operator ta'rifini kiritaylik. Ixtiyoriy $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ uchun quyidagi $X \downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[m]})$ ga X ning qayta tartiblanishi deyiladi, bu yerda $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[m]}$.

Ta'rif 1.2. Faraz qilaylik, $X, Y \in S^{m-1}$ bo'lsin. Agar barcha $k = \overline{1, m-1}$ uchun $\sum_{i=1}^k x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^k y_{[i]}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda X element Y ga majorizatsiyalashgan (kattalashgan) deyiladi va $X \prec Y$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rif 1.3. Agar V -tartibli stoxastik operator uchun $S^{[V]} X \prec X, \forall X \in S^{m-1}$. munosabat o'rinli bo'lsa, V -tartibli bistoxastik operator deyiladi.

V -tartibli bistoxastik B operatorni $B^{[V]}$ ko'rinishida belgilaymiz.

S^2 Simpleksda bistoxastik operatorlar oilasi.

Lemma 1. Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}$ va ixtiyoriy $\alpha_j \in (0; 1), j = \overline{1, m}$ uchun $\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 < \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Lemma 2. Agar $|a| < 1$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $h(x) = ax + b$ va ixtiyoriy $x_0 \in R$ uchun

$\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(x_0) = \frac{b}{1-a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi $B_{\alpha^{[1]}}^{[1]} : S^2 \rightarrow S^2$ chiziqli bistoxastik operatorlar oilasini qaraylik

$$B_{\alpha^{[1]}}^{[1]} : \begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_3, \\ x_3' = (1-\alpha)x_2 + \alpha x_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha \in (0, 1)$.

Bizga ikkita $B_{\alpha_1^{[1]}}^{[1]}, B_{\alpha_2^{[1]}}^{[1]}$ chiziqli bistoxastik operatorlar oilasi berilgan bo'lsin. Bu operatorlar yordamida quyidagi $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]} = x_1 B_{\alpha_1^{[1]}}^{[1]} + (x_2 + x_3) B_{\alpha_2^{[1]}}^{[1]}$ kvadratik stoxastik operatorni hosil qilamiz, ya'ni

$$B_{\alpha^{[2]}}^{[2]} : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_2' = \alpha^{[2]} x_2 + (1-\alpha^{[2]})x_3, \\ x_3' = (1-\alpha^{[2]})x_2 + \alpha^{[2]} x_3 \end{cases}$$

Bu yerda $\alpha^{[2]}(x_1) = x_1\alpha_1^{[1]} + (1-x_1)\alpha_2^{[1]}$ ga teng. $\alpha^{[2]}(x_1)$ parameter $x \in S^2$ ning birinchi kordinatasiga bog'liq funksiya bo'lib, $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]}$ operator dinamikasini o'rganayotganimizda o'zgarmas son vazifasini bajaradi, chunki $B_{\alpha^{[2]}}^{[2]}$ operatorning $x \in S^2$ ga ta'siri x ning dastlabki kordinatasini qo'zg'almas qoldiradi. Lemma 1 ga ko'ra $|\alpha^{[2]}| < 1$.

Huddi shu metodni davom ettirish natijasida, V -tartibli bistoxastik $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]} = x_1 B_{\alpha_1^{[v-1]}}^{[v-1]} + (x_2 + x_3) B_{\alpha_2^{[v-1]}}^{[v-1]}$ operatorni hosil qilamiz, ya'ni

$$B_{\alpha^{[v]}}^{[v]} : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3)^{v-1}, \\ x_2' = \alpha^{[v]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[v]}(x_1))x_3, \\ x_3' = (1 - \alpha^{[v]}(x_1))x_2 + \alpha^{[v]}(x_1)x_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Bu yerda $\alpha^{[v]}(x_1) = x_1\alpha_1^{[v-1]}(x_1) + (x_2 + x_3)\alpha_2^{[v-1]}(x_1)$ ga teng. $\alpha^{[v]}(x_1)$ funksiya $x \in S^2$ ning faqat dastlabki kordinatasiga bog'liq bo'lganligi uchun, $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]}$ operator dinamikasini o'rganayotganimizda o'zgarmas son vazifasini bajaradi, chunki $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]}$ operatorning $x \in S^2$ ga ta'siri x ning dastlabki kordinatasini qo'zg'almas qoldiradi. Lemma 1 ga ko'ra $|\alpha^{[v]}(x_1)| < 1$.

Teorema 1. Ixtiyoriy $\tau \in [0;1]$ va $v \in \mathbb{N}$ uchun, $S_\tau = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, x_1 = \tau\}$ to'plam, $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]}$ operatorning invariant to'plamdir.

2. $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]}$ operatorning S^2 simpleksdagi qo'zg'almas nuqtalari to'plami, uchlari e_1 va $u^{(0)} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo'lgan kesmadan iborat.

3. Ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[v]}}^{[v]})$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{\alpha^{[v]}}^{[v] (n)}(x^{(0)}) = \left(x_1^{(0)}, \frac{1-x_1^{(0)}}{2}, \frac{1-x_1^{(0)}}{2}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: 1) 3.1 – operatoridan ko'rishimiz mumkinki, $x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3) = x_1$ tenglik o'rinli. Bundan kelib chiqadiki S_τ to'plam, 3.1 operator uchun invariant to'plamdir.

2) 3.1 operatorning qo'zg'almas nuqtasi

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_1 + x_2 + x_3)^{v-1}, \\ x_2 = \alpha^{[v]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[v]}(x_1))x_3, \\ x_3 = (1 - \alpha^{[v]}(x_1))x_2 + \alpha^{[v]}(x_1)x_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

sistemaning yechimi demakdir. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ va $\alpha^{[v]}(x_1) \in (0,1)$ ekanligini hisobga olsak, 3.2 sistemaning yechimi $x_2 = x_3$ tenglikni qanoatlantiruvchi S^{m-1} simpleksning nuqtalaridan iborat ekanligi

kelib chiqadi. Demak, $B_{\alpha^{[v]}}^{[v]}$ operatorning S^{m-1} simpleksdagi qo'zg'almas nuqtalari to'plami, uchlari e_1 va $u^{(0)} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nuqtalarda bo'lgan ko'pyoqdan iborat.

3) Ko'rinib turibdiki, Ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[v]}}^{[v]})$ uchun, $x_1^{(n)} = x_1^{(0)}$ tenglik o'rinli. Operatorning keyingi kordinatasi uchun

$$x_2' = \alpha^{[v]}(x_1)x_2 + (1 - \alpha^{[v]}(x_1))x_3 = (2\alpha^{[v]}(x_1) - 1)x_2 + (1 - \alpha^{[v]}(x_1))(1 - x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $h(x_2) = (2\alpha^{[v]}(x_1) - 1)x_2 + (1 - \alpha^{[v]}(x_1))(1 - x_1)$ deb belgilaylik.

$\alpha^{[v]}(x_1) \in (0; 1) \Rightarrow |2\alpha^{[v]}(x_1) - 1| < 1$ tengsizlik va lemma 2 ga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(x_2) = \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}.$$

Demak, ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in S^2 \setminus \text{Fix}(B_{\alpha^{[v]}}^{[v]})$ uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{\alpha^{[v]}}^{[v] (n)}(x^{(0)}) = \left(x_1^{(0)}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}, \frac{1 - x_1^{(0)}}{2}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. +

Xulosa. Ushbu ishda ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan, ma'lum bir tartibdagi chiziqli bo'lmagan bistoxastik operatorlarning aniq bir oilasi qurildi va ularning dinamik xossalari o'rganildi.

Quyidagi asosiy natijalar isbotlandi: Operator uchun $x_1 = \tau$, $\tau \in [0, 1]$ shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziq invariant to'plam ekanligi ko'rsatildi. Bu shuni anglatadiki, agar tizim boshlang'ich holatda ushbu to'g'ri chiziqda joylashsa, u butunlay shu to'plamda qoladi. Operatorning qo'zg'almas nuqtalari to'plami kontinum quvvatli to'plam ekanligi isbotlandi.

Har qanday boshlang'ich nuqta uchun operatorning qo'llanishi natijasida hosil bo'lgan ketma-ketlik simpleksning ichiga, aniqrog'i, dastlabki koordinataga bog'liq ravishda qo'zg'almas nuqtalarga yaqinlashishi ko'rsatildi. Bu esa, dinamikaning uzoq muddatli xatti-harakati to'g'risida aniq tasavvur beradi. Olingan natijalar ko'rib chiqilayotgan bistoxastik operatorlar oilasi dinamikasini to'liq tavsiflash imkonini beradi va chiziqli bo'lmagan stoxastik operatorlar nazariyasiga muhim hissa hisoblanadi.

REFERENCES:

1. Lyubich Yu.I. *Mathematical Structures in Population Genetics*. - Kiev: Naukova Dumka, 1983. - 296 p. (in Russian).
2. Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. On Cubic Operators Defined on a Finite-Dimensional Simplex. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2004. Vol. 56. No. 10. P. 1424-1433.
3. Rozikov U.A., Zhamilov U.U. Volterra Quadratic Stochastic Operators of a Bisexual Population. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63. No. 7.
4. Rozikov U.A., Zhamilov U.U. F-Quadratic Stochastic Operators. *Mathematical Notes*. 2008. Vol. 83. No. 4. P. 606-612.
5. Zhamilov U.U., Rozikov U.A. On the Dynamics of Strictly Non-Volterra Quadratic Stochastic Operators on the Two-Dimensional Simplex. *Sbornik: Mathematics*. 2009. Vol. 200. No. 9. P. 81-94.
6. Shahidi F.A. On Biostochastic Operators Defined on a Finite-Dimensional Simplex. *Siberian Mathematical Journal*. March-April, 2009. Vol. 50. No. 2. P. 463-468.
7. Prasolov V.V. *Polynomials*. MTSNMO. 2nd ed., 336 (2001). (in Russian).
8. Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U. Quadratic Stochastic Operators and Processes: Results and Open Problems. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*. 2011. Vol. 14. No. 2. P. 279-335.
9. Jamilov U.U., Khamraev A.Yu., Ladra M. On a Volterra Cubic Stochastic Operator. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2018. Vol. 80. No. 2. P. 319-334.

10. Mamurov B. J., Rozikov U. A. *On Cubic Stochastic Operators and Processes. Journal of Physics: Conference Series.* 2016. Vol. 697. 012017.
11. Mukhamedov F., Ganixodjaev N. *Quantum Quadratic Operators and Processes. Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 2133. Nov. 12. 2015.
12. Nickalls, R.W.D. *Vieta, Descartes and the Cubic Equation. Mathematical Gazette.* 2006. Vol. 90. P. 203-208.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МКДФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ, В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Мамедов Кудрат Алламович,

к. ф.-м.н., доцент, кафедра

“ Точные науки”, университета Маъмун

mqudrat1969@gmail.com

Жуманиязов Низом,

(PhD), доцент, кафедра

“ Точные науки”, университета Маъмун

nizomjon_ursu@mail.ru

Азаматов Азизбек Шавкатович,

(PhD), доцент, кафедра

“ Точные науки”, университета Маъмун

azizbek_shavkatovich@gmail.com

Аннотация. В данной работе изучается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности, в случае простых собственных значений соответствующей спектральной задачи. Исследуется эволюция данных рассеяния для связанного несамосопряженного оператора Дирака, возникающего при интегрировании данного уравнения. Особое внимание уделено корректности постановки задачи Коши. Выводятся эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, в случае конечной плотности. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений и при решении некоторых задач физики плазмы.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКДФ), оператор Дирака, решение Йоста, собственное значение, собственная функция, данные рассеяния, класс функций имеющих конечную плотность.

MKDF TENGLAMANI ODDIY XUSUSIY QIYMATLAR HOLIDAGI CHEKSIZLIK FUNKSIYALARI SINFIGA O'Z-O'ZI BO'LGAN MANBA BILAN INTEGRATRIYA

Annotatsiya. Ushbu ishda moslangan manbali modifitsirlangan Korteveg–de Friz (mKdF) tenglamasini chekli zichlikli funksiyalar sinfiga sochilish nazariyasining teskari masala usulida karrasiz xos qiymatlar holidagi o'rganiladi. Tenglamani integrallash jarayonida paydo bo'ladigan o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan Dirak operatori uchun sochilish nazariyasi berilganlarining evolyutsiyasi tadqiq etiladi. Koshi masalasining korrektiligiga alohida e'tibor berilgan. Potensial moslangan manbali modifitsirlangan Korteveg–de Friz (mKdF) tenglamasining chekli zichlikli funksiyalar sinfiga yechimi bo'lgan o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan Dirak operatori uchun karrasiz xos qiymatlar holidagi sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi keltirib chiqarilgan. Olingan natijalarni chiziqli operatorlarning spektral nazariyasida, plazma fizikasining ba'zi masalalarini yechishda kelib qoladigan matematik fizikaning nochiqli tenglamalarini integrallashda qo'llash mumkin.

Kalit so'zlar: sochilish nazariyasining teskari masalasi, modifitsirlangan Korteveg–de Friz tenglamasi (mKdF), Dirak operatori, Yost yechimi, xos qiymat, xos funksiyasi, sochilish nazariyasining berilganlari, chekli zichlikli funksiyalar sinfi.

INTEGRATION OF THE MKDF EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE CLASS OF FINITE DENSITY FUNCTIONS IN THE CASE OF SIMPLE EIGENVALUES

Abstract. This work investigates the Cauchy problem for the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of functions of finite density, in the case of simple eigenvalues of the

corresponding spectral problem. The evolution of the scattering data is studied for the associated non-selfadjoint Dirac operator that arises in the integration of this equation. The study devotes significant attention to ensuring that the Cauchy problem is correctly posed. The evolution formulas for the scattering data of the non-selfadjoint Dirac operator with simple eigenvalues are derived, where the potential is a solution of the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the finite-density case. The obtained results may be applied in the spectral theory of linear operators, in mathematical physics for the integration of nonlinear equations, and in solving certain problems of plasma physics.

Keywords: inverse scattering problem method, modified Korteweg-de Vries equation (mKdV), Dirac operator, Jost solution, eigenvalue, eigenfunction, scattering data, class of functions having finite density.

Введение. Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

встречается при решении некоторых задач физики плазмы. В работе [1] это уравнение было проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния для системы Дирака. Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начало с работы [2], в которой он представлен как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза.

Применение метода обратной задачи для уравнения мКдФ опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака вида

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x, t) \\ -u(x, t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

на всей оси. Обратная задача рассеяния для оператора Дирака изучалась в работах М.Г.Гасимова, Б.М.Левитана [3], В.Е.Захарова, А.Б.Шабата [4], И.С.Фролова [5], Л.П.Нижника, А.Б.Хасанова [6], Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [7] и др.

Применения метода обратной задачи рассеяния для оператора Дирака к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений изучалась в работах М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла и Х.Сигура [8], В.Е.Захарова, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [9], В.К.Мельникова [10], А.Б.Хасанова, У.А.Хоитметова [11], Г.У.Уразбоева, А.Б.Хасанова [12], Г.У.Уразбоева, К.А.Мамедова [13], А.Б.Хасанова, К.А.Мамедова [14] и др. Именно в работе [10] был введен термин «самосогласованный источник». Самосогласованность источника понимается в том смысле, что правая часть рассматриваемого эволюционного уравнения является комбинацией собственных функций соответствующей спектральной задачи, потенциал которой есть решение рассматриваемого эволюционного уравнения.

Отметим, также, что в работе Ж.Леона и А.Латифи [15] приведена конкретная физическая задача, которая сводится к решению уравнения КдФ с источником.

В связи с применением к конкретным физическим задачам возникла необходимость рассмотрении нелинейных эволюционных уравнений не только в классе «быстроубывающих» функций, но в классах функций специального вида, а именно периодических, ступенчатых, имеющих конечную плотность и др.

Следует отметить, что в работе А.Б.Яхшимуратова, М.М.Хасанова [16] было интегрировано уравнение мКдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций, а в случае конечной плотности, т.е. в случае $u(x, t) \rightarrow c$ при $|x| \rightarrow \infty$, $c \in \mathbb{R}$ изучалась в работах Н.Н.Романовой [17], К.А.Мамедова [18] и др.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2), \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \end{cases} \quad (1)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $u_0(x) \rightarrow c$ при $x \rightarrow \pm\infty$, $c \in R$. Здесь начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)-c|dx < \infty; \quad (3)$$

2) Оператор $L(0)$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$.

В рассматриваемой задаче $\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1} \Phi_{k2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (4)$$

Здесь $A_k(t)$ заданные, непрерывные, ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \text{ при } \xi_k = -\xi_n. \quad (5)$$

Предполагаем, что функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u(x, t)-c| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (6)$$

Основная цель данной работы – получить представление для решения $u(x, t)$, $\Phi_{k1}(x, t)$, $\Phi_{k2}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, задачи (1)–(5) в классе функций (6), в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Задача рассеяния. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y_{1x} + i\xi y_1 = u(x)y_2, \\ y_{2x} - i\xi y_2 = -u(x)y_1, \end{cases} \quad (7)$$

на всей оси $(-\infty < x < \infty)$, с потенциалом $u(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u(x)-c|dx < \infty, \quad c \in R. \quad (8)$$

Видно, что с помощью оператора

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x) \\ -u(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

и вектор-функции $y = (y_1, y_2)^T$ систему (7) можно переписать в виде

$$Ly = \xi y. \quad (9)$$

При условии (8) система уравнений (9) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\begin{aligned} \phi(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ \bar{\phi}(x, \xi) &\sim \begin{pmatrix} -\frac{i(\xi - p)}{c} \\ -1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

$$\psi(x, \xi) \sim \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\bar{\psi}(x, \xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Здесь $p = \sqrt{\xi^2 + c^2}$ и ветвь квадратного корня фиксируется условием

$$\operatorname{Im} p(\xi) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \xi > 0. \quad (10)$$

В дальнейшем мы часто будем опускать зависимость функции $p(\xi)$ от ξ . Таким образом, в формулах, где участвует $p(\xi)$ и ξ , всегда подразумевается, что p является функцией от ξ . (Отметим, что $\bar{\phi}$ в общем случае, не является комплексным сопряжением к ϕ). При действительных ξ , пары вектор-функций $\{\phi, \bar{\phi}\}$ и $\{\psi, \bar{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (9), поэтому

$$\phi(x, \xi) = a(\xi)\bar{\psi}(x, \xi) + b(\xi)\psi(x, \xi), \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \quad (11)$$

$$\bar{\phi}(x, \xi) = -\bar{a}(\xi)\psi(x, \xi) + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}(x, \xi), \quad (\operatorname{Im} \xi = 0), \quad (12)$$

где

$$a(\xi) = \frac{W\{\phi, \psi\}}{W\{\bar{\psi}, \psi\}}, \quad b(\xi) = \frac{W\{\phi, \bar{\psi}\}}{W\{\bar{\psi}, \bar{\psi}\}}, \quad |a(\xi)|^2 + |b(\xi)|^2 = 1.$$

Риманова поверхность Γ функции $p(\xi)$ состоит из двух экземпляров Γ_+ и Γ_- комплексной плоскости C с разрезами по мнимой оси от $-ic$ до ic . Условие (10) однозначно определяет аналитическую продолжение функции $a(\xi)$ на лист Γ_+ , исключая точки ветвления $\xi = \pm ic$. Невещественные нули функции $a(\xi)$ соответствуют собственным значениям оператора $L(t)$ на листе Γ_+ . Собственные значения оператора $L(t)$ на листе Γ_- совпадают с нулями функции $\bar{a}(\xi)$. Итак, числа $\{\xi_k, \bar{\xi}_k\}_{k=1}^N$ являются собственными значениями оператора $L(t)$, и других собственных значений этот оператор не имеет. Предположим, что все собственные значения оператора $L(t)$ простые, так, что

$$\phi(x, \xi_k) = C_k \psi(x, \xi_k), \quad \bar{\phi}(x, \bar{\xi}_k) = \bar{C}_k \bar{\psi}(x, \bar{\xi}_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

Справедливы следующие равенства

$$\bar{\psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \psi_2(x, -\xi) \\ -\psi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \phi_2(x, -\xi) \\ -\phi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\bar{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \bar{b}(\xi) = b(-\xi), \quad \bar{\xi}_k = -\xi_k, \quad \bar{C}_k = C_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Для функции $\psi(x, \xi)$ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi(x, \xi) = \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \int_x^\infty \mathbf{K}(x, s) \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ips} ds, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{K}(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) & K_2(x, s) \\ -K_2(x, s) & K_1(x, s) \end{pmatrix}.$$

В представлении (14) ядро $\mathbf{K}(x, y)$ не зависит от ξ и связано с $u(x)$ с помощью равенства

$$u(x) - c = 2K_2(x, x). \quad (15)$$

Компоненты ядра $\mathbf{K}(x, y)$ при $y > x$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$-\frac{2i}{c} \begin{pmatrix} K_2(x, y) \\ K_1(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x+y) \\ F_2(x+y) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_1(x, s) & K_2(x, s) \\ -K_2(x, s) & K_1(x, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s+y) \\ F_2(s+y) \end{pmatrix} ds = 0,$$

где

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{i}{c} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n (\xi_n - p_n) e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \bar{\mu}_n (\bar{\xi}_n - \bar{p}_n) e^{-i\bar{p}_n z} \right) - \\ &- \frac{i}{c} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [r(\xi) - r(-\xi)] e^{ipz} dp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [r(\xi) - r(-\xi)] e^{ipz} d\xi \right), \\ F_2(z) &= \left(\sum_{n=1}^N \mu_n e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \bar{\mu}_n e^{-i\bar{p}_n z} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{r(\xi) - r(-\xi)}{p} e^{ipz} d\xi, \\ r(\xi) &= \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \quad \mu_n = \frac{i}{p_n} \frac{C_n}{\dot{a}(\xi_n)}, \quad \bar{\mu}_n = -\frac{i}{\bar{p}_n} \frac{\bar{C}_n}{\dot{\bar{a}}(\xi_n)}. \end{aligned}$$

Определение. Набор величин

$$\left\{ r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}, \xi \in \mathbb{R}; \xi_k, \operatorname{Im} \xi_k > 0; C_k, k = \overline{1, N} \right\}$$

называется данными рассеяния для системы уравнений (9).

По данным рассеяния потенциал $u(x)$ определяется с помощью равенства (15).

Отметим, что вектор-функции

$$h_n(x) = \frac{\frac{d}{d\xi}(\phi - C_n \psi)|_{\xi=\xi_n}}{\dot{a}(\xi_n)}, \quad n = \overline{1, N} \quad (16)$$

являются решениями уравнений $LY = \xi_n Y$.

Заметим, что по предположению оператор L имеет только простые собственные значения, поэтому $\dot{a}(\xi_n)$ отличны от нуля.

Кроме того функции $h_n(x)$ обладают следующими асимптотиками

$$\begin{aligned} h_n &\sim -C_n \begin{pmatrix} \frac{i(\xi_n - p_n)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip_n x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \\ h_n &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi_n - p_n)}{c} \end{pmatrix} e^{-ip_n x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно (17) справедливо равенство

$$W\{\phi_n, h_n\} \equiv \phi_{n1} h_{n2} - \phi_{n2} h_{n1} = \frac{2C_n p_n (\xi_n - p_n)}{c^2}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Лемма 1. Если вектор-функции Y и Z являются решениями уравнений $LY = \xi Y$ и $LZ = \eta Z$, то для их компонент имеет место равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (y_1 z_1 + y_2 z_2) &= -i(\xi + \eta)(y_1 z_1 - y_2 z_2), \\ \frac{d}{dx} (y_1 z_2 - y_2 z_1) &= -i(\xi - \eta)(y_1 z_2 + y_2 z_1). \end{aligned}$$

Справедливость этой леммы доказывается непосредственной проверкой.

Эволюция данных рассеяния. Пусть потенциал $u(x, t)$ в системе уравнений (1) является решением уравнения

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = G(x, t), \quad (19)$$

где G достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Если потенциал $u(x, t)$ является решением уравнения (19) в классе функций (6), то данные рассеяния системы уравнений (9) с потенциалом $u(x, t)$ зависят от t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2ip)r^+ - \frac{c^4}{4a^2p^2(p-\xi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_1^2 + \phi_2^2) dx, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2ip_n + \frac{c^2}{2p_n(p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}) dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1}\phi_{n2} dx}, \quad n=1, N. \end{aligned}$$

Доказательство. Оператор

$$A = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6 \begin{pmatrix} u^2 & u_x \\ -u_x & u^2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 3 \begin{pmatrix} 2uu_x & u_{xx} \\ -u_{xx} & 2uu_x \end{pmatrix}, \quad (20)$$

удовлетворяет соотношению Лакса, т. е.

$$[L, A] \equiv LA - AL = i \begin{pmatrix} 0 & -6u^2u_x - u_{xxx} \\ -6u^2u_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому уравнение (19) можно переписать в виде

$$L_t + [L, A] = iR, \quad (21)$$

где $R = \begin{pmatrix} 0 & -G \\ -G & 0 \end{pmatrix}$.

Дифференцируя по t равенство $L\phi = \xi\phi$ получим $L_t\phi + L\phi_t = \xi\phi_t$, которое согласно (21) можно переписать в виде

$$(L - \xi)(\phi_t - A\phi) = -iR\phi. \quad (22)$$

Используя метод вариации постоянных из (22) находим

$$\phi_t - A\phi = \alpha(x)\psi + \beta(x)\phi. \quad (23)$$

Для определения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ получим

$$M\alpha_x\psi + M\beta_x\phi = -R\phi, \quad (24)$$

где $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для решения уравнения (24) удобно ввести следующие обозначения

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad \text{Согласно (11), (12) и определению вронскиана}$$

$$\hat{\psi}^T M \phi = -\hat{\phi}^T M \psi = \frac{2p(\xi - p)}{c^2} a(\xi), \quad \hat{\psi}^T M \psi = \hat{\phi}^T M \phi = 0.$$

Умножая (24) на $\hat{\phi}^T$ и $\hat{\psi}^T$ получим

$$\alpha_x = \frac{c^2 \hat{\phi}^T R \phi}{2ap(\xi - p)}, \quad \beta_x = -\frac{c^2 \hat{\psi}^T R \phi}{2ap(\xi - p)}. \quad (25)$$

Согласно (20) при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi_t - A\phi \rightarrow (4ip^3 - 6c^2ip)\phi,$$

поэтому на основании (23) при $x \rightarrow -\infty$ имеем

$$\beta(x) \rightarrow 4ip^3 - 6c^2ip, \quad \alpha(x) \rightarrow 0.$$

Следовательно, из (25) можно определить

$$\alpha(x) = -\frac{c^2}{2ap(\xi - p)} \int_{-\infty}^x \hat{\phi} R\phi dx,$$

$$\beta(x) = -\frac{c^2}{2ap(\xi - p)} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\phi dx + 4ip^3 - 6c^2ip.$$

Таким образом, равенство (23) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_t - A\varphi = & \left(\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^x \hat{\phi}^T R\phi dx \right) \psi + \\ & + \left(-\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\phi dx + 4ip^3 - 6c^2ip \right) \phi. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно (11), (12) равенство (26) примет вид

$$\begin{aligned} a_t \bar{\psi} + b_t \psi - A(a\bar{\psi} + b\psi) = \\ = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \hat{\phi}^T R\phi dx \psi + \left(-\frac{1}{a} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}^T R\phi dx + 4ip^3 - 6c^2ip \right) (a\bar{\psi} + b\psi). \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу $x \rightarrow \infty$ с учётом (20) получим

$$\begin{aligned} a_t = & -\frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\phi dx, \\ b_t = & \frac{c^2}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^T R\phi dx - \frac{c^2 b}{2ap(p - \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^T R\phi dx + (8ip^3 - 12c^2ip)b. \end{aligned}$$

Поэтому, при $\text{Im} \xi = 0$ из равенства

$$\frac{dr^+}{dt} = \frac{b_t a - a_t b}{a^2},$$

следует, что

$$\frac{dr^+}{dt} = (8ip^3 - 12c^2ip) \frac{b}{a} + \left(\frac{c^2}{2p(p - \xi)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^T R\phi dx,$$

или

$$\frac{dr^+}{dt} = (8ip^3 - 12c^2ip)r^+ - \frac{c^4}{4a^2 p^2 (p - \xi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_1^2 + \phi_2^2) dx.$$

Дифференцируя тождество $\varphi_n = C_n \psi_n$ по t , получим равенство

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt} = \frac{dC_n}{dt} \psi_n + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n} + C_n \left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_n} \cdot \frac{d\xi_n}{dt},$$

которое согласно (16), можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \frac{dC_n}{dt} \psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n) h_n \frac{d\xi_n}{dt}, \quad (27)$$

где $\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\xi=\xi_n}$.

Аналогично непрерывному спектру, учитывая (18), в случае дискретного спектра получим следующее равенство

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - A\varphi_n = \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{\phi}_n^T R\phi_n dx \right) h_n +$$

$$+ \left(\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{h}_n^T R \varphi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) \varphi_n,$$

которое, является аналогом равенства (26). Согласно (27) и пользуясь равенством $\varphi_n = C_n \psi_n$, последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_n}{\partial t} \psi_n + C_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n) \frac{d\xi_n}{dt} h_n - C_n A \psi_n = \\ & = \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n + \\ & + \left(\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^x \hat{h}_n^T R C_n \psi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) C_n \psi_n. \end{aligned}$$

Переходим в этом равенстве к пределу $x \rightarrow \infty$ с учётом (16) и (20):

$$\begin{aligned} & \frac{dC_n}{dt} \psi_n - \dot{a}(\xi_n) \frac{d\xi_n}{dt} h_n - C_n (4ip_n^3 - 6c^2 ip_n) \psi_n = \\ & = \left(-\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx \right) h_n + \\ & + \left(\frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n^T R \psi_n dx + 4ip_n^3 - 6c^2 ip_n \right) C_n \psi_n \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + \frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n^T R \psi_n dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= \frac{c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n^T R \varphi_n dx}{2C_n p_n (p_n - \xi_n) \dot{a}(\xi_n)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dC_n}{dt} &= \left(8ip_n^3 - 12c^2 ip_n + \frac{c^2}{2p_n (p_n - \xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1} \psi_{n1} + h_{n2} \psi_{n2}) dx \right) C_n, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= -\frac{c^2}{2C_n p_n (p_n - \xi_n) \dot{a}(\xi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что согласно тождеству

$$\dot{a}(\xi_n) = -\frac{ic^2}{C_n p_n (\xi_n - p_n)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1} \phi_{n2} dx, \quad (28)$$

последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\phi_{n1}^2 + \phi_{n2}^2) dx}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n1} \phi_{n2} dx}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Согласно (28) и (4), если функции $A_n(t)$ являются ненулевыми, то дискретный спектр оператора $L(t)$ будет простым.

Займёмся эволюцией данных рассеяния оператора $L(t)$, потенциал которого является решением системы (1).

Согласно условию (5) и равенствам (11)-(13) правую часть в уравнении (1), можно переписать в виде

$$G = 2 \sum_{\substack{k=1, \\ \operatorname{Im} \xi_k > 0}}^N (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2).$$

Легко заметить, что в силу леммы Римана-Лебега для неотрицательных t

$$G(x, t) = o(1) \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Нетрудно видеть, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотики

$$\varphi \sim a(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{ipx} + b(\xi) \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ipx},$$

$$\psi(x, \xi) \sim \begin{pmatrix} \frac{i(\xi - p)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \varphi_k \sim C_k \begin{pmatrix} \frac{i(\xi_k - p_k)}{c} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ip_k x},$$

а при $x \rightarrow -\infty$

$$\varphi(x, \xi) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx},$$

$$\psi \sim -a(\xi) \begin{pmatrix} -\frac{i(\xi - p)}{c} \\ -1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \bar{b}(\xi) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi - p)}{c} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \psi_k \sim \frac{1}{C_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\xi_k - p_k)}{c} \end{pmatrix} e^{-ip_k x}.$$

Применим результаты леммы 2 к системе уравнений (1). Сначала вычислим эволюции C_n . При ξ_k отличном от ξ_n согласно лемме 1 имеем следующее равенство

$$\begin{aligned} & (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2) h_{n2} \psi_{n2} + (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2) h_{n1} \psi_{n1} = \\ & = (\Phi_{k1}^2 h_{n2} \psi_{n2} - \Phi_{k2}^2 h_{n1} \psi_{n1}) + (\Phi_{k1}^2 h_{n1} \psi_{n1} - \Phi_{k2}^2 h_{n2} \psi_{n2}) = \\ & = \frac{1}{2} \{ (\Phi_{k1} h_{n2} - \Phi_{k2} h_{n1}) (\Phi_{k1} \psi_{n2} + \Phi_{k2} \psi_{n1}) + (\Phi_{k1} h_{n2} + \Phi_{k2} h_{n1}) (\Phi_{k1} \psi_{n2} - \Phi_{k2} \psi_{n1}) + \\ & + (\Phi_{k1} h_{n1} - \Phi_{k2} h_{n2}) (\Phi_{k1} \psi_{n1} + \Phi_{k2} \psi_{n2}) + (\Phi_{k1} h_{n1} + \Phi_{k2} h_{n2}) (\Phi_{k1} \psi_{n1} - \Phi_{k2} \psi_{n2}) \} = \\ & = -\frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\xi_k - \xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{k1} h_{n2} - \Phi_{k2} h_{n1}) (\Phi_{k1} \psi_{n2} - \Phi_{k2} \psi_{n1})] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\xi_k + \xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{k1} h_{n1} + \Phi_{k2} h_{n2}) (\Phi_{k1} \psi_{n1} + \Phi_{k2} \psi_{n2})] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда при $k \neq n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1} \psi_{n1} + h_{n2} \psi_{n2}) dx = 0.$$

Если $k = n$, то

$$\begin{aligned} & (\Phi_{n1}^2 - \Phi_{n2}^2) (h_{n2} \psi_{n2} + h_{n1} \psi_{n1}) = \\ & = \frac{1}{4i\xi_n} \frac{d}{dx} [(\Phi_{n1} h_{n1} + \Phi_{n2} h_{n2}) (\Phi_{n1} \psi_{n1} + \Phi_{n2} \psi_{n2})] + \Phi_{n1} \Phi_{n2} (\psi_{n1} h_{n2} - \psi_{n2} h_{n1}). \end{aligned}$$

Из (4) и (18), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (h_{n1} \psi_{n1} + h_{n2} \psi_{n2}) dx = \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n1} \Phi_{n2} W \{ \phi_n, h_n \} dx = \frac{2p_n (\xi_n - p_n)}{c^2} A_n(t).$$

Таким образом, согласно лемме 2

$$\frac{dC_n}{dt} = (8ip_n^3 - 12c^2ip_n + 2A_n(t))C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Подобным образом можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G \cdot (\varphi_{n1}^2 + \varphi_{n2}^2) dx = 0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2ip)r^+, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема. Если функции $u(x, t)$, $\Phi_{k1}(x, t)$, $\Phi_{k2}(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, являются решением задачи (1)–(5) в классе функций (6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= (8ip^3 - 12c^2ip)r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ \frac{dC_n}{dt} &= (8ip_n^3 - 12c^2ip_n + 2A_n(t))C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши (1)–(5) в классе функций (6).

Заключение. Выводятся эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака с простыми собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения мКдФ с самосогласованным источником, в случае конечной плотности.

Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в математической физике при интегрировании нелинейных уравнений и при решении некоторых задач физики плазмы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, *J. Phys. Soc. Japan*, **32**, pp.1681 (1972).
2. Gardner C.S., Green I.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095-1097 (1967).
3. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Обратная задача для системы Дирака, *ДАН СССР*, **167**(5), 967-970 (1966).
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, **61**(1), 118-134 (1971).
5. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, *ДАН СССР*, **207**(1) 44-47 (1972).
6. Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка, *ДАН СССР*, **277**(3), 559-562 (1984).
7. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. Москва, "Наука", (1986).
8. Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H. The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems, *Stud. Appl. Math.*, **53**(4), 249-315 (1974).
9. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения, *ДАН СССР*, **219**(6), 1334-1337 (1974).

10. Mel'nikov V.K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self- source, *Phys. Lett. A*, **128**, 488-4924 (1988).
11. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions. *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **38** (2021), 19–35
12. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа «ступеньки», *Теор. и матем. физика*, **129**(1), 38-54 (2001)
13. Уразбоев Г.У., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником в случае движущихся собственных значений. *Вестник ЕГУ, сер. "Математика. Компьютерная математика"* 8 (1), 84-94 (2005)
14. Хасанов А.Б., Мамедов К.А. О модифицированном уравнении Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником интегрального типа соответствующего кратным собственным значениям. *Узбекский математический журнал*, 81-93 (2007).
15. Leon J., Latifi A. Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves, *J.Phys. A: Math. Gen.* **23**, 1385-1403 (1990).
16. Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций, *Дифф. уравнения*, **50**(4), 536-543 (2014).
17. Романова Н.Н. N-солитонное решение “на пьедестале” модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, *Теор. и матем. физика*, **39**(2), 205-215 (1979).
18. Мамедов К.А. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником в классе функций конечной плотности в случае движущихся собственных значений. *Известия высших учебных заведений. Математика*, №10 с. 73–85 (2020).

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Арзикулов Зафаржон Одилович,

Старший преподаватель (PhD), Ферганский государственный технический университет

zafarbekarzikulov1984@gmail.com,

Абдуллабборов Абдухалим Абдугаффор угли,

Ассистент, Ферганский государственный технический университет

abduzhabborov.abdukhalim@gmail.com,

Аннотация. При изучении краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в прикладной математике, часто приходится составить систему уравнений в частных производных, удовлетворяемой гипергеометрическими функциями, и находить явные линейно независимые решения для этой системы. В настоящей работе мы строим автомодельные решения одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, которые выражаются через гипергеометрическую функцию от трех переменных высшего порядка.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение в частных производных, автомодельное решение, гипергеометрическая функция от трех переменных высшего порядка, система гипергеометрического типа.

SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF A THIRD-ORDER DEGENERATE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH FOUR VARIABLES

Abstract. When studying boundary value problems for some partial differential equations arising in applied mathematics, we often have to study of a system of PDE satisfied by hypergeometric functions and find an explicit linearly independent solutions for this system. In the present work, we construct a self-similar solutions of some degenerate PDE of the third order which are expressed in terms of the triple hypergeometric functions of the fourth order.

Keywords: Degenerating partial differential equation, self-similar solution, hypergeometric function in three variables, system of the hypergeometric type.

ТЎРТ ЎЗГАРУВЧИЛИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ БУЗИЛАДИГАН ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ АВТОМОДЕЛ ЕЧИМЛАРИ ҲАҚИДА

Аннотация. Амалий математикада пайдо бўладиган баъзи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишида, кўпинча, гипергеометрик функциялар томонидан қаноатлантириладиган тенгламалар системасини тузишга ва бу системанинг чизиқли эркин ечимларини топишга тўғри келади. Мазкур ишда бузиладиган учинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг уч ўзгарувчили юқори тартибли гипергеометрик функция орқали ифодаланадиган автомодел ечимларини топамиз.

Калим сўзлар: бузиладиган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, автомодел ечим, уч ўзгарувчили юқори тартибли гипергеометрик функцияси, гипергеометрик типдаги система.

Введение. Теория специальных функций, как область математического анализа, посвященная исследованию и применению высших трансцендентных функций, имеет давнюю историю и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и других разделов математики. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэромеханике, квантовой механике и теории потенциала, приводит к специальным функциям. Чаще всего они появляются при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Большие успехи, достигнутые в теории гипергеометрической функции одного переменного, стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных.

Большая заслуга в теории гипергеометрических функций двух переменных принадлежит к Горну [1], который исследовал, в частности, гипергеометрические функции второго порядка. Он установил, что, кроме некоторых функций, выражаемых через функции от одного переменного или через произведения двух гипергеометрических функций, каждая из которых зависит от одного переменного, существует 34 существенно различных гипергеометрических функций порядка 2 (список Горна). Таким образом, в случае двух переменных 14 полных и 20 конфлюэнтных гипергеометрических функций второго порядка. Горн изучил сходимость гипергеометрических функций от двух переменных [2, с. 221 – 224] и установил системы дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют [2, с. 227 – 230]. Горн ограничивался исследованием гипергеометрических функций двух переменных второго порядка. Гипергеометрические функции, порядок которых превышает 2, называются функциями Кампе-де-Ферье [3, с. 27].

Как известно, если порядок вырождающегося и сингулярного дифференциальных уравнений в частных производных с тремя переменными превышает два, то их любые решения выражаются через гипергеометрическую функции Кампе-де-Ферье, порядок которой равен порядку рассматриваемого уравнения. Например, в работе [4] все 8 автомодельные решения уравнения

$$Lu = x^n y^m u_t - t^k y^m u_{xxx} - t^k x^n u_{yyy} = 0, \quad m, n, k = \text{const} > 0$$

в области $\Omega = \{(x, y, t) : x > 0, y > 0, t > 0\}$ выписаны через гипергеометрическую функцию Кампе-де-Ферье. К такому направлению исследований примыкают работы [5, 6, 7].

Следуя Горну [1] определим гипергеометрическую функцию от трех переменных: тройной степенной ряд

$$\sum_{m, n, p=0}^{\infty} A(m, n, p) x^m y^n z^p \quad (1)$$

является гипергеометрическим рядом, если два отношения

$$\begin{aligned} \frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} &= f(m, n, p), & \frac{A(m, n+1, p)}{A(m, n, p)} &= g(m, n, p), \\ \frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} &= h(m, n, p), \end{aligned}$$

– рациональные функции от m , n и p .

Систему, которую удовлетворяет гипергеометрическая функция от трех переменных, можно записать с помощью дифференциальных операторов

$$\delta \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \sigma \equiv y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad \theta \equiv z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

в виде

$$\begin{cases} [F'(\delta, \sigma, \theta) x^{-1} - F(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \\ [G'(\delta, \sigma, \theta) y^{-1} - G(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \\ [H'(\delta, \sigma, \theta) z^{-1} - H(\delta, \sigma, \theta)] u = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$u = u(x, y, z)$ искомая гипергеометрическая функция и

$$\begin{aligned} \frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{F(m, n, p)}{F'(m, n, p)}, & \frac{A(m, n+1, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{G(m, n, p)}{G'(m, n, p)}, \\ \frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} &= \frac{H(m, n, p)}{H'(m, n, p)}. \end{aligned}$$

Таким образом, система, которую удовлетворяет гипергеометрическая функция от трех переменных (1) имеет вид (3).

В настоящее время известны 205 полные [3, с. 74 – 87] и 395 конфлюэнтные [8] гипергеометрические функции от трех переменных второго порядка. Интегральные представления типа Эйлера для 205 полных гипергеометрических функций от трех переменных установлены в [9], а системы, которым удовлетворяют эти же полные функции, составлены в [10].

Целью настоящей работы найти все автомодельные решения одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с четырьмя переменными. Для решения поставленной задачи требуется вводить в рассмотрение обобщенные гипергеометрические функции от трех переменных более второго порядка.

Обобщенная гипергеометрическая функция трех переменных. Обобщенная гипергеометрическая функция трех переменных порядка (M, N, P) определяется равенством [11](см. также, [3, с.44]):

$$F^{(3)}[x, y, z] \equiv F^{(3)} \left[\begin{matrix} (a)::(b);(b');(b'');(c);(c');(c''); \\ (e)::(g);(g');(g'');(h);(h');(h''); \end{matrix} ; x, y, z \right] \\ = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \Lambda(m, n, p) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!},$$

где

$$\Lambda(m, n, p) = \frac{\prod_{j=1}^A (a_j)_{m+n+p} \prod_{j=1}^B (b_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_{n+p} \prod_{j=1}^{B''} (b''_j)_{p+m} \prod_{j=1}^C (c_j)_m \prod_{j=1}^{C'} (c'_j)_n \prod_{j=1}^{C''} (c''_j)_p}{\prod_{j=1}^E (e_j)_{m+n+p} \prod_{j=1}^G (g_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{G'} (g'_j)_{n+p} \prod_{j=1}^{G''} (g''_j)_{p+m} \prod_{j=1}^H (h_j)_m \prod_{j=1}^{H'} (h'_j)_n \prod_{j=1}^{H''} (h''_j)_p}.$$

Здесь $(\lambda)_\nu$ – символ Похгаммера:

$$(\lambda)_0 = 1, (\lambda)_\nu = \lambda(\lambda+1) \cdot \dots \cdot (\lambda+\nu-1) = \frac{\Gamma(\lambda+\nu)}{\Gamma(\lambda)},$$

а $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция.

Порядок (M, N, P) обобщенной гипергеометрической функции $F^{(3)}[x, y, z]$ определяется следующим образом:

$$M = \max\{A + B + B'' + C, E + G + G'' + H + 1\}, \\ N = \max\{A + B + B' + C', E + G + G' + H' + 1\}, \\ P = \max\{A + B' + B'' + C'', E + G' + G'' + H'' + 1\}.$$

Гипергеометрические функции от трех переменных принято делить на два вида. Если $M = N = P = K$, то функция $F^{(3)}[x, y, z]$ называется полной обобщенной гипергеометрической функцией порядка K , в противном случае, конфлюэнтной (вырожденной).

Рассмотрим конфлюэнтную гипергеометрическую функцию $F^{(3)}[x, y, z]$ третьего порядка

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a :: -; -; -; & -; & -; & -; \\ - :: -; -; -; & c_1, c_2; & d_1, d_2; & e_1, e_2; \end{matrix} ; x, y, z \right] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}}{(c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}.$$

Для удобства введем обозначение:

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a :: -; -; -; & -; & -; & -; \\ - :: -; -; -; & c_1, c_2; & d_1, d_2; & e_1, e_2; \end{matrix} \middle| x, y, z \right] \equiv F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} \middle| x, y, z \right].$$

Таким образом,

$$F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} \middle| x, y, z \right] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p}}{(c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!}. \quad (4)$$

a, c_i, d_i и e_i - действительные числа, причем $c_i, d_i, e_i \neq 0, -1, -2, \dots$ ($i=1,2$).

Составим систему дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, соответствующую к функции $F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} \middle| x, y, z \right]$.

Введем обозначение

$$A(m, n, p) = \frac{(a)_{m+n+p}}{m! n! p! (c_1)_m (c_2)_m (d_1)_n (d_2)_n (e_1)_p (e_2)_p}$$

и составим отношения

$$\begin{aligned} \frac{A(m+1, n, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(m+1)(c_1+m)(c_2+m)}, \\ \frac{A(m, n+1, p)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(n+1)(d_1+n)(d_2+n)}, \\ \frac{A(m, n, p+1)}{A(m, n, p)} &= \frac{a+m+n+p}{(p+1)(e_1+p)(e_2+p)}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} F(m, n, p) &= a + m + n + p, & F'(m, n, p) &= (m+1)(c_1+m)(c_2+m), \\ G(m, n, p) &= a + m + n + p, & G'(m, n, p) &= (n+1)(d_1+n)(d_2+n), \\ H(m, n, p) &= a + m + n + p, & H'(m, n, p) &= (p+1)(e_1+p)(e_2+p). \end{aligned}$$

Теперь подставив $F(m, n, p)$, $G(m, n, p)$ и $H(m, n, p)$ в систему (3) и воспользовавшись определением (2) дифференциальных операторов δ , σ и θ , получим

$$\begin{cases} \left[\left(c_1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(c_2 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(1 + x \frac{\partial}{\partial x} \right) x^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0, \\ \left[\left(d_1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(d_2 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) y^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0, \\ \left[\left(e_1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(e_2 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) y^{-1} - \left(a + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] u = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Раскрывая скобки в системе (5), получим

$$\begin{cases} x^2 \omega_{xxx} + (c_2 + c_1 + 1)x\omega_{xx} + (c_1 c_2 - x)\omega_x - y\omega_y - z\omega_z - a\omega = 0, \\ y^2 \omega_{yyy} + (d_2 + d_1 + 1)y\omega_{yy} + (d_1 d_2 - y)\omega_y - x\omega_x - z\omega_z - a\omega = 0, \\ z^2 \omega_{zzz} + (e_2 + e_1 + 1)z\omega_{zz} + (e_1 e_2 - z)\omega_z - x\omega_x - y\omega_y - a\omega = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, гипергеометрическая функция, определенная равенством (4), действительно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (6).

Теперь определим все линейно независимые решения системы (6) в окрестности начала координат.

Решения системы (6) будем искать в виде

$$u = x^\lambda y^\mu z^\nu \omega(x, y, z), \quad (7)$$

где λ, μ и ν - произвольные числа, подлежащие к определению, $\omega(x, y, z)$ - произвольная функция.

Вычислив необходимые производные от функции и подставив их систему (5), получим

$$\begin{aligned} & x^2 \omega_{xxx} + [3\lambda + c_2 + c_1 + 1]x\omega_{xx} + [3\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda(c_2 + c_1 + 1) + c_1 c_2 - x]\omega_x + \\ & + [\lambda(\lambda - 1 + c_1)(\lambda - 1 + c_2)x^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \\ & y^2 \omega_{yyy} + [3\mu + d_2 + d_1 + 1]y\omega_{yy} + [3\mu(\mu - 1) + 2\mu(d_2 + d_1 + 1) + d_1 d_2 - y]\omega_y + \\ & + [\mu(\mu - 1 + d_1)(\mu - 1 + d_2)y^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \\ & z^2 \omega_{zzz} + [3\nu + e_2 + e_1 + 1]z\omega_{zz} + [3\nu(\nu - 1) + 2\nu(e_2 + e_1 + 1) + e_1 e_2 - z]\omega_z + \\ & + [\nu(\nu - 1 + e_1)(\nu - 1 + e_2)z^{-1} - (\lambda + \mu + \nu + a)]\omega = 0, \end{aligned}$$

Отсюда получим определяющую систему (indicate system)

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - 1 + c_1)(\lambda - 1 + c_2) = 0 \\ \mu(\mu - 1 + d_1)(\mu - 1 + d_2) = 0 \\ \nu(\nu - 1 + e_1)(\nu - 1 + e_2) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

имеющую 27 решений:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	0	0	0	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$
μ	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$
ν	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
λ	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$
μ	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$	$1 - d_3$	$1 - d_1$	$1 - d_2$	0	$1 - d_1$	$1 - d_2$
ν	0	0	0	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$	$1 - e_1$

	19	20	21	22	23	24	25	26	27
λ	0	0	0	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_1$	$1 - c_2$	$1 - c_2$	$1 - c_2$

μ	0	$1-d_1$	$1-d_2$	0	$1-d_1$	$1-d_2$	0	$1-d_1$	$1-d_2$
ν	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$	$1-e_2$

Следовательно, с учетом таблицы решений определяющей системы (8) и представление (7), система дифференциальных уравнений гипергеометрического типа (6) имеет 27 линейно независимые решения:

$$\omega_1(x, y, z) = F^{(3)} \left[\begin{matrix} a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (8)$$

$$\omega_2(x, y, z) = y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-d_1+a; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2+1-d_1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (9)$$

$$\omega_3(x, y, z) = y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-d_2+a; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1+1-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (10)$$

$$\omega_4(x, y, z) = x^{1-c_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-c_1+a; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (11)$$

$$\omega_5(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-d_1; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (12)$$

$$\omega_6(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-d_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1-d_2+1, 2-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (13)$$

$$\omega_7(x, y, z) = x^{1-c_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-c_2+a; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (14)$$

$$\omega_8(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_2-d_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_2-d_1+1, 2-d_1; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (15)$$

$$\omega_9(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_2-d_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1-d_2+1, 2-d_2; e_1, e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (16)$$

$$\omega_{10}(x, y, z) = z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-e_1+a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (17)$$

$$\omega_{11}(x, y, z) = y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-d_1-e_1; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (18)$$

$$\omega_{12}(x, y, z) = y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-d_2-e_1; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1-d_2+1; e_2-e_1+1; 2-e_1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (19)$$

$$\omega_{13}(x, y, z) = x^{1-c_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 2+a-c_1-e_1; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (20)$$

$$\omega_{14}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_1-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (21)$$

$$\omega_{15}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_2-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (22)$$

$$\omega_{16}(x, y, z) = x^{1-c_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-e_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (23)$$

$$\omega_{17}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_1-e_1; \\ 2-c_2, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (24)$$

$$\omega_{18}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} z^{1-e_1} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_2-e_1; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (25)$$

$$\omega_{19}(x, y, z) = z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 1-e_2+a; \\ c_1, c_2; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (26)$$

$$\omega_{20}(x, y, z) = y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-d_1-e_2; \\ c_1, c_2; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (27)$$

$$\omega_{21}(x, y, z) = y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-d_2-e_2; \\ c_1, c_2; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (28)$$

$$\omega_{22}(x, y, z) = x^{1-c_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; d_1, d_2; e_1-e_2+1, 2-e_2; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (29)$$

$$\omega_{23}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_1-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-c_1, 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (30)$$

$$\omega_{24}(x, y, z) = x^{1-c_1} y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_1-d_2-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_2, d_1-d_2+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (31)$$

$$\omega_{25}(x, y, z) = x^{1-c_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-e_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; d_1, d_2; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (32)$$

$$\omega_{26}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_1} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_1-e_2; \\ 2-c_2, c_1-c_2+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_2, e_1-e_2+1; \end{matrix} x, y, z \right], \quad (33)$$

$$\omega_{27}(x, y, z) = x^{1-c_2} y^{1-d_2} z^{1-e_2} F^{(3)} \left[\begin{matrix} 3+a-c_2-d_2-e_2; \\ 2-c_1, c_2-c_1+1; 2-d_1, d_2-d_1+1; 2-e_1, e_2-e_1+1; \end{matrix} x, y, z \right]. \quad (34)$$

1. Автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

Рассмотрим уравнение

$$Lu = x^n y^m z^p u_t - t^k y^m z^p u_{xxx} - t^k x^n z^p u_{yyy} - t^k x^n y^m u_{zzz} = 0, \quad m, n, k, p = \text{const} > 0 \quad (35)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z, t) : x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\}$.

Решение уравнения (35) будем искать в виде

$$u = P\omega(\xi, \eta, \zeta), \quad (36)$$

где

$$P = \left(\frac{3}{k+1} t^{k+1} \right)^{-1}, \quad \xi = -\frac{k+1}{3(n+3)^3 t^{k+1}} x^{n+3}, \quad \eta = -\frac{k+1}{3(m+3)^3 t^{k+1}} y^{m+3}, \quad \zeta = -\frac{k+1}{3(p+3)^3 t^{k+1}} z^{p+3}, \quad (37)$$

$$\alpha = \frac{n}{n+3}, \quad \beta = \frac{m}{m+3}, \quad \gamma = \frac{p}{p+3}. \quad (38)$$

Подставляя (36) в уравнение (35), получим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка

$$A_1 \omega_{\xi\xi\xi} + A_2 \omega_{\eta\eta\eta} + A_3 \omega_{\zeta\zeta\zeta} + A_4 \omega_{\xi\xi\eta} + A_5 \omega_{\eta\eta\xi} + A_6 \omega_{\xi\xi\zeta} + A_7 \omega_{\eta\eta\zeta} + A_8 \omega_{\xi\eta\zeta} + A_9 \omega_{\xi\zeta\eta} + A_{10} \omega = 0 \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= Pt^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \xi^2, \\
 A_2 &= Pt^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \eta^2, \\
 A_3 &= Pt^k x^n y^m z^p \left(\frac{k+1}{3t^{k+1}} \right) \zeta^2, \\
 A_4 &= Pt^k y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\alpha}{3} + \frac{2+\alpha}{3} + 1 \right) \xi, \\
 A_5 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\beta}{3} + \frac{2+\beta}{3} + 1 \right) \eta, \\
 A_6 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\gamma}{3} + \frac{2+\gamma}{3} + 1 \right) \zeta, \\
 A_7 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\alpha}{3} \frac{2+\alpha}{3} - 3\xi \right), \\
 A_8 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\beta}{3} \frac{2+\beta}{3} - 3\eta \right), \\
 A_9 &= Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}} \left(\frac{1+2\gamma}{3} \frac{2+\gamma}{3} - 3\zeta \right), \\
 A_{10} &= -3Pt^k x^n y^m \frac{k+1}{2t^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание определение (37) параметров α , β и γ , а также подставляя выражения коэффициентов $A_1 - A_{10}$ в уравнение (39), легко убедиться в том, что уравнение (39) равносильно следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}
 \xi^2 \omega_{\xi\xi\xi} + \left(\frac{1+2\alpha}{3} + \frac{2+\alpha}{3} + 1 \right) \xi \omega_{\xi\xi} + \left(\frac{1+2\alpha}{3} \frac{2+\alpha}{3} - \xi \right) \omega_{\xi} - \eta \omega_{\eta} - \zeta \omega_{\zeta} - \omega = 0 \\
 \eta^2 \omega_{\eta\eta\eta} + \left(\frac{1+2\beta}{3} + \frac{2+\beta}{3} + 1 \right) \eta \omega_{\eta\eta} + \left(\frac{1+2\beta}{3} \frac{2+\beta}{3} - \eta \right) \omega_{\eta} - \xi \omega_{\xi} - \zeta \omega_{\zeta} - \omega = 0 \\
 \zeta^2 \omega_{\zeta\zeta\zeta} + \left(\frac{1+2\gamma}{3} + \frac{2+\gamma}{3} + 1 \right) \zeta \omega_{\zeta\zeta} + \left(\frac{1+2\gamma}{3} \frac{2+\gamma}{3} - \zeta \right) \omega_{\zeta} - \xi \omega_{\xi} - \eta \omega_{\eta} - \omega = 0
 \end{cases}$$

Сравнивая теперь последнюю систему дифференциальных уравнений с системой (39), учитывая (36), легко выписать все 27 автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных (35) в виде:

$$u_1(x, y, z, t) = \lambda_1 PF^{(3)} \left[\begin{matrix} 1; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta \end{matrix} \right], \quad (40)$$

$$u_2(x, y, z, t) = \lambda_2 P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\beta}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \xi, \eta, \zeta \end{matrix} \right], \quad (41)$$

$$u_3(x, y, z, t) = \lambda_3 P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\beta}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{5-2\beta}{3}, \frac{4-\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (42)$$

$$u_4(x, y, z, t) = \lambda_4 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\alpha}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{\alpha-4}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (43)$$

$$u_5(x, y, z, t) = \lambda_5 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-\beta}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (44)$$

$$u_6(x, y, z, t) = \lambda_6 P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-\alpha-2\beta}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (45)$$

$$u_7(x, y, z, t) = \lambda_7 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\alpha}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (46)$$

$$u_8(x, y, z, t) = \lambda_8 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-2\alpha-\beta}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (47)$$

$$u_9(x, y, z, t) = \lambda_9 P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-2\alpha-2\beta}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{1+2\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (48)$$

$$u_{10}(x, y, z, t) = \lambda_{10} P \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{4-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (49)$$

$$u_{11}(x, y, z, t) = \lambda_{11} P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{2-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (50)$$

$$u_{12}(x, y, z, t) = \lambda_{12} P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (51)$$

$$u_{13}(x, y, z, t) = \lambda_{13} \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (52)$$

$$u_{14}(x, y, z, t) = \lambda_{14} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{6-\alpha-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (53)$$

$$u_{15}(x, y, z, t) = \lambda_{15} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-\alpha-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (54)$$

$$u_{16}(x, y, z, t) = \lambda_{16} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-2\alpha-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (55)$$

$$u_{17}(x, y, z, t) = \lambda_{17} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-2\alpha-\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (56)$$

$$u_{18}(x, y, z, t) = \lambda_{18} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{1-\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-2\alpha-2\beta-\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{2+\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (57)$$

$$u_{19}(x, y, z, t) = \lambda_{19} P \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{5-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (58)$$

$$u_{20}(x, y, z, t) = \lambda_{20} P \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (59)$$

$$u_{21}(x, y, z, t) = \lambda_{21} P \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{10-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{2+\alpha}{3}, \frac{1+2\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (60)$$

$$u_{22}(x, y, z, t) = \lambda_{22} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-\alpha-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (61)$$

$$u_{23}(x, y, z, t) = \lambda_{23} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{7-\alpha-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (62)$$

$$u_{24}(x, y, z, t) = \lambda_{24} P \xi^{\frac{1-\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-\alpha-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{4-\alpha}{3}, \frac{2+\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (63)$$

$$u_{25}(x, y, z, t) = \lambda_{25} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{10-2\alpha-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{2+\beta}{3}, \frac{1+2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (64)$$

$$u_{26}(x, y, z, t) = \lambda_{26} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{1-\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{8-2\alpha-\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{2+\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (65)$$

$$u_{27}(x, y, z, t) = \lambda_{27} P \xi^{\frac{2-2\alpha}{3}} \eta^{\frac{2-2\beta}{3}} \zeta^{\frac{2-2\gamma}{3}} F^{(3)} \left[\begin{matrix} \frac{9-2\alpha-2\beta-2\gamma}{3}; \\ \frac{5-2\alpha}{3}, \frac{4-\alpha}{3}; \frac{4-\beta}{3}, \frac{5-2\beta}{3}; \frac{5-2\gamma}{3}, \frac{4-\gamma}{3}; \end{matrix} \xi, \eta, \zeta \right], \quad (66)$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_{27}$ are constants.

$$P = \left(\frac{3}{k+1} t^{k+1} \right)^{-1}, \quad \xi = -\frac{k+1}{3(n+3)^3 t^{k+1}} x^{n+3}, \quad \eta = -\frac{k+1}{3(m+3)^3 t^{k+1}} y^{m+3}, \quad \zeta = -\frac{k+1}{3(p+3)^3 t^{k+1}} z^{p+3},$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Все автомодельные решения вырождающегося дифференциального уравнения (35) представляются равенствами (40) – (66).

Заклучение. Как известно, Сривастава впервые определил общие гипергеометрические функции от трех переменных произвольного порядка. Несмотря на то, что имеется множество работ, в которых исследованы вопросы сходимости и приводимости, получены формулы суммирования и преобразования, интегральные представления для гипергеометрических функций от трех переменных, очень мало работ, посвященных применению гипергеометрических функций от трех переменных высшего порядка к прикладным задачам.

Настоящая работа интересна тем, что она обсуждает приложения гипергеометрических функций от трех переменных третьего порядка – устанавливает автомодельные решения одного

вырождающегося дифференциального уравнения, возникающего в прикладных задачах математической физики.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Horn J. *Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen*//Math.Ann. 1889, No.34. P. 544-600.
2. Бейтмен А., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* М.: Наука, 1973. 296 с.
3. Srivastava H.M., Karlsson P.W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series.* New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.
4. Ruzhansky M., Hasanov A. Self-similar solutions of the model degenerate partial differential equations of the second, third, and fourth order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol.41, No. 6, pp. 1103 – 1114.
5. Irgashev B.Y. On particular solutions of one equation with multiple characteristics and some properties of the fundamental solution. *Ukr.Math.J.* , 2016, vol. 68, pp. 868 – 893.
6. Irgashev B.Y. Application of hypergeometric functions to the construction of particular solutions. *Complex variables and elliptic equations*. 2023, vol. 68, No. 8, pp. 1045 – 1068.
7. Hasanov A., Ruzhansky M. Hypergeometric expansions of solutions of the degenerating model parabolic equations of the third order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol.41, No. 1, pp. 27 – 31.
8. Эргашев Т.Г., Вохобов Ф.Ф., Махмудов Б.Б. Конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех переменных. *Бюллетень института математики*, 2022, Т. 5, № 6, с.149-177.
9. Хасанов А., Ружанский М.В. Интегральные представления типа Эйлера для гипергеометрических функций от трех переменных второго порядка// *Бюллетень Института математики*, 2019, 6, С. 73-223.
10. Hasanov A., Ruzhansky M. Systems of differential equations of Gaussian hypergeometric functions in three variables and their linearly-independent solutions. *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2022, 5(3), pp. 50 – 142.
11. Srivastava H.M. Generalized Neumann expansions involving hypergeometric functions. *Proc. Cambridge Philos.Soc.* 1967, 63(2), pp. 425 – 429.

АВТОМОРФИЗМЫ И ЛЕМНИСКАТА

Жабборов Насриддин Мирзоодилович,

Ташкентский государственный экономический университет

zjabborovnasridin@gmail.com

Хусенов Бехзод Эркин угли,

Бухарский государственный университет

b.e.husenov@buxdu.uz

Бобохонов Шарофиддин Собирович,

Каршинский государственный университет

boboxonovsharofiddin@1993gmail.com

Аннотация. В работе исследуются автоморфизмы лемнискатных областей, задаваемых уровнями модуля многочлена $P(z)$. Доказано, что каждая связная компонента области $|P(z)| < 1$ является односвязной и отображение $P: \Omega_0 \rightarrow D$ является правильным голоморфным накрытием. Установлено, что всякий автоморфизм лемнискаты, сохраняющий уровни $|P(z)| = \text{const}$ и переставляющий нули многочлена с сохранением кратностей, удовлетворяет соотношению $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$. Показано, что группа таких автоморфизмов конечна и совпадает с группой алгебраических симметрий многочлена $P(z)$.

Ключевые слова: лемниската, автоморфизм, многочлен, уровень модуля, симметрия, правильное отображение, принцип аргумента.

AUTOMORPHISMS AND LEMNISCATES

Abstract. The paper investigates the automorphisms of lemniscate domains defined by the level sets of the modulus of a polynomial $P(z)$. It is proved that each connected component of the domain $|P(z)| < 1$ is simply connected and that the mapping $P: \Omega_0 \rightarrow D$ is a proper holomorphic covering. Furthermore, any automorphism preserving the levels $|P(z)| = \text{const}$ and permuting the zeros of P with their multiplicities satisfies $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$. The group of such automorphisms is finite and coincides with the algebraic symmetry group of the polynomial $P(z)$.

AVTOMORFIZMALAR VA LEMNISKATLAR

Annotatsiya. Maqolada $P(z)$ ko'phadining moduli darajalaridan hosil bo'lgan lemniskata sohalarining avtomorfizmlari o'rganiladi. Har bir $|P(z)| < 1$ sohasi bilan bog'langanligi va $P: \Omega_0 \rightarrow D$ xaritasi to'g'ri golomorflik bilan qoplovchi ekanligi isbotlangan. Shuningdek, $|P(z)| = \text{const}$ darajalarini saqlovchi hamda P ko'phadining nollarini ularning ko'payish sonlari bilan almashtiruvchi har qanday avtomorfizm $P(f(z)) = e^{iz} P(z)$ shartni bajarishi ko'rsatildi. Bunday avtomorfizmlar guruhi chekli bo'lib $P(z)$ ko'phadining algebraik simmetriyalar guruhi bilan mos keladi.

Kalit so'zlar: Lemniskata, avtomorfizm, ko'phad, modul darajalari, simmetriya, to'g'ri akslantirish, akslantirish pirinsipi.

Введение. Современная геометрическая теория функций исследует взаимосвязь между аналитическими свойствами комплексных отображений и формой их областей определения. Одним из

фундаментальных объектов этой теории являются лемнискатные области – множества задаваемые уравнениями модуля многочлена или более общего голоморфного отображения

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1 \} \quad (1.1)$$

Где $P(z)$ -многочлен степени $n \geq 1$. Границы таких областей определяемые уравнением $|P(z)| = 1$, называют лемнискатами. Они являются естественным обобщением окружности когда $P(z) = z$.

Исследование автоморфизмов лемнискатных областей занимает важное место в комплексном анализе. В классическом случае, когда областью служит единичный диск автоморфизмы полностью описываются дробно – линейными преобразованиями Мёбиуса.

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a| < 1 \quad (1.2)$$

Образующими группу $Aut(D)$ сохраняющую уровни $|z| = const$ реализующую конформные вращения в гиперболической метрике.

Однако если область имеет лемнискатную форму, то структура автоморфизмов существенно усложняется. В общем случае такие области не являются кругами, а их границы могут иметь несколько компонент различающихся по топологии и кривизне. Поэтому описание всех автоморфизмов, сохраняющих внутреннюю лемнискату предстает собой самостоятельную и нетривиальную задачу.

Особых интерес вызывают отображения $f: \Omega \rightarrow \Omega$ которые:

- *Сохраняют уровни функции $|P(z)| = const$;
- *Переставляют нули многочлена $P(z)$ с сохранением их кратностей;
- *Поддерживают инвариантность границы $\partial\Omega = \{|P(z)| = 1\}$.

Такие отображения естественно рассматривать как автоморфизмы лемнискатной области согласованные с многочленом P .

Цель настоящей работы- строгое описание и доказательство аналитико-геометрических свойств автоморфизмов лемнискат порождённых многочленом $P(z)$.

В частности в работе:

1. Доказывается что каждая связная компонента области $|P(z)| < 1$ односвязна и что отображение $P: \Omega_0 \rightarrow D$ является правильным голоморфным накрытием диска конечной степени (Лемма 1).

2. Устанавливается что всякий автоморфизм сохраняющий уровни $|P(z)|$ и переставляющий нули P удовлетворяет соотношению $P(f(z)) = e^{i\theta} P(z)$ (**теорема 1**)

3. Показано что такие автоморфизмы сохраняют кратности нулей и инвариантность границы (**теорема 2**)

4. Доказано что группа всех автоморфизмов согласованных с P конечна (**теорема 3**).

Методы исследования основаны на сочетании классических приёмов геометрической теории функций принципа аргумента и локальных разложений Вейерштрасса, что обеспечивает строгость и полного доказательств.

Таким образом статья формирует законченное описание группы автоморфизмов лемнискатных областей определяемых многочленом $P(z)$ и выявляет дискретную структуру их симметрий.

Лемма 1. (Об односвязности и правильности компоненты лемнискаты)

Пусть $P(z)$ -нечулевой многочлен степени $n \geq 1$ и пусть

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1 \} \quad (1.3)$$

-лемнискатная область заданная уравнем модуля многочлена. Обозначем через Ω_0 фиксированную связную компоненту множества Ω .

Тогда выполняются следующие свойства:

1. Область Ω_0 односвязна:
2. Ограничение $P|_{\Omega_0} : \Omega_0 \rightarrow D = \{w : |w| < 1\}$ является правильным (proper) голоморфным отображением канечной степени m :
3. Число m равно сумме кратностей всех нулей многочлена P , принадлежащих Ω_0 :

$$m = \sum_{n \in \Omega_0} \text{ord}_{z_0} P \quad (1.4)$$

Пояснение происхождения леммы. Этот результат восходит классическим фактом геометрической теории функций и теории квазиконформных отображений-см.

Lehto & Virtanen, "Quasiconformal Mappings in the Plane" (1973, §14) и Ahlfors, "Lectures on Quasiconformal Mappings" (1966, Ch.1).

Для удобства дальнейшего использования ниже приводится полное доказательство в развернутом виде.

Доказательство

Шаг 0. Регулярные уровни. Выберем $r \in (0, 1)$ так что окружность $|w| = r$ не содержит критических значений многочлена P

$$\text{CritVal}(P) = \{P(z) : P'(z) = 0\}$$

Обозначим

$$\Omega_r = \{z : |P(z)| < r\}, \Omega_0(r) \text{ -компоненту, вложенную в } \Omega_0.$$

Шаг 1. Накрытие без ветвлений

Если окружность $|w| = r$ регулярна (не пересекает множеств критических значений). То

$$P : \Omega_0(r) \rightarrow \{|w| < r\}$$

Является голоморфным накрытием без ветвлений.

Так как диск $\{|w| < r\}$ односвязен любое его связное накрытие тривиально $\Omega_0(r)$ также односвязна ([Lehto & Virtanen, §14]).

Шаг 2. Предел при $r \uparrow 1$

Область Ω_0 представима как

$$\Omega_0 = \bigcup_{0 < r < 1} \Omega_0(r),$$

И каждая $\Omega_0(r)$ односвязна.

Объединение возрастающих односвязных областей также односвязно.

Следовательно, Ω_0 односвязна.

Шаг 3. Правильность отображения

Пуск $K \subset D$ - произвольный компакт.

Существует $\rho < 1$ такое, что $K \subset \{|w| \leq \rho\}$.

Тогда

$$P^{-1}(K) \cap \Omega_0 = \{z \in \Omega_0 : |P(z)| \leq \rho\}$$

Замкнуто и ограничено внутри Ω_0 .

Следовательно, компактно.

Это означает, что $P|_{\Omega_0}$ является пропер-образ компакта при обратном отображении компактен (см)[Ahlfors, Ch.1].

Шаг 4. Степень и число нулей

По принципу аргумента степень покрытия m равна числу нулей $P(z) - w$ в области Ω_0 (с учётом кратностей):

$$m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{P'(z)}{P(z) - w} dz, \quad |w| < 1, \quad (1.5)$$

Где $\Gamma_0 \subset \Omega_0$ -замкнутая кривая, охватывающая все нули $P(z) - w$ в Ω_0 .

При $w = 0$ формула (1,5) даёт именно сумму кратностей нулей $P(z)$ в Ω_0 :

$$m = \sum_{z_0 \in \Omega_0} \text{ord}_z P \quad (1.6)$$

Таким образом, отображение $P|_{\Omega_0}$ является голоморфным накрытием диска конечной степени m , а область Ω_0 -односвязной компонентной множества $|P(z)| < 1$.

Лемма доказана.

Комментарий.

* Свойство односвязности следует из отсутствия критических значений на регулярных уровнях (результаты Лехто-Виртанена).

* Правильность (properness) и формула (1.5)-прямое следствие принципа Аргумента (Ahlfors).

* Формула (1.6) имеет также топологическое толкование как степень отображения $P: \Omega_0 \rightarrow D$.

Теорема 1. (Автоморфизмы лемнискатных областей и сохранение уровней)

пусть $P(z)$ -многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : P(z) < 1\} \quad (1.7)$$

-фиксированная связная компонента лемнискатной области определенной условием $|P(z)| < 1$

Пусть $f \in \text{Aut}(\Omega_1)$ биективное голоморфное отображение $f: \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ с голоморфным обратным f^{-1}

Предположим что выполняются условия

1. f переставляет нули многочлена P внутри Ω_1 с сохранением кратностей
2. Для всех $z \in \Omega_1$ выполняется равенство сохранения уровней

$$P(f(z)) = P(z) \quad (1.8)$$

Тогда существует константа $\theta \in \mathbb{R}$ такая что

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \quad \text{для всех } z \in \Omega_0 \quad (1.9)$$

Доказательство

1. Вспомогательная функция

Определим голоморфную функцию

$$F(z) = \frac{P(f(z))}{P(z)} \quad (1.10)$$

Функция $F(z)$ корректно определена в $\Omega_0 \setminus Z$ где $Z = \{z : P(z) = 0\}$ множество нулей

внутри $P \Omega_1$

2. Устранимость особенностей в нулях многочлена

Пусть $a \in Z$ - нуль P кратности $m \geq 1$ и пусть $b = f(a)$ - его образ также нуль P той же кратности m (по условию (1))

Разложим функции локально в окрестностях a и b

$$P(z) = (z - a)^m g_a(z), \quad g_a(a) \neq 0$$

$$P(\omega) = (\omega - b)^m g_b(\omega), \quad g_b(b) \neq 0$$

Отображение f вблизи a имеет вид.

$$f(z) = b + c(z - a) + O\{(z - a)^2\}, \quad c = f'(a) \neq 0$$

Подставим $\varepsilon P(f(z))$

$$P(f(z)) = (f(z) - b)^m g_b(f(z)) = (a(z - a) + O(z - a)^2)^m g_b(f(z)) = c^m (z - a)^m g_b(f(z))(1 + O(z - a))$$

Следовательно

$$F(z) = \frac{P(f(z))}{P(z)} = c^m \frac{g_b(f(z))}{g_a(z)} (1 + O(z - a))_1$$

Что аналитично вблизи a .

Значит особенность F в a устранима и F продлевается до голоморфной функции на всей области Ω_0

3. Ограничение модуля

Из (1.8) следует

$$F(z) = \frac{|P(f(z))|}{|P(z)|} = 1 \quad \text{для всех } z \in \Omega_0$$

То есть $F(z)$ — голоморфная функция постоянного модуля 1 в области Ω_0

4. Постоянство функции $F(z)$ — не была константой то по принципу открытого отображения её образ должен содержать открытую область в $\mathbb{C}$.

Однако (1.11) показывает что $F(\Omega_0) \subset \{|\omega| = 1\}$ — одномерная кривая без внутренности. Это невозможно для голоморфного открытого отображения. Следовательно $F(z)$ — постоянна.

$$F(z) = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

5. Итоговое равенство

Возвращаясь к (1.10) получаем

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \quad \text{для всех } z \in \Omega_0$$

Что и требовалось доказать

Комментарии

1. Смысл условия (1.8)

это означает что, автоморфизм f сохраняет уровни модуля многочлена P то есть отображает кривые $P(z) = \text{const}$ в самих себя.

2. Сохранение кратностей условия (1) необходимо для устранимости особенностей в нулевых точках $P(z)$.

3. Интерпретируя формулы (1.9) все такие автоморфизмы f индуцируют вращение множества $P(\Omega_0)$ в плоскости ω , то есть f сопоставлено с умножением $P(z) = e^{i\theta} P(z)$. Группа таких автоморфизмов изоморфна подгруппе вращений диска $\text{Aut}(D)$.

4. Связь с классической геометрией функций. При $P(z) = z$ равенство (1.9) даёт стандартные автоморфизмы единичного диска $f(z) = c^{i\theta} z$. В более общем случае f -внутренний автоморфизм лемнискаты согласованный с многочленом P .

Теорема 2. Сохранение нулей и уровней многочлена автоморфизмами лемнискаты.

Пусть $P(z)$ -многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : P(z) < 1\} \quad (1.12)$$

-фиксированная связная компонента области лемнискаты.

Пусть $f \in \text{Aut}(\Omega_0)$ – биестивное голоморфное отображение области Ω_0 на себя для которого выполняется

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. f переставляет нули многочлена P внутри Ω_0 с сохранением их кратностей.
2. f сохраняет все уровни функции $P(z) = \text{const}$. В частности $f(\partial\Omega_0) = \partial\Omega_0$

Доказательство

(а) Сохранение нулей и их кратностей

Пусть $a \in \Omega_0$ – нуль P кратности $m \geq 1$

$$P(z) = (z-a)^m g_a(z), \quad g_a(a) \neq 0 \quad (1.14)$$

Из (3.11) следует

$$P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) = c^\theta (z-a)^m g_a(z) \quad (1.15)$$

Положим $b = f(a)$. Так как f голоморфно разложимо вблизи точки a :

$$f(z) = b + c(z-a) + O((z-a)^2),$$

Сравнивая (1.15) и (1.17), получаем равенство главных членов:

$$c^m g_b(b) = c^{t\theta} g_a(a)$$

Из (3.16) следует что $g_b(b) \neq 0$ то есть $b = f(a)$ также является нулём P той же кратности m .

Следовательно автоморфизм f представляет нули многочлена с сохранением кратностей.

(б) Сохранение уровней и границы

Взяв модуль обеих частей (1.13) получаем

$$|P(f(z))| = |c^{i\theta}| |P(z)| = |P(z)|$$

Следовательно f сохраняет каждую линию уровня $P(z) = \text{const}$ в частности.

$$f(\partial\Omega_0) = \{f(z) : P(z) = 1\} = \{z : |P(f^{-1}(z))| = 1\} = \{z : |P(z)| = 1\} = \partial\Omega \quad (1.19)$$

Тем самым граница и вся структура лемнискаты инвариантны относительно f

Комментарии

1. Смысл равенства (1.18)

Оно выражает локальную жёсткость автоморфизма вблизи каждого нуля a отображение f действует как поворот и масштаб $z \mapsto b + c(z-a)c|c|^m = 1$

2. Геометрическая интерпретация.

Аutomорфизм f сохраняет весь набор изолиний $P(z) = \text{const}$ он действует как вращение в координате $\omega = P(z)$ поэтому группа таких f изоморфна подгруппе вращений диска.

$$f_p = z \mapsto P^{-1}(c^{t\theta} P(z))$$

3. Роль условия $f(a) \neq 0$

Ненулевая производная гарантирует локальную обратимость и исключает ветвления, что делает сравнение порядков нулей корректным.

4. Аналогия с классическими случаями;

При $P(z) = z$ это даёт обычные автоморфизмы диска $f(z) = e^{i\theta} z$

при $P(z) = z^m$ автоморфизмы соответствуют вращениям, сохраняющим лемнискату $|z|^m = 1$

Теорема 3. (Конечность группы согласованных автоморфизмов.

Пусть $P(z)$ – многочлен степени $n \geq 1$

$$\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < 1\} \quad (2.1)$$

– фиксированная связная компонента лемнискатной области, и пусть

$$C := \{f \in \text{Aut}(\Omega_0) : \exists \theta \in R \text{ такое что } P(f(z)) = e^{i\theta} P(z) \forall z \in \Omega_0\} \quad (2.2)$$

Тогда группа C конечно

Подготовка обозначений

Обозначим множество нулей $P \in \Omega_0$ (с учётом кратности) через

$$Z = \{a_1, \dots, a_s\} \subset \Omega_0 \quad m_j := \text{ord}_{a_j} P (j=1, \dots, s) \quad (2.3)$$

Каждый $f \in C$ по формуле (2.2) согласован с P и, как следует из Теоремы 2, переставляет точки Z с.

Шаг 1. Гомоморфизм в группу перестановок нулей определим отображение

$$\Phi : C \rightarrow \text{Sym}(Z), \quad \Phi(f)(a_j) = f(a_j) \quad (2.4)$$

Из Теоремы 2 следует что $\Phi(f)$ действительно перестановка множества Z . причём кратности m_j сохраняются. Легко проверить что Φ – гомоморфизм групп:

$$\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g) \quad (2.5)$$

Так как $\text{Sym}(Z)$ – конечная группа (множество Z конечно) то её подгруппа $\text{im } \Phi$ конечна:

$$|\text{im } \Phi| < \infty. \quad (2.6)$$

Остаётся показать что ядро $\ker \Phi = \{f \in G : f(a_j) = a_j \forall a_j \in Z\}$ также конечно. Тогда по

$$|G| = |\text{im } \Phi| \cdot |\ker \Phi| < \infty \quad (2.7)$$

Шаг 2. Оценка $|\ker \Phi|$: случай $|Z| \geq 2$

Пусть $\ker \Phi \ni f$ фиксирует все нули $a_1, \dots, a_s$. Выберем риманову карту

$$\varphi : \Omega_0 \rightarrow D \text{ би-гомоморфизм.} \quad (2.8)$$

Рассмотрим

$$F := \varphi^0 f^0 \varphi^{-1} \subset \text{Aut}(D) \quad (2.9)$$

Так же $f(a_j) = a_j$, то F фиксирует точки $p_j := \varphi(a_j) \in D$. Если $|Z| \geq 2$ то F имеет две различные фиксированные внутренние точки диска; из классического описания автоморфизмов D следует, что тогда $F = \text{id}$ (автоморфизм диска не может иметь для разные фиксированные внутренние точки, кроме тождественного). Следовательно, $f = \text{id}$. Значит,

$$|Z| \geq 2 \Rightarrow \ker \Phi = \{\text{id}\} - \text{конечно} \quad (2.10)$$

Шаг 3. Оценка $|\ker \Phi|$: случай $|Z| = 1$

Пусть $Z = \{a\}$ – единственный нуль P в Ω_0 , его кратность $m := \text{ord}_0 P \geq 1$. Для $f \in \ker \Phi$ имеем $f(a) = a$. Локальные разложения (как в теореме 2):

$$P(z) = (z - a)^m g(z), \quad g(a) \neq 0, \quad (2.11)$$

$$f(z) = a + c(z - a) + O((z - a)^2), \quad c = f'(a) \neq 0, \quad (2.12)$$

Условие согласованности (4.2) даёт $P(f(z)) = e^w P(z)$ для некоторого $\theta = \theta(f)$. Сравнение главных членов (см. вывод типа (3.16)) приводит к

$$c^m g(a) = c^w g(a) \Rightarrow c^w = c^m \quad (2.13)$$

Перейдём к модели диска, как выше: $F = \varphi^0 f^0 \varphi^{-1} \subset \text{Aut}(D)$ причём $F(\varphi(a)) = \varphi(a)$.

Нормировкой можно считать $\varphi(a) = 0$ (заменяем φ на $T^0 \varphi$, где T -подходящий автоморфизм диска). Тогда всякий автоморфизм диска фиксирующий 0, имеет вид

$$F(w) = e^w w, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Из цепного правила получаем $F'(0) = f'(a) = c = c^w$. Совместно с (4.13) имеем

$$c^w = c^m = (c^w)^m = c^{r(a+2\pi k)m} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{m} \pmod{2\pi/m} \quad (2.15)$$

То есть угол α (а значит и F , и f) может принимать не более чем m различных значений:

$$\alpha \in \left\{ \frac{\theta}{m} + \frac{2\pi k}{m} : k = 0, 1, \dots, m-1 \right\} \quad (2.16)$$

Следовательно,

$$|\ker \Phi| \leq m < \infty \quad (2.17)$$

Завершение доказательства

Объединяя (2.6), (2.10) и (2.17), получаем

$$|G| = |\text{im} \Phi| \cdot |\ker \Phi| < \infty$$

Теорема доказана.

Комментарии и тонкие моменты

1. Почему случай $|Z| = 0$ невозможен для компоненты $|P| < 1$: по принципу аргумента, максимума модулей в каждой внутренней компоненте уровня $|P| < 1$ многочлен P имеет хотя бы один нуль.

2. Смысл конечности $|\ker \Phi|$ при $|Z| = 1$: локальная «жёсткость» в точке нуля разрешает только m дискретных «вращений» (в координате φ), согласованных с глобальным условием $P(f) = e^g P$.

3. Общий итог: группа всех автоморфизмов Ω_0 , согласованных с P в смысле (2.2), всегда конечна. При $|Z| \geq 2$ ядро тривиально; при $|Z| = 1$ возможны не более m элементов в ядре (где m - кратность единственного нуля).

Заключение. В работе рассмотрены аналитико-геометрические свойства автоморфизмов лемнискатных областей, задаваемых уровнями модуля многочлена $P(z)$. На основе классических методов теории голоморфных и квазиконформных отображений получены строгие результаты, описывающие структуру таких автоморфизмов.

1. Лемма 1 показала, что каждая связная компонента области $\{|P(z)| < 1\}$ является односвязной и что отображение $P: \Omega_0 \rightarrow D$ является провальным голоморфным накрытием диска конечной степени, равной сумма кратностей нулей P внутри Ω_0 . Тем самым установлено топологическое соответствие между внутренней геометрией лемнискаты и структурной нулей многочлена.

2. Теорема 1 доказала, что всякий автоморфизм $f \in \text{Aut}(\Omega_0)$. Сохраняющий уровни $|P(z)| = \text{const}$ и переставляющий нули P с сохранением кратностей, удовлетворяет равенству $P(f(z)) = e^\theta P(z)$,

Где $\theta \in \mathbb{R}$. Это равенство означает, что автоморфизмы лемнискаты индуцируют вращения в координате $w = P(z)$ и, следовательно, образуют подгруппу вращений группы автоморфизмов диска $\text{Aut}(D)$.

3. Теорема 2 установила жёсткость таких автоморфизмов: они не только сохраняют уровни функции $|P(z)|$, но и переставляют нули многочлена с теми же кратностями, обеспечивая локальную конформность и инвариантность границы $\partial\Omega_0$.

4. Теорема 3 показала, что группа всех автоморфизмов, согласованных с многочленом P в смысле условия $P(f) = e^\theta P$, является конечной. В частности, если внутри Ω_0 более одного нуля, автоморфизм единственен (тождественный), а при единственном нуле кратности m существует не более m допустимых вращений. Этот результат раскрывает дискретную природу симметрий лемнискатных областей.

Полученные утверждения формулируют завершённую классификацию автоморфизмов лемнискат, порождённых многочленом $P(z)$. Они показывают, что внутренняя геометрия лемнискаты полностью определяется распределением нулей многочлена и их кратностями, а допустимые преобразования сводятся к конечной группе вращений в образе диска.

В дальнейшем эти результаты могут служить базой для расширения анализа на более общие классы отображений- например для построения автоморфизмов областей, задаваемых уровнями гармонических субгармонических или псевдогоналитических функций, где сохраняется аналогичная структура инвариантности уровней и жёсткости.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Sadullaev A. *Plurisubharmonic functions and potential theory in complex spaces*. - Tashkent: Fan, 1982. - 212 p.
2. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a Class of A-Analytic Functions // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. — 2016. — Vol. 9(3). — P. 374–383.
3. Jabborov N.M., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Y. The Schwarz Inequality and the Schwarz Formula for A-Analytic Functions // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2022. — Vol. 264(6). — P. 703–714.
4. Brett D. Wick. *The Corona Problem, lecture notes generated for the CIMPA Summer School May 2 - 13, 2011*.
5. B. Bojarski, *Homeomorphic solutions of the Beltrami systems*, Dokl. Akad. Nauk USSR, 102, 661-664, 1955 (in Russian)
6. L. Carleson. *Interpolations by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem*, *Annals of Mathematics*, Volume 76, No. 3, (1962).
7. P. Koosis, *Introduction to H^p Spaces*, United Kingdom, Cambridge University Press, 1998.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, С КВАДРАТОМ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

Бойназаров Ахроржон Нумонжонович,

Кафедра прикладной математики и информатики

Ферганский государственный университет

Фергана, Узбекистан

ahror010185@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется нахождение элементарных решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего квадрат оператора Бесселя. Основной метод исследования основан на приведении уравнения к автономному виду с помощью подходящих замен и использовании операторов дробного порядка типа Эрдейи-Кобера. Рассмотрены специальные случаи широко используемых в физике и астрофизике уравнений, таких как уравнение Томаса-Ферми и уравнение Эмдена-Фаулера, для которых найдены точные (элементарные) решения в явном виде. Проанализированы решения линейной части уравнения, показано, что они представляют собой комбинацию полиномиальных, логарифмических и степенных функций. Полученные результаты могут быть применены в математической физике и в теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Оператор Бесселя, нелинейное уравнение, оператор Эрдейи-Кобера, уравнения Эмдена-Фаулера.

BESSEL OPERATORINING KVADRATI QATNASHGAN CHIZIQSIZ ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH

Annotatsiya. Ushbu maqolada Bessel operatori kvadrati qatnashgan chiziqsiz oddiy differensial tenglamaning elementar yechimlarini topish o'rganiladi. Tadqiqotning asosiy usuli tenglamani mos almashtirishlar yordamida avtonom shaklga keltirish va Erdélyi-Kober tipidagi kasr tartibli integrallash operatorlaridan foydalanishga asoslangan. Tomon-Fermi va Emden-Fowler tenglamalari kabi fizika va astrofizikada keng qo'llaniladigan tenglamalarning maxsus holatlari ko'rib chiqilib, ularning aniq (elementar) yechimlari ochiq ko'rinishda topilgan. Tenglamaning chiziqli qismi yechimlari tahlil qilinib, yechimlarning ko'phad, logarifmik va darajali funksiyalar kombinatsiyasidan tashkil topishi ko'rsatilgan. Olingan natijalar matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: Bessel operatori, chiziqsiz tenglama, Erdélyi-Kober operatori, Emden-Fowler tenglamalari.

SOLUTION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING THE SQUARE OF THE BESSEL OPERATOR

Abstract. This article investigates the finding of elementary solutions for a nonlinear ordinary differential equation containing the square of the Bessel operator. The main research method is based on reducing the equation to an autonomous form using suitable substitutions and employing Erdélyi-Kober-type fractional integration operators. Special cases of widely used equations in physics and astrophysics, such as the Thomas-Fermi equation and the Emden-Fowler equation, are considered, for which exact (elementary) solutions are found in explicit form. The solutions of the linear part of the equation are analyzed, showing that they consist of a combination of polynomial, logarithmic, and power functions. The obtained results can be applied in mathematical physics and the theory of differential equations.

Keywords: Bessel operator, nonlinear equation, Erdélyi-Kober operator, Emden-Fowler equations.

Введение. В теории дифференциальных уравнений уравнения, содержащие оператор Бесселя, имеют особое значение, так как они часто встречаются в различных областях физики, астрофизики, динамики газов и квантовой механики. Например, уравнение Томаса-Ферми в атомной физике и уравнение Лейна-Эмдена в астрофизике являются известными примерами таких уравнений. Эти

уравнения обычно имеют нелинейный характер, и нахождение их точных решений является сложной задачей. Уравнения, содержащие оператор Бесселя B_a , изучались в [1], уравнение Томаса-Ферми в атомной физике – в [8], [7], уравнение Лейна-Эмдена в астрофизике – в [9], а их интересные физические и математические свойства исследовались в [10], [11]. Одним из таких уравнений является уравнение Фаулера-Эмдена, которое изучалось с различных точек зрения, и ему посвящены обширные монографии.

В статье рассматривается нелинейное уравнение, содержащее квадрат оператора Бесселя. Квадрат оператора Бесселя B_a^2 представляет собой дифференциальное выражение четвертого порядка специальной структуры. Основной целью при решении данного уравнения является нахождение решений, которые могут быть выражены через элементарные функции, путем приведения его к автономному уравнению.

В работе сначала анализируются решения линейной части уравнения ($B_a^2 y(x) = 0$) с помощью оператора дробного порядка Эрдейи-Кобера. Затем на основе подходящих замен уравнение приводится к автономному виду. Нахождение решения основано на представлении автономного уравнения в виде алгебраического уравнения.

В нашем исследовании также рассматриваются частные случаи $a = 0$ (производная четвертого порядка) и $a = 1$. При этом решения выражаются в виде линейной комбинации функций вида x^k . Полученные результаты имеют не только теоретическое значение, но также могут быть применены при решении практических задач.

Постановка задачи. В нашем исследовании в области $\Omega = \{x \in R, x > 0\}$ мы занимаемся нахождением решения $y(x) \in C^4(0, \infty)$ нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего оператор Бесселя целого порядка:

$$B_a^2 y(x) = bx^{m-1}y^n(x), \quad 0 < a < 1 \quad (1)$$

где $B_a = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}$ – оператор Бесселя, а a, b, k, n, m – постоянные параметры, и обозначает соответствующее выражение.

$$B_a^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 = \frac{d^4}{dx^4} + \frac{2a}{x} \frac{d^3}{dx^3} + \frac{a^2 - 2a}{x^2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2a - a^2}{x^3} \frac{d}{dx}.$$

Справедлива следующая теорема [1].

Теорема 1. Если линейная часть нелинейного дифференциального

$$\text{уравнения } B_a^2 y(x) + \sum_{s=1}^l f_s(x)y^{m_s} = 0, \quad a_n(x) = 1, \quad 1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_l, \quad f_s(x) \in C^4(R), \quad f(x) \neq 0 \quad (2)$$

при помощи замены

$$y = v(x)z, \quad dt = udx \quad (3)$$

приводится к дифференциальному выражению с постоянными коэффициентами и выполняется условие

$$p_s u^4 = f_s(x)v^{m_s-1}, \quad p_s = \text{const} \quad (4)$$

то уравнение (2) преобразуется в автономное уравнение

$$\sum_{k=0}^3 b_k z^{(k)}(t) + \sum_{s=1}^l p_s z^{m_s}(t) = 0, \quad b_k = \text{const} \quad (5)$$

и решение уравнения (2) находится в виде

$$y = \rho v(x) \quad (6)$$

где ρ является решением алгебраического уравнения

$$b_0 \rho + \sum_{s=1}^l p_s \rho^{m_s} = 0. \quad (7)$$

При построении автономного уравнения (5) общее решение линейной части уравнения (2) должно иметь вид [3]

$$y(x) = v \sum_{k=0}^3 C_k e^{r_k \int u dx} \quad (8)$$

или должно выполняться условие (4).

В нашем исследовании мы используем следующие сведения:

Дополнительные сведения

1 Дробные интегралы Римана-Лиувилля.

Определение 1.[4] *Предположим, что $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Тогда*

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x > a \quad (9)$$

$$(I_{-b}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x < b, \quad (10)$$

где $\alpha > 0$, выражение (9) называется левосторонним, а (10) – правосторонним дробными интегралами Римана-Лиувилля.

2. Дробный оператор Эрдейи-Кобера

В работах Эрдейи и Кобера была введена следующая модификация дробного интегрирования:

$$I_{\gamma, \alpha} \varphi(x) = \frac{2x^{-2(\gamma+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\gamma+1} \varphi(t) dt, \quad (11)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\varphi(x) \in L(R^+)$.

В наших дальнейших работах мы будем использовать (11) в следующем виде:

$$I_{\frac{\gamma-1}{2}, \alpha} \varphi(x) = \frac{2x^{1-\gamma-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{\gamma} \varphi(t) dt. \quad (12)$$

Обратный интегральный оператор к (4) выражается следующим образом:

$$I_{\gamma, \alpha}^{-1} \varphi(x) = \frac{2x^{-2\gamma}}{\Gamma(p-\alpha)} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \right)^p \int_0^x (x^2 - t^2)^{p-\alpha-1} t^{2(\gamma+\alpha)+1} \varphi(t) dt, \quad (13)$$

где $p = [\alpha] + 1$.

Теорема 2. ([5, 6]) Если при $\alpha > 0$, $\gamma \geq -\frac{1}{2}$, $\varphi(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$ функция

$$x^{2\gamma+1} [B_{\gamma}^x]^{k+1} \varphi(x) \text{ интегрируема в нуле и выполняется } \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\gamma+1} \frac{d}{dx} [B_{\gamma}^x]^k \varphi(x) = 0, \quad k = \overline{0, m-1},$$

то справедливо следующее равенство:

$$[B_{\gamma+\alpha}^x + \lambda^2]^m J_{\lambda}(\gamma, \alpha) \varphi(x) = J_{\lambda}(\gamma, \alpha) [B_{\gamma}^x]^m \varphi(x).$$

Если $\lambda = 0$, то справедливо следующее равенство:

$$[B_{\gamma+\alpha}^x]^m I_{\gamma, \alpha} \varphi(x) = I_{\gamma, \alpha} [B_{\gamma}^x]^m \varphi(x).$$

Теперь найдем элементарные решения следующих нелинейных уравнений.

Применение оператора Эрдейи-Кобера для решения уравнений типа Эмдена-Фаулера или уравнения (1).

Будем искать решение уравнения (1) согласно теореме 1, приравнявая линейную часть к нулю,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 y(x) = 0 \quad (14)$$

введем обозначение в (14):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}\right)y(x) = F(x). \quad (15)$$

Тогда (14) можно записать в виде

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}\right)F(x) = 0. \quad (16)$$

Решением уравнения (16) будет

$$F(x) = \frac{\bar{C}_1}{1-a} x^{1-a} + \bar{C}_2 = C_1 x^{1-a} + C_2. \quad (17)$$

Решение уравнения (14) является решением уравнения (15), и мы будем искать его в виде

$$y = I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)\varphi(x), \quad (18)$$

где $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)\varphi(x) = I_{-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}}\varphi(x)$ равно (12) при $\gamma = 0$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{d}{dx}\right)I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)\varphi(x) = F(x) \quad (19)$$

Применим теорему 2 к выражению (19):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\varphi(x) = G(x), \quad (20)$$

где

$$G(x) = I^{-1}\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)F(x). \quad (21)$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^1 C_k x^k + \frac{1}{(1)!} \int_0^x (x-t) G(t) dt, \quad (22)$$

где $I_{0+}^2 G(x) = \frac{1}{(1)!} \int_0^x (x-t) G(t) dt$.

Сначала упростим (21), затем подставим в (22) и после некоторых вычислений получим:

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^{3-a}. \quad (24)$$

Теперь, подставляя (24) в (18) и упрощая выражение, в результате получим, что решение уравнения (14) равно

$$\begin{aligned} y &= I\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)\varphi(x) = \frac{2x^{1-a}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\frac{a}{2}-1} \varphi(t) dt \\ &= \frac{2x^{1-a}}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\frac{a}{2}-1} [C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^{3-a}] dt \\ y(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^{3-a}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для построения автономного уравнения для (1) выполним подстановки (3) и согласно условию (4), получаем $t = \ln x \Rightarrow u = x^{-1}$ в результате v будет равно:

$$v = x^{\frac{m+3}{n-1}}.$$

Следовательно, решение (25) выражается в виде (8) при $r_0 = \frac{m+3}{n-1}$, $r_1 = 1 + \frac{m+3}{n-1}$,

$r_2 = 2 + \frac{m+3}{n-1}$, $r_3 = 3 - a + \frac{m+3}{n-1}$ выполняются условие (4) и вид (8) из теоремы 1.

Теперь для построения автономного уравнения для (1) возьмем подстановку (3) в следующем виде:

$$y(x) = b^{-1} x^{\frac{m+3}{n-1}} z(t), \quad t'_x = x^{-1}. \quad (26)$$

Взяв производные (26) до четвертого порядка включительно и подставив в (1), на основании (5) запишем автономное уравнение:

$$\begin{aligned} & z^{IV}(t) - \left[2a + \frac{4m+6n+4}{n-1} \right] z'''(t) \\ & + \left[\frac{(m+3n)(3m+3n+4)}{(n-1)^2} + \frac{(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^2} - 2a \frac{3m+3n+4}{n-1} + (a^2 - 2a) \right] z''(t) \\ & - \left[\frac{(m+3n)(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^3} + \frac{(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} \right. \\ & \left. + 2a \frac{(m+3)(3m+5n+4)}{(n-1)^2} - (a^2 - 2a) \frac{2m+n+5}{n-1} + (2a - a^2) \right] z'(t) \\ & + \left[\frac{m+3n(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^4} - 2a \frac{(m+3)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} \right. \\ & \left. + (a^2 - 2a) \frac{(m+3)(m+n+2)}{(n-1)^2} - (2a - a^2) \frac{m+3}{n-1} \right] z(t) = b^{2-n} z^n(t). \end{aligned}$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) мы ищем в виде (6), и ρ будет равно:

$$\rho = \left[b^{n-2} P(m, n, a) \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{где } P(m, n, a) = \frac{m+3}{n-1} & \left[\frac{(m+3n)(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^3} - \frac{2a(m+n+2)(m+2n+1)}{(n-1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(a^2 - 2a)(m+n+2)}{(n-1)} - (2a - a^2) \right]. \end{aligned}$$

Используя (27), выразим элементарное решение уравнения (1) в виде (6) следующим образом:

$$y(x) = \left[b^{-1} P(m, n, a) \right]^{\frac{1}{n-1}} x^{\frac{m+3}{n-1}}.$$

Уравнение типа Томаса-Ферми.

$$B_0^2 y(x) = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}(x), \quad x > 0, \quad (28)$$

$$\text{где } B_0^2 = \frac{d^4}{dx^4}.$$

Решим уравнение (28) согласно теореме 1. Сначала найдем решение, приравняв линейную часть к нулю.

$$y^{IV}(x) = \frac{d^2}{dx^2} y''(x) = 0. \quad (29)$$

Решение уравнения (29):

$$y(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3. \quad (30)$$

Выражение (30) удовлетворяет (4) и (8) при $u = x^{-1}$, $u^4 = x^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v^{1/2} = x^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow v = x^{-7}$. Теперь построим автономное уравнение для (28), для этого возьмем производные согласно замене (3), подставим в (28) и получим следующее:

$$5040z(t) - 2414z'(t) + 431z''(t) - 34z'''(t) + z^{IV}(t) = z^{\frac{3}{2}}(t).$$

Элементарное решение уравнения (28) имеет вид (6), и ρ в нем находим согласно (7): $\rho = 5040^2$ и решение равно $y(x) = 5040^2 x^{-7}$.

В случай $\alpha = 1$ в уравнении (1)

$$B_1^2 y(x) = bx^{m-1} y^n(x) \quad (31)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^2 y(x) = 0 \quad (32)$$

Решение уравнения (32) с использованием (12), (13) и теоремы 2 запишем следующим образом:

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x \ln x. \quad (33)$$

Приведем решение (33) к виду (8).

$$v \left(C_1 e^{\int_1 u dx} + C_2 e^{\int_2 u dx} + C_3 e^{\int_3 u dx} + C_4 e^{\int_4 u dx} \int u dx \right) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x \ln x$$

Следовательно, из последнего слагаемого получаем $u = x^{-1}$ и, проверив условие (4) $x^{-4} = bx^{m-1}v^{n-1} \Rightarrow v = b^{-1}x^{\frac{3+m}{n-1}}$, находим, что оно равно. Отсюда видно, что решение уравнения (31) совпадает с решением уравнения (1) при $\alpha = 1$.

Заключение. В данной работе успешно найдены и проанализированы точные решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения вида $B_a^2 y(x) = bx^{m-1} y^n(x)$, содержащего квадрат оператора Бесселя целого порядка. Отмечены следующие основные результаты:

1. Эффективность метода: Метод приведения уравнения к автономному виду и использования операторов дробного порядка типа Эрдейи-Кобера оказался эффективным и позволил найти точные решения нелинейных уравнений.
2. Теоретическая и практическая значимость: Полученные результаты не только обогащают математическую теорию, но также имеют практические приложения для решения нелинейных дифференциальных уравнений, используемых в различных областях физики, астрофизики и техники.
3. Возможности для дальнейших исследований: Показана возможность применения данной методики к уравнениям, содержащим операторы Бесселя дробного порядка, что открывает новые направления для будущих исследований.

В заключение следует отметить, что предложенный в работе метод доказал свою эффективность при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, и для различных значений параметров были получены решения в явной виде.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Л. М. Беркович. Об уравнении фаулера-емдена и некоторых его обобщениях. № 381 -№ 409 (1972).
2. Sergey Sitnik, Shakhobiddin Karimov, Axrorjon Boynazarov. Solving the Cauchy Problem for an ordinary differential equation with an integer power of the Bessel operator using transmutation operators.
3. И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, представимых в виде операторов с постоянными коэффициентами. — Вестник МГУ. Серия математика, 1967, № 2, с. 3–13.

4. Уринов А.К., Ситник С.М., Шишкина Э.Л., Каримов Ш.Т. *Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения): учебное пособие; учебно-методическое издание; на русском языке; А.Уринов и др. Фергана: изд. "Фаргона", 2022.-192 с.*
5. Urinov, A.K., Karimov, Sh.T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type. *Lobachevskii J. Math.* 4(41), 102–110 (2020) <https://doi.org/10.1134/S199508022001014X>
6. Karimov, Sh.T. The Cauchy problem for the iterated Klein-Gordon Equation with the Bessel operator. *Lobachevskii J. Math.* 5(41), 768–780 (2020) <https://doi.org/10.1134/S1995080220050042>.
7. E. Fermi, *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*, *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 6 (1927), 602–607.
8. L. H. Thomas, The calculation of atomic fields, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 33 (1927), 542–548.
9. S. Chandrasekhar, *Vvedenie v uchenie o strukture zvezd* (translated from English: *An Introduction to the Study of Stellar Structure*), Moscow, 1950.
10. P. E. Emikh, *Teoriya ustoychivosti resheniy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy* (translated from English), Moscow, 1954.
11. Дж. Сансоне, *обыкновенные дифференциальный уравнение* (translated from Italian), Vol. 2, Москва, 1954.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНОМАЛЬНОЙ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Сулаймонов Фозил Уралович,

Джизакский государственный педагогический университет имени Абдуллы Кадыри
fozil.sulaymonov@mail.ru;

Эшдавлатов Зарифжон Зафар Ўзли,

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
z.eshdavlatov@mail.ru.

Холбоева Хайтхон Фарход кизи,

Джизакский государственный педагогический университет имени Абдуллы Кадыри

Аннотация. Рассмотрен аномальный перенос вещества в трещиновато-пористой среде, состоящей из одиночной трещины и граничащей с ней пористого блока (матрицы). Задача решена численно методом конечных разностей а дробная производная в уравнениях переноса определена в смысле Капуто. На основе численных расчетов показано, что уменьшение порядка производной по времени от 1 в уравнении переноса в матрице приводит к замедлению распространения профилей концентрации в матрице и одновременно к увеличению концентрационных профилей в трещине.

Ключевые слова: диффузия; дробные производные; пористый блок; трещиновато-пористая среда.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ANOMALOUS SOLUTE TRANSPORT IN A FRACTURED-POROUS MEDIUM

Abstract. Anomalous mass transport in a fractured porous medium consisting of a single fracture and an adjacent porous block (matrix) is considered. The problem is solved numerically using the finite difference method, and the fractional derivative in the transport equations is defined in the Caputo sense. Based on numerical calculations, it is shown that decreasing the order of the time derivative from 1 in the matrix transport equation slows the propagation of concentration profiles in the matrix and simultaneously increases the concentration profiles in the fracture.

Key words: diffusion; fractional derivatives; porous block; fractured-porous medium.

YORIQ-G'OVAK MUHITDA ANOMAL MODDA KO'CHISHI MASALASINI SONLI YECHISH

Annotatsiya. Bitta yoriq va unga qo'shni g'ovak blokdan (matritsadan) iborat yoriq g'ovak muhitda anomal modda ko'chishi ko'rib chiqiladi. Masala chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechiladi va ko'chish tenglamalaridagi kasr hosilasi Kaputo tarifi orqali hisoblanadi. Sonli hisob-kitoblarga asoslanib, matritsadagi ko'chish tenglamasida vaqt bo'yicha hosilasining tartibini 1 dan kamaytirganda matritsadagi konsentratsiya profillarining tarqalishini sekinlashtiradi va bir vaqtning o'zida yoriqdagi konsentratsiya profillarini oshirishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: diffuziya; kasr tartibli hosilalar; g'ovak blok; yoriq-g'ovak muhit.

Введение. Геологическое строение залежей нефти и газа обычно представляет собой сложную систему, и анализ массопереноса в этих средах показывает, что классическое уравнение диффузии, основанное на законе Фика, не способно адекватно описать аномальный характер переноса растворенных веществ, наблюдаемый в натурных и лабораторных экспериментах. Из-за сложности процессов переноса вещества в фрактальных средах для их моделирования начали применять нелокальные уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и координате [1].

Если рассматривать пористую среду как многофазное материальное тело, то в ней всегда можно выделить представительный элементарный объем (ПЭО), содержащий как твердую фазу (скелет пористой среды), так и пустотное пространство. Размер ПЭО подобран так, что физические параметры, представляющие распределения пустотного пространства и твердой матрицы в нем,

являются статистически значимыми [2]. В частности, трещиновато-пористую среду (ТПС) можно рассматривать как композицию из двух хорошо различимых образований: отдельных трещин или сетей трещин, и твердой среды или пористой матрицы, находящейся между трещинами (называемой пористой матрицей). Подробное описание ТПС и сетей трещин можно найти в [3]. Отдельные трещины представляют собой плоские разрывы или две твердые поверхности, окруженные пористой матрицей. Трещины рассматриваются как пористые среды с обычно более высокой проницаемостью, чем прилегающая пористая матрица [4–7].

Многочисленные эксперименты и данные, полученные на местности, свидетельствуют о том, что транспорт веществ в слоистых геологических структурах проявляет аномальное поведение [8-10]. Это выражается, например, в необычных скоростях движения и концентрациях минералов, асимметрии, резких передних фронтах и продолжительных "хвостах" в концентрационных профилях [11–14]. Результаты, представленные в [15], также подтверждают наличие аномальной нефиковской диффузии в средах с сложной структурой. Анализ характеристик хранилищ ядерных отходов также подтверждает аномальный характер переноса загрязняющих веществ [16]. Численные эксперименты демонстрируют, что изменение параметров, представляющих порядки дробных производных по времени, позволяет получать различные временные распределения концентрации, соответствующие наблюдаемым в экспериментах данным.

В данном исследовании рассматривается перенос вещества в отдельно взятом элементе трещиновато-пористой среды (ТПС), с учетом аномальности переноса. Моделирование транспорта растворенного вещества в трещине осуществляется с применением аномального уравнения диффузии, выведенного на основе соответствующего аномального закона Фика. Форма такого уравнения для диффузии через пористую среду фрактального типа базируется на концепции памяти. Решение данной задачи с учетом начальных и граничных условий осуществляется численно. Используя фрактальную производную модель, учитывается массообмен между трещиной и соседней пористой матрицей фрактальной геометрии. Сформулирована задача о переносе вещества при подаче жидкости с веществами с одного конца трещины. Получено и проанализировано численное решение задачи, определены поля концентрации растворенного вещества в трещине и прилегающей пористой среде. Исследовано влияние аномальных явлений на характеристики процесса переноса.

Постановка задачи. Рассмотрим элемент ТПС, состоящий из одной трещины и смежного с ней пористого блока (матрицы). Трещина является полубесконечным одномерным объектом [17, 18], так что распределение вещества и течение жидкости по ее поперечному сечению считается однородным. В такой постановке второе измерение трещины, т.е. ее толщина не принимается во внимание. Пористый блок занимает первую четверть плоскости. Таким образом, рассматривается область $R\{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$. Пусть в трещине жидкость течет с заданной постоянной скоростью v . С конца $x=0$ трещины подается жидкость с концентраций вещества c_0 . Первоначально трещина и пористый блок считаются заполненными чистой (без вещества) жидкостью. В трещине происходит конвективно-диффузионный перенос вещества, а в пористом блоке – только диффузионный. Процесс переноса в пористом блоке считаем аномальным, а в трещине процесс происходит без проявления аномальных явлений.

Уравнения переноса вещества и течение жидкости в элементе ТПС принимаем в виде

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} + v \frac{\partial c_f}{\partial x} = D_f \frac{\partial^2 c_f}{\partial x^2} + m_0 D_m \frac{\partial^{1-\gamma}}{\partial t^{1-\gamma}} \left(\frac{\partial c_m}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^\gamma c_m}{\partial t^\gamma} = D_m \frac{\partial^2 c_m}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где $c_f = c_f(t, x)$ – концентрация вещества в трещине, M^3/M^3 ; $c_m = c_m(t, x, y)$ – концентрация в матрице, M^3/M^3 ; D_f – коэффициент диффузии в трещине, M^2/c ; v – скорость движения жидкости; D_m – коэффициент аномальной диффузии в матрице, M^2/c^γ ; γ – порядки производных, $0 < \gamma \leq 1$; m_0 – коэффициент пористости матрицы; t – время, C ; x, y – координата, M .

Так как трещина моделируется как одномерный объект, распределение концентрации по ее поперечному сечению не рассматривается.

Пусть в среду с конца $x=0$ начиная с момента $t>0$ подается жидкость с постоянной концентрацией вещества c_0 . Тогда начальные и граничные условия имеют вид

$$c_f(0, x) = 0, \quad c_m(0, x, y) = 0, \quad (3)$$

$$c_f(t, 0) = c_0, \quad c_f(t, \infty) = 0, \quad (4)$$

$$c_m(t, x, 0) = c_f(t, x), \quad c_m(t, x, \infty) = 0. \quad (5)$$

Алгоритм численного решения. Для решения задачи (1) - (5) применяем метод конечных разностей [19]. В области $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}$ вводим сетку, где T – максимальное время, в течение которого исследуется процесс. Для этого интервал $[0, \infty)$ по направлению x разбиваем с шагом h_1 , а интервал $[0, \infty)$ по направлению y – с h_2 , и отрезок $[0, T]$ разбиваем на J частей с шагом τ . В результате имеем сетку:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{h_1 h_2 \tau} = \{ & (x_i, y_k, t_j), i = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; \\ & j = 0, 1, \dots, J; x_i = i h_1; y_k = k h_2; t_j = j \tau; \tau = T / J \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (1), (2) аппроксимируются на сетке $\omega_{h_1 h_2 \tau}$. Для этого используем явную схему, а дробные производные определим в смысле Капуто. Следовательно, аппроксимации имеют вид

$$\frac{(c_f)_i^{j+1} - (c_f)_i^j}{\tau} + v \frac{(c_f)_{i+1}^j - (c_f)_i^j}{h_1} = D_f \frac{(c_f)_{i-1}^j - 2(c_f)_i^j + (c_f)_{i+1}^j}{h_1^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{m_0 D_m}{\Gamma(1+\gamma) \tau^{1-\gamma} h_2} \times \left[\sum_{l=0}^{j-1} \left[(c_m)_{i,0}^{l+1} - (c_m)_{i,0}^l - (c_m)_{i,1}^{l+1} + (c_m)_{i,1}^l \right] \left((j-l)^{1-\gamma} - (j-l-1)^{1-\gamma} \right) \right], \\ & \frac{1}{\Gamma(2-\gamma) \tau^\gamma} \left[\sum_{l=0}^{j-2} \left((c_m)_{i,k}^{l+1} - (c_m)_{i,k}^l \right) \times \left((j-l+1)^\gamma - (j-l)^\gamma \right) + (c_m)_{i,k}^{j+1} - (c_m)_{i,k}^j \right] \\ & = D_m \frac{(c_m)_{i,k-1}^j - 2(c_m)_{i,k}^j + (c_m)_{i,k+1}^j}{\Gamma(2-\gamma) h_2^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ – сеточные значения концентраций $c_f(t, x)$ и $c_m(t, x, y)$ в точках сетки (t_j, x_i) и (t_j, x_i, y_k) , соответственно, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Начальные и граничные условия аппроксимируются как:

$$\begin{aligned} (c_f)_i^0 &= 0, & (c_m)_{i,k}^0 &= 0, \\ (c_f)_0^j &= c_0, & (c_m)_{i,0}^j &= (c_f)_i^j, \\ (c_f)_I^j &= 0, & (c_m)_{i,K}^j &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сеточные уравнения (7) и (8) приводятся к виду:

$$(c_f)_i^{j+1} = (c_f)_i^j + D_f \frac{(c_f)_{i-1}^j - 2(c_f)_i^j + (c_f)_{i+1}^j}{h_1^2} - \tau v \frac{(c_f)_{i+1}^j - (c_f)_i^j}{h_1} + \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{m_0 D_m}{\Gamma(1+\gamma) \tau^{1-\gamma} h_2} \left[\sum_{l=0}^{j-1} \left[(c_m)_{i,0}^{l+1} - (c_m)_{i,0}^l - (c_m)_{i,1}^{l+1} + (c_m)_{i,1}^l \right] \left((j-l)^{1-\gamma} - (j-l-1)^{1-\gamma} \right) \right], \\ (c_m)_{i,k}^{j+1} &= (c_m)_{i,k}^j + \frac{m_0 D_m \Gamma(2-\gamma) \tau^\gamma}{h_2^2} \left((c_m)_{i,k-1}^j - 2(c_m)_{i,k}^j + (c_m)_{i,k+1}^j \right) \\ & - \sum_{l=0}^{j-2} \left((c_m)_{i,k}^{l+1} - (c_m)_{i,k}^l \right) \times \left((j-l+1)^\gamma - (j-l)^\gamma \right), \quad i = \overline{0, I-1}, j = \overline{0, J-1}, k = \overline{0, K-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты и обсуждение. Для расчета полей $(c_f)_i^j, (c_m)_{i,k}^j$ по (10), (11) составлена специальная программа для ЭВМ. В расчетах использованы следующие значения исходных

параметров: $c_0 = 0,01$, $\text{м}^3/\text{м}^3$; $D_m = 5 \cdot 10^{-6}$, $\text{м}^2/\text{с}$; $D_f = 2 \cdot 10^{-5}$, $\text{м}^2/\text{с}$; $v = 1 \cdot 10^{-5}$, $\text{м}/\text{с}$; $m_0 = 0,35$ и различные γ .

На рис. 1, 2 показаны сечения поверхности концентрации c_m в трех точках $x = 0,1 \text{ м}$, $x = 0,3 \text{ м}$, $x = 0,5 \text{ м}$, когда диффузионный перенос в пористом блоке

На рис. 1 показаны классического случая $\gamma = 1$, происходит без проявления аномальных эффектов при различных значениях времени. При этом при малых значениях x получаются относительно большие концентрации c_m . Концентрационное поле с увеличением времени увеличивается как по направлению x , так и по направлению y .

На рис. 2 показаны аномального случая, когда значения γ уменьшаются от единицы. Как видно из рисунка, с уменьшением γ от 1 профили концентрации в целом принимают заниженные значения. Однако, вблизи трещины профили при уменьшении γ от 1 принимают завышенные значения.

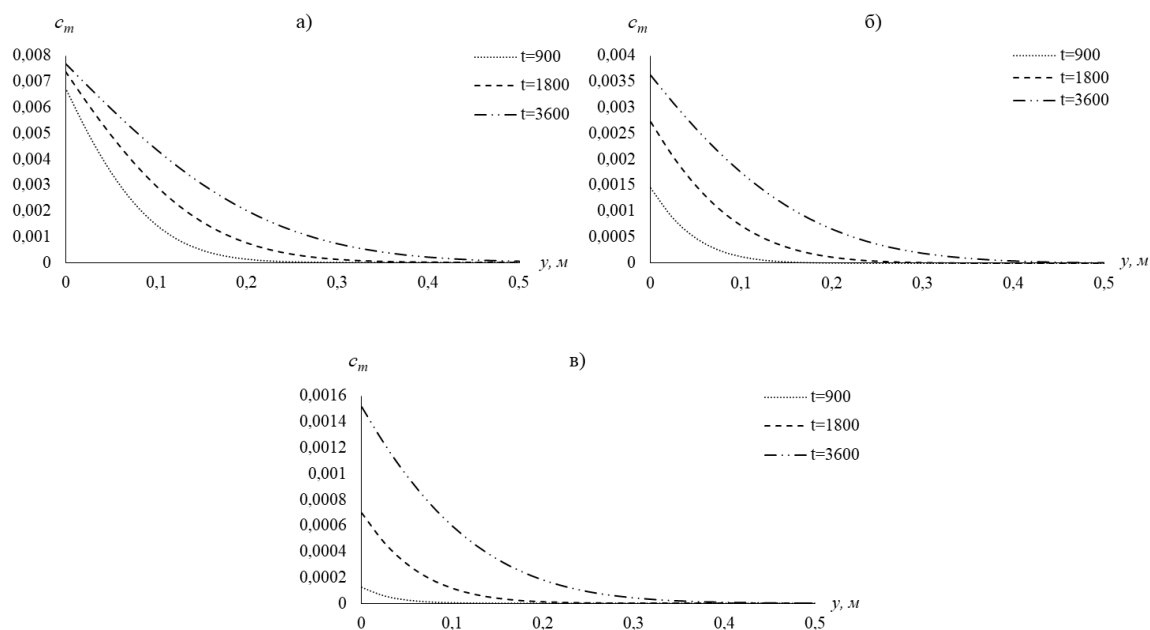


Рис. 1. Профили концентраций c_m при $\gamma = 1$, $\delta = 1$ и различных значениях времени, $x = 0,1 \text{ м}$ (а), $0,3 \text{ м}$ (б), $0,5 \text{ м}$ (в).

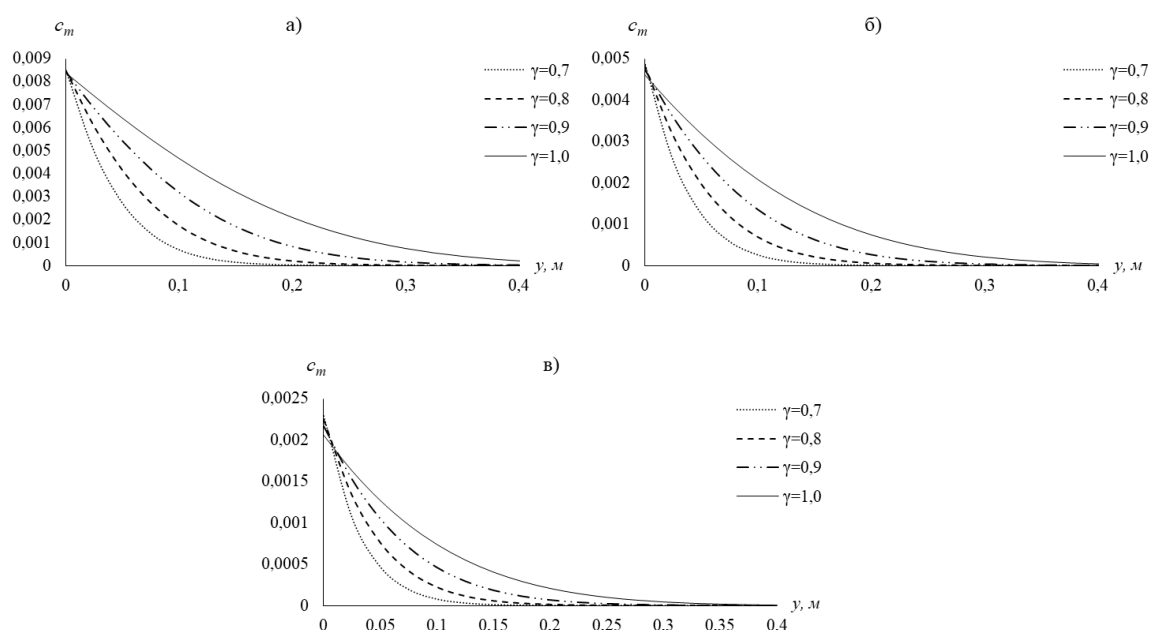


Рис. 2. Профили концентраций c_m при $\delta = 1$, $t = 3600$ с $x = 0,1$ м (а), $0,3$ м (б), $0,5$ м (в).

Закключение. Рассмотрена задача об аномальном переносе вещества в элементе ТПС, состоящем из одиночной трещины и присоединенного к ней пористого блока. Показано, что аномальный характер переноса вещества в пористом блоке элемента ТПС различным образом влияет на распределение его концентрации как в трещине, так и в пористом блоке. При «медленной» диффузии в пористом блоке процесс переноса в трещине интенсифицируется, наоборот при «быстрой» диффузии в простом блоке – замедляется.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Fomin S., Chugunov V., Hashida T. *Mathematical modeling of anomalous diffusion in porous media* // *Fractional Differential Calculus*, №1, 2011, pp 1-28.
2. Bear J., Tsang C. F., De Marsily G. *Flow and contaminant transport in fractured rock*. Academic Press, 2012.
3. Sahimi M. *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. – John Wiley & Sons, 2011.
4. Rezaei A., Pirvand M. *Semi-analytical solution for reactive contaminant transport in a filled-fractured system with intervening rock matrices: Case examples of tritium and uranium* // *Journal of Hydrology*. – 2022. – T. 608. – C. 127642.
5. Nelson R.A., Handin J. *Experimental study of fracture permeability in porous rock* // *AAPG Bulletin*, 61, pp. 227–236, 1977.
6. Gale J.E., Quinn O., Wilson C. Forster C., Witherspoon P.A., Jacobson L., *Hydrogeologic characteristics of fractured rocks for waste isolation* // *The Stripa Experience. Symp. Sci. Basis for Nucl. Waste Mgmt.*, Boston, MA, 27–30 November 1979, pp. 507–518, 1980.
7. Grisak G. E., Pickens J. F. *An analytical solution for solute transport through fractured media with matrix diffusion* // *Journal of Hydrology*. – 1981. – T. 52. – №. 1-2. – C. 47-57.
8. Li B., Bao R., Wang Y., Liu R., Zhao C. *Permeability evolution of two-dimensional fracture networks during shear under constant normal stiffness boundary conditions* // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. – 2021. – T. 54. – C. 409-428.
9. Sahimi M. *Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing* // *Reviews of Modern Physics*, 65, 1993, 1395–1534. (doi:10.1103/RevModPhys.65.1393)
10. Edery Y., Guadagnini A., Scher H., Berkowitz B. *Origins of anomalous transport in heterogeneous media: structural and dynamic controls* // *Water Resources Research*, 50, 2014, 1490–1505. (doi:10.1002/2013WR015111)

11. Hatano Y., Hatano N. Dispersive transport of ions in column experiments: an explanation of long-tailed profiles // *Water Resources Research*, **34**, 1998, 1027–1033. (doi:10.1029/98WR00214)
12. Haggerty R., Wondzell S.M. Johnson M.A., Power-law residence time distribution in the hyporheic zone of a 2nd-order mountain stream // *Geophysical Research Letters*, **29**, 2002, 1640. (doi:10.1029/2002GL014743)
13. Radilla G., Sausse J., Sanjuan B., Fourar M. Interpreting tracer tests in the enhanced geothermal system (EGS) of Soultz-sous-Forêts using the equivalent stratified medium approach // *Geothermics*, **44**, 2012, 43–51. (doi:10.1016/j.geothermics.2012.07.001)
14. Cardenas M.B., Slottke D.T., Ketcham R.A., Sharp Jr J.M. Navier-Stokes flow and transport simulations using real fractures shows heavy tailing due to eddies // *Geophysical Research Letters*, **34**, 2007, L14404. (doi:10.1029/2007GL030545)
15. Kärger J., Ruthven D.M. Diffusion in nanoporous materials: fundamental principles, insights and challenges // *New Journal of Chemistry*, **40**, 2016, 4027–4048. (doi:10.1039/C5NJ02836A)
16. Hodgkinson D., Benabderrahmane H., Elert M., Hautojärvi A., Selroos J.O., Tanaka Y., Uchida M. An overview of Task 6 of the Aspö Task Force: modelling groundwater and solute transport: improved understanding of radionuclide transport in fractured rock // *Hydrogeology Journal*, **17**, 2009, 1035–1049. (doi:10.1007/s10040-008-0416-9)
17. Khuzhayorov B., Mustofqulov J., Ibragimov G., Md Ali F., Fayziev B. Solute transport in the element of fractured porous medium with an inhomogeneous porous block // *Symmetry*, **12**(6), 1028.
18. Хужаёров Б.Х., Норкулов О.М. Юлдашев Т.Р. Гидродинамическая модель физико-химического заводнения залежей с трещиновато-пористыми коллекторами // *Узбекский журнал нефти и газа*, Выпуск 4, Ташкент, 2008, стр. 26-29.
19. Самарский А.А., Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. –616 с.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE SECOND ORDER EQUATION WITH FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE AND RIEMANN-LIOUVILLE INTEGRAL

Omonova Adibaxon Numonjon kizi,
Student Fergana State University
adibaxonomonova@gmail.com

Abstract. Recently, initial-boundary problems in a rectangular domain for differential equations in partial derivatives of both even and odd order have been intensively studied. In this case, non-degenerate equations or equations that degenerate on one side of the quadrilateral are taken as the object of study. But initial boundary problems (local) for equations with two or three lines of degeneracy remain unexplored. In this paper, in a rectangular domain, a second-order equation degenerating on two sides of the rectangular and contains the with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integro operators has been considered. The solution of the considered is written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is studied. An estimate for solution to problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Key words: initial-boundary problem, Caputo fractional derivative, degenerate differential equation, MittagLeffler-type functions of two variables.

KAPUTO KASR HOSILASI VA RIMAN-LYUVILL INTEGRALINI O'Z ICHIGA OLUVCHI BUZULADIGAN IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALASI

Annotatsiya. So'nggi vaqtlarda, to'rtburchak sohada, juft va toq tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang'ich-chegara masalalari faol o'rganilmoqda. Bu holda o'rganish obyekti sifatida yo bo'lmasa buzilmagan tenglamalar, yoki to'rtburchakning bir chekkasida buziluvchi tenglamalar olinadi. Ammo ikkita yoki uchta degeneratsiya chizig'iga ega tenglamalar uchun boshlang'ich-chegara (lokal) masalalari hali o'rganilmaganligicha qolmoqda. Ushbu maqolada to'rtburchak sohada, ikkita chekkasida degeneratsiyalanuvchi, Kaputo kasr hosilasi va Riman-Lyuvill integral operatorlarini o'z ichiga olgan ikkinchi tartibli tenglama qaralgan. Qaralayotgan masalaning yechimi spektral masalaning o'z funksiyalari sistemasiga nisbatan Fourier qatori ko'rinishida yozilgan. Ushbu qator va u orqali hadma-had differensiallashtirish yo'li bilan olingan qatorning bir hil yaqinlashuvi o'rganilgan. Masala yechimi uchun baho olingan, undan berilgan funksiyalarga bog'liq holda uzluksiz bog'liqlik kelib chiqadi.

Kalit so'zlar: boshlang'ich-chegaraviy masalasi, Kaputo kasr hosilasi, buziladigan differensial tenglama, ikki o'zgaruvchili Mittag-Leffler turidagi funksiyalar.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО И ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В последнее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в прямоугольной области для дифференциальных уравнений в частных производных как четного, так и нечетного порядка. При этом в качестве объекта исследования берутся невырожденные уравнения или уравнения, вырождающиеся на одной стороне четырехугольника. Однако начально-краевые задачи (локальные) для уравнений с двумя или тремя линиями вырождения остаются неисследованными. В данной работе в прямоугольной области рассматривается уравнение второго порядка, вырождающееся на двух сторонах прямоугольника и содержащее с дробной производной Капуто и интегрооператоры Римана-Лиувилля. Решение рассматриваемой задачи записывается в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Исследуется равномерная сходимость этого ряда и ряда, полученного из него почленным дифференцированием.

Получена оценка решения задачи, из которой следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: начально-краевая задача, дробная производная Капуто, вырожденное дифференциальное уравнение, функции типа Миттаг-Леффлера двух переменных.

Introduction. It is well known that the theory of differential equations has a long and rich history. Until the last quarter of the twentieth century, this theory primarily focused on differential equations of integer order. With the development of fractional (differential and integral) analysis in the late twentieth century, researchers began to study differential equations involving fractional derivatives. At present, numerous scientific articles have been published that address initial, boundary, and spectral problems for differential equations (both ordinary and partial) containing differential operators of fractional order in various forms (see, for example, [1]– [5], and the references therein). The books [6] and [7] have played a significant role in the development of this area.

Recently, there has been growing interest in the study of boundary value problems for second-order mixed-type equations involving fractional-order differential operators (see, for example, [8]–[14]).

In the aforementioned and other related works, only non-degenerate equations have been considered. However, both local and non-local boundary value problems for degenerate partial differential equations involving fractional derivatives of the unknown function remain largely unstudied. The investigation of boundary value problems for such equations is of great importance not only from a theoretical standpoint but also from a practical one, as these equations frequently arise in the mathematical modeling of various problems in gas and hydrodynamics, the theory of small surface bendings, mathematical biology, and other scientific fields.

Problem statement. Consider the following degenerate partial integro-differential equation in the domain $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$:

$${}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) + a I_{0t}^\beta u(t, x) + bu(t, x) = [x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x)], \quad (1)$$

where $T, \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, a, b$, are given real numbers, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \beta_1 < 1$, $u(x, t)$ - is an unknown function,

$${}^c D_{0t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-z)^{-\alpha} u_z(z, x) dz$$

-fractional derivative in the sense of Caputo [15] of the function $u(t, x)$, with respect to the argument t ,

$$I_{0t}^\beta u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} u(z, x) dz$$

-fractional integral in the Riemann-Liouville [15] sense of the function $u(t, x)$ with respect to the argument t .

Let us study the following initial-boundary value problem for equation (1).

Problem B. Find a function $u(t, x)$ with the following properties:

$$1) \quad u(t, x), \quad x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x, {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) \in C(\Omega);$$

2) in the domain Ω satisfies equation (1);

3) The following boundary conditions hold on $\partial\Omega$:

$$u(t, 1) = 0, \left[x^{\alpha_1} u_x(t, x) \right]_{x=0} = 0, t \in [0, T]; \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in [0, 1], \quad (3)$$

where $\varphi(x)$ is a given continuous function.

Uniqueness of the solution problem B

Before proceeding to prove the uniqueness of the solution to the problem B , we present the following auxiliary lemmas.

Lemma 1. If $V(0, x) = 0$ and $\alpha \in (0, 1)$, then the following inequality holds [19]:

$$I(x) = \int_0^t V(t, x) {}^c D_{0t}^\alpha V(t, x) dt \geq 0.$$

Lemma 2. If $\beta \in (0, 1)$, then the following inequality holds [19]:

$$I(x) = \int_0^t V(t, x) I_{0t}^\beta V(t, x) dt \geq 0$$

Theorem 1. If $a \geq 0, b \geq 0$, then problem B cannot have more than one solution.

Proof. Let us assume that there are two solutions $u_1(t, x)$ and $u_2(t, x)$ of the problem B . Their difference will be denoted by $u(t, x)$. Then the function $u(t, x)$ is a solution of equation (1) under homogeneous boundary conditions.

We multiply equation (1) by the function $u(t, x)$ and integrate over the domain Ω :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^T u(x, t) {}^c D_{0t}^\alpha u(x, t) dt + a \int_0^t dx \int_0^T u(x, t) I_{0t}^\beta u(t, x) dt + b \int_0^1 dx \int_0^T u^2(t, x) dt = \\ = \int_0^T dt \int_0^1 u(t, x) \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x dx \end{aligned}$$

Applying the rule of integration by parts to the inner integral of the last term and taking into account conditions (2), we have

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) dx = \\ = \int_0^1 dx \int_0^T u(t, x) {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) dt - a \int_0^1 dx \int_0^T u(t, x) I_{0t}^\beta u(t, x) dt - b \int_0^1 dx \int_0^T u^2(t, x) dt, \end{aligned}$$

from which, by virtue of Lemma 1, 2 and $a \geq 0, b \geq 0$ the equality follows:

$$\int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) dx = 0$$

Therefore, $x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t, x) = 0$ i.e. $u_x(t, x) = 0$ for $(t, x) \in \Omega$. Then $u(t, x) = \tau(t)$, where $\tau(t)$ - is an arbitrary function. Satisfying this function with the conditions $u(t, 0) = 0$, and taking into account, we obtain $u(t, x) \equiv 0, (t, x) \in \Omega$. Since $u(t, x) \in C(\overline{\Omega})$, then $u(t, x) \equiv 0, (t, x) \in \Omega$. Then, $u_1(t, x) = u_2(t, x), (t, x) \in \overline{\Omega}$

The proof of Theorem 1 is complete.

Study of the spectral problem. With the formal application of the Fourier method to the stated problem B , the following spectral problem arises: find those values of the parameter λ for which nontrivial solutions of the equation

$$Mv \equiv - \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} v'(x) \right]' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

exist, satisfying the following conditions:

$$\begin{cases} v(x), x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} v'(x) \in C[0,1]; \\ v(1) = 0, \left[x^{\alpha_1} v'(x) \right]_{x=0} = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

It is easy to show that the spectral problem $\{(4),(5)\}$ has a solution $v(x) \not\equiv 0$ only for, $\lambda > 0$ and it is equivalent to the following integral equation with symmetric kernel:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s) v(s) ds \quad (6)$$

where the function $G(x,s)$ is defined by formula

$$G(x,s) = \begin{cases} \int_s^1 \frac{dz}{z^{\alpha_1} (1-z)^{\beta_1}}, & x \leq s; \\ \int_x^1 \frac{dz}{z^{\alpha_1} (1-z)^{\beta_1}}, & x \geq s, \end{cases}$$

Then, according to the theory of integral equations, the integral equation (6) therefore, the problem (4), (5) has a countable number of eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k, \dots$ condensing at infinity, and the corresponding eigenfunctions $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_k(x), \dots$ form orthonormal system in the space $L_2(0,1)$.

The following lemmas can be proven on their own. Therefore, we present them without proof.

Lemma 3. Let the function $h(x)$ satisfy the following conditions:

$$h(x) \in C[0,1] \quad (7)$$

$$x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} h'(x) \in C[0,1], \quad (8)$$

$$h(1) = 0, \quad (9)$$

$$\left[x^{\alpha_1} h'(x) \right]_{x=0} = 0, \quad (10)$$

$Mh(x) \in L_2(0,1)$. Then, on the segment $[0,1]$ it can be expanded into an absolutely and uniformly convergent series by the system of eigen functions $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ of the problem (4), (5):

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k v_k(x),$$

$$\text{where } h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx.$$

Lemma 4. The following series converge uniformly on the segment $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} v'_k(x) \right]^2}{\lambda_k^2}.$$

Lemma 5. If function $h(x)$ the conditions (7), (9), $x^{\alpha_1/2}(1-x)^{\beta_1/2} [Mh(x)]' \in L_2(0,1)$ hold true, then the inequality

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} [h'(x)]^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx$.

Lemma 6. If function $h(x)$ the conditions (7)-(10), and $Mh(x)$ function conditions (7), (9) $x^{\alpha_1/2}(1-x)^{\beta_1/2} [Mh(x)]' \in L_2(0,1)$ hold true, then the inequality

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} \left\{ [Mh(x)]' \right\}^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x) v_k(x) dx$.

Uniqueness and stability of a solution to problem B

The solution to the problem B is formally sought in the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \quad (11)$$

where $v_k(x)$, $k \in N$ are the eigen functions of the problem (4), (5) and $u_k(t)$, $k \in N$ are the unknown functions to be determined.

Substituting (11) into (1) and (3), with respect to $u_k(t)$, we obtain the following problem:

$${}^c D_{0t}^\alpha u_k(t) + a I_{0t}^\beta u_k(t) + (\lambda_k + b) u_k(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (12)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad (13)$$

where $\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx$, $k \in N$.

To solve this problem, we apply the operator I_{0t}^α to equation (12) and, using the properties $I_{0t}^\alpha {}^c D_{0t}^\alpha u_k(t) = u_k(t) - u_k(0)$ and $I_{0t}^\alpha I_{0t}^\beta u_k(t) = I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t)$ and condition (13), we obtain the Volterra integral equation of the second kind:

$$u_k(t) + a I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t) + (\lambda_k + b) I_{0t}^\alpha u_k(t) = \varphi_k, \quad (14)$$

To solve equation (14), we apply the method of successive approximations:

$$u_{k,m}(t) = u_{k,0}(t) - a I_{0t}^{\alpha+\beta} u_{k,m-1}(t) - (\lambda_k + b) I_{0t}^\alpha u_{k,m-1}(t), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad u_{k,0}(t) = \varphi_k. \quad (15)$$

Using formula $I_{0t}^\alpha I_{0t}^\beta u_k(t) = I_{0t}^{\alpha+\beta} u_k(t)$, we calculate $u_{k,m}(t)$:

$$u_{k,m}(t) = \sum_{n=0}^m \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j I_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j} u_{k,0}(t), \quad (16)$$

where $\gamma = \alpha + \beta$, $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

According to the theory of integral equations [18], if there exists $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{k,m}(t)$ uniformly in t , then its limit function is a solution of the integral equation (14).

Passing to the limit at $m \rightarrow +\infty$ in (16) and substituting the expression $u_{k,0}(t)$, we obtain a solution to equation (14) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda - b)^j I_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j} (1), \quad (17)$$

Using the formula $I_{0t}^{\alpha_2}(1) = \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)}$, we can write (17) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j) + \alpha j + 1)} \quad (18)$$

We will prove that the series (18) is convergent a little later.

Using the formula [20] $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k B_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} B_{k,n}$, we can write (18) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{n=j}^{+\infty} C_n^j (-a)^{n-j} (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j) + \alpha j + 1)}.$$

If we introduce the notation $n = j + m$ here, we can write the last equation in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+j}^j (-a)^m (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma m + \alpha j}}{\Gamma(\gamma m + \alpha j + 1)}.$$

This equation can be written using the Mittag-Leffler function of two variables as follows:

$$u_k(t) = \varphi_k E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha, 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right), \quad t \in [0, T], \quad (19)$$

where E_2 -Mittag-Leffler function of two variables [21]

$$\begin{aligned} E_2 \left(\begin{matrix} \gamma_1, \alpha_1, \beta_1; \gamma_2, \alpha_2; \\ \delta_1, \alpha_3, \beta_2; \delta_2, \alpha_4; \delta_3, \beta_3; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m + \beta_1 n}}{\Gamma(\delta_1 + \alpha_3 m + \beta_2 n)} \frac{(\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_2 + \alpha_4 m)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3 + \beta_3 m)}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$x, y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R},$$

$$(\gamma_1)_{\alpha_1 m + \beta_1 n} = \frac{\Gamma(\gamma_1 + \alpha_1 m + \beta_1 n)}{\Gamma(\gamma_1)}.$$

If $\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0$ and $\beta_2 + \beta_3 - \beta_1 > 0$, then the series (20) is absolutely and uniformly convergent for arbitrary $\forall(x, y)$ [22].

It is not difficult to show that the following formulas are valid for the function E_2 :

$$I_{0t}^\beta \left(E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha, 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right) \right) = t^\beta E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \beta, \gamma, \alpha, 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\alpha t^\gamma \\ -(\lambda_k + b)t^\alpha \end{matrix} \right),$$

$$\begin{aligned}
 {}^c D_{0t}^\alpha \left(E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right) \right) &= -(\lambda_k + b) E_{\alpha, 1} \left(-(\lambda_k + b)t^\alpha \right) - \\
 &\quad -\alpha t^{\gamma-\alpha} E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right), \\
 E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right) &= \\
 &= E_{\alpha, 1} \left(-(\lambda_k + b)t^\alpha \right) - \alpha t^\gamma E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ \gamma + 1, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right), \\
 E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right) &- E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ 1 + \gamma - \alpha, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right) = \\
 &= (\lambda_k + b)t^\alpha E_2 \left(\begin{matrix} 2, 1, 1, 1, 0; \\ \gamma + 1, \gamma, \alpha; 2, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right),
 \end{aligned}$$

where $E_{\alpha_2, \beta_2}(z)$ - Mittag-Leffler function [15]:

$$E_{\alpha_2, \beta_2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)}, \quad \alpha_2 > 0.$$

Using these formulas, it can be proven that (19) is a solution to problem (12), (13).

It can be shown directly that (19) can be written in the form

$$\begin{aligned}
 u_k(t) &= \varphi_k \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} e_{1, -\alpha}^{1, 1/2} \left[-\alpha t^\gamma (1-\xi)^\gamma \eta \right] \\
 &\quad e_{1, -\gamma}^{1, 1/2} \left[-(\lambda_k + b)t^\alpha \xi^\gamma \eta \right] d\eta d\xi, \quad t \in [0, T]
 \end{aligned} \tag{21}$$

where $e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z)$ - Wright-type function [5]:

$$e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_3 k + \mu_3) \Gamma(\delta_3 - \beta_3 k)}, \quad \alpha_3 > 0, \quad \alpha_3 > \beta_3. \tag{22}$$

If $z < 0$, $\mu_3 \geq 0$, $\delta_3 \geq \beta_3$ the following inequality holds for function (22) [see page 87 in [5]:

$$e_{\alpha_3, \beta_3}^{\mu_3, \delta_3}(z) < \frac{1}{\Gamma(\mu_3) \Gamma(\delta_3)} \tag{23}$$

If we say $a \geq 0$, $b \geq 0$ and note that $\lambda_k > 0$, then using inequality (23), we obtain the following inequality for (21):

$$|u_k(t)| \leq |\varphi_k|, \quad t \in [0, T]. \tag{24}$$

Substituting (19) into (11), we find a formal solution to the problem A_{pq} :

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k E_2 \left(\begin{matrix} 1, 1, 1, 1, 0; \\ 1, \gamma, \alpha; 1, 1, 1, 1; \end{matrix} \middle| -(\lambda_k + b)t^\alpha \right) v_k(x), \quad \gamma = \alpha + \beta \tag{25}$$

Theorem 2. If $a > 0$, $b > 0$, $p \neq q$ and function $\varphi(x)$ satisfy the conditions of Lemma 6, then of the series (25) determines the unique solution of the problem A_{pq} .

Proof. To prove the theorem, it is sufficient to prove that the series (25) and the series corresponding to the functions $x_1^\alpha (1-x)^{\beta_1} u_x(x, t)$ converge uniformly in $\bar{\Omega}$, and the series corresponding to the functions $\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x {}^c D_{0t}^\alpha u(t, x) \in C(\Omega)$ converges uniformly on any compact $\Omega_1 \subset \Omega$.

Consider the series corresponding to the function $\left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x$.

Using inequality (24), then from (25) follows the inequality

$$\left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| \left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} v_k'(x) \right]' \right|.$$

Hence, by virtue of equation (4), on any compact set $\Omega_1 \subset \Omega$, we have

$$\left| \left[x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x(t, x) \right]_x \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_k v_k(x)|. \quad (26)$$

Based on the Cauchy-Schwartz inequality, we have

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_k v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^{3/2} \varphi_k| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Here, by Lemmas 6 and 4, the series on the right-hand side converge uniformly with respect to $x \in [0, 1]$. Then the series on the left-hand side converges uniformly with respect to $x \in [0, 1]$. Therefore, the series (26) converges absolutely and uniformly on the compact set $\Omega_1 \subset \Omega$. The convergence of the remaining series are proved similarly. Theorem 2 has been proved.

Theorem 3. If the conditions of Theorem 2 are met, then the following estimate is true for the solution of problem B:

$$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}} \quad (27)$$

$$\text{where } C_1 = \sup_{[0,1]} \sqrt{G(x, x)}, \quad \|f(x)\|_{L_{2,r}} = \int_0^1 r(x) f^2(x) dx, \quad r(x) = x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1}.$$

Proof. By virtue of Lemma 4, Lemma 5 and the inequality $|u_k(t)| \leq |\varphi_k|$, the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| v_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \varphi_k \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right|^{1/2} \leq \left[G(x, x) \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [\varphi'(x)]^2 dx \right]^{1/2} \leq C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} \end{aligned}$$

From this, inequality (27) follows. Theorem 3 is proven.

Conclusion. In this paper, a non-local initial-boundary value problem for a degenerate secondorder equation with a fractional Caputo derivative and a Riemann–Liouville integral is considered in a rectangular domain. Using the method of separation of variables, a solution to the problem is obtained in the form of a series that converges absolutely and uniformly in the closure of the domain under consideration. In addition, the uniqueness of the solution and its continuous dependence on the given functions are established.

REFERENCES:

1. Dzhrbashyan M.M., Neressyan A.B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order, *Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics*, 1968. vol.3, no.1, pp. 3–29 (In Russian).
2. Dzhrbashyan M.M. Boundary value problem for a fractional order differential operator of Sturm-Liouville type, *Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics*, 1970. vol.5, no.2, pp. 71–96 (In Russian).
3. Nakhushev A.M. Sturm-Liouville problem for an ordinary second-order differential equation with fractional derivatives in lower terms, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1977. vol.234, no.2, pp. 308–311 (In Russian).
4. Aleroev T.S. On the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional order differential operator, *Differential Equations*, 2000. vol.36, no.9, pp. 1278–1279 (In Russian).
5. Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005 (In Russian).
6. Nakhushev A.M. Fractional calculus and its applications. Moscow: Fizmatlit, 2003 (In Russian).
7. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987 (In Russian).
8. Karimov E.T., Toshternirov B.H. Tricomi type problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with the hyper-Bessel fractional differential operator, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2019. vol.4, pp. 9–14.
9. Abdullaev O.Kh. On a problem for a degenerate mixed-type equation with Caputo and Erdélyi-Kober fractional operators, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019. vol.71, no.6, pp. 723–738 (In Russian).
10. Masaeva O.Kh. Dirichlet problem for a generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with Gerasimov-Caputo fractional derivative, *Applied Mathematics and Physics*, 2020. vol.52, no.4, pp. 246–254 (In Russian).
11. Islomov B.I., Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problems for a loaded equation of parabolichyperbolic type with Caputo and Erdélyi-Kober fractional operators, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020. no.10, pp. 33–46 (In Russian).
12. Islomov B.I., Ubaydullaev U.Sh. Inverse problem for a mixed-type equation with fractional order operator in rectangular domain, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021. no.3, pp. 29–46 (In Russian).
13. Urinov A.K., Karimov E.T., Kerbal S. Boundary value problem with integral conjugation condition for a partial differential equation with Riemann-Liouville fractional derivative related to gas flow in a channel surrounded by porous medium, *Results in Science and Technology. Series: Contemporary Mathematics and Its Applications. Topical Reviews*, 2022. vol.210, pp. 66–76 (In Russian).
14. Karimov E.T., Ruzhansky M., Toshternirov B.Y. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, pp. 1–17.
15. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol.204. Amsterdam North-Holland Mathematics Studies: Elsevier, 2006.
16. Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 1*. Moscow: Nauka, 1965 (In Russian).
17. Naimark M.A. *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka, 1969. 528 pp. (In Russian).
18. Mikhlin S.G. *Lectures on Linear Integral Equations*. Moscow: Fizmatlit, 1959 (In Russian).
19. Urinov A.K., Usmonov D.A. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourth order equation with a fractional Gerasimov-Caputo derivative, *Bulletin of KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences*, 2023. vol.42, no.1, pp. 123–139. 10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.
20. Kapilevich M. B. The solution of singular Cauchy problems in basis series, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1967. vol.3, no.9, pp. 1560–1577.
21. Garg M., Manohar P., Kalla S.L. A Mittag-Leffler-type function of two variables, *Integral Transforms and Special Functions*, 2013, pp. [to be added] 10.1080/10652469.2013.789872.
22. Hasanov A., Karimov E.T. arXiv:2501.03918 [math.CA] <https://arxiv.org/pdf/2501.03918>, 2024.

JARAYONLAR STABILLIGINI NAZORAT QILISHNING UCH KOMPONENTLI TIZIMI

Axmedov Soxibjon Akbarovich,
f.-m.f.n, dotsent Andijon davlat universiteti
axmedovstat@gmail.com

Ablazova Kamola Saxibovna,
t.f.b.f.d(PhD), v.b.dotsent Qo‘qon universiteti Andijon filiali
k.s.ablazova@gmail.com

Dexqonboyeva Salomatxon Alisher qizi,
Andijon davlat universiteti magistr
[salomatxondexqonboyeva@gmail.com](mailto:salamatxondexqonboyeva@gmail.com)

Annotatsiya. Ushbu maqolada texnologik jarayonlar stabilligini nazorat qilish uchun an'anaviy Shuxart kartalarining imkoniyatlarini kengaytiruvchi uch komponentli statistik tizim taklif etilgan. Ma'lumki, Shuxartning to'rtta asosiy qoidasi jarayon o'rtachasi va dispersiyasidagi o'zgarishlarni aniqlasada, taqsimot shaklining buzilishini qamrab olmaydi. Shu sababli maqolada o'rtacha qiymat, dispersiya va taqsimotni bir vaqtda baholovchi kompleks nazorat mexanizmi nazariy asoslab berilgan. Smirnov statistik alomatiga asoslangan metodika texnologik jarayonlarni chuqur tahlil qilishda, xususan avtomobil bo'yash sexida gruntovka qalinligini nazorat qilish misolida samaradorligi bilan namoyon bo'ladi. Yondashuv statistik boshqaruvni yanada ishonchli tashkil etish, nosozlik sabablarini aniqlash imkonini beradi.

Kalit so'zlar: Jarayonning stabilligini aniqlovchi qoidalar, Shuxartning nazorat kartalari, Smirnov alomatiga asoslangan nazorat karta, gruntovka qalinligi texnologik operatsiyasi.

THREE-COMPONENT SYSTEM FOR PROCESS STABILITY CONTROL

Abstract. This article proposes a three-component statistical system that expands the capabilities of traditional Shewhart charts to control the stability of technological processes. It is known that Shewhart's four basic rules, while determining changes in the mean and variance of the process, do not cover the violation of the distribution shape. Therefore, the article theoretically substantiates a complex control mechanism that simultaneously evaluates the mean, variance, and distribution. The methodology based on the Smirnov statistical sign is effective in in-depth analysis of technological processes, in particular, in the example of controlling the thickness of the primer in a car paint shop. The approach allows for more reliable organization of statistical control and identification of the causes of failures.

Keywords: Rules for determining process stability, Shewhart control charts, Smirnov-based control chart, technological operation of primer thickness.

ТРЕХКОМПОНЕНТНАЯ СИСТЕМА КОНТРОЛЯ СТАБИЛЬНОСТИ ПРОЦЕССА

Аннотация. В данной статье предлагается трёхкомпонентная статистическая система, расширяющая возможности традиционных карт Шухарта для контроля устойчивости технологических процессов. Известно, что четыре основных правила Шухарта, определяя изменения среднего значения и дисперсии процесса, не охватывают нарушение формы распределения. Поэтому в статье теоретически обоснован комплексный механизм контроля, одновременно оценивающий среднее значение, дисперсию и распределение. Методология, основанная на статистическом признаке Смирнова, эффективна при глубоком анализе технологических процессов, в частности, на примере контроля толщины грунтовки в окрасочном цехе автомобилей. Подход позволяет более надёжно организовать статистический контроль, выявить причины отказов.

Ключевые слова: Правила, определяющие устойчивость процесса, контрольные карты Шухарта, контрольная карта, основанная на признаке Смирнова, технологическая операция толщины грунтовки.

Kirish. Statistik sifat nazorati tizimlarida Shuxart kartalari uzoq vaqt davomida asosiy vosita bo'lib kelgan. Bu kartalar bilan jarayonni stabililigini quyidagi o'rtacha kvadratik og'ish (σ)ga asoslangan 4 ta qoida yordamida amalga oshirilgan:

1) 1-qoida: Agar biror nuqta 3σ dan tashqarida joylashsa, jarayonda keskin o'zgarish mavjud va jarayon stabil emas.

2) 2-qoida: 3 ta ketma-ket nuqtadan 2 tasi 2σ dan tashqarida bo'lsa, jarayon stabil emas.

3) 3-qoida: 5 ta nuqtadan 4 tasi 1σ dan tashqarida bo'lsa, jarayonda sistematik o'zgarishlar mavjud, ya'ni jarayon statsionar emas.

4) 4-qoida: 8 yoki undan ko'p ketma-ket nuqtalar markaziy chiziq (μ -ning bahosi)ning bir tomonida bo'lsa, o'rtacha qiymat(μ) siljigan.

Bu qoidalar jarayonning faqat o'rtacha va dispersiya o'zgarishlarini aniqlaydi, ammo taqsimot shaklini nazorat qila olmaydi.

Hozirgi kunda murakkab texnologik, biologik, pedagogik va tabiiy jarayonlar statistik tahlili yanada nazariy asoslangan yondashuvlarni talab qilmoqda. Shu sababli, jarayonning stabililigini to'liq tasdiqlash uchun o'rtacha, dispersiya va taqsimot shaklini nazorat qiluvchi uch komponentli tizimni yaratish zarur bo'ladi.

1. Metod. Taklif etilgan nazariy induktiv metodda stabillikni nazorat qilish uch xil nazorat kartaga asoslanadi:

1) $\bar{X}$ -karta (o'rtacha qiymatlar kartasi) [1], [2] – o'rtacha qiymatning turg'unligini baholaydi:

- Nazorat chegaralari: $UCL(\text{Yuqori nazorat chegara}) = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$LCL(\text{Quyi nazorat chegara}) = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, bu yerda n –tanlanma hajmi.

- Stabillik sharti: barcha nuqtalar chegaralar orasida bo'lishi, trend yo'qligi.

2) S-karta (standart og'ish kartasi) [1], [2] – jarayon dispersiyasining o'zgarishini kuzatadi:

- Nazorat chegaralari: $UCL = B_4 \bar{S}$, $LCL = B_3 \bar{S}$, bu yerda $\bar{S}$ - S ning kichik guruhlar bo'yicha o'rtacha bahosi, B_3 va B_4 koeffisientlar tanlanma hajmiga qarab jadvallardan aniqlanadi [1].

- Stabillik sharti: barcha nuqtalar chegaralar orasida bo'lishi.

3) S (Smirnov)- nazorat kartasi [3] – taqsimot shaklining o'zgarishini aniqlaydi.

Agar birlik $t = \overline{1;l}$ momentlarda to'plangan ma'lumotlarning variatsion qatori $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)$ tanlanmalar uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa:

$$\rho_t^c = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \Phi(Y_{kt}^*) - \frac{2k-1}{2n} \right| + \frac{1}{2n} < \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}} = UCL_{\rho^c} \quad (1)$$

u holda texnologik jarayon stabil holatda bo'ladi. (1) da ρ_t^c -nominal normal taqsimot bilan tanlanmaga mos emperik taqsimot funksiya orasidagi maksimal farqni bildiradi va u stabillikni baholaydi. UCL_{ρ^c} - nazorat kartaning yuqori chegarasi, $k_{0,99}^c$ Smirnov taqsimoti kvantili bo'lib tenglama ildizi sifatida taqribiy topiladi, jumladan, $k_{0,99}^c = 1,035$. Agar $t = \overline{1;l}$ birlik vaqtlarda $\rho_t^c < \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa texnologik jarayon stabil bo'ladi aks holda nostabil bo'ladi. Ushbu nazorat karta Smirnov kriteriysiga asoslangan holda quyidagi teorema asosan hosil qilingan:

Teorema [4]. $\alpha = 0,01$ va $H_0: P(X < x) = F(x; \bar{X}_n; S_n^2)$ gipoteza o'rinli bo'lsa, u holda ρ^c -nazorat karta uchun nazorat qilinuvchi miqdor ρ_t^c va $UCL_{\rho^c} = \frac{k_{0,99}^c}{\sqrt{n}}$ kabi topiladi.

Izoh. Bunda $X \sim N(\bar{X}_n; S_n^2)$ jarayonga mos normal taqsimot bo'lib, uning parametrlari jarayon statistik nazoratda bo'lganda optimal baholanib topilgan.

Har bir parameter (matematik kutillma va dispersiya bahosi, ρ_t^c) stabillik talabi sifatida mustaqil nazorat qilinadi. Jarayon stabilligi har bir tanlanma uchun quyidagi shart bilan aniqlanadi:

matematik kutilmani turg'unligi;

dispersiyaning turg'unligi;

taqsimot shaklining o'zgarmasligi.

Bu yondashuv jarayonning to'liq stabililigini aniqlash imkonini beradi.

Taqdim etilgan metodika qo'llanilganda har bir vaqt oralig'ida birlik vaqtlardagi ma'lumotlar asosida tanlangan statistik kriteriylarga asoslangan formal tekshiruv amalga oshiriladi.

2. Natijalar. Tahlil natijalari shuni ko'rsatadiki, Shuxart qoidalari faqat o'rtacha va dispersiyaga oid ayrim holatlarni aniqlaydi.

Ammo ular taqsimot shakli o'zgarishini butunlay nazardan chetda qoldiradi. Uch komponentli tizim esa barcha ehtimoliy stabillik buzilishlarini qamrab oladi:

- o'rtacha siljishi;
- dispersiya oshiishi yoki kamayishi;
- taqsimotning assimetriya yoki "og'ir dum"larga o'tishi.

Bu yondashuv jarayonning istalgan turdagi statistik o'zgarishlarini erta aniqlash imkonini beradi. Fikrimizni tasdiqlash maqsadida avtomobil zavodining bo'yash sexidagi muammolarni o'rganish uchun olingan ma'lumotlar asosida texnologik jarayon stabiligini aniqlash jarayonini keltiramiz

Masala. Bo'yash sexida Cobalt mashinasini gruntovka qilishda nosozliklar topilgan. Sabablarini aniqlash va choralarni topish, jarayonni statistik boshqariladigan holatga keltirish talab qilinadi.

Texnologik operatsiya tavsifi Cobalt mashinasining payvandlangan korpusi liniyada bo'yash sexiga kiritiladi va robotlar yordamida gruntovka qilinadi. Gruntovka qalinligi bo'yicha andoza [45; 70] mk kabi.

Endi yuqorida keltirilgan uch xil nazorat kartalar bilan quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Maxsus tuzilgan kod asosida ma'lumotlarga asosan nazorat kartalar qurish va jarayonning holatini aniqlash;

2. Jarayonning potentsial ko'rsatkichini aniqlash. Holat bo'yicha tashxis qo'yish.

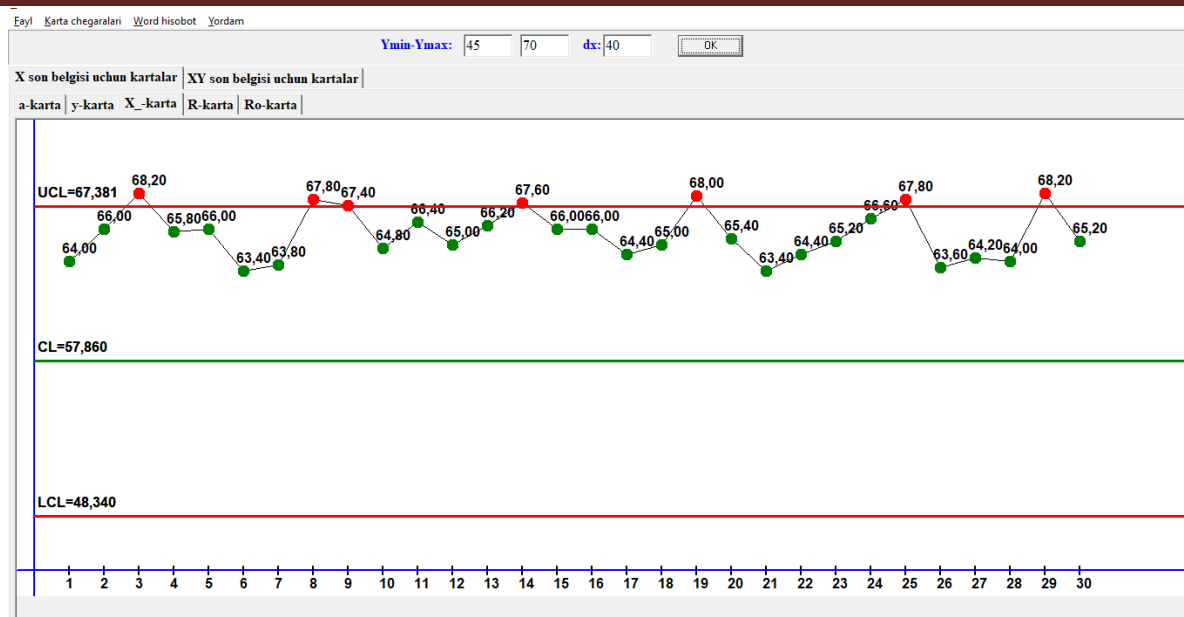
Ma'lumotlarni tayyorlash statistik tahlil. Gruntovka qalinligini o'lchovchi asbobi bilan o'lchash ishlari bajariladi. Ma'lumotlar asosida Smirnov nazorat kartasini $t = 1, 2, 3$ birlik vaqtlarida diagrammasini quramiz.



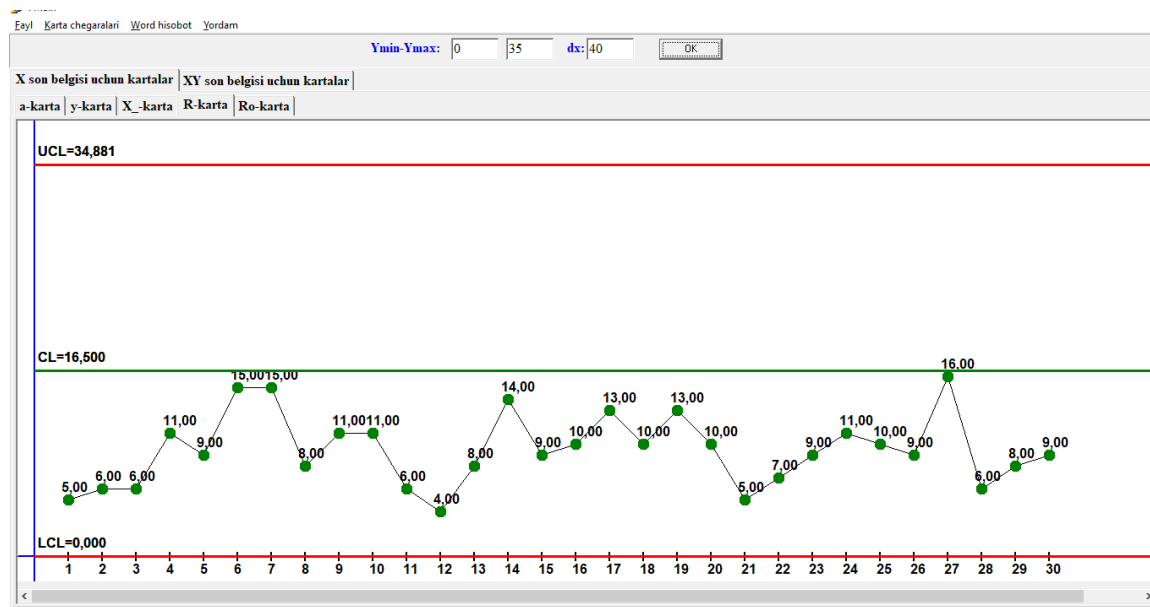
1-rasm. p^c -nazorat karta

1-rasmgagi diagrammaga asosan $t = 1; 2$ birlik vaqtlarda jarayon stabil, $t = 3$ birlik vaqtda esa stabillik buzilyapti. Buni sababini aniqlash uchun qo'shimcha tekshiruvlar Shuxartning $\bar{X} - R$ qo'shloq nazorat kartasi bilan amalga oshiramiz.

Jarayon holatini $n = 5$ hajmli oniy tanlamalardan iborat $k=30$ ta kichik guruhlar tuzib $(\bar{X} - R)$ – qo'shloq nazorat kartalar diagrammasini quramiz.



2-rasm. $\bar{X}$ – nazorat karta



3-rasm. R – nazorat karta

NKning o'qish qoidasiga ko'ra [1],[2] sexdan olingan ma'lumotlar uchun o'rta qiymatlar $\bar{X}$ kartasida (2-rasm) hamma nuqtalar CL dan yuqorida joylashgan va UCL dan yuqorida nuqtalar mavjud, variatsiya qulochi R kartasida (3-rasm) esa deyarli hamma nuqtalar CL dan quyida joylashgan. Bu anomaliy holatlar gruntovka qalinligida andozadan chetlanishlar mavjudligini ko'rsatadi. Ishlab chiqarishda bunga turli sabablar bo'lishi mumkin, masalan, kraskani qo'yilib ketishi, elektr tizimidagi nosozliklar, robotlarni nosoz ishlashi kabi. Shu sexdagi mas'ullar bu nosozliklar robotlar tomonidan yon tomonlarga qaraganda old va orqa kapotlarga qalinroq gruntovka qilinishi deb aniqlashdi. Bu gruntovka qiluvchi robotni to'la mukammallashtirilmaganligi sabab bo'lishi mumkin deb ko'rsatdilar. Bunda hisoblaslar texnologik jarayonning o'rtacha potentsial ko'rsatkichi, ya'ni chiqayotgan sifatsiz mahsulotlar ulushi 13,7% ni tashkil etadi. Nosozlikni vaqtida to'g'rilash katta chiqimni oldini oladi. Bizning eng muhim natijamiz jarayonlarni uch komponentli tizim asosida yuqoridagi kabi stabililigini ta'minlab turishdan iborat.

Munozara. Uch komponentli tizim Shuxart qoidalarining induktiv tabiatiga nisbatan ancha ishonchli.

U taqsimotga bog'liq emas, chunki S statistiklari umumiy ko'rinishdagi taqsimotlarni baholash imkonini beradi. Shuningdek, bu metod tabiiy eksperimental ma'lumotlarda uchraydigan taqsimot shaklining buzilishlarini ham aniqlaydi, bu esa Shuxart metodologiyasida mavjud bo'lmagan imkoniyatdir.

Tadqiqot natijalariga ko'ra, jarayon stabiligini to'liq tasdiqlash uchun uch parametr – o'rtacha, dispersiya va taqsimot shaklini nazorat qilish zarur. Shu maqsadda taklif qilingan uch komponentli nazorat kartalari tizimi: nazariy asoslangan; universal; yuqori sezgirlikka ega va Shuxart qoidalarining to'liq o'rnini bosuvchi vosita sifatida baholanishi mumkin.

Ushbu tizim texnologik, biologik, pedagogik va boshqa murakkab jarayonlarni nazariy asoslangan tarzda boshqarish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. *Ахмедов С.А. Жараёнларни Статистик Бошқариши. Методик қўлланма. Андижон. –2005. Б. 100.*
2. *Уилер Д., Чамберс Д. Статистические управления процессами: Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта. Москва. ООО «Альпина Бизнес Букс» – 2009.С.409.*
3. *К.С.Аблазова Статистическое моделирование стабильности технологического процесса при помощи контрольных карт и ее приложения // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент.2023. – №3(49) — С. 124-135*
4. *Ахмедов С.А., Аблазова К.С. Некоторые статистические инструменты при исследовании устойчивости технологического процесса. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – 2019-№3. С.16-19.*

ON DYNAMICS OF A SEPARABLE CUBIC STOCHASTIC OPERATORS IN S^2

Baratov Bahodir Soyib o'g'li,

Faculty of Mathematics, Karshi State University, teacher

baratov.bahodir@bk.ru

Abstract. In this paper, we study a class of separable cubic stochastic operators defined on a finite-dimensional simplex. That is, we consider cubic stochastic operators defined as a product of three linear operators defined on a simplex. It is shown that for a separable cubic stochastic operator defined on a two-dimensional simplex, the vertices of the simplex are fixed points. It is also proven that the orbit of a separable cubic stochastic operator converges for any starting point taken from the simplex.

Keywords: Cubic stochastic operator; separable cubic stochastic operator; orbit, simplex.

S^2 DA ANIQLANGAN SEPARABEL KUBIK STOXASTIK OPERATORLARNING
DINAMIKASI HAQIDA

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan separabel kubik stoxastik operatorning dinamikasi o'rganilgan. Ya'ni, simpleksda aniqlangan uchta chiziqli operatorlarning ko'paytmasi sifatida aniqlangan kubik stoxastik operatorlarni ko'rib chiqamiz. Ikki o'lchamli simpleksda aniqlangan separabel kubik stoxastik operator uchun simpleksning uchlari qo'zg'almas nuqtalar ekanligi ko'rsatilgan. Shuningdek, separabel kubik stoxastik operatorning orbitasi simpleksdan olingan har qanday boshlang'ich nuqta uchun yaqinlashuvchi ekanligi isbotlangan.

Kalit so'zlar: Kubik stoxastik operator; separabel kubik stoxastik operator; orbita, simpleks.

О ДИНАМИКЕ РАЗДЕЛИМОГО КУБИЧЕСКОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА
В S^2

Аннотация. В данной работе изучается класс сепарабельных кубических стохастических операторов, заданных на конечномерном симплексе. То есть, рассматриваются кубические стохастические операторы, заданные как произведение трёх линейных операторов, заданных на симплексе. Показано, что для сепарабельного кубического стохастического оператора, заданного на двумерном симплексе, вершины симплекса являются неподвижными точками.

Ключевые слова: Кубический стохастический оператор; сепарабель кубический стохастический оператор; орбита, симплекс.

Many systems can be represented using nonlinear operators. Among the simplest nonlinear examples is the quadratic stochastic operator (QSO). This operator models the evolution of a population and was originally introduced by Bernstein in [1].

For more than 80 years, the theory of QSOs has been developed and many papers were published (see e.g. [4]-[8], [16]-[17]). In recent years it has again become of interest in connection with its numerous applications in many branches of mathematics, biology and physics.

Let $E = \{1, 2, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distribution on E

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \square^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \quad (1)$$

be the $(m-1)$ -dimensional simplex. A QSO is a mapping defined as $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(x) = x' \in S^{m-1}$, where

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E, \quad (2)$$

and the coefficients $P_{ij,k}$ satisfy

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1 \quad \text{for all } i, j \in E. \quad (3)$$

The trajectory (orbit) $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$, of V for an initial value $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{(n+1)}(\mathbf{x}^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

One of the main problems in mathematical biology is to study the asymptotic behavior of the trajectories. This problem was solved completely for the Volterra QSO.

The operator V is called Volterra QSO, if $P_{ij,k} = 0$ for any $k \notin \{i, j\}$, $i, j, k \in E$. For the Volterra QSO the general formula was given in [4],

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad (4)$$

where $a_{ki} = 2P_{ik,k} - 1$ for $i \neq k$ and $a_{kk} = 0$. Moreover, $a_{ki} = -a_{ik}$ and $|a_{ki}| \leq 1$ for all $i, k \in E$.

In [4], the theory of Volterra QSO was developed using theory of the Lyapunov functions and tournaments. But non-Volterra QSOs were not completely studied. Because, there is no general theory that can be applied for study of non-Volterra operators.

In [16] Separable Quadratic Stochastic Operators (SQSOs) were introduced. Volterra QSO (4) has a form as SQSO, but in [17] it was proved that it coincides with a SQSO if and only if it is a linear operator.

In recent years, Cubic Stochastic Operators (CSOs) have begun to be studied, which different from quadratic operators [8-10].

In this paper we consider another class of cubic operators which we call separable cubic stochastic operators [11-13].

In Section 2, we recall the definition of CSOs and definitions and known results. In Section 3 for a SCSSO defined on the two-dimensional simplex, we prove that it has three fixed points and we find the boundary ∂S^2 is an invariant set.

Preliminaries and known results. *Separable quadratic stochastic operator.* Let us recall some necessary definition and notations. In [18] Separable Quadratic Stochastic Operators were introduced as follows: The QSO (2), (3) with additional condition

$$P_{ij,k} = a_{ik} b_{jk} \quad \text{for all } i, j, k \in E \quad (5)$$

where $a_{ik}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ entries of matrices $A = (a_{ik})$ and $B = (b_{jk})$ such that the conditions (3) are satisfied for the coefficients (5).

Then the QSO V corresponding to the coefficients (5) has the form.

$$x'_k = (V(\mathbf{x}))_k = (A(\mathbf{x}))_k (B(\mathbf{x}))_k, \quad (6)$$

where $(A(\mathbf{x}))_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} x_i$, $(B(\mathbf{x}))_k = \sum_{j=1}^m b_{jk} x_j$.

Definition 1. [16] *The QSO (6) is called separable quadratic stochastic operator (SQSO).*

Cubic stochastic operator. The CSO is a mapping $W : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the form

$$x'_l = \sum_{i,j,k=1}^m P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l \in E, \quad (7)$$

where $P_{ijk,l}$ are coefficients of heredity such that

$$P_{ijk,l} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m P_{ijk,l} = 1, \quad \forall i, j, k \in E. \quad (8)$$

and we suppose that the coefficients $P_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i, j, k .

For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$, the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$ of initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under action of CSO (8) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = W(\mathbf{x}^{(n)})$, where $n = 0, 1, 2, \dots$ with $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$. Denote by $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$. Since $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \subset S^{m-1}$ and S^{m-1} is a compact set, it follows that $\omega(\mathbf{x}^{(0)}) \neq \emptyset$. If $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ consists of a single point, then the trajectory converges and $\omega(\mathbf{x}^{(0)})$ is a fixed point of the operator W . A

point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a fixed of the W if $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Denote by $\text{Fix}(W)$ the set of all fixed points of the operator W , i.e.

$$\text{Fix}(W) = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

Let $DW(\mathbf{x}^*) = (\partial W_i / \partial x_j)(\mathbf{x}^*)$ be a Jacobian of W at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 2 ([3]): A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ has no eigenvalues on the unit circle in $\mathbb{C}$.

Definition 3 ([3]): A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:

- (i) attracting if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are in the unit disk;
- (ii) repelling if all the eigenvalues of the Jacobian $DW(\mathbf{x}^*)$ are outside the closed unit disk;
- (iii) a saddle otherwise;

Main result. In this section we consider CSO (7), (8) with additional condition

$$P_{ijk,l} = a_{il} b_{jl} c_{kl}, \quad \text{for all } i, j, k, l \in E, \quad (9)$$

where $a_{il}, b_{jl}, c_{kl} \in \mathbb{R}$ entries of matrices $A = (a_{il})$, $B = (b_{jl})$ and $C = (c_{kl})$ such that the conditions (8) are satisfied for the coefficients (9).

Then the CSO W corresponding to the coefficients (9) has the form

$$x'_i = (W(\mathbf{x}))_i = (A(\mathbf{x}))_i (B(\mathbf{x}))_i (C(\mathbf{x}))_i \quad (10)$$

where $(A(\mathbf{x}))_i = \sum_{l=1}^m a_{il} x_l$, $(B(\mathbf{x}))_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} x_j$ and $(C(\mathbf{x}))_i = \sum_{k=1}^m c_{ik} x_k$.

Definition 4. [11] The CSO (10) is called separable cubic stochastic operator (SCSO).

Let us consider the following matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Then corresponding SCSO $W : S^2 \rightarrow S^2$ is:

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 (x_1 + 1,5x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + 2x_3), \\ x'_2 = x_2 (0,5x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2), \\ x'_3 = x_3 (x_2 + x_3)(x_1 + 2x_2 + x_3). \end{cases} \quad (12)$$

Using the equation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ we rewrite the operator (12) as follows

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1 (1 + 0,5x_2)(1 + x_3), \\ x'_2 = x_2 (1 - 0,5x_3)(1 - x_1), \\ x'_3 = x_3 (1 - x_1)(1 + x_2). \end{cases} \quad (13)$$

Let a face of the simplex S^2 be the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_i = 0, i \notin \alpha \subset \{1, 2, 3\}\}$.

Let the set $\text{int } S^2 = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 x_2 x_3 > 0\}$ and let the set $\partial S^2 = S^2 \setminus \text{int } S^2$ be the interior and the boundary of the simplex S^2 , respectively. Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the two-dimensional simplex.

Lemma 1. For the SCSO W (12), the following assertions true:

- (i) The face $\Gamma_{\{1,2\}}$, $\Gamma_{\{1,3\}}$, $\Gamma_{\{2,3\}}$ of the simplex S^2 are invariant sets;
- (ii) $\text{Fix}(W) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$;
- (iii) The fixed point $\mathbf{e}_1$ is a attracting point, $\mathbf{e}_2$ is a repelling fixed point and the fixed point $\mathbf{e}_3$ is a saddle point.

Proof: (i) Obviously.

(ii) To find the fixed points we consider the equation $W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, that is the following system of equations

$$\begin{cases} x_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+x_3), \\ x_2 = x_2(1-0,5x_3)(1-x_1), \\ x_3 = x_3(1-x_1)(1+x_2). \end{cases} \quad (14)$$

(a) Let $x_1 = 0$. Then from the third equation of (14) it follows

$$x_3 = x_3 + x_2x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \text{and} \quad 1 = 1 + x_2.$$

It is clear that if $x_3 = 0$ then we have $x_2 = 1$. If $x_3 > 0$ then from the last equation one has

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1.$$

We take solution $x_2 = 1$, then it follows that $x_3 = 0$. Consequently, if $x_1 = 0$, we obtain the fixed points $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Similarly, in the case $x_2 = 0$ and $x_3 = 0$, we have the fixed points $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ and $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, respectively.

(b) Suppose that $x_1x_2x_3 \neq 0$. Then from the system (14), one has

$$\begin{cases} 1 = (1+0,5x_2)(1+x_3), \\ 1 = (1-0,5x_3)(1-x_1), \\ 1 = (1-x_1)(1+x_2). \end{cases} \quad (15)$$

The second equation of (15) we get

$$1 = (1-0,5x_1)(1-x_3) \Rightarrow -x_3 = 0,5x_1(1-x_3).$$

Last equation it follows that $x_1 = 0$ and $x_3 = 0$, this contradicts to $x_1x_2x_3 \neq 0$.

Consequently, we have that $\text{Fix}(W) \cap \text{int } S^2 = \emptyset$.

(iii) To find the type of fixed point of the SCSO (12), we rewrite it in the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+(1-x_1-x_2)), \\ x'_2 = x_2(1-0,5x_1)(1-(1-x_1-x_2)). \end{cases} \quad (16)$$

where $(x_1, x_2) \in \{(x, y) : x, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 1\}$ and x_1, x_2 are the first two coordinates of a point lying in the simplex S^2 .

The Jacobian of the operator (16) at a fixed point $\mathbf{e}_1$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,5$, at the $\mathbf{e}_2$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 1,5, \lambda_2 = 2$ and at the $\mathbf{e}_3$ has the following eigenvalues $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Therefore, it follow that the fixed point $\mathbf{e}_1$ is a attracting point, $\mathbf{e}_2$ is a repelling fixed point and the fixed point $\mathbf{e}_3$ is a saddle point.

The theorem is proved. □

The set of limit points. Let $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ be the initial point. Then the trajectory of $\mathbf{x}^{(0)}$ is denote by $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \geq 0}$ and is defined as $W(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{x}^{(n+1)}$ where $n = 0, 1, 2, \dots$.

$$W : \begin{cases} x'_1 = x_1(1+0,5x_2)(1+x_3), \\ x'_2 = x_2(1-0,5x_3)(1-x_1), \\ x'_3 = x_3(1-x_1)(1+x_2). \end{cases}$$

Theorem 1. For the SCSO W (12), the following assertions true:

- (i) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{2,3\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$,
- (ii) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,
- (iii) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,3\}}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,
- (iv) If $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$,

Proof: (i) Let $\mathbf{x}^{(0)} = (0, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in \Gamma_{\{2,3\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{2,3\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_2$ and $\mathbf{e}_3$ are fixed points belonging to this face. For the SCSO W (12) is true $x_1^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{2,3\}}$. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{2,3\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_2 = x_2(1 - 0.5x_3), \\ x'_3 = x_3(1 + x_2). \end{cases} \quad (17)$$

From the first equation of (17), one has

$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - 0.5x_3^{(n)}) \leq x_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \text{ Therefore, it follows that there exists the } \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*.$$

Moreover, from the second equation of (17), one has $x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)}(1 + x_2^{(n)}) \geq x_3^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (0, x_2^*, x_3^*)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_3$. That is, if $x_3^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_3$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{2,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_{\{1,2\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{1,2\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$ are fixed points belonging to this face. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{1,2\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + 0.5x_2), \\ x'_2 = x_2(1 - x_1). \end{cases} \quad (18)$$

Not that, for the SCSO W (18) is true $x_3^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{1,2\}}$. From the first equation of (25), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + 0.5x_2^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the second equation of (25), one has $x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - x_1^{(n)}) \leq x_2^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. So we have that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*$. Hence there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, 0)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed point we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$. That is, if $x_1^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{1,2\}} \setminus \{\mathbf{e}_2\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, 0, x_3^{(0)}) \in \Gamma_{\{1,3\}}$. By Theorem 1, the face $\Gamma_{\{1,3\}}$ is an invariant set and the vertexes $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_3$ are fixed points belonging to this face. For the SCSO W (12) is true $x_2^{(n)} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ at the face $\Gamma_{\{1,3\}}$. The restriction of the SCSO W (12) on the face $\Gamma_{\{1,3\}}$ has the form

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - x_1). \end{cases} \quad (19)$$

From the first equation of (19), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + x_3^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the second equation of (19), one has $x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)}(1 - x_1^{(n)}) \leq x_3^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, 0, x_3^*)$. Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$. That is, if $x_1^{(0)} > 0$ then we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} = \Gamma_{\{1,3\}} \setminus \{\mathbf{e}_3\}$.

Let $\mathbf{x}^{(0)} = \text{int } S^2$. Then, from the first equation of operator (12), one has $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}(1 + 0.5x_2^{(n)})(1 + x_3^{(n)}) \geq x_1^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. So we have that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = x_1^*$. Moreover, from the third equation of operator (12), one has $x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}(1 - 0.5x_3^{(n)})(1 - x_1^{(n)}) \leq x_2^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Therefore, it follows that there exists the $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = x_2^*$.

Thus, using $x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)} = 1$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = x_3^*$. So there is the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

Since $\mathbf{x}^*$ should be a fixed point we get $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_1$.

Consequently, we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{e}_1$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } S^2$.

The theorem is proved.

Acknowledgments. The work is supported by the applied Project “Dynamics and Applications of Cubic Stochastic Operators” No. AL-9224093956 of The Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan.

REFERENCES:

1. Bernstein S. N. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity, // *The Annals of Mathematical Statistics*. pp. 83 (1942).
2. Davronov R.R., Jamilov U.U and M. Ladra. Conditional cubic stochastic operator, // *Difference Equ. Appl.* Vol **21**, Issue 12, pp. 1163–1170, (2015).
3. Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems, // Boulder, Stud. Nonlinearity, Westview Press, 2003.
4. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments, // *Acad. Sci. Sb. Math.* Vol **76**, (1993), pp. 489-506.
5. Ganikhodzhaev R.N., Eshmatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories, // *Vladikavkaz. Math. J.* Vol **8**, Issue 2, pp. 12–28, (2006).
6. Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems, // *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields* Vol **14**, Issue 2, pp. 279-335, (2011).
7. Jamilov U. U. On symmetric strictly non-Volterra quadratic stochastic operators, // *Discontin. Nonlinearity Complex.* Vol 5. Issue 3, pp. 263–283, (2016).
8. Jamilov U. U., Ladra M. On identically distributed non-Volterra cubic stochastic operator, // *J. Appl. Nonlinear Dyn.* Vol **6**, Issue 1, pp. 79–90, (2017).
9. Jamilov U. U., Reinfelds A. On constrained Volterra cubic stochastic operators, // *J. Differ. Equ. Appl.* Vol **26**. Issue 2, (2020) pp. 1-14.
10. Jamilov U. U., Khamraev A. Yu., Ladra M. On a Volterra cubic stochastic operator, // *Bull. Math. Biol.* Vol **80**. Issue 2, pp. 319-334, (2018).
11. Baratov, B.S., Jamilov, U.U. On separable cubic stochastic operators, // *Qual. Theory Dyn. Syst.* Vol **23**, Issue 2, a.n. 93. 28 pages. (2024).
12. Baratov B. S. On dynamics of a separable cubic stochastic operator, // *Bull. Inst. Math.*, Vol **6**, Issue 1, pp. 17-25, (2023).
13. Baratov. B. S. The dynamics of a separable cubic operator, *Uz. Math. Jour*, Vol 68, Issue 2, pp. 27-41. 2024, DOI:10.29229/uzmj.2024-2-3.
14. Rozikov U. A., Khamraev A. Yu. On construction and a class of non-Volterra cubic stochastic operators, // *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol **14**, Issue 1, pp.92–100, (2014).
15. Rozikov U. A., Khamraev A. Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplexes, // *Ukrainian Math. J.* Vol 56, Issue 10, pp. 223-228, (2004).
16. Rozikov U.A., Nazir S. Separable quadratic stochastic operators, // *Lobachevskii J. Math.* Vol **31**, Issue 3, pp. 215-222, (2010).
17. Rozikov U.A., Zada A. On a class of separable quadratic stochastic operators, // *Lobachevskii Jour. Math.* Vol **32**, Issue 4, pp. 397-406, (2011).

AN INVERSE PROBLEM OF DETERMINING THE KERNEL PSEUDO-INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Elmuradova Hilola Botirovna,

Lecturer at the Department of Differential Equations, Bukhara State University, Uzbekistan

h.b.elmurodova@buxdu.uz

Abstract. In this paper, we investigate an inverse problem for a one-dimensional pseudoparabolic integro-differential equation supplemented with an additional condition. First, the corresponding direct problem is examined. Using the Fourier method, the direct problem is reduced to an equivalent integral equation. Then, by applying Grönwall-type inequalities, an estimate for the solution in terms of the norms of the unknown functions is derived. Stability estimates are also obtained. The inverse problem is likewise reduced to an equivalent integral equation. For this integral equation, the Banach fixed-point (contraction mapping) principle is employed. As a result, the existence and uniqueness of the solution are established.

Keywords: pseudoparabolic equation; Fourier method; inverse problem; integral equation; Banach fixed point theorem.

YADRO PSEUDO-INTEGRO-DIFFERENTIAL TENGLAMASINI ANIQLASHNING TESKARI MUAMMOSI

Annotatsiya. Ushbu maqolada bir o'lchamli psevdoparabolik integro-differensial tenglama uchun qo'shimcha berilgan shart ostida qo'yilgan teskari masala o'rganiladi. Avvalo, to'g'ri masala ko'rib chiqiladi. Masala Furje usulidan foydalangan holda ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. So'ngra Gronualla tengsizligi yordamida masalaning yechimi noma'lum funksiyalar normasi orqali baholanadi. Turg'unlik baholari ham olinadi. Teskari masala ham ekvivalent integral tenglamaga keltiriladi. Ushbu integral tenglama uchun Banaxning qisqartirib akslantirishlar prinsipi qo'llaniladi. Natijada yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: psevdoparabolik tenglama; Furje usuli; teskari masala; integral tenglama; Banaxning qisqartirib akslantirish teoremasi.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ПСЕВДОИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В данной работе исследуется обратная задача для одномерного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с дополнительным условием. Сначала рассматривается соответствующая прямая задача. С использованием метода Фурье прямая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Далее, применяя неравенства типа Гронуолла, получена оценка решения через нормы неизвестных функций. Также устанавливаются оценки устойчивости. Обратная задача аналогичным образом сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Для этого интегрального уравнения применяется принцип сжимающих отображений Банаха. В результате доказываются существование и единственность решения.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение; метод Фурье; обратная задача; интегральное уравнение; теорема о сжимающем отображении в банаховом пространстве (теорема Банаха о неподвижной точке).

Introduction. Inverse problems for partial differential equations are understood as the problems of finding unknown coefficients, as well as initial and non-local boundary conditions and solutions of differential equations given the solution of a direct problem. Inverse problems are a dynamically developing area of modern mathematics [1], [2]. The constitutive relations for a linear nonhomogeneous heat propagation and diffusion processes in a medium with memory contain a time- and space-dependent kernel in an integral term of time variable convolution type [7]-[12]. Interest in equations with mixed derivatives, and in particular in pseudoparabolic equations in recent years, is driven by the needs of mechanics, applied sciences, and mathematics itself. The study of processes such as fluid filtration in fractured porous media, the

movement of groundwater with a free surface in multilayered media, the transport of moisture, heat, and salts in porous media, and other similar practically significant problems requires the investigation of third-order boundary value problems for pseudoparabolic equations [3],[15],[16]. Therefore, scientific research in this direction is of interest to both mathematical scientists and engineers. The present work is part of this direction, in which the characteristics of the medium are expressed through the determination of a function, that is, the inverse problem is studied.

In this work, [6], [13], [14] the method of separation of variables is employed to obtain the classical solution of the direct problem in the form of a biorthogonal series in terms of eigenfunctions and associated functions. The direct problem is considered as an initial-boundary value problem.

The direct problem is reduced to equivalent integral equations using the Fourier method. To establish the corresponding integral inequalities, the theorems of the Gronwall inequality are applied. We obtain an a priori estimate of the solution in terms of an unknown coefficient, which is essential for the study of the inverse problem.

The inverse problem is reduced to a Volterra integral equation of the second kind. Based on the unique solvability of this equation in the class of continuous functions, theorems on the unique solvability of the direct and inverse problems are proved. A stability estimate is also obtained.

Setting up the problem. Let $\Pi_T = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ be a rectangle domain. In this present paper, we consider the following inverse problem of determining a pair of functions $\{u(x, t), k(t)\}$, which satisfy the non-linear 1D pseudoparabolic equation.

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \int_0^t k(t - \tau)u(x, \tau)d\tau \quad \text{in } \Pi_T, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

the Dirichlet boundary condition

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

and the overdetermination condition

$$u(x_0, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

where $f(t)$, $\varphi(x)$ are given functions.

The problem of determining

$$u(x, t) \in Y_T := C_{x,t}^{(2,1)}(\Pi_T) \cap C(\bar{\Pi}_T) \quad (A)$$

from (1)-(3) with given $k(t)$ and $\varphi(x)$ is called the direct problem for a 1D pseudoparabolic integrodifferential equation, where $\bar{\Pi}_T = \{[0, 1] \times [0, T]\}$ and the space $C^{(2,1)}(\Pi_T)$ denotes the set of functions defined on the domain Π_T that are twice continuously differentiable with respect to the spatial variable x and once continuously differentiable with respect to the temporal variable t .

Inverse problem: Given the initial data $\varphi(x)$ and $f(t)$, to find the pair of functions $u(x, t), k(t)$, satisfying to (1)-(4).

Definition 2.1. The pair of the functions $\{u(x, t), k(t)\}$ is called a classical solution to the inverse problem, if

$$u(x, t) \in Y_T, \quad \text{and} \quad k(t) \in C[0, T]$$

and satisfying each of the system (1)-(4) at every point of the corresponding domain.

Everywhere in this paper, we require the following conditions for known functions:

$$A1) \varphi \in C[0, 1]; \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \varphi'(1) = 0;$$

$$A2) f \in C^2[0, T];$$

Result and discussion. To obtain a solution to problem (1)-(3), we formally apply the Fourier method. We will look for a nontrivial particular solution to this problem in the form $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituting it into the equation (1) and boundary conditions (3), we obtain a problem spectral for $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

$$X(0) = X(1), \quad (6)$$

$$X'(1) = 0. \quad (7)$$

$$Y''(x) + \lambda^2 Y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

$$Y'(0) = Y'(1), \quad (9)$$

$$Y(0) = 0. \quad (10)$$

The solution of the problem (5)-(7) has a Riesz basis in $L_2(0,1)$, (for more details, the reader can consult [4], [5], [6]) consisting of eigenfunctions and associated functions

$$X_0(x) = 2, \quad X_{2n}(x) = 4\cos\lambda_n x, \quad X_{2n-1}(x) = 4(1-x)\sin\lambda_n x \quad (11)$$

and eigenvalues

$$\lambda_n = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

The biorthogonal sequence to $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$ of eigenfunctions and associated functions corresponding to the problem adjoint to problem (5)-(7):

$$Y_0(x) = x, \quad Y_{2n}(x) = x\cos\lambda_n x, \quad Y_{2n-1}(x) = \sin\lambda_n x, \quad (12)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, also forms a Riesz basis.

By applying the Fourier method, the solution $u(x, t)$ of the problem (1)-(3) can be expanded in a uniformly convergent series in term eigenfunctions of (11) in $L_2(0,1)$ of the form

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^\infty u_{2n}(t)X_{2n}(x) + \sum_{n=1}^\infty u_{2n-1}(t)X_{2n-1}(x). \quad (13)$$

The coefficients $u_0(t), u_{2n}(t), u_{2n-1}(t)$ for $n \geq 1$ are to be found by making use of the orthogonality of the eigenfunctions. Namely, we multiply (1) by the eigenfunctions of (11) and integrate over $(0,1)$. Recall that the inner product in $L_2(0,1)$ is defined by $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Let us note the expansion coefficient $\varphi(x)$ in the eigenfunctions of (12) for $n \geq 1$ respectively by.

$$\begin{cases} (\varphi(x), Y_0(x)) = \varphi_0, \\ (\varphi(x), Y_{2n-1}(x)) = \varphi_{2n-1}, \\ (\varphi(x), Y_{2n}(x)) = \varphi_{2n}. \end{cases} \quad (14)$$

We obtain in view of (1) and $(u(x, t), Y_0(x)) = u_0(t)$, can get

$$\begin{cases} u'_0(t) = \int_0^t k(t-\tau)u_0(\tau)d\tau, \\ u_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \quad (15)$$

For $u_{2n-1}(t) = (u_{2n-1}(x, t), Y_{2n-1}(x))$, $n \geq 1$, in view of (1) we have

$$\begin{cases} u'_{2n-1}(t) + \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}u_{2n-1}(t) = \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t k(t-\tau)u_{2n-1}(\tau)d\tau, \\ u_{2n-1}(0) = \varphi_{2n-1}. \end{cases} \quad (16)$$

We get with (1) and $u_{2n}(t) = (u_{2n}(x, t), Y_{2n}(x))$, $n \geq 1$, can be written as

$$\begin{cases} u'_{2n}(t) + \frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}u_{2n}(t) = \frac{-2\lambda_n}{1+\lambda_n^2}(u'_{2n-1} + u_{2n-1}) + \int_0^t k(t-\tau)u_{2n}(\tau)d\tau, \\ u_{2n}(0) = \varphi_{2n}, \end{cases} \quad (17)$$

where

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)Y_0(x)dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x)Y_{2n}(x)dx, \quad \varphi_{2n-1} = \int_0^1 \varphi(x)Y_{2n-1}(x)dx. \quad (18)$$

The problem (15) is equivalent C[0, T] to the Volterra integral equation:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s)u_0(s)dsd\tau. \quad (19)$$

Solution to the problem (16) have the form:

$$u_{2n-1}(t) = \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} + \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds. \quad (20)$$

For the problem (17), we obtain the equivalent integral equation:

$$u_{2n}(t) = \int_0^t \left[-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u'_{2n-1}(\tau) - \frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u_{2n-1}(\tau) + \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n}(s)ds \right] \\ \times e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau + \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t}. \quad (21)$$

For each fixed n , equation (19) and (21) are Volterra integral equations of the second kind with respect to u_0 , u_{2n-1} and u_{2n} . According to the general theory of integral equations, each of them has a unique solution. The solution can be found, for example, by the method of successive approximations. It is easy to see that $k(t) \in C[0, T]$, then $u_n(t) \in C^1[0, T]$.

Lemma 3.1. Let $k(t) \in C[0, T]$. The following estimates are valid with large n and for all $t \in [0, T]$:

$$|u_0(t)| \leq |\varphi_0| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (22)$$

$$|u_0'(t)| \leq \|k\| |\varphi_0| T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (23)$$

$$|u_{2n-1}(t)| \leq |\varphi_{2n-1}| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (24)$$

$$|u'_{2n-1}(t)| \leq C |\varphi_{2n-1}| \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right), \quad (25)$$

$$|u''_{2n-1}(t)| \leq C |\varphi_{2n-1}| \left[(1 + \|k\|) \right. \\ \left. + \|k\| \left(T \left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) \right], \quad (26)$$

$$|u_{2n}(t)| \leq C_1 \left(|\varphi_{2n-1}| \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) + |\varphi_{2n}| \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}, \quad (27)$$

$$|u'_{2n}(t)| \leq C_2 |\varphi_{2n-1}| \left[\left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| \right) (T+1) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| \right. \\ \left. \times \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right] + |\varphi_{2n}| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + 1 \right]. \quad (28)$$

Proof. Easy to see that $e^{-\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}(1+k(0))t} \leq 1$ for all $n = 1, 2, \dots$, and $t \in [0, T]$. From (19), one can obtain the following estimates (bounds) for the function $u_0(t)$.

$$|u_0(t)| \leq |\varphi_0| + \left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s)u_0(s)ds \right| \leq |\varphi_0| + \|k\| \left| \int_0^t (t-s)u_0(s)ds \right|,$$

From here, by the Gronwall inequality, we get the estimate (22). Calculating the derivative $u_0'(t)$ by the formula (19), we easily obtain the estimate $|u_0'(t)|$. From this fact and (20) one can obtain estimates for $u_{2n-1}(t)$:

$$|u_{2n-1}(t)| \leq |\varphi_{2n-1}| + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \right|.$$

Hence, by the Gronwall inequality, we get the estimate (24).

By applying formula (20), we derive the expressions for $u'_{2n-1}(t)$ and $u''_{2n-1}(t)$, and consequently obtain estimates (25) and (26). Next, we estimate (21) and derive the following inequality for $|u_{2n}(t)|$:

$$\begin{aligned} |u_{2n}(t)| &\leq \left| \int_0^t u'_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t u_{2n-1}(\tau) d\tau \right| + \left| \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \right| + \\ &\left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s) u_{2n}(s) ds d\tau \right| \leq |\varphi_{2n-1}| \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \right) T \\ &+ |\varphi_{2n-1}| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} T + |\varphi_{2n}| + \|k\| \left| \int_0^t (t-s) u_{2n}(s) ds \right|. \end{aligned}$$

From here, by the Gronwall inequality, we get the estimate (27). According to (21), (24), (25) and (27):

$$\begin{aligned} |u'_{2n}(t)| &\leq |u'_{2n-1}(t)| + |u'_{2n-1}(t)|T + |u_{2n-1}(t)| + |u_{2n-1}(t)|T + \\ &\left| \varphi_{2n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \right| + \left| \int_0^t k(t-s) u_{2n}(s) ds \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau k(\tau-s) u_{2n}(s) ds d\tau \right|. \end{aligned}$$

From the last equation we get (28).

Lemma 3.1 has been proved. $\square$

Proposition. [4] For all $\varphi \in L^2(0,1)$, we have $r\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq \sum_{n=0}^\infty \varphi^2 \leq R\|\varphi\|_{L^2}^2$, where $R = 16$, $r = \frac{3}{4}$.

We show the smooth approximation of the series denoted by (13), $u_t(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xxt}(x, t)$. Formally termwise differentiating the series in formula (13), we get the following series:

$$u_t(x, t) = 2u_0'(t) + 4 \sum_{n=1}^\infty u_{2n-1}'(t)(1-x)\sin\lambda_n x + 4 \sum_{n=1}^\infty u_{2n}'(t)\cos\lambda_n x, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= - \sum_{n=1}^\infty (4\lambda_n^2(1-x)\sin\lambda_n x + 8\lambda_n \cos\lambda_n x) u_{2n-1}(t) \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 u_{2n}(t) \cos\lambda_n x, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} u_{xxt}(x, t) &= - \sum_{n=1}^\infty (4\lambda_n^2(1-x)\sin\lambda_n x + 8\lambda_n \cos\lambda_n x) u'_{2n-1}(t) \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 u'_{2n}(t) \cos\lambda_n x. \end{aligned} \quad (31)$$

The series (13), (29)-(31) due to the estimates (22)-(28) respectively for any $(x, t) \in \Pi_T$ are majorized by the convergent series

$$2|\varphi_0| + \sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n-1}| + \sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n}|, \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 |\varphi_{2n-1}| + \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^2 |\varphi_{2n}|, \quad (33)$$

where $\varphi_{2n-1} = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx$, $\varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) x \cos(2\pi n x) dx$.

Let us state the following lemma, ensuring that the following assertion holds for all the series

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi_{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^\infty \varphi_{2n}.$$

Lemma 3.2. Let $k \in C[0, T]$ and us assume that the conditions A1 is satisfied. Then, the series (32) and (33) converge.

Proof. We examine each series as follows:

$$\sum_{n=1}^\infty |\varphi_{2n-1}| = \sum_{n=1}^\infty |(\varphi(x), Y_{2n-1})| = \sum_{n=1}^\infty \left| \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx \right| =$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{2\pi n} \varphi'(x) \cos(2\pi n x) dx \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi', \sqrt{2} \cos(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right] \leq C_1, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |\varphi_{2n}| &= \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |(\varphi(x), x \cos(2\pi n x))| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \varphi'''(x) \sin(2\pi n x) dx \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \varphi''(x) \sin(2\pi n x) dx \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi''', \sqrt{2} \sin(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(\varphi'', \sqrt{2} \sin(2\pi n x))|}{2\sqrt{2}\pi n} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 \right] \leq C_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Similarly to the above, we obtain the following estimates:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|c_n|}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right] \leq C_3, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^2 |\varphi_{2n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{|d_n|}{n} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right] \leq C_4, \quad (37)$$

where

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \varphi'(x) \sqrt{2} \cos(2\pi n x) dx, \quad b_n = \int_0^1 \varphi'(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx, \\ c_n &= \int_0^1 \varphi(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx, \quad d_n = \int_0^1 \varphi'''(x) \sqrt{2} \cos(2\pi n x) dx, \\ \alpha_n &= \int_0^1 \varphi'''(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx, \quad \beta_n = \int_0^1 \varphi''(x) \sqrt{2} \sin(2\pi n x) dx. \end{aligned}$$

They are the Fourier coefficients with respect to the systems $\sqrt{2} \cos(2\pi k x)$, $\sqrt{2} \sin(2\pi k x)$, $k = 1, 2, \dots$. Using the inequality $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ and after simple performing, according to (34) and (36) we obtain the following:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_{2n}| + |\varphi_{2n-1}|) \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n^2} + a_n^2 + (b_n^2 + c_n^2) \right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (2\|\varphi'\|^2 + \|\varphi\|^2) \leq C,$$

since

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \|\varphi'\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 + c_n^2) \leq (\|\varphi'\|^2 + \|\varphi\|^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Similarly

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 |\varphi_{2n}| + \lambda_n^2 |\varphi_{2n-1}|) \leq \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n^2} + d_n^2 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} (2\|\varphi'''\|^2 + \|\varphi''\|^2) \leq \tilde{C},$$

that is

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \|\varphi'''\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \|\varphi'''\|^2 + \|\varphi''\|^2. \quad \square$$

The relations (34)-(37) imply the convergence of the series (32),(33). Therefore, the series (13), (29)-(31) converge uniformly.

Thus, we have proved the following assertion.

Theorem 3.1. *If functions $\varphi(x)$ and $k(t)$ satisfy conditions of Lemma 3.2, then problem (1)-(3) has a unique solution, which represents the sum of series (13), whose coefficients obey formulas (19),(20),(21).*

□

Plugging (19), (20), (21) into (13), we obtain:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 2\varphi_0 + 2 \int_0^t \int_0^\tau k(\tau - s) u_0(s) ds d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \right. \\ & \times \int_0^\tau k(\tau - s) u_{2n-1}(s) ds + \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}t} 4(1 - x) \sin 2\pi n x \\ & 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2\lambda_n}{1 + \lambda_n^2} (u_{2n-1}(t) - \varphi_{2n-1} + \int_0^t u_{2n-1}(\tau) d\tau) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_0^t \int_0^\tau k(\tau - s) u_{2n}(s) ds d\tau \right) \cos 2\pi n x. \right. \end{aligned} \quad (38)$$

Let $\tilde{u}_0, \tilde{u}_{2n-1}, \tilde{u}_{2n}$ be a solution of (15), (16), (17) with $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_{2n-1}, \tilde{\varphi}_{2n}$ and $\tilde{k}$. In this regard, from (19),(20), (21) the difference's $u - \tilde{u}_0, u - \tilde{u}_{2n-1}, u - \tilde{u}_{2n}$ will estimate in norm as follows, then by the Gronwall lemma for all $t \in [0, T]$ and $n \in \mathbf{N}$, we have:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_0| = |u - \tilde{u}_0| & \leq |\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau - s) u_0(s) ds d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau - s) \bar{u}_0(s) ds d\tau \right| \\ & \leq |\bar{\varphi}_0| \|\bar{k}\| \|u_0\| \frac{T^2}{2} e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$|\bar{u}'_0| = |u' - \tilde{u}'_0| \leq \left| \int_0^t (\bar{k}(t - s) u_0(s) + \tilde{k}(t - s) \bar{u}_0(s)) ds \right| \leq \|u_0\| \|\bar{k}\| + \|\bar{u}_0\| \|\tilde{k}\|, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_{2n-1}(t)| = |u_{2n-1}(t) - \tilde{u}_{2n-1}(t)| & \leq |\varphi_{2n-1} - \tilde{\varphi}_{2n-1}| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau - s) u_{2n-1}(s) ds d\tau \right| \\ & + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau - s) \bar{u}_{2n-1}(s) ds d\tau \right| \leq (|\bar{\varphi}_{2n-1}| + \|\bar{k}\| \|u_{2n-1}\| \frac{T^2}{2}) e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}'_{2n-1}(t)| = |u'_{2n-1}(t) - \tilde{u}'_{2n-1}(t)| & \leq |\varphi_{2n} - \tilde{\varphi}_{2n}| + \left| \int_0^t \bar{k}(t - s) u_{2n-1}(s) ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t - s) \bar{u}_{2n-1}(s) ds \right| \\ & + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau (\bar{k}(\tau - s) u_{2n-1}(s) + \tilde{k}(\tau - s) \bar{u}_{2n-1}(s)) ds \right| \\ & \leq |\bar{\varphi}_{2n-1}| + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\|, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}''_{2n-1}(t)| &\leq |\varphi_{2n-1} - \bar{\varphi}_{2n-1}| + |(\varphi_{2n} - \bar{\varphi}_{2n})(k - \bar{k})| + \left| \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)\bar{k}(s)ds \right| \\
 &+ \left| \int_0^t \bar{u}'_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \bar{k}(t-s)u_{2n-1}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t-s)\bar{u}_{2n-1}(s)ds \right| \\
 &+ \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau (\bar{k}(\tau-s)u_{2n-1}(s) + \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n-1}(s))ds \right| \\
 &\leq \left(\|u'_{2n-1}\| T + \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|u_{2n-1}\| \right) \|\bar{k}\| \\
 &+ \left(\|\bar{u}'_{2n-1}\| T + \left(T + \frac{T^2}{2}\right) \|\bar{u}_{2n-1}\| \right) \|\tilde{k}\| + |\bar{\varphi}_{2n-1}| + \|\bar{\varphi}_{2n}\| \|\bar{k}\|, \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}_{2n}(t)| &= |u_{2n}(t) - \bar{u}_{2n}(t)| \leq \left| \int_0^t \bar{u}'_{2n-1}(\tau)d\tau \right| + \left| \int_0^t \bar{u}_{2n-1}(\tau)d\tau \right| + \\
 &\left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau-s)u_{2n}(s)dsd\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n}(s)dsd\tau \right| + |\varphi_{2n} - \bar{\varphi}_{2n}| \\
 &\leq (\|\bar{u}'_{2n-1}\|T + \|\bar{u}_{2n-1}\| T + \|\bar{k}\| \|u_{2n}\| \frac{T^2}{2} + |\bar{\varphi}_{2n}|) e^{\|\bar{k}\| \frac{T^2}{2}}, \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\bar{u}'_{2n}(t)| &= |u'_{2n}(t) - \bar{u}'_{2n}(t)| \leq |\bar{u}'_{2n-1}(t)| + |\bar{u}_{2n-1}(t)| + \left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} \bar{u}'_{2n-1}(\tau)d\tau \right| \\
 &\left| \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} \bar{u}_{2n-1}(\tau)d\tau \right| + \left| \int_0^t \bar{k}(t-s)u_{2n}(s)ds \right| + \left| \int_0^t \tilde{k}(t-s)\bar{u}_{2n}(s)ds \right| \\
 &+ \left| \int_0^t \int_0^\tau \bar{k}(\tau-s)u_{2n}(s)dsd\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^\tau \tilde{k}(\tau-s)\bar{u}_{2n}(s)dsd\tau \right| + |\varphi_{2n} - \bar{\varphi}_{2n}| \\
 &\leq (1+T)(\|\bar{u}'_{2n-1}\| + \|\bar{u}_{2n-1}\|) + (\|\bar{k}\| \|u_{2n}\| + \|\tilde{k}\| \|\bar{u}_{2n}\|) \left(T + \frac{T^2}{2}\right). \quad (45)
 \end{aligned}$$

Indeed, the expressions (39)-(45) are stability estimates for the solutions to the problem (15)-(17).

Solvability of the inverse problem. In this section, we investigate the inverse problem of determining functions $u(x, t), k(t)$ from relations (1)-(4). To solve this problem, we will use the contraction mapping principle.

Let

$$\mu = \left(2\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{1+\lambda_n^2} (\varphi_{2n-1}(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 + \varphi_{2n}\cos 2\pi n x_0) \right)^{-1} \neq 0. \quad (A_3)$$

Putting $x = x_0$ into (13) and in view of (4), we have

$$f(t) = u_0(t)X_0(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(t)X_{2n}(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}(t)X_{2n-1}(x_0), \quad t \in [0, T]. \quad (46)$$

Substituting the right (19), (20), (21) instead of $u_0(t), u_{2n-1}(t), u_{2n}(t)$ in (46) and then differentiating two times, after simple transformations, we obtain an integral equation with respect to $k(t)$, that is,

$$k(t) = k_0(t) - \mu \left[2 \int_0^t u_0'(t-s)k(s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \\ & \times 4(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 - 4 \sum_{n=1}^\infty \mu \left(-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2}\right) u''_{2n-1}(t) - u'_{2n-1}(t) \\ & + \frac{1}{1+\lambda^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds \cos 2\pi n x_0], \end{aligned} \quad (47)$$

where

$$\begin{aligned} k_0(t) = & \mu f''(t) - 4\mu \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}\right)^2 \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} (1-x_0)\sin 2\pi n x_0. \\ & - 8\mu \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n^5}{(1+\lambda_n^2)^3} \varphi_{2n-1} e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}t} \cos 2\pi n x_0. \end{aligned}$$

Equation (47) may be written as an operator equation

$$k(t) = A[k](t), \quad (48)$$

where the map A is defined by

$$\begin{aligned} A[k](t) = & k_0(t) - \mu \left[2 \int_0^t u_{0'}(t-s)k(s)ds - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{1+\lambda_n^2}\right) \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right. \\ & + \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds + \frac{\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \\ & \times 4(1-x_0)\sin 2\pi n x_0 - 4 \sum_{n=1}^\infty \mu \left(-\frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2}\right) u''_{2n-1}(t) - \frac{2\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u'_{2n-1}(t) \\ & \left. + \frac{1}{1+\lambda^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds \cos 2\pi n x_0 \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

To prove that the operator A admits a unique fixed point, start by showing that A maps a certain closed convex set into itself, in the space $C[0, T]$. Fix a number $\rho > 0$ and consider the ball

$$B(k_0, \rho) := \{k(t) \in C[0, T] : \|Ak - k_0\| \leq \rho\},$$

is stable by the operator A , that is, $A(B(k_0, \rho)) \subset B(k_0, \rho)$.

Theorem 4.1. *Let the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy conditions of A1), A2). Then exists a number $T^* \in (0, T)$, such that there exists a unique solution $k(t) \in C[0, T^*]$ of the inverse problem (1)-(4).*

Let us first prove that for an enough small $T > 0$ the operator A maps the ball $B^T(k_0, \rho)$ implies that $A[k](t) \in B^T(k_0, \rho)$. Indeed, for any continuous function $k(t)$, the function $B[k](t)$ calculated using formula (47) will be continuous. Moreover, estimating the norm of the differences, we find that

$$\begin{aligned} \|A[k] - k_0\| \leq & \max_{t \in [0, T]} \left| 2\mu \int_0^t u_{0'}(t-s)k(s)ds \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right| \\ & + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n^2}{(1+\lambda_n^2)^2} \int_0^t u_{2n-1}(t-s)k(s)ds \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^\infty \frac{4\lambda_n^4}{(1+\lambda_n^2)^3} \right. \\ & \left. \times \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^\tau k(\tau-s)u_{2n-1}(s)ds \right| + 4 \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{n=1}^\infty -\frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} u''_{2n-1}(t) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \max_{t \in [0, T]} |\mu \sum_{n=1}^{\infty} u'_{2n-1}(t)| + 4 \max_{t \in [0, T]} |\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda_n^2} \int_0^t u'_{2n}(t-s)k(s)ds| \\
 & \leq |\mu| \|k\| \left(2 \|u'_0\| T + \sum_{n=1}^{\infty} \left(4 \|u'_{2n-1}\| T + 4 \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|u_{2n-1}\| \right) \right) \\
 & \quad + 4 |\mu| \sum_{n=1}^{\infty} (\|u''_{2n-1}\| + \|u'_{2n-1}\| + \|u'_{2n}\| \|k\| T). \tag{50}
 \end{aligned}$$

Here we have used the estimates (22)-(28). Note that the function occurring on the right-hand side in this inequality is monotone increasing with T , and the fact that the function $k(t)$ belongs to the ball $B^T(k_0, \rho)$ implies the inequality

$$\|k\| \leq \rho + \|k_0\|_0 = \rho_0. \tag{51}$$

Therefore, we only strengthen the inequality if we replace $\|k\|$ in this inequality with the expression ρ_0 . Performing these replacements, we obtain

$$\begin{aligned}
 \|A[k](t) - k_0(t)\| & \leq C |\mu| [\|\varphi\| \|k\|^2 T e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \|\varphi'\| \left[\left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) \|k\| T \right. \\
 & \quad \left. + \|k\| \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + (1 + \|k\|) + \|k\| \left(T \left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \left(1 + \left(2 + \frac{T^2}{2} \|k\| \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \|k\| \left(e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 \right) \right) \|k\| T \right] \\
 & \quad \left. + (\|\varphi'\| + \|\varphi\|) \left(e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 \right) \|k\| T \right].
 \end{aligned}$$

Let T_1 be a positive root of the equation

$$\begin{aligned}
 m_1(T) & = C |\mu| [\|\varphi\| \|k\|^2 T e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \|\varphi'\| \left[\left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) \|k\| T \right. \\
 & \quad \left. + \|k\| \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + (1 + \|k\|) + \|k\| \left(T \left(1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \left(1 + \left(2 + \frac{T^2}{2} \|k\| \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + \|k\| \left(e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 \right) \right) \|k\| T \right] \\
 & \quad \left. + (\|\varphi'\| + \|\varphi\|) \left(e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 \right) \|k\| T \right] = \rho.
 \end{aligned}$$

Then for $T \in [0, T_1]$ we have $A[k](t) \in B^T(k_0, \rho)$.

Now consider two functions $k(t)$ and $\tilde{k}(t)$ belonging to the ball $B^T(k_0, \rho)$ and estimate the distance between their images $A[k](t)$ and $A[\tilde{k}](t)$ in the space $C[0, T]$. Composing the difference $A[k](t) - A[\tilde{k}](t)$ with the help of equations $u_0(t)$, $u_{2n-1}(t)$, $u_{2n}(t)$ and $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_{2n-1}(t)$, $\tilde{u}_{2n}(t)$, then estimating its norm, we obtain

$$\|A[k](t) - A[\tilde{k}](t)\| \leq C |\mu| \left| \int_0^t (u'_0(t-s)\tilde{k}(s) + \bar{u}'_0(t-s)\tilde{k}(s))ds \right|$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u'_{2n-1}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}'_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right| \\
 & + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u_{2n-1}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right| \\
 & + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}(t-\tau)} d\tau \int_0^{\tau} (u_{2n-1}(\tau-s)\bar{k}(s) + \bar{u}_{2n-1}(\tau-s)\tilde{k}(s))ds \right| \\
 & + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}''_{2n-1}(t) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}'_{2n-1}(t) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (u'_{2n}(t-s)\bar{k}(s) + \bar{u}'_{2n-1}(t-s)\tilde{k}(s))ds \right|.
 \end{aligned}$$

Let $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$, $\varphi_{2n-1} = \tilde{\varphi}_{2n-1}$, $\varphi_{2n} = \tilde{\varphi}_{2n}$. Then using inequality (22)-(28) and the estimate (39)-(45) with we will drive the next inequality for $\|A[k] - A[\tilde{k}]\|$:

$$\begin{aligned}
 \|A[k](t) - A[\tilde{k}](t)\| & \leq \frac{C|\bar{\mu}|}{\sigma} [(\|u'_0\| \|\bar{k}\| + \|\bar{u}'_0\| \|\tilde{k}\|)T + \sum_{n=1}^{\infty} [\|u'_{2n-1}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}'_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| T \\
 & + \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| T + \|u_{2n-1}\| \|\bar{k}\| \frac{T^2}{2} + \|\bar{u}_{2n-1}\| \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} + \|\bar{u}''_{2n-1}\| + \|\bar{u}'_{2n-1}\| \\
 & + \|u'_{2n}\| \|\bar{k}\| T + \|\bar{u}'_{2n}\| \|\tilde{k}\| T]] \leq C|\bar{\mu}|[\|u'_0\| T + \sum_{n=1}^{\infty} [(T + \frac{T^2}{2}) \|u_{2n-1}\| + \|u'_{2n-1}\| T + \|u'_{2n}\| T] \\
 & + (1 + \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\|)] \|u_0\| \|\tilde{k}\| T + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n-1}\| [(T + \frac{T^2}{2}) \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}} \\
 & + \|\tilde{k}\| T ((3+T) (T + \frac{T^2}{2}) (1 + \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}}) + T^2 e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}})] \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n}\| (1 + \frac{T^2}{2}) \|\bar{k}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|u_{2n}\| (1 + \frac{T^2}{2}) \|\bar{k}\| \leq C|\bar{\mu}|[\|\varphi_0\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} [\|k\| T^2 + 1 + \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\|] \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n-1}| [(T + \frac{T^2}{2}) (e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + (T + (T^2 + \frac{T^3}{2}) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}) \\
 & + (1 + (T + \frac{T^2}{2}) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}) T + (1 + (1 + T + \frac{T^2}{2}) \|k\|) (T + 1) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \\
 & + e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} \|\tilde{k}\| T ((T + \frac{T^2}{2}) (\frac{T}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}} + 1 + \|\tilde{k}\| \frac{T^2}{2} e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}} (3+T)) + T^2 e^{\|\tilde{k}\|\frac{T^2}{2}}] \\
 & + (T + (T^2 + \frac{T^3}{2}) \|k\| e^{\|k\|\frac{T^2}{2}} + T e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}) e^{\|k\|\frac{T^2}{2}}]
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{2n}| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \|k\| e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) e^{\|k\| \frac{T^2}{2}} \right] \| \bar{k} \|. \quad (52)$$

The functions $k(t)$ and $\tilde{k}(t)$ belong to the ball $B^T(k_0, \rho)$, and hence for each of these functions one has inequality (51) is valid. Note that the function on the right-hand side in inequality (52) at the factor $\|\bar{k}\|$ is monotone increasing with $\|k\|$, $\|\tilde{k}\|$, and T . Consequently, replacing $\|k\|$ and $\|\tilde{k}\|$ in inequality (52) with $\rho + \|k_0\|$ will only strengthen the inequality. This, we have

$$\begin{aligned} \|A[k](t) - A[\tilde{k}](t)\| &\leq C|\bar{\mu}|[|\varphi|]e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \left[\rho_0 T^2 + 1 + \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 \right] \\ &+ \|\varphi'\| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) (e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right. \right. \\ &+ \left. \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) T + \left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 \right) (T + 1) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right. \\ &+ \left. e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 T \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(\frac{T}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \rho_0 \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} (3 + T) \right) + T^2 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \right. \\ &+ \left. \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ &+ (\|\varphi'\| + \|\varphi\|) \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \| \bar{k} \|. \end{aligned} \quad (55)$$

Let T_2 be a positive root of the equation

$$\begin{aligned} m_2(T) &= C|\bar{\mu}|[|\varphi|]e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \left[\rho_0 T^2 + 1 + \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 \right] \\ &+ \|\varphi'\| \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) (e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right. \right. \\ &+ \left. \left(1 + \left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) T + \left(1 + \left(1 + T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 \right) (T + 1) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right. \\ &+ \left. e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \rho_0 T \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \left(\frac{T}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \rho_0 \frac{T^2}{2} e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} (3 + T) \right) + T^2 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \right. \\ &+ \left. \left(T + \left(T^2 + \frac{T^3}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + T e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] \\ &+ (\|\varphi'\| + \|\varphi\|) \left[\left(T + \frac{T^2}{2} \right) \rho_0 e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} + 1 + \left(1 + \frac{T^2}{2} \right) e^{\rho_0 \frac{T^2}{2}} \right] = 1. \end{aligned}$$

Then for $T \in (0, T_2)$ we have that the distance between the functions $A[k](t)$ and $A[\tilde{k}](t)$ in the function space $C[0, T]$ is not greater than distance between $\|k\|$ and $\|\tilde{k}\|$ multiplied by $m_2(T) < 1$. Consequently, if we choose $T^* < \min(T_1, T_2)$, then the operator A is a contraction in the ball $B^T(k_0, \rho)$; i.e., there exists a unique solution of equation (46). Theorem 4.1 is proven.

1. Romanov, V. G. *Inverse problems of mathematical physics*. Utrecht: VNU Science Press, The Netherlands, 1987.
2. Hasanov Hasanoğlu A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham, Springer, 2017, xiii+261 pp.
3. S.N. Antontsev, S.E. Aitzhanov, G.R. Ashurova Aninverse problem for the pseudo-parabolic equation with p -Laplacian. 2012. *Evol. Eq.and Cont.Theo*.
4. N. I. Ionkin, "The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition," *Differ. Uravn.*, vol. 13, no. 2, pp. 294–304, 1977.
5. K. M. Aleroev, T. S. and S. A. Malik, "Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-deter mining condition," *Electronic Journal of Differential Equations* 270, 1–16 (2013).
6. V. Il'in, "How to express basis conditions and conditions for the equiconvergence with trigonometric series of expansions related to non-selfadjoint differential operators," *Computers and Mathematics with Applications* 34, 641–647 (1997).
7. V. L. Kamynin; On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition, *Mathematical Notes*, 77 (2005), No.4, 482-493.
8. M.I. Ivanchov , N.V. Saldina Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration. *Ukr. Math. J.*, 2006. Vol. 58, No. 11. P. 1685–1703
9. J. Janno , A Lorenzi Recovering memory kernels in parabolic transmission problems. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2008. Vol. 16, No. 3. P. 239–265.
10. J. Janno, L. Wolfersdorf Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1996, Vol. 4, No. 1. P. 39–66.
11. D.K. Durdiev, Zh.Zh.Zhumaev, Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020. Vol. 45, No. 14. P. 8374–8388.
12. D.K. Durdiev, Zh.Z. Nuriddinov, Problem of determining a multidimensional kernel in one parabolic integro-differential equation. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2021. Vol. 14, No. 1. P. 117–127.
13. K.S.Amrilloeva, D.I.Akramova, J.B.Ergashov, Determination of a diffusion coefficient and a source control term for a time fractional diffusion equation with integral type over-determining conditions, October, 2022.
14. D. K. Durdiev, T. R. Suyarov, "Inverse coefficient problem for the 2D wave equation with initial and nonlocal boundary conditions", *Владикавк. матем. журн.*, 26:2 (2024), 5–25.
15. H.B. Elmurodova, Bir o'lovli psevdoparabolik integro-differensial tenglama yadrosini aniqlashning teskari masalasi. *Matematika instituti byulleteni*, 2024 7(3), 45-54 bb.
16. D. K. Durdiev, H. B. Elmurodova, A. A. Rakhmonov *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025, 29:1, 7–20.

KASR TARTIBLI TO'LIQIN TARQALISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA

*G'iyosova Farangis Ulug'bek qizi,
Qarshi davlat universiteti magistranti*

Annotatsiya. Ushbu maqolada kasr tartibli to'liqin tarqalish tenglamasi uchun 1-aralash masala qaralgan. Bu aralash masalaning yechimini mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema isbotlangan. Bu masalani yechishda matematik fizikaning keng tarqalgan usullaridan biri Furiye metodi yordamida yechilgan.

Kalit so'zlar: Kasr tartibli hosila va integral, aralash masala, Furiye metodi, Caputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В статье рассматривается смешанная задача 1 для уравнения распространения волн дробного порядка. Доказана теорема о существовании и единственности решения этой смешанной задачи. Один из распространенных методов математической физики при решении этой задачи решается с помощью метода Фурье.

Ключевые слова: Дробная производная и интеграл, смешанная задача, метод Фурье, дробная производная Капуто.

MIXED PROBLEM FOR THE FRACTIONAL-ORDER WAVE PROPAGATION EQUATION

Abstract. This article considers mixed problem 1 for the fractional-order wave propagation equation. The theorem on the existence and uniqueness of a solution to this mixed problem is proved. This problem was solved using one of the common methods in mathematical physics, the Fourier method.

Keywords: Fractional derivative and integral, mixed problem, Fourier method, fractional derivative in the sense of Caputo.

Kirish. Kasr hosilalarini o'z ichiga olgan differensial tenglamalarning simmetriya xususiyatlarini o'rganish hozirgi vaqtda anomal kinetikaga ega bo'lgan turli jarayonlarning matematik modellari kabi tenglamalarning tobora keng qo'llanilishi bilan bog'liq holda dolzarb muammo hisoblanadi. Bundan tashqari, klassik butun tartibli hosiladan farqli o'laroq, kasr tartibli hosilalarning bir xil bo'lmagan ko'plab ta'riflari mavjud, bu turli xil kasr tartibli differensial tenglamalarga olib keladi. Ular shaklida bir-biriga yaqin, lekin xususiyatlari jihatidan sezilarli darajada farq qiladi. Funktsiyaga nisbatan funktsiyaning kasr hosilalaridan foydalanib, umuman olganda, o'zgaruvchilarning mumkin bo'lgan almashtirishlar sinfini kengaytirishga imkon beradi. Ularni ekvivalentlik o'zgarishlarining yangi turli sifatida ko'rib chiqadi. Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ko'pgina matematik olimlar ilmiy izlanishlar olib borgan. Bu soha XVIII asr boshlarida paydo bo'lib, o'sha davrda J.Fure, J.Liuvill, B.Rimanlar tomonidan kiritilgan. Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar fizika, biologiya meditsina, iqtisodiyot va moliya, kompyuter fanlari va suniy intellekt sohalarida keng tatbiq etiladi.

Asosiy qism. Aytaulik, $D = (x, t) \in R^2$, $0 < x < l, 0 < t < T$ sohada

$$D_t^\alpha u(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t < T \quad (1)$$

Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli tenglamaning

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

boshlang'ich shartni va quyidagi

$$u(0, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(l, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasini qaraylik, bu yerda $\varphi(x)$, $f(x, t)$ - berigan funksiyalar, a - o'zgarmas son, T - fiksirlangan son, D_t^α orqali Kaputo ma'nosidagi α -tartibli kasr tartibli hosila belgilangan.

Ta'rif. Agar $u(x, t) \in C[0, l] \times [0, T]$ va $f(x, t)$ funksiyalar uchun $D_t^\alpha u(x, t), u_{xx}(x, t) \in C[0, l] \times [0, T]$ xossalarga ega bo'lib, (1)-(4) ning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda bu $u(x, t)$ funksiya (1)-(4) masalaning yechimi deyiladi.

Teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ va bo'lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin. U holda (1)-(4) aralash masalaning yechimi mavjud va u quyidagicha ko'rinishga ega:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha, 1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha, 1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Isbot. Teoremani isbotlash uchun xususiy hosilali tenglamalarni yechishda keng tarqalgan usullardan biri o'zgaruvchilarni ajratish, ya'ni Furye metodidan foydalanamiz. (1)-(4) masalaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz,

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

bu yerda $v(x, t)$ funksiya

$$\begin{cases} D_t^\alpha v(x, t) - a^2 v_{xx}(x, t) = 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (5)$$

masalaning, $w(x, t)$ funksiya esa

$$\begin{cases} D_t^\alpha w(x, t) - a^2 w_{xx}(x, t) = f(x, t) \\ w(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (6)$$

masalaning yechimi.

(1)-(4) masalani yechish uchun yuqoridagi ikkita yordamchi masalani yechish yetarli. Bunda (1)-(4) masalani bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan ikki hol uchun alohida-alohida yechib olamiz (5) masalani yechish uchun Furye usulidan foydalanamiz. Yechimni

$$v(x, t) = T(t) X(x) \neq 0 \quad (7)$$

Ko'rinishda izlaymiz, bunda $X(x)$ - faqat x o'zgaruvchining funksiyasi, $T(t)$ -esa faqat t o'zgaruvchining funksiyasidir. (7) ni (5) tenglamaga olib borib qo'yamiz

$$D_t^\alpha T(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x) \quad (8)$$

$$\frac{D_t^\alpha T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (9)$$

tenglikni hosil qilamiz, (9) ko'rinishdagi funksiya (8) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun (9) ayniyatdan iborat bo'lishi kerak, ya'ni $0 < t < T$ erkli o'zgaruvchining barcha qiymatlarida o'rinli bo'lishi shart bo'ladi. (9) tenglikning chap tomoni faqat t o'zgaruvchiga, o'ng tomoni faqat x o'zgaruvchiga bog'liq. Agar biz x o'zgaruvchining biror qismini tanlab t o'zgaruvchini o'zgartirsak (9) tenglikning o'ng qismi va aksincha t o'zgaruvchining biror qismini tanlab x o'zgaruvchini o'zgartirsak (9) tenglikning chap qismi

o'zgaras bo'ladi. Ushbu tenglik faqat tenglikning ikkala tomoni ham o'zgaras songa teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Demak, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{D_t^\alpha T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (10)$$

bu yerda λ - o'zgaras bo'lib, uning ishorasi haqida hech qanday talab qo'yilmagani uchun keyingi hisoblar qulay bo'lishi uchun minus ishora bilan olamiz.

(10) tenglikdan $X(x)$ va $T(t)$ noldan farqli funksiyalarni aniqlash uchun

$$D_t^\alpha T(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (11)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (12)$$

oddiy differensial tenglamalarga kelimiz.

Chegaraviy shartlardan foydalanib quyidagi tenglikka ega bo'lamiz,

$$v(0, t) = T(t) X(0) = 0$$

$$v(l, t) = T(t) X(l) = 0$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa, $T(t)$ noldan farqli funksiya bo'lganligi uchun $X(x)$ funksiya uchun

$$X(0) = X(l) = 0$$

qo'shimcha shartlar qanoatlantirilishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $X(x)$ funksiyani aniqlash uchun xos qiymat haqidagi soda masalani hosil qilamiz: λ parametrning shunday qiymatlarini topish kerakki natijada

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

masala notrivial yechimga ega bo'lsin. λ parametrning bunday qiymatlariga xos son, unga mos notrivial yechimga esa berilgan masalaning xos funksiyasi deb ataladi. Ushbu keltirilgan xos son va xos funksiyasi masalasiga Shturm-Liuvill masalasi ham deyiladi. λ parametrning manfiy, nol va musbat bo'lgan hollari qarab chiqiladi. $\lambda < 0$ va $\lambda = 0$ bo'lgan hollarda $X(x) = 0$ yechimga ega bo'ladi. Xos funksiya noldan farqli yechimga ega bo'lmaydi. Bizga nol yechim kerak emas. Shu sababli $\lambda > 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (13) sistemaning yechimi quyidagicha aniqlanadi.

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

Chegaraviy shartlarga ko'ra

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(l) = c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$c_2 \neq 0 \text{ demak, } \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \text{ bundan } \lambda = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \text{ ekanligi kelib chiqadi, bu yerda } n=1,2,3,\dots$$

chunki λ va l musbat sonlar. Demak, berilgan masala notrivial yechimga $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$ xos qiymatlardagina ega va u quyidagicha bo'ladi

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Ixtiyoriy o'zgaras koeffitsientni $c_n = 1$ deb tanlab olsak yechim

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi esa, $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ xos qiymatga mos xos funksiyani $T_n(t)$ lar uchun quyidagi ifodalarni topamiz:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (14)$$

(14) ifodani (5) masalaga olib borib qo'ysak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\alpha T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

Bundan esa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[D_t^\alpha T_n(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib biz quyidagi masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} D_t^\alpha T_n(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (15)$$

(15) Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasining yechimiga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$T_n(t) = \varphi_n E_{\alpha,1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \quad (16)$$

Xususi yechimlar yig'indisi yana yechim bo'lganligi sababli

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

funksiya ham yechim bo'ladi. Shunday qilib (5) masalaning formal yechimi

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(- \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi bir jinsli bo'lmagan holni qarab chiqamiz. (6) masalani yechish uchun ham Furye usulidan foydalanamiz, ya'ni $w(x, t)$ funksiyani

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ko'rinishda izlaymiz. Uni (6) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\alpha T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x, t)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \text{ga teng ekanligidan}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$$

ekanligi kelib chiqadi. Boshlang'ich shartni hisobga olsak quyidagi

$$\begin{cases} D_t^\alpha T_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (18)$$

masalaga kelimiz. (18) masalaning yechimi Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli chiziqli differensial tenglama yechimi kabi bo'ladi, ya'ni

$$T_n(t) = \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Shunday qilib, (6) masala quyidagi formal yechimga ega: $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x$.

Yechimlarni umumlashtirib, (1)-(4) masala uchun quyidagi yechimga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + w(x,t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \end{aligned}$$

Xulosa. Ushbu aralash masalani yechishda quyidagi natijalarga kelindi:

Teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ va bo'lakli-uzluksiz hosilaga ega, hamda $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

$\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lsin. U holda (1)-(4) aralash masalaning yechimi mavjud va u quyidagicha ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) \sin \frac{\pi n}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n E_{\alpha,1} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t^\alpha \right) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\xi)^\alpha \right) f_n(\xi) d\xi \right) \times \sin \frac{\pi n}{l} x \end{aligned}$$

ADABIYOTLAR:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier (2006).
2. R. Ashurov, Yu. Fayziyev, "On the nlocal boundary value problems for time -fractional equations," *Fractal and Fractional*, 6, 41 (2022).
3. A.V.Pskhu *The Stankovich Integral transform and Its Applications*, Special Functions and Analysis of Differential Equations, 2020, p.16.
4. Umarov S., Hahn M., Kobayashi K. *Beyond the triangle: Browian motion, Ito calculus, and Fokker-Plank equation-fractional generalizations*. World Scientifi. 2017.

NEFT QUDUQLARINI SHTANGLI NASOSLAR YORDAMIDA ISHLATISHDA
GIDRODINAMIK BOSIM

Akilov Jaxon Akilovich,

*Mirzo Ulug‘bek nomli Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti,
Fizika-matematika fanlari doktori, professor
Samarqand, 140147, Lolazor k.,70
jaxon.akilov@mail.ru*

Djabbarov Mamasoli Sadikovich,

*Mirzo Ulug‘bek nomli Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti dotsenti,
fizika-matematika fanlari nomzodi
m.s.jabborov1954@mail.ru*

G‘aybulov Yuldosh Shermanovich,

*Mirzo Ulug‘bek nomli Samarqand davlat arxitektura-qurilish universiteti katta o‘qituvchisi
vgaybulov@mail.ru*

Annotatsiya. Maqolada neft qudug‘ini chuqur joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlik qovushoq-elastik xususiyatlarining quduqdagi gidrodinamik bosimga ta’siri qaralgan. Jarayonning matematik modeli tuzilib, uni ifodalovchi matematik masala Furiye va Laplas almashtirishi usullari bilan yechilgan. Olingan formulalar asosida, neft relaksatsiya xususiyatlarining plunjerga bo‘lgan gidrodinamik bosimga ta’siri o‘rganilgan. Agar dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o‘zgarsa, bosimning o‘zgarishi impulsli xususiyatga ega bo‘lishi mumkinligi ko‘rsatilgan. Aniqlanganki, suyuqlikning qovushoq elastik xususiyatlari gidrodinamik bosim maksimumining “kechikishiga” olib keladi, ushbu xususiyatlar oshgani sayin, qovushoq va qovushoq-elastik suyuqliklar uchun bosim qiymatlari farqi ortadi.

Kalit so‘zlar: plunjer, gidrodinamik bosim, qovushoq-elastik suyuqlik, relaksatsiya parametrlari, shtangli nasos, Furiye usuli, Laplas almashtirishi.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ
СКВАЖИН ШТАНГОВЫМИ НАСОСАМИ

Аннотация. В статье рассматривается влияние вязкоупругих свойств жидкости на гидродинамическое давление нефти при эксплуатации нефтяной скважины глубинными штанговыми насосами. Построена математическая модель процесса и решена представляющая её математическая задача с использованием методов преобразований Фурье и Лапласа. На основе полученных формул исследовано влияние релаксационных свойств нефти на гидродинамическое давление на плунжер. Установлено, что при резком изменении скорости плунжера в начальный момент, изменение давления может иметь импульсный характер. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости приводят к «запаздыванию» достижения максимума гидродинамического давления, причем с ростом этих свойств разница в значениях давления для вязких и вязкоупругих жидкостей увеличивается.

Ключевые слова: плунжер, гидродинамическое давление, вязкоупругая жидкость, параметры релаксации, штанговый насос, метод Фурье, преобразование Лапласа.

HYDRODYNAMIC PRESSURE DURING OIL WELL OPERATION WITH SUCKER ROD
PUMPS

Abstract. The article discusses the influence of viscoelastic fluid properties on the hydrodynamic pressure of oil during wellbore operation using sucker rod pumps. A mathematical model of the process is constructed, and the corresponding mathematical problem is solved using Fourier and Laplace transform methods. Using the resulting formulas, the influence of the relaxation properties of oil on the hydrodynamic pressure on the plunger is studied. It is established that with a sharp change in plunger velocity at the initial moment, the pressure change can be impulsive. It is shown that the viscoelastic properties of the fluid lead to

a "delay" in reaching the maximum hydrodynamic pressure, and that as these properties increase, the difference in pressure values for viscous and viscoelastic fluids increases.

Keywords: plunger, hydrodynamic pressure, viscoelastic fluid, relaxation parameters, rod pump, Fourier method, Laplace transform.

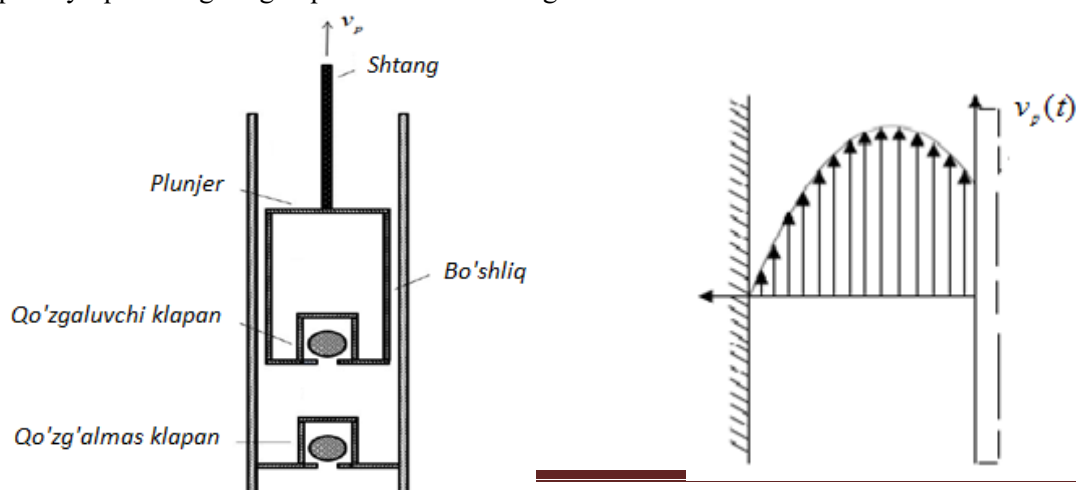
Kirish. Neft quduqlarini shtangali nasoslar bilan ishlatishda, plunjerga ko'taruvchi trubalardagi suyuqlik ustuni tufayli hosil bo'ladigan bosim ta'sir qiladi. Plunjer yuqoriga qarab harakat qilganda, shtanglar osilgan nuqta harakatlana boshlagan paytdan boshlab, plunjer suyuqlikning og'rlik yukini ko'tara boshlaydi. Ushbu yuk ta'sirida shtanglar cho'zilib, bu ularning ishdan chiqishiga olib kelishi mumkin. Plunjerning tezligi o'zgaruvchan bo'lgani uchun, chuqurlikdagi quduq nasosining silinri va shtanglar orasidagi halqasimon maydonida suyuqlik harakati nostatsionar bo'ladi. U plunjer ustidagi bosimda aks etadi. Mazkur maqolada, plunjer yuqoriga qarab harakatlanishi paytida unga bo'lgan gidrodinamik bosimga neft qovushoq-elastik xususiyatlarining ta'siri nazariy jihatdan o'rganilgan.

Ekspperimental tadqiqotlar ko'rsatadiki, tarkibida asfalten-smola moddalar bo'lgan neftlar relaksatsiya xususiyatiga ega va ular qovushoq-elastik suyuqliklar hisoblanadi [1-2]. Neft quduqlari ishlashining ko'plab muhim ko'rsatkichlari va texnologik uskunalarining ishlashi neftning reologik xususiyatlariga bog'liq. Qovushoq-elastik neftning reologik xususiyatlari gidrodinamik jarayonlarga sezilarli ta'sir ko'rsatadi, shuning uchun neft konlarini o'zlashtirish va quduqni ishlatishda ularni hisobga olish zarur [3]. Neftni qazib olish har xil turdagi nasos agregatlari yordamida amalga oshiriladi. Ulardan eng keng tarqalgani chuqur joylashgan shtangli nasoslardir. Ushbu agregatlar bilan ishlash tajribasi ulardan katta chuqurlikdagi o'rta va yuqori oqimli quduqlarda samarali foydalanish mumkinligini ko'rsatadi. Turli geologik va fizik sharoitlarda ularning ishonchliligi neft qazib olish ko'rsatkichlarini ko'p jihatdan aniqlaydi. Shtangli plunjerli nasoslar yordamida neft quduqlarini ishlatishda matematik modellash tirish masalalari [4-5] da qaralgan. [4] da murakkab sharoitlarda ishlaydigan plunjerli nasosning matematik modeli taklif qilingan. [5] da yuqori qovushoqli neftni chiqarish uchun pnevmatik kompensatorga ega shtangli blokning matematik modeli ishlab chiqilgan, quduq bo'ylab gidrodinamik bosimni barqarorlashtirish tahlil qilingan.

Shtangli nasoslar yordamida quduqni ishlatish jarayonida neft qovushoq-elastik xossalari gidrodinamik bosimga ta'sirini o'rganish alohida qiziqish uyg'otadi. Chuqur quduq nasosining shtanglari va silindri orasidagi halqasimon maydonda suyuqlikning nostatsionar harakati masalalari [6-9] da qaralgan. [6] da ikkita doiraviy truba orasidagi halqasimon bo'shliq tekis bo'shliq sifatida modellash tirilgan va neft qovushoq Nyuton suyuqligi deb qaralgan. Masala taqribiy usulda yechilgan. Bu masalaning aniq yechimi qovushoq suyuqlik va qovushoq-elastik Maksvell suyuqligi uchun [7, 8] da keltirilgan. Biroq, ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqni tekis bo'shliq sifatida modellash tirish olingan formulalarni amalda qo'llashni cheklaydi. Yuqorida aytilgan farazdan foydalanmagan holda masala qovushoq va Maksvell qovushoq-elastik suyuqligi uchun [9] da qaralgan.

Biroq, qovushoq-elastik neftlar qazib olinadigan quduqlarni ishlatish jarayonda gidrodinamik bosimni hisoblashda nafaqat kuchlanishning relaksatsiyasi vaqti, balki tezlikning kechikishi vaqtini ham hisobga olish zarur.

Masalaning qo'yilishi. Ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqasimon oraliqda plunjerga neftning gidrodinamik bosimini aniqlash masalasini qaraymiz. 1-rasmda chuqur quduq nasosining tipik konfiguratsiyasi, 2-rasmda qo'zg'almas sistemaga nisbatan ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqda suyuqlik tezligining taqsimlanishi ko'rsatilgan.



1-rasm. Shtangali nasos tizimining konfiguratsiyasi

2-rasm. Qo'zg'almas sistemaga nisbatan ko'taruvchi truba va shtanglar orasidagi halqali bo'shliqda suyuqlik tezligining taqsimlanishi. $v_p(t)$ – plunjer tezligi.

Jarayonni matematik modellashirish uchun suyuqlik va trubalarga nisbatan umumiy qabul qilingan farazlardan foydalanamiz: ko'taruvchi trubaning yuzasida suyuqlikning nisbiy tezligi nolga teng; harakatlanuvchi truba(lar) yuzasida esa u truba tezligiga teng; oqimning silliqqligi saqlanadi; suyuqlik siqilmas; boshlang'ich va oxirgi effektlar e'tiborga olinmaydi.

Plunjerga umumiy bosim $p(t)$ quyidagicha bo'ladi:

$$p(t) = \Delta p(t) + \rho g(L - h) + p_0, \quad (1)$$

bu yerda t - vaqt; $\Delta p(t)$ – ko'taruvchi trubada suyuqlikning nostatsionar harakati paytida gidrodinamik bosim (bosim o'zgarishi); p_0 – quduq og'zidagi bosim; L – suyuqlikning ko'tarilgan ustunining balandligi; h –

nasosining cho'mish chuqurligi; ρ – neftning zichligi; g – erkin tushish tezlashishi, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Suyuqlikning nostatsionar laminar oqimdagi $v(r, t)$ tezligi, doiraviy simmetriyani hisobga olgan holda, quyidagi tenglamadan aniqlanadi

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = q(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau), \quad (r_2 < r < R), \quad (2)$$

bu yerda R – radial koordinata; r – ko'taruvchi trubaning radiusi; r_2 – shtanglar radiusi; $q(t) = -\partial p / \partial z = \Delta p / L$ ko'taruvchi trubaning o'qi bo'ylab trubaning L uzunlikdagi qismiga mos bosim o'zgarishi; τ – urinma kuchlanish.

(1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$p(t) = Lq(t) + \rho g(L - h) + p_0.$$

Suyuqlikning reologik tenglamasini quyidagicha olamiz:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(r, t) = \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (3)$$

bu yerda μ – dinamik qovushoqlik; λ_1 - kuchlanishning relaksatsiya vaqti; λ_2 – tezlikning kechikish vaqti.

(3) tenglama $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ da Oldroydning qovushoq-elastik suyuqlik modelini ifodalaydi ($\lambda_1 > \lambda_2$). Nol boshlang'ich shartda siljish kuchlanishi uchun (3) tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$\tau(r, t) = \mu \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu}{\lambda_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} \frac{\partial v(r, \xi)}{\partial r} d\xi. \quad (4)$$

(4) ni (1) ga qo'yib, suyuqlik tezligi uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} v(r, \xi) d\xi \right) + q(t). \quad (5)$$

(1) va (3) dan foydalanib, suyuqlik tezligi uchun bitta differensial tenglama hosil qilish mumkin:

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial v}{\partial t} = \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) q(t) + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right], \quad (r_2 < r < R). \quad (6)$$

Dastlabki vaqtda suyuqlik harakatlanmaydi, shuning uchun (7) uchun boshlang'ich shartlar

$$v(r, 0) = 0, \quad v_t(r, 0) = 0, \quad r_2 \leq r \leq R. \quad (7)$$

bo'ladi. Qabul qilingan farazlarga muvofiq, (7) tenglama uchun chegaraviy shartlar

$$v(r_2, t) = v_p(t), \quad v(R, t) = 0, \quad (t > 0). \quad (8)$$

bo'lad, bu yerda $v_p(t)$ – plunjerning harakat tezligi. Hidrodinamik bosimni aniqlashda qo'shimcha shart sifatida suyuqlik oqimi balansi tenglamasidan foydalanamiz:

$$Q = \pi(r_1^2 - r_2^2)v_p(t) = 2\pi \int_{r_2}^R rv(r,t)dr, \quad (9)$$

bu yerda r_1 – plunjer radiusi, Q – suyuqlik sarfi.

(1)-(9) munosabatlar qaralayotgan jarayonning matematik modelini ifodalaydi.

Masalani yechish usuli. Quyidagi o'lchamsiz miqdorlarni kiritamiz:

$$\bar{t} = \frac{U_0}{R}t, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{v(r,t)}{U_0}, \quad \bar{v}_p(\bar{t}) = \frac{v_p(t)}{U_0}, \quad \bar{q}(\bar{t}) = \frac{R}{\rho U_0^2}q(t),$$

bu yerda U_0 – tezlikning biror xarakterli qiymati. Unda, o'lchamsiz miqdorlarda quyidagilarni olamiz:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \int_0^{\bar{t}} \bar{v}(\bar{r}, \xi) e^{-\frac{\bar{t}-\xi}{\bar{\lambda}_1}} d\xi \right) + \bar{q}(\bar{t}), \quad (\alpha < \bar{r} < 1).$$

$$\left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \left[\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right] + \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \bar{q}(\bar{t}), \quad (\alpha < \bar{r} < 1),$$

$$\bar{v}(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{v}_t'(\bar{r}, 0) = 0, \quad (\alpha \leq \bar{r} \leq 1);$$

$$\bar{v}(\alpha, \bar{t}) = \bar{v}_p(\bar{t}), \quad \bar{v}(1, \bar{t}) = 0, \quad (\bar{t} > 0).$$

$$\int_{\alpha}^1 \bar{r} \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r} = \frac{\alpha_*^2}{2} \bar{v}_p(\bar{t}),$$

bu yerda $\alpha = r_2 / R$, $\alpha_1 = r_1 / R$, $\alpha_*^2 = \alpha_1^2 - \alpha^2$, $c_1 = c(1 - c_2)$, $c = 1 / \bar{\lambda}_1$, $c_2 = \bar{\lambda}_2 / \bar{\lambda}_1$,

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{U_0}{R} \lambda_1, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{U_0}{R} \lambda_2, \quad \text{Re} = \frac{\rho R U_0}{\mu}.$$

Masalani yechish jarayonida, yozuvlar qulay bo'lishi uchun, o'lchamsiz miqdorlar ustidagi "-" belgini hozircha qo'ymay yozamiz. Ya'ni quyidagicha:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^t v(r, \xi) e^{-\frac{t-\xi}{\lambda_1}} d\xi \right) + q(t), \quad (\alpha < r < 1). \quad (10)$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) q(t), \quad (\alpha < r < 1) \quad (11)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v_t'(r, 0) = 0, \quad (\alpha \leq r \leq 1); \quad v(\alpha, t) = v_p(t), \quad v(1, t) = 0, \quad (t > 0). \quad (12)$$

$$\int_{\alpha}^1 rv(r,t)dr = \frac{\alpha_*^2}{2} v_p(t). \quad (13)$$

(12) ni r ga ko'paytirib, $[\alpha, 1]$ oraliqda integrallab, (13) dan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$q(t) = \frac{\alpha_*^2}{1 - \alpha^2} v_p'(t) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_2}{1 - \alpha^2} \left[\frac{\partial v(1, t)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, t)}{\partial r} \right] - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_1}{1 - \alpha^2} \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \left[\frac{\partial v(1, \xi)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha, \xi)}{\partial r} \right] d\xi. \quad (14)$$

(17) ni (12) ga qo'yib, suyuqlik tezligi uchun quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & \frac{c_2}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_2}{1-\alpha^2} \left[\frac{\partial v(1,t)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha,t)}{\partial r} \right] + \frac{c_1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \frac{\partial v(r,\xi)}{\partial r} d\xi \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{2c_1}{1-\alpha^2} \cdot \int_0^t e^{-c(t-\xi)} \left[\frac{\partial v(1,\xi)}{\partial r} - \alpha \frac{\partial v(\alpha,\xi)}{\partial r} \right] d\xi + \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} v_p'(t), \end{aligned} \quad (15)$$

Bu tenglamani Furiyening o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan yechamiz. Buning uchun $v(r,t) = z(r)U(t)$ deb olamiz. (15) ga mos birjinsli tenglama uchun, nol chegaraviy shartlarda, quyidagi Bessel tenglamasi uchun Shturm-Liuvvil masalasini hosil qilamiz:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) + \beta^2 z = \frac{2}{1-\alpha^2} [z'(1) - \alpha z'(\alpha)], \quad z(\alpha) = 0, \quad z(1) = 0. \quad (16)$$

$\beta = 0$ (16) masalaning xos qiymati. Unga mos $z_0(r)$ xos funktsiyani (13) ni hisobga olgan holda - quyidagi ko'rinishda topish topish:

$$z_0(r) = A_\alpha \left[1 - r^2 + (1 - \alpha^2) \frac{\ln r}{\ln \alpha} \right], \quad (17)$$

bu yerda $A_\alpha = \frac{(2\alpha_*^2 + \alpha^2 - 1) \ln \alpha}{(1 - \alpha^2) [1 - \alpha^2 + (1 + \alpha^2) \ln \alpha]}.$

Izlanayotgan noma'lum funktsiyalarni quyidagicha ifodalaymiz

$$v(r,t) = v_0(r,t) + v_1(r,t), \quad (18)$$

$$q(t) = q_0(t) + q_1(t), \quad (19)$$

bu yerda $v_0(r,t) = z_0(r)v_p(t)$ (15) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning nol boshlang'ich va chegaraviy shartlardagi yechimi. $q_0(t)$ funktsiya (14) ga $v_0(r,t)$ ni qo'yib aniqlanadi :

$$q_0(t) = \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} v_p'(t) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \left[c_2 v_p'(t) + c_1 \int_0^t e^{-c(t-\xi)} v_p'(\xi) d\xi \right]. \quad (20)$$

$v_1(r,t)$, $q_1(t)$ funktsiyalar

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) q_1(t), \quad (\alpha < r < 1). \quad (21)$$

tenglamalarning

$$v_1(r,0) = 0, \quad v_{1r}(r,0) = 0, \quad (\alpha \leq r \leq 1); \quad v_1(\alpha,t) = v_p(t), \quad v_1(1,t) = 0, \quad (t > 0). \quad (22)$$

$$\int_\alpha^1 r v_1(r,t) dr = \frac{1-\alpha^2}{4} v_p(t), \quad (23)$$

shartlarni qanoatlantiruchi yechimi. Bu yerda (23) tenglik (13) ni hisobga olgan holda (15) dan kelib chiqadi.

(21)-(23) masalani Laplas integral almashtirishi yordamida yechamiz[10]:

$$\tilde{v}_1(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v_1(r,t) dt, \quad \tilde{v}_p(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v_p(t) dt, \quad \tilde{q}_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} q_1(t) dt.$$

Boshlang'ich shartlarni hisobga olib, Laplas tasvirida

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{v}_1}{dr} \right) - k^2 \tilde{v}_1(r,s) = -\frac{k^2}{s} \tilde{q}_1(s), \quad (\alpha < r < 1) \quad (24)$$

tenglamani olamiz. Uning uchun chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\tilde{v}_1(0,s) = \tilde{v}_p(s), \quad \tilde{v}_1(1,s) = 0, \quad (25)$$

bu yerda $k = \sqrt{\text{Re } s (1 + \lambda_1 s) / (1 + \lambda_2 s)}$. (23) tenglik Laplas tasvirida quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\int_\alpha^1 r \tilde{v}_1(r,s) dr = \frac{1-\alpha^2}{4} \tilde{v}_p(s). \quad (26)$$

(24) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yozish mumkin:

$$\tilde{v}_1(r, s) = C_1 J_0(ikr) + C_2 Y_0(ikr) + \frac{\tilde{q}_1(s)}{s},$$

bu $J_0(x), Y_0(x)$ - nolinch tartibli birinchi va ikkinchi turdagi Bessel funksiyalari. C_1, C_2 o'zgarmlarni (25) shartdan topib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\tilde{v}_1(r, s) = \frac{1}{D_\alpha(ik)} \cdot \left\{ \frac{\tilde{q}_1(s)}{s} [D_\alpha(ik) + d_2(ik)J_0(ikr) - d_1(ik)Y_0(ikr)] + \right. \\ \left. + \tilde{v}_p(s) \cdot [Y_0(ik)J_0(ikr) - J_0(ikr)Y_0(ikr)] \right\}, \quad (27)$$

$$\tilde{q}_1(s) = s\tilde{v}_p(s) \cdot \tilde{f}(s), \quad (28)$$

bu yerda $d_1(x) = J_0(\alpha x) - J_0(x)$; $d_2(x) = Y_0(\alpha x) - Y_0(x)$; $D_\alpha(x) = J_0(\alpha x)Y_0(x) - J_0(x)Y_0(\alpha x)$.

$$\tilde{f}(s) = \frac{\varphi(ik)}{\psi(ik)}; \quad \varphi(x) = \frac{1-\alpha^2}{4} x D_\alpha(x) + Y_0(x)d_3(x) - J_0(x)d_4(x);$$

$$\psi(x) = \frac{1-\alpha^2}{2} x D_\alpha(x) - d_2(x)d_3(x) + d_1(x)d_4(x);$$

$$d_3(x) = \alpha J_1(\alpha x) - J_1(x); \quad d_4(x) = \alpha Y_1(\alpha x) - Y_1(x),$$

$J_1(x), Y_1(x)$ - birinchi tartibli birinchi va ikkinchi tur Bessel funksiyalari.

(28) tasvirda Laplas originaliga o'tib, quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\bar{q}(\bar{t}) = \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} \bar{v}_p'(\bar{t}) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \left[c_2 \bar{v}_p(\bar{t}) + c_1 \int_0^{\bar{t}} e^{-c(\bar{t}-\xi)} \bar{v}_p(\xi) d\xi \right] - \\ - \frac{4}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \varphi_n}{C_n \psi_{1n}} \int_0^{\bar{t}} \bar{v}_p'(\xi) e^{-a_n(\bar{t}-\xi)} (A_n \text{ch} b_n(\bar{t}-\xi) + B_n b_n \text{sh} b_n(\bar{t}-\xi)) d\xi, \quad (29)$$

bu yerda β_n

$$\frac{1-\alpha^2}{2} \beta D_\alpha(\beta) - d_2(\beta)d_3(\beta) + d_1(\beta)d_4(\beta) = 0$$

tenglamaning musbat ildizlari;

$$\psi_{1n} = (1-\alpha^2) D_\alpha(\beta_n) + \frac{1-\alpha^2}{2} \beta_n [\alpha d_7(\beta_n) + d_8(\beta_n)] + d_1(\beta_n)d_6(\beta_n) - d_2(\beta_n)d_5(\beta_n),$$

$$\varphi_n = \varphi(\beta_n), \quad d_5(x) = \alpha^2 J_0(\alpha x) - J_0(x); \quad d_6(x) = \alpha^2 Y_0(\alpha x) - Y_0(x);$$

$$d_7(x) = J_0(x)Y_1(\alpha x) - J_1(\alpha x)Y_0(x); \quad d_8(x) = J_1(x)Y_0(\alpha x) - J_0(\alpha x)Y_1(x);$$

$$a = 1/(2\bar{\lambda}_1), a_n = a(1 + \bar{\lambda}_2 x_n^2), b_n = \sqrt{a_n^2 - 2a x_n^2}. \quad x_n = \beta_n / \sqrt{\text{Re}}.$$

$$A_n = 1 + 2\bar{\lambda}_2 x_n^2 (2 + a\bar{\lambda}_2^2 x_n^2) + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)(\bar{\lambda}_2(a_n^2 + b_n^2) - 2a_n) - 4\bar{\lambda}_2^2 a_n x_n^2;$$

$$B_n = 2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\bar{\lambda}_2 a_n - 1);$$

$$C_n = 1 + 4\bar{\lambda}_1 x_n^2 + \bar{\lambda}_2 x_n^4 + 2\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 (a_n^2 + b_n^2) - 4\bar{\lambda}_1 a_n (1 + \bar{\lambda}_2 x_n^2).$$

Xususiyl holda, (42) dan $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 = 0$ da qovushoq suyuqlik uchun

$$\bar{q}(\bar{t}) = \frac{\alpha_*^2}{1-\alpha^2} \bar{v}_p'(\bar{t}) + \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \bar{v}_p(\bar{t}) - \frac{2}{\text{Re}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \varphi_n}{\psi_{1n}} \cdot \int_0^{\bar{t}} \bar{v}_p'(\xi) \cdot e^{-x_n^2(\bar{t}-\xi)} d\xi \quad (30)$$

formulani hosil qilish mumkin. Gidrodinamik bosimni

$$\Delta p(t) = \frac{\rho U_0^2 L}{R^2} \bar{q}(\bar{t}), \quad (31)$$

formuladan, plunjerga umumiy bosimni (31) ni (1) formulaga qo'yib aniqlanadi.

Natijalar va muhokamalar. Olingan formulalar yordamida plunjerning yuqoriga ko'tarilishida neft qovushoq-elastik xususiyatlarning gidrodinamik bosimga ta'sirini o'rganish mumkin. Ulardan ko'rsatadiki, dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o'zgarsa(lahzali tezlanish): $v_p(t) = U_0 \eta(t)$, tezlanishning ta'siri

kuchli bo'lishi mumkin, chunki $v'_p(t) = U_0 \delta(t)$, bu yerda $\eta(t)$ – Hevisidning birlik funktsiyasi, $\delta(t)$ – Dirakning delta funktsiyasi. Vaqtning biror orasida plunjer tezligi o'zgarmas bo'lsin: $v_p(t) = v_m = \text{const}$, ya'ni $\bar{v}_p(\bar{t}) = 1$. U holda (29) va (30) dan

$$\bar{q}(\bar{t}) = \frac{4A_\alpha}{\text{Re}} \left[c_2 + c_1(1 - e^{-c\bar{t}}) \right] \quad \text{va} \quad \bar{q}(\bar{t}) = \frac{4A_\alpha}{\text{Re}}$$

Ko'rinadiki, tezlik o'zgarmas bo'lgan vaqt oralig'ida gidrodinamik bosim faqat qovushoq suyuqlik uchun o'zgarmas bo'lib, qovushoq-elastik suyuqlik uchun o'zgarmas bo'lmaydi.

Shtanglar va trubalarning bo'ylama tebranishlari e'tiborga olinmasa, plunjer tezligini shtang osilgan nuqtaning tezligiga teng deb qarash mumkin. Bunday holda plunjer harakatining bir sikli davri uchun uning tezligini quyidagicha olish taklif qilingan[6]:

$$v_p(t) = \frac{48v_m}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{2\pi(2n-1)t}{T}, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (32)$$

bu yerda v_m – shtang osilgan nuqtaning o'rtacha tezligi; T – plunjer harakatining bitta sikli davri.

Suyuqlik qovushoq-elastik xossalari plunjer ko'tarilishi paytidagi gidrodinamik bosim o'zgarishiga ta'sirini o'rganish uchun parametrlarning quyidagi qiymatlarida sonli tajribalar o'tkazildi:

$$L = 1000 \text{ m}, h = 100 \text{ m}, U_0 = v_m = 0.60 \text{ m/s}, p_0 = 10^5 \text{ Pa},$$

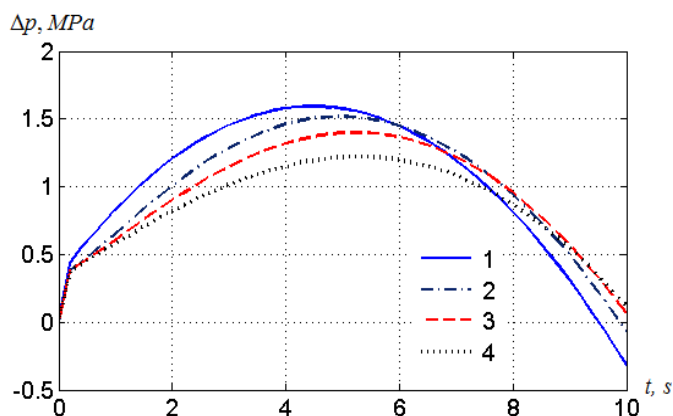
$$T = 20 \text{ s}, r_2 = 0.01 \text{ m}, r_1 = 0.02988 \text{ m}, R = 0.030 \text{ m}.$$

3-rasmda neft qovushoqligi va zichligining $\mu = 0.09 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ qiymatlari va relaksatsiya parametrlarining

$$1 - \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad 2 - \lambda_1 = 1 \text{ s}; \lambda_2 = 0.5 \text{ s}; \quad 3 - \lambda_1 = 2 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}; \quad 4 - \lambda_1 = 3 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}$$

qiymatlari uchun gidrodinamik bosimning vaqtga bog'liq ravishda o'zgarishi grafiklari keltirilgan.

Rasmdan ko'rinadiki, plunjerning ko'tarilish tezligining oshishi jarayonida qovushoq-elastik suyuqlik uchun gidrodinamik bosim qovushoq suyuqlikka qaraganda qaraganda kichik bo'ladi. U tezlik kamayishida, aksincha, katta bo'ladi. Ko'tarilishning boshida va oxirida bosim o'zgarishining sakrashi sodir bo'ladi. Buning sababi shuki, qaralayotgan holda boshlang'ich tezlanish noldan farqli. Boshlang'ich sakrashning bo'lmasligi sharti - tezlikning dastlabki momentan boshlab silliq o'zgarishi, ya'ni boshlang'ich tezlanishning nolga tengligidir.



3-rasm. Neft relaksatsiya parametrlarining ba'zi qiymatlarida plunjerga bo'lgan gidrodinamik bosimning o'zgarishi grafiklari.

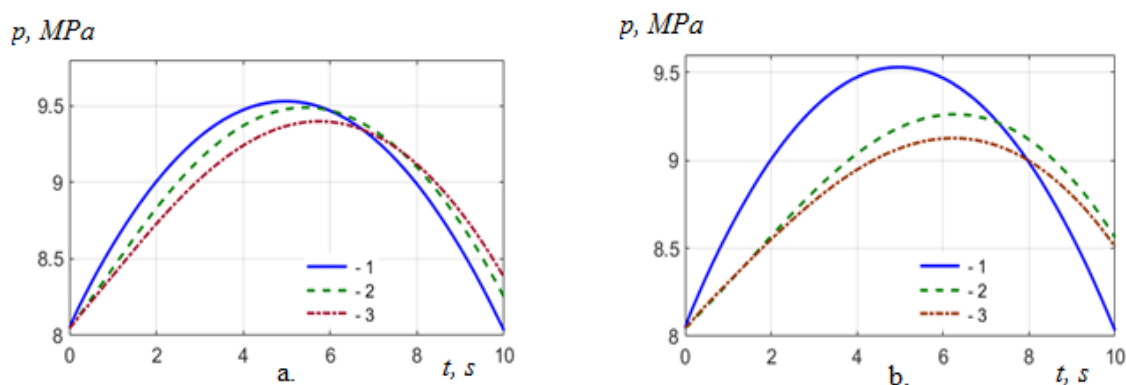
$$\mu = 0.09 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \rho = 920 \text{ kg/m}^3$$

$$1 - \lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad 2 - \lambda_1 = 1 \text{ s}; \lambda_2 = 0.5 \text{ s};$$

$$3 - \lambda_1 = 2 \text{ s}; \lambda_2 = 1 \text{ s}; \quad 4 - \lambda_1 = 3 \text{ s}; \lambda_2 = 2 \text{ s}.$$

4-rasmlarda neft qovushoqligi va zichligining $\mu = 0.100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ qiymatlarida plunjerga suyuqlik umumiy bosimining vaqt bo'yicha o'zgarishi grafiklari keltirilgan.

Grafiklardan ko‘rinadiki, neftning qovushoq-elastik xususiyatlari plunjerga gidrodinamik bosimining pasayishiga (tezlanish vaqtida) va ortishiga (sekinlashuv vaqtida) olib keladi. Qiymatlardagi eng katta farq ko‘tarilishning to‘xtashi momentida kuzatiladi. Relaksatsion xususiyatlar bosim maksimumining kechikishiga olib keladi. Bu xususiyatlarining oshishi bilan bosim rejimlaridagi farq, ayniqsa, ko‘tarilish sekinlashuvi momentida ortadi. Sonli tajribalar ko‘rsatadiki, neft fting qovushoqligi va zichligi oshishi bilan gidrodinamik bosim ham ortadi. Bunda bosim profillarining shakli va qovushoq-elastik xususiyatlar ta'sirining tabiati o‘zgarmaydi, ammo ta'sir darajasi ortadi. Bu, ayniqsa, tezlashish va tormozlash vaqtida seziladi.



4-rasm. Neft relaksatsiya parametrlarining plunjerga umumiy bosimga ta'siri

$\mu = 0.100 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.

a. 1 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; 2 – $\lambda_1 = 1 \text{ s}$, $\lambda_2 = 0.5 \text{ s}$; 3 – $\lambda_1 = 2 \text{ s}$, $\lambda_2 = 1 \text{ s}$;

b. 1 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; 2 – $\lambda_1 = 3 \text{ s}$, $\lambda_2 = 1 \text{ s}$; 3 – $\lambda_1 = 5 \text{ s}$, $\lambda_2 = 2 \text{ s}$.

Plunjer tezligi oshgandagi gidrodinamik bosimning o‘zgarishga doir hisoblashlar ko‘rsatadiki, plunjer tezligi oshishi gidrodinamik bosim ma’lum vaqtgacha ortadi va keyin kamayadi. Bu bosim nyuton qovushoq suyuqligi uchun qovushoq-elastik suyuqlikka qaraganda kamroq. Shunday qilib, qovushoq-elastik neftlarni ishlab chiqaradigan neft quduqlarini chuqur joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda neftning relaksatsion xususiyatlarini hisobga olish zarur.

Xulosa. Neft qudug‘ini chuqurda joylashgan shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlik qovushoq-elastik xususiyatlarining plunjerga gidrodinamik bosimining matematik modeli tuzilib, uni ifodalovchi matematik masala Furye usuli va Laplas almashtirishidan foydalanib yechilgan. Neft qovushoq-elastik xususiyatlarini plunjerga gidrodinamik bosimga ta'sirini nazariy jihatdan o‘rganishga imkon beruvchi formulalar olingan. Olingan formulalar va sonli tajribalar asosida, neft relaksatsiya xususiyatlarining plunjerga bo‘lgan gidrodinamik bosimga ta'siri o‘rganilgan. Aniqlanganki, agar dastlabki momentda plunjer tezligi keskin o‘zgarsa, bosimning o‘zgarishi impulsli xususiyatga ega bo‘lishi mumkin. Plunjer tezligi o‘zgarish bo‘lgan vaqt oralig‘ida gidrodinamik bosim faqat Nyuton suyuqligi uchun o‘zgarmas, qovushoq-elastik suyuqlik uchun esa o‘zgaruvchan bo‘lishi ko‘rsatilgan. Neftning qovushoq-elastik xususiyatlari plunjerga gidrodinamik bosim maksimumining “kechikishiga” olib kelishi, bu xususiyatlar oshgani sayin, qovushoq va qovushoq-elastik suyuqliklar uchun bosim qiymatlari farqi ortadi. O‘tkazilgan sonli tajribalar - shuni ko‘rsatadiki, qovushoq-elastik neftlar ishlab chiqaruvchi quduqlarni shtangli nasoslar yordamida ishlatishda suyuqlikning relaksatsion xususiyatlarini hisobga olish zarur.

ADABIYOTLAR:

1. Хужаёров Б. Х. Реологические свойства смесей. Самарканд: Согдиана, 2000. 216 с.
2. Аметов К. М., Байдуков Ю. Н., Рузин Л. М., Спиридонов Ю. А. Извлечение тяжёлых и высоковязких нефтей. – М.: Недра, 1985. 205 с.
3. Акилов Ж. Неустановившиеся движения вязкоупругих жидкостей. -Ташкент: Фан, 1982. 104 с.
4. Топольников А.С., Уразаков К.Р., Исмагилов С.Ф. Математическая модель штанговой насосной установки, работающей в сложных условиях // Ученые записки АГНИ. – 2015. Т. 8. – № 1. – С. 235–251.

5. Уразаков К.Р., Тимашов О.Т., Молчанова В.А. Моделирование работы погружных плунжерных насосных агрегатов с пневмокомпенсаторами. *Известия Томского политехнического университета*. Т. 331. № 12(2020). – С. 51-59. DOI <https://doi.org/10.18799/24131830/2020/12/2938>.
6. Мирзаджанзаде А.Х., Хасаев А.М. и др. Теория и практика применения глубинных насосов с гидравлическим затвором. М.: Недра, 1968. 158 с.
7. Akilov, Zh. A., Jhabbarov, M. S. & Gaybulov, Y. S. (2020). Stress modeling on the plunger at operation of the holes mining n-Newton oil. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 10 (90). P. 118-123. DOI: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS>.
8. Akilov Zh., Dzhabbarov M.S., Gaybulov Yu.Sh. Mathematical modeling of pressure on the plunger during the operation of wells producing viscoelastic oils. *DIZZW 2020. German International Journal of Modern Science*. No. 9, 2021, Vol. 1. P. 11-15. DOI: 10.24412/2701-8369-2021-9-1-11-15.
9. Гайбулов Ю. Ш. Гидродинамическое давление при эксплуатации нефтяных скважин глубинными насосами // Труды конференции AIP 3244. Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной механики – АПАМ-2024». С. 020057–10. Электронная публикация 27.11.2024. <https://doi.org/10.1063/5.0242037>.
10. Плескунов М.А. Операционное исчисление. М.: Юрайт, 2020. - 141 с.

LAPLAS TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASINING KARLEMAN FUNKSIYASI

Ishankulov Tolib,

Samarqand davlat universiteti professori, f.m.f.d
tolibi@mail.ru

Umarov Sanjar Sunnatovich,

Samarqand davlat pedagogika instituti tayanch doktoranti
sanjar88.21@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqola differensial tenglamalar va matematik fiziki ixstisoslgi bo'yicha tadqiqot olib boruvchi ilmiy izlanuvchilar uchun mo'ljallangan. Maqolada tekislikdagi Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi qaralgan. G soha chegarasi ∂G ning bir qismi S silliq chiziqda berilgan qiymatlariga ko'ra, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini davom ettirishi konskruksiyasi qaralgan.

Kalit so'zlar: Laplas tenglamasi, Koshi masalasi, nokorrekt masalalar, Karleman funksiyasi, regularizatsiya, davom ettirish formulalari.

ФУНКЦИЯ КАРЛЕМАНА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Аннотация: Статья предназначена для исследователей, проводящих исследования в области дифференциальных уравнений и математической физики. В статье рассматривается задача Коши для уравнения Лапласа на плоскости. Рассматривается построение границы области G ∂G на гладкой линии S по заданным значениям, являющееся продолжением решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризация, формулы продолжения.

CARLEMAN FUNCTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION

Abstract. This article is intended for researchers conducting research in the fields of differential equations and mathematical physics. It considers the Cauchy problem for the Laplace equation in the plane. It considers constructing the boundary of a domain G on a smooth line ∂G given values of S , which is an extension of the solution to the Cauchy problem for the Laplace equation.

Keywords: Laplace's equation, Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularization, continuation formulas.

Matematik fizikaning nokorrekt masalalarni yechimlar sinfini kompaktga qadar toraytirilsa, bu masala turg'un bo'lishiga doir birinchi natijalar A.N.Tixonov ishlarida keltirilgan. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasining Karleman funksiyasi tushunchasi M.M.Lavrent'yev tomonidan kiritilgan [2]. Tekislikdagi yo'lak ko'rinishidagi cheksiz sohada Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasining regularizatsiyasi V.K.Ivanov tomonidan o'rganilgan [3]. Ko'p o'lchamli fazoda soha chegarasining bir qismi konus bo'lganda Laplas va Gelmgols tenglamalari uchun Koshi masalasining yechimi Sh.Yarmuxamedov tomonidan Karleman funksiyasini qurish asosida olingan [4].

1. Masalaning qo'yilishi. R^2 tekislikda yarim birlik aylana yoyi hamda S silliq chiziq bilan chegaralangan D sohani qaraymiz. Bunda koordinata boshi sohadan tashqarida joylashgan deb olamiz.

$x = (x_1, x_2) \in D$ va $y = (y_1, y_2) \in \bar{D}$ bo'lsin. Qaralayotgan D sohada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1)$$

Laplas tenglamasi yechimi $U(x) = U(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ garmonik funksiyaning Koshi berilganlari S da berilgan:

$$U(x)|_S = f_0(x), \quad \left. \frac{\partial U(x)}{\partial n} \right|_S = f_1(x) \quad (2)$$

bu yerda $f_0(x)$ va $f_1(x)$ - berilgan funksiyalar. (2) shartlarga ko'ra $U(x)$ funksiyani D sohada topish masalasi qaraladi.

2. Karleman funksiyasi qurish sxemasi. (1) – (2) masala yechimini topishda Karleman funksiyasi metodidan foydalanamiz. [2] ga ko'ra Laplas tenglamasining Karleman funksiyasi ta'rifini keltiramiz:

Ta'rif. S to'plamning D sohaga nisbatan Karleman funksiyasi deb ikkita x va y nuqtalarga hamda σ musbat sonli parametrga bog'liq bo'lgan, quyidagi ikki shartlarni qanoatlantiruvchi $G(x, y, \sigma)$ funksiyaga aytiladi:

$$1) G(x, y, \sigma) = \ln \frac{1}{|x - y|} + g(x, y, \sigma), \quad (3)$$

bu yerda $g(x, y, \sigma)$ funksiya y o'zgaruvchi bo'yicha D sohada garmonik funksiya;

$$2) \int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, \sigma)| + \left| \frac{\partial G(x, y, \sigma)}{\partial n} \right| \right) ds \leq \alpha(\sigma); \quad (4)$$

bunda $\alpha(\sigma)$ funksiya $\sigma \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Bu ta'rifda $g(x, y, \sigma)$ funksiya Karleman funksiyasining regulyar qismi deyiladi.

Yuqorida berilgan ta'rifdagi Karleman funksiyasining regulyar qismini

$$g(x, y, N) = -\ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \cos n\theta, \quad (5)$$

ko'rinishda olamiz, bu yerda Karleman funksiyasining parametri σ sifatida N natural son olindi va

$$\theta = \varphi - \psi; \quad |x| = \rho; \quad |y| = \rho_1; \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}; \quad \psi = \arctg \frac{y_2}{y_1}.$$

Teorema. $G(x, y, N) = \ln \frac{1}{r} + g(x, y, N)$ funksiya qaralayotgan D sohada S yoyi uchun

Laplas tenglamasining Karleman funksiyasi bo'ladi.

Teoremani isbotlashdan oldin quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. (5) tenglik bilan aniqlangan $g(x, y, N)$ funksiya D sohada y o'zgaruvchi bo'yicha garmonik funksiya bo'ladi.

Isbot. $g(x, y, N)$ funksiyani y o'zgaruvchi bo'yicha Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsatamiz ya'ni:

$$\Delta_y g(x, y, N) = -\Delta_y \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \rho^n \Delta_y \left(\frac{\cos n\theta}{\rho_1^n} \right).$$

$$\ln \frac{1}{\rho_1} - \text{Laplas tenglamasining fundamental yechimligidan } \Delta_y \ln \frac{1}{\rho_1} = 0.$$

Qatordagi laplasian ichidagi funksiyani $g^* = \frac{\cos n\theta}{\rho_1^n}$ belgilaymiz.

Δg^* hisoblash uchun Laplas tenglamasini qutb koordinatalar ko'rinishidan

$$\Delta g^*(\rho_1, \theta) = \rho_1^2 g_{\rho_1 \rho_1}^* + \rho_1 g_{\rho_1}^* + g_{\theta\theta}^*$$

foydalanib, tegishli hosilalarni hisoblaymiz:

$$g_{\rho_1}^* = n \rho_1^{-n-1} \cos n\theta; g_{\rho_1 \rho_1}^* = n(n+1) \rho_1^{-n-2} \cos n\theta;$$

$$g_{\theta}^* = -n \rho_1^{-n} \sin n\theta; g_{\theta\theta}^* = -n^2 \rho_1^{-n} \cos n\theta.$$

$$\Delta g^*(\rho_1, \theta) = (n^2 + n) \rho_1^{-n} \cos n\theta - n \rho_1^{-n} \cos n\theta - -n^2 \rho_1^{-n} \cos n\theta = 0.$$

$$\Delta_y g(x, y, N) = 0.$$

(5) funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha garmonikligi isbotlandi.

Isbotlangan lemmadan $G(x, y, N)$ funksiya Laplas tenglamasining Karleman funksiya sifatini qanoatlantirishi kelib chiqadi. Endi $G(x, y, N)$ funksiya ta'rifni 2) shartini qanoatlantirishini ko'rsatish uchun

$$\int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, N)| + \left| \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right| \right) ds_y, \quad x \in D$$

integralni baholaymiz.

$$\text{Bu yerda } G(x, y, N) = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta, \quad r = |x - y|$$

$G(x, y, N)$ funksiyaning qator ko'rinishidagi ifodasini topish uchun $|x - y|$ ifodada $x = \rho e^{i\varphi}$,

$$y = \rho_1 e^{i\psi}, \quad \theta = \varphi - \psi \quad \text{va} \quad \lambda = \frac{\rho}{\rho_1} \quad \text{almashtirishlar olib}$$

$$r = \rho_1 \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Ushbu

$$\ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\rho_1} - \ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} \quad (6)$$

tenglikdagi $\ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta}$ ifodani kompleks o'zgaruvchili $\ln(1 - z)$ funksiya $z = \lambda e^{i\theta}$ almashtirishdan so'ng haqiqiy qismidan quyidagi

$$\ln \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \cos n\theta \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) va (7) dan

$$\ln \frac{1}{r} = \ln \frac{1}{\rho_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \quad (8)$$

tenglikni olamiz. (8) tenglikdan

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \quad (9)$$

ga kalamiz.

Karleman $G(x, y, N)$ funksiya sifatida

$$g(x, y, N) = -\ln \frac{1}{\rho_1} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta$$

funksiyani olamiz. Demak $G(x, y, N)$ funksiyani

$$G(x, y, N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi qatorni $x \in D$, $y \in \partial D / S$ uchun baholaymiz:

$$\begin{aligned} |G(x, y, N)|_{\partial D/S} &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n \cos n\theta \right|_{\rho_1=1} \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} = \rho^{N+1} (1 + \rho + \rho^2 + \dots) = \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

Xuddi shunga o'xshash G funksiyani $y \in \partial D / S$ nuqtadagi normal bo'yicha hosilasini baholaymiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial D/S} &= \left| \frac{\partial G}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=1} = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} -\frac{\rho^n}{\rho_1^{n+1}} \cos n\theta \right|_{\rho_1=1} = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} |-\rho^n \cos n\theta| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Shunday qilib,

$$\int_{\partial D/S} \left(|G(x, y, N)| + \left| \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right| \right) ds_y \leq \frac{4\pi \rho^{N+1}}{1-\rho}. \quad (12)$$

(12) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda $0 < \rho < 1$ bo'lgani uchun $N \rightarrow \infty$ da $2\pi \cdot \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}$

nolga intiladi.

Grin formulasiga ko'ra (1), (2) masala yechimi uchun

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[\ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \cdot \frac{\partial \ln \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS \quad x \in D \quad (13)$$

integral tasvir o'rinni.

$g(x, y, N)$ funksiya y o'zgaruvchi bo'yicha D sohada garmonikligidan $x \in D$ uchun Grin formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[g(x, y, N) \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n_y} - U(y) \cdot \frac{\partial g(x, y, N)}{\partial n_y} \right] dS_y = \\ = \int_D \left[g(x, y, N) \cdot_y U(y) - U(y) \cdot_y g(x, y, N) \right] dy = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

tenglik o'rinni. Masala shartidagi berilganlarni hisobga olib (13) va (14) tengliklardan

$$U(x) = \int_{\partial D/S} \left[G(x, y, N) \cdot \frac{\partial U(y)}{\partial n} - U(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_S \left[G(x, y, N) \cdot f_1(y) - f_0(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikda $U(x) = U(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ hamda (12)

tengsizlikni hisobga olgan holda $N \rightarrow \infty$ limitga o'tib

$$U(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_S \left[G(x, y, N) \cdot f_1(y) - f_1(y) \cdot \frac{\partial G(x, y, N)}{\partial n} \right] dS_y$$

tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

ADABIYOTLAR:

1. А.Н.Тихонов, "Об устойчивости обратных задач", ДАН СССР, т. 39, № 5 (1943), 195-198
2. М.М.Лаврентьев, "О некоторых некорректных задачах математической физики", Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. - 92 с..
3. В. К.Иванов, "Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе", Дифференц. уравнения, 1:1 (1965), 131-136
4. Ш.Ярмухамедов, "О задаче Коши для уравнения Лапласа", Докл. АН СССР, 235:2 (1977), 281-283.
5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, часть II (Наука, М., 1985).
6. Рудин У. Теория функций в полукруге (Мир, М., 1974).
7. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа (Наука, М., 1980).
8. Teodorescu N. La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique Mathématique (Thèse, Paris, 1931).
9. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения (Наука, Н., 1990).
10. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques (Paris, 1926).
11. Gonchar A. A. On analytic continuation from the edge of wedge. // Ann. Acad. Sci. Finnical. Ser. AI: Mathem.10, 221-225 (1985).

THE CONTROLLING PROBLEM FOR THE HEAT EXCHANGE EQUATION IN AN INHOMOGENEOUS ROD

Kuldoshova Maftuna Jumanazarovna,
Teacher of TKTI Shahrisabz branch
kuldoshovamaftuna6@gmail.com

Abstract. The issue of controlling the heat exchange process in a non-homogeneous boom is considered. The problem under consideration is put into a non-homogeneous equation of the parabolic type. A control function is placed at one end of the boom. The mathematical model of the problem is constructed. The existence and uniqueness of its solution is proved. The control function is found.

Keywords: Parabolic equation, Laplace equation, eigenfunction, eigenvalue, initial condition, boundary condition,

УПРАВЛЯЮЩАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛООБМЕНА В НЕОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ

Аннотация. Рассматривается задача управления процессом теплообмена в неоднородной штанге. Задача описывается неоднородным уравнением параболического типа. Управляющая функция помещена на один из концов штанги. Построена математическая модель задачи. Доказано существование и единственность её решения. Найдена управляющая функция.

Ключевые слова: параболическое уравнение, уравнение Лапласа, собственная функция, собственное значение, начальное условие, граничное условие,

BIR JINSLI BO‘LMAGAN NOVDADA ISSIQLIK ALMASHISH TENGLAMASINI BOSHQARISH MUAMMOSI

Annatatsiya. Bir xil bo'lmagan bumda issiqlik almashinuvi jarayonini nazorat qilish masalasi ko'rib chiqiladi. Ko'rib chiqilayotgan masala parabolik tipdagi bir jinsli bo'lmagan tenglamaga qo'yiladi. Bomning bir uchida boshqaruv funksiyasi o'rnatilgan. Masalaning matematik modeli tuzilgan. Uning yechimining mavjudligi va o'ziga xosligi isbotlangan. Boshqarish funksiyasi topilgan.

Kalit so'zlar: parabolik tenglama, laplas tenglamasi, xos funksiya, xos qiymat, boshlang'ich shart, chegaraviy shart,

Introduction. Currently, the development of science and technology provides the opportunity not only to study, but also to control many processes. The study of many physical processes comes down to the study of differential equations and mathematical physics problems. A simple example of this is the problem of maintaining the temperature of a certain area at a certain temperature.

Literature analysis. Currently, the problems of controlling processes described by partial differential equations are being intensively studied. The first to engage in this direction was the French scientist J.L. Lions. Later, V. Barbu, A. Rascanu, G. Tessitore, H.O. Fattorini. A.V. Fursikov obtained a number of scientific results. Academician Sh. Alimov, who is conducting scientific research in this area, in his articles "On A Control Problem Associated With The Heat Transfer Process" (2010) and S. Albeverio, Sh. Alimov, "On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process" (2008), considered the issue of optimal control of the heat exchange process.

Z.K.Fayozova "Граничное управление процессом теплообмена"(2013) In the article, a governing function for the homogeneous heat dissipation equation is found. Y. E. Fayziyev, N. Xalilova "О задаче управления процессом теплопроводности" (2010) In the article, a governing function for the inhomogeneous heat dissipation equation is found. Scientific results [1], [2],[3],[4] given in works.

Research methodology. The article sets the initial boundary conditions for the inhomogeneous heat dissipation equation, as well as the conditions that maintain the average temperature of the rod over time at a given state. A control function is set at one end of the inhomogeneous rod, and methods of the spectral theory of differential operators and Millen substitution are used to find the function.

Analyses and results. In the following area

$D = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < l\}$ Let's look at the heat transfer equation and the boundary and initial conditions.

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < l; t > 0; \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3)$$

here $k(x)$ function characterizing the composition of the stergen material,

$f(x, t)$ and the function of a heat source or absorber within the stent,

$\mu(t)$ heat control function on the edge of the rod,

$\varphi(x)$ - The initial state of the sturgeon.

(2) and (3) from the condition

$$u(0, 0) = \varphi(0) = \mu(0), \quad u(l, 0) = \varphi(l) = 0, \quad \text{equal to} \quad (4)$$

Management function

$\mu(t)$ We assume that is bounded:

$$|\mu(t)| \leq M. \quad (5)$$

Average temperature of sturgeon

$$\frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx = b(t) \quad (6)$$

We define it as (6) which indicates that the average temperature of the rod is maintained at a given value over time.

The problem is posed. $b(t)$ Let the function be given. Then it is

$\mu(t)$ It is necessary to find a control function such that problems (1)-(3) have a unique solution and this solution satisfies condition (6)

In solving this problem, we set the following requirements for the given functions.

$$k(x) \in C^1[0; l], \quad k(x) > k_0 > 0,$$

Theorem. Let our given functions belong to the following class

$$k(x) \in C^1[0; l], \quad k(x) > k_0 > 0, \quad \varphi \in C[0, l] \quad f(x, t) \in C[0; l] \times C(R_+) \quad \text{va}$$

$\mu \in C^1[0, +\infty]$. Then the solution to problem (1)-(4) exists and is unique.

Proof. To solve problems (1)-(3), we consider the following eigenvalue problem:

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right) = \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad \varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0. \quad (7)$$

It is known from the course on the spectral theory of differential operators that the eigenvalue problem (7) has a solution and that the solutions of this problem are

$\{\varphi_n(x)\}$ system of specific functions $L_2[0; l]$ forms an orthonormal basis in space, that

is:

$$\int_0^l \varphi_n(y) \varphi_m(y) dy = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

$$G(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad (8)$$

(1)-(3) We express the general solution of the problem using the Green function

$$u(x, t) = \omega(x, t) + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ k(\xi) \frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right\} - \frac{\partial \omega(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right] d\xi d\tau + \\ - \int_0^l G(x, \xi; t) \omega(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi \quad (9)$$

$$\text{So, } u(x, t) = k(0) \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi d\tau + \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (10)$$

To solve the problem before us, we substitute expression (10) into condition (6).

$$\int_0^t \mu(\tau) \left\{ \frac{1}{l} k(0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) dx \right\} d\tau = b(t) - \\ - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx - \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi dx \right\} d\tau.$$

To simplify the above equation, we introduce some notations.

$$K(t - \tau) = \frac{1}{l} k(0) \int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, 0; t - \tau) dx = \frac{1}{l} \int_0^l \left\{ k(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi; t - \tau) \Big|_{\xi=0} \right\} dx \\ F(t) = - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx \right\} d\tau, \\ \Phi(t) = - \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi dx \right\} d\tau.$$

Then we arrive at the following Volterra equation.

$$\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau = b(t) + F(t) + \Phi(t) \quad (11)$$

(11) We use Laplace transform to solve the equation:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \{ b(t) + F(t) + \Phi(t) \} dt,$$

Here $p = a + is$ - complex number. Then

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t \mu(\tau) K(t - \tau) d\tau \right) dt = \int_0^{+\infty} \mu(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\lambda} K(\lambda) d\lambda = \hat{\mu}(p) \hat{K}(p).$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \{b(t) + F(t) + \Phi(t)\} dt = \widehat{b}(p) + \widehat{F}(p) + \widehat{\Phi}(p).$$

$$\widehat{K}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} K(t) dt = \frac{1}{l} k(0) \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_n(0) \int_0^l \varphi_n(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-pt - \lambda_n^2 t} dt$$

$$\widehat{F}(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l G(x, \xi; t - \tau) f(\xi; \tau) d\xi dx \right\} d\tau dt$$

$$\widehat{\Phi}(p) = - \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_0^t \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi dx \right\} dt d\tau.$$

So,
$$\widehat{\mu}(p) = \frac{\widehat{b}(p) + \widehat{F}(p) + \widehat{\Phi}(p)}{\widehat{K}(p)}. \quad (12)$$

(12) Performing the Mellin substitution in the equation $\mu(t)$ we find the function.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\widehat{b}(p) + \widehat{F}(p) + \widehat{\Phi}(p)}{\widehat{K}(p)} e^{pt} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{b}(a+is) + \widehat{F}(a+is) + \widehat{\Phi}(a+is)}{\widehat{K}(a+is)} e^{(a+is)t} ds. \end{aligned}$$

The theorem has been proven.

Theorem. So

$M > 0$ find that the following conditions

$$\|b\|_{w_2^2(R_+)}^2 \leq M$$

and $b(0) = b'(0) = 0$ satisfies.

Proof. $\mu(t)$ We evaluate the function below.

$$|\mu(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{b}(i\xi) + \widehat{F}(i\xi) + \widehat{\Phi}(i\xi)|}{|\widehat{K}(i\xi)|} d\xi \leq \frac{1}{2\pi C_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(i\xi)| \sqrt{1 + \xi^2} d\xi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(i\xi)| \sqrt{1 + \xi^2} d\xi \leq C_1 \|b\|_{w_2^2(R_+)}^2. \quad \text{The condition is reasonable. Therefore}$$

$$|\mu(t)| \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} \|b\|_{w_2^2(R_+)}^2 \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} M = 1$$

Here $M = \frac{2\pi C_0}{C_1}$ is equal.

The theorem is proved.

CONCLUSION. In the considered case, the rod is not homogeneous and a heat source is located inside the rod. In this case, to determine the average temperature of the rod, a control function was placed at one end of it and found.

Control function $k(x)$, $f(x, t)$ It also depends on the functions and they have the following condition

$$...k(x) \in C^1[0; l], k(x) > k_0 > 0, \varphi \in C[0, l] \quad f(x, t) \in C[0; l] \times C(R_+)$$

REFERENCES:

1. Sh. Alimov, On A Control Problem Associated With The Heat Transfer Process. *Eurasian mathematical journal*, Number 2 (2010), 17-30.
2. S. Albeverio, SH. Alimov, On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process. *Applied Mathematics and Optimization*, (2008)
3. З.К.Фаязова. Граничное управление процессом теплообмена. *НУз*. 2013.
4. Ю.Э.Файзиев, Н.Халилова. О задаче управления процессом теплопроводности. *Вестник НУз*. 2016, С.49-54.

NOINFORMATIV KUZATUVLAR STATISTIK MODELI UCHUN KRAMÉR–RAO
BAHOSINING YANGI ISBOTI

Muradov Rustamjon Sobitxonovich,
Namangan davlat texnika universiteti,
Oliy matematika kafedrası mudiri,
Fizika-matematika fanlari doktori
rustamjonmuradov@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar juftligi orqali shakllanadigan o'ng tomondan tasodifiy senzuralangan model hamda unga mos ravishda kuzatiladigan minimumlar va senzuralanish indikatorlaridan iborat tanlanma tahlil qilinadi. Senzuralanish taqsimoti informativ bo'lmagan vaziyatda baholashga tegishli parametr uchun Fisher informatsiyasi aniqlanadi va Rao-Kramer quyi chegarasining muqobil isboti taqdim etiladi. Keltirilgan isbot senzuralangan kuzatuvlar uchun tuzilgan haqiqatga o'xshashlik funksiyasiga Koshi–Bunyakovskiy tengsizligini to'g'ridan-to'g'ri qo'llashga tayanadi, bunda tegishli regularlik shartlarining bajarilishi talab etiladi.

Kalit so'zlar: fisher informatsiyasi, informativ bo'lmagan senzuralanish modeli, Rao-Kramer quyi chegarasi.

НОВЫЙ ВЫВОД ОЦЕНКИ КРАМЕРА–РАО ДЛЯ МОДЕЛИ НЕИНФОРМАТИВНЫХ
НАБЛЮДЕНИЙ

Аннотация. В данной статье исследуется модель случайная цензурирования справа, формируемая парой независимых случайных величин, а также соответствующая выборка, состоящая из наблюдаемых минимумов и индикаторов цензурирования. В случае неинформативного распределения цензурирования определяется информация Фишера для оцениваемого параметра и приводится альтернативное доказательство нижней границы Рао–Крамера. Представленное доказательство основано на прямом применении неравенства Коши–Буняковского к функции правдоподобия для цензурированной выборки при выполнении необходимых регулярных условий.

Ключевые слова: информация Фишера, модель неинформативного цензурирования, нижняя граница Рао–Крамера.

A NEW DERIVATION OF THE CRAMÉR–RAO BOUND FOR A NONINFORMATIVE
OBSERVATION MODEL

Abstract. This paper examines a randomly right-censored model generated by a pair of independent random variables, along with the corresponding sample consisting of observed minima and censoring indicators. Under a noninformative censoring distribution, the Fisher information for the parameter of interest is derived, and an alternative proof of the Rao–Cramér lower bound is presented. The proof relies on a direct application of the Cauchy–Bunyakovsky inequality to the likelihood function of the censored sample, assuming the fulfillment of appropriate regularity conditions.

Keywords: Fisher information, noninformative censoring model, Rao–Cramér lower bound.

Kirish. Zamonaviy statistik tahlilda parametrlarni baholashning aniqligi va ishonchliligi nazariyasi markaziy o'rin tutadi, ayniqsa, kuzatuvlar to'liq yoki informativ bo'lmagan sharoitlarda. Amaliy tajriba shuni ko'rsatadiki, real ma'lumotlarning katta qismi senzuralangan, cheklangan yoki noaniq shaklda yig'iladi, bu esa klassik baholash usullarining samaradorligini keskin pasaytiradi. Shuning uchun bunday sharoitlarda Kramér–Rao quyi chegarasini qayta ko'rib chiqish va uning muqobil isbotlarini ishlab chiqish nazariy statistika hamda ishonchlilik tahlili uchun dolzarb masaladir. Noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao bahosining yangi isboti parametr bahosining eng yaxshi mumkin bo'lgan chegarasini aniqroq tushunishga yordam beradi va amaliy tadqiqotlarda, jumladan, tibbiyot statistikasi, iqtisodiy modellash, xavf tahlili va senzuralangan ma'lumotlar bilan ishlanadigan boshqa ko'plab sohalarda ahamiyatga ega.

Parametrlarni baholash nazariyasida Kramér–Rao quyi chegarasi statistik baholarning aniqligini baholashda fundamental mezon hisoblanadi. Ammo amaliy tahlillarda, xususan, omonatlik ma'lumotlari, tsenzuralangan kuzatuvlar, ishonchlilik tahlili yoki yashirin jarayonlardan olingan ma'lumotlarda kuzatuvlar ko'pincha informativ bo'lmaydi yoki parametr haqida to'liq ma'lumot tashimaydi. Bunday sharoitda klassik Kramér–Rao tengsizligini qo'llash murakkablashadi va yangi yondashuvlar talab etiladi. Shu sababli, noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao bahosining alternativ yoki soddalashtirilgan isbotini ishlab chiqish nazariy statistika va amaliy ehtimollar nazariyasi uchun dolzarb ahamiyat kasb etadi. Bu izlanish statistik baholarning chegaraviy aniqligini to'g'ri talqin qilish, yangi baholash usullarini yaratish va mavjud metodlarni umumlashtirishda muhim metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

Faraz qilamiz, $(\Omega, \mathcal{A})$ o'lchovli fazoda aniqlangan o'za'ro bog'liqsiz ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari noma'lum skalyar ($s = 1$) θ parametr aniqligida berilgan bo'lsin:

$$F(x; \theta) = P_{\theta}(\xi < x), \quad G(x; \theta) = P_{\theta}(\eta < x), \quad \theta \in \Theta \subseteq R^{(1)}.$$

Biz bu taqsimotlar absoliut uzluksiz deb, ularning zichlik funksiyalarini mos ravishda $f(x; \theta)$ va $g(x; \theta)$ lar orqali belgilaymiz. Statistik model shundayki, unda (ξ, η) juftlik o'rniga (Z, δ) juftlik kuzatiladi, bu erda $Z = \min(\xi, \eta)$ va $\delta = I(Z = \xi)$. Bizni qiziqtiradigan ξ tasodifiy miqdor faqatgina $\xi \leq \eta$, ya'ni $\delta = 1$ bo'lgandagina kuzatiladi. Agar (X_i, Y_i) lar orqali (ξ, η) juftliklarning i - tajribadagi amaliy qiymatlarini belgilasak, u holda tajribalarning n -qadamida biz $C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ statistik tanlanmani kuzatamiz. Bu erda $Z_i = \min(X_i, Y_i)$ va $\delta_i = I(Z_i = X_i)$. Har bir (Z_i, δ_i) juftlik $(W \times \{0, 1\}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ tanlanma fazoni yaratadi, bu erda W orqali Z ning qiymatlari to'plami, $\mathcal{U}$ orqali $A \times \{0\}$ va $B \times \{1\}$ ko'rinishdagi to'plamlar σ - algebrasini va $\mathcal{Y} = \{Q_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ orqali esa $v(x, y)$ o'lchovga nisbatan daminirlangan, $\mathcal{U}$ da aniqlangan va (Z, δ) juftliklar yaratgan taqsimotlar oilasini belgilaymiz. Bu erda A va B lar W dagi Borel to'plamlari, $dv(x, y) = \Delta_y \times dx$ va Δ_y esa $y \in \{0, 1\}$ nuqtada aniqlangan sanovchi o'lchovdir. $C^{(n)}$ tanlanmadagi har bir (Z_i, δ_i) juftlikka

$$k(x, y; \theta) = \left\{ f(x; \theta) \overline{G(x; \theta)} \right\}^y \left\{ g(x; \theta) \overline{F(x; \theta)} \right\}^{1-y} \quad (1)$$

zichlik funksiyasi mos keladi va bu erda $\overline{G} = 1 - G$, $\overline{F} = 1 - F$. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i f(x; \theta)}{\partial \theta^i}, & g^{(i)}(x; \theta) &= \frac{\partial^i g(x; \theta)}{\partial \theta^i}, \\ \lambda^{(i)}(x; \theta) &= \frac{f^{(i)}(x; \theta)}{f(x; \theta)}, & \mu^{(i)}(x; \theta) &= \frac{g^{(i)}(x; \theta)}{g(x; \theta)}, \\ \overline{F^{(i)}}(x; \theta) &= \frac{\partial^i \overline{F}(x; \theta)}{\partial \theta^i}, & \overline{G^{(i)}}(x; \theta) &= \frac{\partial^i \overline{G}(x; \theta)}{\partial \theta^i}, \\ k^{(i)}(x, y; \theta) &= \frac{\partial^i k(x, y; \theta)}{\partial \theta^i}, & \varphi^{(i)}(\theta) &= \frac{d^i \varphi(\theta)}{d\theta^i}. \end{aligned}$$

$C^{(n)}$ tanlanmadagi senzurlangan va senzurlanmagan X_i larning xissasini o'rganish maqsadida quyidagi subtaqsimotlarni aniqlaymiz:

$$F^*(x; \theta) = P_\theta(Z < x, \delta = 1) = \int_{-\infty}^x \bar{G}(t; \theta) f(t; \theta) dt,$$

$$G^*(x; \theta) = P_\theta(Z < x, \delta = 0) = \int_{-\infty}^x \bar{F}(t; \theta) g(t; \theta) dt.$$

Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, $\forall (x; \theta) \in R^{(1)} \times \Theta$ uchun quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$F^*(x; \theta) + G^*(x; \theta) = H(x; \theta) = P_\theta(Z < x),$$

$$F^*(\infty; \theta) = \lim_{x \rightarrow \infty} F^*(x; \theta) = M_\theta \delta, \quad G^*(\infty; \theta) = \lim_{x \rightarrow \infty} G^*(x; \theta) = M_\theta (1 - \delta).$$

Endi o'ng tomondan tasodifiy senzurlanishning bir muhim xususiy holi – “proporsional intensivliklar modeli” (PIM) bilan tanishib o'tamiz.

1-Ta'rif. [6] (F, G) (yoki (ξ, η)) juftlik PIMni qanoatlantiradi deyiladi, agar shunday musbat o'zgarish son β mavjud bo'lib, barcha $x \in R^{(1)}$ lar uchun

$$\overline{G(x; \theta)} = \left(\overline{F(x; \theta)} \right)^\beta \quad (2)$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Ba'zida PIM ni Koziol-Griin modeli ham deb atashadi ([1-6] ga qarang). PIM ning eng muhim xarakteristik xossalardan biri unda kuzatilayotgan tanlanmadagi $(Z_1, \dots, Z_n)$ va $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqligidir.

1-Teorema [1,4]. (F, G) juftlikning PIMni qanoatlantirishining zarur va yetarli sharti $Z = \min(\xi, \eta)$ va $\delta = I(Z = \xi)$ tasodifiy miqdorlarning bog'liqligidan iboratdir.

Yuqorida senzurlovchi taqsimot funksiya G noma'lum θ parametrga bog'liq bo'lgan, ya'ni informativ modelni qarab o'tdik. Endi bu taqsimot θ ga bog'liq emas deb hisoblaymiz. Bunday model informativ bo'lmagan senzurlanish modeli deb ataladi. Ushbu maqolada biz Kramer-Rao tengsizligining boshqacha isbotini keltiramiz.

Demak, faraz qilamiz, ξ va η tasodifiy miqdorlar $F(x; \theta)$ va $G(x)$ taqsimot funksiyalari bilan berilgan bo'lib, θ -skalyar parametr, $\theta \in \Theta \subseteq R^{(1)}$ bo'lsin. Kuzatiladigan $C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), 1 \leq i \leq n\}$ tanlanmaga mos kelgan birgalikdagi zichlik funksiya

$$k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) = \prod_{i=1}^n k(Z_i, \delta_i; \theta) \text{ da } (x, y) \in R^{(1)} \times \{0, 1\} \text{ uchun}$$

$$k(x, y; \theta) = \left[f(x; \theta) \overline{G(x)} \right]^y \cdot \left[g(x) \overline{F(x; \theta)} \right]^{1-y},$$

$$\text{bo'lib, bu erda } f(x; \theta) = \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial x}, g(x) = \frac{dG(x)}{dx} ..$$

Bu holda $C^{(n)}$ mos Fisher informatsiyasi $I_n(\theta) = nI(\theta)$ bo'lib, bu erda

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \bar{G}(x) dF(x; \theta) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln \overline{F}(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \overline{F}(x; \theta) dG(x).$$

Tanlanma fazoni $\mathcal{Y}^{(n)} = [R^{(1)} \times \{0,1\}]^{(n)}$ orqali belgilab olib, quyidagi regulyarlik shartlarini keltiramiz:

(I)' $\{x : 0 < F(x; \theta) < 1\}$ to'plam ga bog'liq emas.

(II)', $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$ va $\frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta}$ hosilalar mavjud bo'lib,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x) dF(x; \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(x) \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(x; \theta) dG(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F(x; \theta)}{\partial \theta} dG(x),$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta_n^2} \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \frac{[k_n(x; \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(x; \bar{y}; \theta)]^2}{k_n(\bar{x}; \bar{y}; \theta)} d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = \\ = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \left(\frac{\partial \ln k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \cdot k_n(\bar{x}; \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

- tengliklar o'rinli.

(III)' Barcha $\theta \in \Theta$ uchun $0 < I(\theta) < \infty$ va θ ning bahosi θ_n uchun $0 < d_n(\theta) = M_\theta(\theta_n - \theta)^2 < \infty$.

2-Teorema. Agar (I)-(III)' shartlar bajarilsa, u holda θ ning ixtiyoriy siljimgan bahosi θ_n uchun barcha $\theta \in \Theta$ larda

$$d_n(\theta) \geq I_n^{-1}(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)}. \quad (3)$$

Isboti. $M_\theta \theta_n = \theta$ ekanligidan,

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \theta_n(\bar{x}, \bar{y}) k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = \theta,$$

va

$$\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} \theta_n(\bar{x}, \bar{y}) k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = \theta + \Delta_n.$$

Bu erdan va barcha $\theta \in \Theta$ uchun $\int_{\mathcal{Y}^{(n)}} k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ tenglikdan

$$\Delta_n = \int_{\mathcal{Y}^{(n)}} [\theta_n - \theta] [k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)] d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}). \quad (4)$$

Endi (3) da Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llasak,

$$\Delta_n^2 \leq d_n(\theta) \cdot \int_{y^{(n)}} \frac{[k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta + \Delta_n) - k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)]^2}{k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)} d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}).$$

Bu tengsizlikda (III)' shartni qo'llasak,

$$d_n(\theta) \geq \left\{ \int_{\theta^{(n)}} \left(\frac{\partial \ln k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 k_n(\bar{x}, \bar{y}; \theta) d\nu_n(\bar{x}, \bar{y}) \right\}^{-1} = I_n^{-1}(\theta),$$

ya'ni (3) kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Yakuniy natijalar shuni ko'rsatadiki, noinformativ kuzatuvlar modeli uchun Kramér–Rao quyidagi chegarasining yangi isboti klassik yondashuvning qo'llanish doirasini kengaytiradi va baholash nazariyasida aniqlik mezonlarini yanada chuqurroq tushunishga yordam beradi [8-10]. Biroq ushbu yo'nalishda hali bir qator ochiq masalalar mavjud, masalan, umumlashtirilgan informativlik o'lchovlarini ishlab chiqish, senzuralangan va yarim-senzuralangan modellar uchun Kramér–Rao tengsizligining yanada boshqa variantlarini aniqlash, shuningdek, bog'liq kuzatuvlar ostida Kramér–Rao bahosining mavjudligi va barqarorligini o'rganish. Kelgusidagi tadqiqotlar ushbu bo'shliqlarni to'ldirishga, noinformativ ma'lumotlar uchun optimal baholovchi sinflarini tavsiflashga va amaliy modellashtirishda yanada samarali statistik metodlarni ishlab chiqishga qaratilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Абдушукуров А.А., Ким Л.В. Нижние границы Крамера-Рао и Баттачария при случайном цензуровании наблюдений. // сб. Вероятностные распределения и математическая статистика.-Ташкент: ФАН, 1986, с.20-40.
2. Cramér, H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press. 1946.
3. Rao, C.R. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*. 1945.
4. Abdushukurov A.A., Kim L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattachariya bounds for randomly censored observations. // *J.Soviet. Math*. 1987. v.5.p2171-2185.
5. Lehmann, E.L., & Casella, G. *Theory of Point Estimation*. Springer. 1998.
6. Абдушукуров А.А. Об эффективности статистических оценок при случайном цензурировании наблюдений и новые оценки в модели пропорциональных интенсивностей. // Дис. канд.физ.-мат.наук.-Ташкент. 1989.-151с.
7. Van der Vaart, A. W. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press. 1998.
8. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений: асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей.-Ташкент: Университет. 2009. 269 с.
9. Ibragimov, I.A., & Has'minskii, R.Z. *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. Springer. 1981.
10. Ghosh, A., Basu, A., & Martin, R. Robust alternative to the Fisher information. *Statistical Papers*. 2016.

FRACTIONAL PARABOLIC SYSTEMS OF VECTOR ORDER WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Sulaymonov Ilyoskhuja Abdirasul o'g'li,

National university of Uzbekistan and V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences
ilyosxojasulaymonov@gmail.com

Abstract. The paper considers the Cauchy problem for the system of partial differential equations of fractional order $\partial_t^B U(t, x) + A(D)U(t, x) = H(t, x)$. Here U and H are vector-functions, the $m \times m$ matrix of differential operators $A(D)$ is triangular (elements above or below the diagonal are zero). Operators located on the diagonal are elliptic. The main distinctive feature of this system is that the vector-order B has different components $\beta_j \in (0, 1]$, and β_j are not necessarily rational. Sufficient conditions (in some cases they are necessary) on the initial function and the right-hand side of the equation are found to ensure the existence of a classical solution.

Key words: System of fractional vector-order differential equation, matrix symbol, elliptic operators, classical solution.

ДРОБНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРНОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. В статье рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений дробного порядка $\partial_t^B U(t, x) + A(D)U(t, x) = H(t, x)$, здесь U и H — вектор-функции, а матрица дифференциальных операторов размера $m \times m$ — $A(D)$ является треугольной (элементы выше или ниже диагонали равны нулю). Операторы, расположенные на диагонали, являются эллиптическими. Главной отличительной особенностью этой системы является то, что вектор порядка B имеет различные компоненты $\beta_j \in (0, 1]$, причём β_j не обязательно являются рациональными. Найдены достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия на начальную функцию и правую часть уравнения, обеспечивающие существование классического решения.

Ключевые слова: Система дифференциальных уравнений дробного векторного порядка, символ матрицы, эллиптические операторы, классическое решение.

VEKTOR TARTIBLI RIMAN-LIUVILL KASR HOSILALI PARABOLIK TENGLAMALAR SISTEMASI

Annotatsiya. Ushbu ishda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi $\partial_t^B U(t, x) + A(D)U(t, x) = H(t, x)$ uchun Koshi masalasi ko'rib chiqiladi. Bu yerda U va H — vektor-funksiyalar, $A(D)$ matritsa $m \times m$ o'lchamli differensial operatorlardan tashkil topgan uchburchak (diagonalda yuqoridagi yoki pastidagi elementlar nol) matritsa. Diagonalda joylashgan operatorlar elliptikdir. Sistemaning asosiy farqli jihati shundaki, B vektor-tartib turli $\beta_j \in (0, 1]$, komponentalarga ega va β_j lar ratsional bo'lishi shart emas. Klassik yechimning mavjud bo'lishini ta'minlash uchun boshlang'ich funksiya va tenglamaning o'ng tomoniga yetarli (ba'zi hollarda esa zarur) shartlar topilgan.

Kalit so'zlar: vektor-tartibli kasr hosilali differensial tenglamalar sistemasi, matritsa simboli, elliptic operatorlar, klassik yechim.

Introduction. In the study of differential equation systems, an important problem is to construct explicit solution formulas. For systems of ordinary fractional differential equations, such representations are relatively easy to obtain (see [1], [2]).

S. Umarov recently developed general solution formulas for various fractional systems [3, 4, 5]. In particular, [5] presents new results even for classical fractional systems and provides an explicit solution representation for the Cauchy problem:

$$\begin{aligned} \partial_t^B U(t, x) + A(D)U(t, x) &= H(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{B-1} U(t, x) &= \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

where $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $B = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \rangle$, $\beta_j \in (0, 1]$, $j = 1 \dots m$, $A(D) = \{A_{i,j}(D)\}$ is a $m \times m$ matrix whose elements are pseudo-differential operators, $\Phi(x) = \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x) \rangle$, $H(t, x) = \langle h_1(t, x), h_2(t, x), \dots, h_m(t, x) \rangle$, are a given vector-functions, $U(t, x) = \langle u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_m(t, x) \rangle$, is an unknown vector-function and $\partial_t^B U(t, x) = \langle \partial_t^{\beta_1} u_1(t, x), \partial_t^{\beta_2} u_2(t, x), \dots, \partial_t^{\beta_m} u_m(t, x) \rangle$, is the fractional order derivative of order $0 < \beta_j \leq 1$, $j = 1, \dots, m$ in the sense of Riemann-Liouville, which for any continuous function $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as (see, for example [6], p. 71):

$$\partial_t^{\beta_j} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta_j)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t - \xi)^{\beta_j}} d\xi, \quad t > 0,$$

provided that the right side is pointwise defined on $\mathbb{R}_+$.

The components β_j of the order vector B are arbitrary real numbers in $(0, 1]$. When all $\beta_j = \beta$, the solution has a simpler form [4], and rational β_j reduce to this case.

In [5], the solution $U(t, x)$, initial data $\Phi(x)$, and source term $H(t, x)$ are taken from the class Ψ of functions with compactly supported Fourier transforms. This ensures transform applicability but limits generality due to the narrowness of Ψ and the broad class of operators $A(D)$.

The work [7] addresses this by establishing conditions under which classical solutions exist, assuming $\beta_j = \beta$.

The aim of this work is to establish a solution representation when the vector of fractional derivative orders B has arbitrary components $\beta_j \in (0, 1]$. To this end, we consider a lower triangular matrix of differential operators with constant coefficients:

$$A(D) = \{A_{i,j}(D)\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}, \quad \text{where } A_{i,j}(D) = 0 \text{ for } j > i, \quad \text{where } A_{i,j}(D) = \sum_{|\alpha| \leq l_{i,j}} a_{\alpha} D^{\alpha}, \quad \text{and}$$

$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. The matrix-symbol is defined as $A(\xi) = \{A_{i,j}(\xi)\}_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}$, where $A_{i,j}(\xi) = 0$ for $j > i$.

We assume that each diagonal operator $A_{j,j}(D)$, $j = 1, \dots, m$, is a homogeneous elliptic operator of the highest order among all $A_{i,j}(D)$, i.e., $l_{j,j} > l_{i,j}$, $\forall i \neq j$.

Define:

$$p^* = \max_{1 \leq j \leq m} \{l_{j,j}\}. \quad (1)$$

Recall that a homogeneous differential operator $A(D) = \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha} D^{\alpha}$ is called elliptic if its symbol $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha} \xi^{\alpha} > 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Let B be a Banach space. We define the space $\mathbf{B} = B \otimes \dots \otimes B$ (m times) consisting of vector functions $\Phi(x) = \langle \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x) \rangle$, where $\varphi_j(x) \in B$. The norm in $\mathbf{B}$ is given by:

$$P\Phi P_{\mathbf{B}}^2 = P\varphi_1 P_B^2 + \dots + P\varphi_m P_B^2.$$

The space $\mathbf{C}([0, T]; \mathbf{B})$ denotes the space of vector-valued functions continuous on $[0, T]$ with values in $\mathbf{B}$.

The object of study in this work is the following problem.

Initial-Boundary Value Problem. Find functions $u_j(t, x) \in L_2^{q_j}(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0, T]$, $j = 1, \dots, m$ (note that this inclusion is considered as a boundary condition at infinity), such that

$$U(t, x) \in \mathbf{C}([0, T] \times \mathbb{R}^n), \partial_t^B U(t, x) \text{ and } A(D)U(t, x) \in \mathbf{C}((0, T] \times \mathbb{R}^n), \quad (2)$$

and satisfying the Cauchy problem

$$\partial_t^B U(t, x) + A(D)U(t, x) = H(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{B-1} U(0, x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

where $H(t, x)$ and $\Phi(x)$ are given continuous functions.

The solution to an initial-boundary value problem from class (2) is usually called a *classical solution*.

a. Preliminaries. The Fourier transform of a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denoted as $F[f](\xi)$, is defined as follows:

$$F[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

The inverse Fourier transform is denoted by $F^{-1}[f](x)$ and is defined by the following integral:

$$F^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

If $f(x)$ is a function that is smooth enough and decays rapidly as $|x|$ goes to infinity, then the operation of the operator $A(D)$ on this function can be expressed as:

$$A(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} A(\xi) F[f](\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Therefore for such a function one has

$$F[A(D)f(x)](\xi) = A(\xi) F[f](\xi). \quad (5)$$

The classical Laplace transform is defined by the following integral formula:

$$L[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

provided that the function f (the Laplace original) is absolutely integrable on the semi-axis $\mathbb{R}_+$. The inverse Laplace transform is defined by the following integral formula:

$$L^{-1}[g](y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{ic}} e^{sy} L[f](s) ds.$$

where $L_{ic} = (c - i\infty, c + i\infty)$, $c > \sigma_s$.

The Laplace transform of the Riemann-Liouville derivative of a function $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, is (see [6], p. 84):

$$\begin{aligned} L[\partial_t^B \langle f_1, \dots, f_m \rangle](s) &= \langle L[\partial_t^{\beta_1} f_1](s), \dots, L[\partial_t^{\beta_m} f_m](s) \rangle = \\ &= \langle s^{\beta_1} L[f_1](s) - I_t^{1-\beta_1}(f_1)(0+), \dots, s^{\beta_m} L[f_m](s) - I_t^{1-\beta_m}(f_m)(0+) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

where $I_t^{\beta_j}$ are Riemann-Liouville fractional derivative and integral, respectively and defined as:

$$I_t^{\beta_j} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta_j)} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{1-\beta_j}} d\xi, \quad t > 0.$$

Recall that the Mittag-Leffler function $E_{\rho, \mu}(t)$ is defined as follows:

$$E_{\rho, \mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \quad \beta > 0, \mu \in \mathbb{N}.$$

Lemma 1. (see, for example, [6], p. 50) The Laplace transform of the Mittag-Leffler function is as follows:

$$L[t^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-\lambda t^\beta)](s) = \frac{1}{s^\beta + \lambda}.$$

The convolution of $f(t)$ and $g(t)$ is written as " $f * g$ " and is defined as follows

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Laplace transform of convolution equal to this:

$$L[f * g](s) = L[f](s) L[g](s). \quad (7)$$

Formal solution of Initial-Boundary Value Problem. In this section, following the work of S. Umarov [5], we will construct a formal solution to the problem (3)-(4).

Applying Fourier-Laplace transform to the problem (3)-(4) we get the recurrent equation:

$$L[F[u_1]](s, \xi) = \frac{1}{s^{\beta_1} + A_{1,1}(\xi)} F[\varphi_1](\xi), \quad (8)$$

$$L[F[u_k]](s, \xi) = \frac{F[\varphi_k](\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_{k,j}(\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} L[F[u_j]](s, \xi), \quad k = 2, \dots, m. \quad (9)$$

Before solving these equations, we consider the following sets.

Let $G_{k,j} = \{k, k-1, \dots, k-j\}$ be a set, where $1 \leq k \leq m$ and $1 \leq j \leq k-1$. By $G_{k,j}^{(h)}, 0 \leq h \leq j-1$ we denote subsets of $G_{k,j}$ which formed by excluding h elements except for k and $k-j$ elements of the set. For example, let $k = 6, j = 3$. Then $G_{k,j} = \{6, 5, 4, 3\}$ and $G_{k,j}^{(0)} = G_{k,j}$, $G_{k,j}^{(1)} = \{\{6, 5, 3\}, \{6, 4, 3\}\}$ and $G_{k,j}^{(2)} = \{6, 3\}$.

From (8) and the recurrence equation (9), we have:

$$L[F[u_k]](s, \xi) = \frac{F[\varphi_k](\xi)}{s^{\beta_k} + A_{k,k}(\xi)} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{P_{k,j,r}(\xi)}{\prod_{\tau \in G_{k,k-j}^{(r)}} (s^{\beta_\tau} + A_{\tau,\tau}(\xi))} F[\varphi_{k-j}](\xi), \quad (10)$$

where $P_{k,j,r}(\xi), k = 2, \dots, m, j = 1, \dots, k-1$, are combinations of multiplication and sum of functions $A_{\mu,\nu}(\xi), \mu = 2, \dots, k, \nu = 1, \dots, j-1$.

Applying the inverse Laplace transform to (8) and (10), we get:

$$\begin{aligned} F[u_1](t, \xi) &= E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi)t^{\beta_1})F[\varphi_1](\xi), \\ F[u_k](t, \xi) &= E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi)t^{\beta_k})F[\varphi_k](\xi) \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi)t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right) \right] F[\varphi_{k-j}](\xi), \end{aligned}$$

where

$$V_{k,j,r}(t, \xi) = * \prod_{\tau \in G_{k,k-j}^{(r)}, \tau \neq k-j} t^{\beta_\tau - 1} E_{\beta_\tau, \beta_\tau}(-A_{\tau,\tau}(\xi)t^{\beta_\tau}).$$

Here "*" is the convolution operation, and " $* \prod$ " is the convolution product. Thus, the solution of the Cauchy problem (3)-(4) has the representation when $H(t, x) \equiv 0$:

$$U(t, x) = S(t, D)\Phi(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

where $S(t, D)$ stands for the pseudo-differential matrix operator with the matrix-symbol $S(t, \xi)$:

$$s_{k,j}(t, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi)t^{\beta_k}) & \text{if } k = j, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi)t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right) \right] & \text{if } k > j. \end{cases}$$

If $H(t, x) \not\equiv 0$, then the representation of a formal solution to problem (3)-(4) is obtained from (11) and the fractional Duhamel principle [8, 9]. The solution takes the following form:

$$U(t, x) = S(t, D)\Phi(x) + \int_0^t S(\eta, D) \partial_t^{1-B} H(t-\eta, x) d\eta.$$

Let us also introduce the pseudo-differential operator $S'(\eta, D)$, the entries of the matrix-symbol $S'(\eta, \xi)$, which have the form:

$$s'_{k,j}(\eta, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } k < j, \\ \eta^{\beta_k-1} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) \eta^{\beta_k}) & \text{if } k = j, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \left[P_{k,j,r}(\xi) \left(\eta^{\beta_{k-j}-1} E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) \eta^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(\eta, \xi) \right) \right] & \text{if } k > j. \end{cases}$$

Lemma 2. (see, for example, [10]) The following equality holds:

$$\int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta = \int_0^t S(\eta, D) \partial_t^{1-B} H(t-\eta, x) d\eta,$$

where 1 is a m dimensional vector.

Using Lemma 2, we can rewrite the formal solution of problem (3)-(4) in the following form:

$$U(t, x) = S(t, D) \Phi(x) + \int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

Main theorem. Before presenting the main theorem, we show that the formal solution (12) constructed in the previous section satisfies all the requirements of Initial-Boundary Value Problem. Let us start by checking the convergence of the expression $A(D)U(t, x)$. Note that each $u_i(t, x), i=1, \dots, m$ is subject to operators from the column i of the given matrix $A(D)$. For example, the operators $A_{1,1}(D), A_{2,1}(D), \dots, A_{m,1}(D)$ act on $u_1(t, x)$.

Let us denote (see (12)):

$$U(t, x) = W(t, x) + Y(t, x),$$

where

$$W(t, x) = S(t, D) \Phi(x), \quad Y(t, x) = \int_0^t S'(\eta, D) H(t-\eta, x) d\eta, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n.$$

We estimate expressions $W(t, x)$ and $Y(t, x)$ separately. Let $w_i(t, x)$ and $y_i(t, x)$, where $i=1, \dots, m$, be the entries of the vector functions $W(t, x)$ and $Y(t, x)$, respectively.

To investigate $w_i(t, x), i=1, \dots, m$, it is sufficient to consider the following integrals:

$$w_{1,R}(t, x) = \int_{|\xi| < R} E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi) t^{\beta_1}) \hat{\phi}_1(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

$$w_{k,R}(t, x) = \int_{|\xi| < R} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) t^{\beta_k}) \hat{\phi}_k(\xi) e^{-ix\xi} d\xi + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{|\xi| < R} Q_{k,j,r}(t, \xi) \hat{\phi}_{k-j}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

where $k=2, \dots, m$ and

$$Q_{k,j,r}(t, \xi) = P_{k,j,r}(\xi) \left(E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) t^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(t, \xi) \right).$$

We have the following statement.

- Lemma 3.** 1) To estimate all coefficients before each $\hat{\phi}_i(\xi)$, it suffices to estimate $A_{q,q}(\xi) Q_{m,m-i,0}(t, \xi)$, $q=1, \dots, m$.
2) This estimate is given by

$$|A_{q,q}(\xi) Q_{m,m-i,0}(t, \xi)| \leq C_{\beta_1, \dots, \beta_m, \varepsilon} |\xi|^{p^* - l_{i,i} + (m-i)\varepsilon} t^{\varepsilon \sum_{j=i+1}^m \beta_j - \beta_i},$$

where p^* is defined in (1), and $\varepsilon \in (0,1)$ is arbitrary.

The proof of this lemma follows from mathematical induction (see [10]).

Now set $\tau > n/2$ and choose $\varepsilon > 0$ such that $\tau - (m-i)\varepsilon > n/2$. Then applying Lemma 3 and using the Holder inequality we get:

$$\|A_{q,q}(D)w_{k,R}(t,x)\|_{C(R^n)} \leq \sum_{i=1}^k C_{\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon} t^{\sum_{j=i+1}^m \beta_j - \beta_i} \|\varphi_i\|_{L_2^{\tau+p^*-l_{i,i}}(R^n)}. \quad (13)$$

Let us now estimate expressions $y_i(t,x), i=1, \dots, m$. To do this it is sufficient to consider the following functions:

$$y_{1,R}(t,x) = \int_{0 \leq |\xi| < R} \int_0^t \eta^{\beta_1-1} E_{\beta_1, \beta_1}(-A_{1,1}(\xi) \eta^{\beta_1}) \hat{h}_1(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta,$$

$$y_{k,R}(t,x) = \int_{0 \leq |\xi| < R} \int_0^t \eta^{\beta_k-1} E_{\beta_k, \beta_k}(-A_{k,k}(\xi) \eta^{\beta_k}) \hat{h}_k(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{0 \leq |\xi| < R} S_{k,j,r}(\eta, \xi) \hat{h}_{k-j}(t-\eta, \xi) e^{-ix\xi} d\xi d\eta,$$

where $k=2, \dots, m$ and

$$S_{k,j,r}(\eta, \xi) = P_{k,j,r}(\xi) \left(\eta^{\beta_{k-j}-1} E_{\beta_{k-j}, \beta_{k-j}}(-A_{k-j,k-j}(\xi) \eta^{\beta_{k-j}}) * V_{k,j,r}(\eta, \xi) \right).$$

Lemma 4. 1) To estimate all coefficients before each $\hat{h}_i(t-\eta, \xi)$, it suffices to estimate only $A_{q,q}(\xi) S_{m,m-i,0}(\eta, \xi)$, $q=1, \dots, m$.

2) This estimate reads:

$$|A_{q,q}(\xi) S_{m,m-i,0}(\eta, \xi)| \leq C_{\beta_1, \dots, \beta_m, \varepsilon} |\xi|^{p^*-l_{i,i}+(m-i)\varepsilon} \eta^{\sum_{j=i}^m \beta_j},$$

where p^* is defined in (1) and $\varepsilon \in (0,1)$ is arbitrary.

This lemma is proved analogously as Lemma 3 (see [10]).

Now set $\tau > n/2$ and choose $\varepsilon > 0$ such that $\tau - (m-i)\varepsilon > n/2$. Then applying Lemma 4 and using the Holder inequality we get:

$$\|A_{q,q}(D)y_{k,R}(t,x)\|_{C(R^n)} \leq \sum_{i=1}^k C_{\beta_1, \dots, \beta_k, \varepsilon, \tau} \max_{t \in [0,T]} \|h_i(t, \cdot)\|_{L_2^{\tau+p^*-l_{i,i}}(R^n)}. \quad (14)$$

Based on the proven estimates (13), (14), the following main result of the work:

Theorem 1. Let $\tau > \frac{n}{2}$ and $\varphi_i(x) \in L_2^{\tau+p^*-l_{i,i}}(R^n)$, $i=1, \dots, m$ and $h_i(t,x) \in L_2^{\tau+p^*-l_{i,i}}(R^n)$, $i=1, \dots, m$.

Then the solution of Initial-Boundary Value Problem exists and is unique, and the solution of this problem has the representation (12).

Remark 1. If all diagonal operators $A_{j,j}(D)$ have the same order, then $p^*-l_{i,i}=0$, and the condition for initial data and source terms reduces to: $\varphi_j, h_j(t,x) \in L_2^\tau(R^n)$, $\tau > \frac{n}{2}$. This ensures continuity

by the Sobolev embedding theorem. The condition $\tau > \frac{n}{2}$ is sharp, as unbounded functions may exist when

$$\tau = \frac{n}{2}.$$

REFERENCES:

1. V. Daftardar-Gejji, A. Babakhani. Analysis of a system of fractional differential equations // *Journal of Mathematical Analysis and Application* – 2004. Vol. 293, pp. 511-522.
2. V.K. Veber. The structure of general solution of the system $y(\alpha) = Ay$, $0 < \alpha \leq 1$ // *Trudy Kirgiz. Gos. University Ser. Mat. Nauk, Vyp* – 1976. Vol. 11, pp. 26-32.
3. S.R. Umarov, R.R. Ashurov, Y.Q. Chen. On a method of solution of systems of fractional pseudo-differential equations // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2021. Vol. 24, pp. 254-277.
4. S.R. Umarov. Representations of solutions of systems of time-fractional pseudodifferential equations // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2024. Vol. 27, pp. 616-651.

5. S.R. Umarov. *Representations of solutions of time-fractional multi-order systems of differential-operator equations* // *Fractal Fractional* – 2024. Vol. 8, pp. 1-37.
6. A.A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* // Elsevier, Amsterdam – 2006.
7. R.R. Ashurov, O.T. Mukhiddinova. *On systems of fractional nonlinear partial differential equations* // *Fractional Calculus and Applied Analysis* – 2025. Vol. 28, pp. 2167-2197.
8. S.R. Umarov. *On fractional Duhamel's principle and its applications* // *Journal of Differential Equations* – 2012. Vol. 251, pp. 5217–5234.
9. S.R. Umarov. *Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols* // Springer – 2015.
10. R.R. Ashurov, I.A. Sulaymonov. *Fractional parabolic systems of vector order* // *Journal of Mathematical Sciences* – 2024. Vol. 284, pp. 179-195.

FRAKTAL TUZILISHGA EGA BO‘LGAN G‘OVAK MUHITLARDI ANOMAL MODDA KO‘CHISHI MASALASIDAGI HOSILA TARTIBINI TIKLASH

Xolliyev Faxriddin Boxodirovich,

Termiz davlat universiteti

«Kompyuter va dasturing injiniring» kafedrasi o‘qituvchisi

surxon88@bk.ru

Annotatsiya. Maqolada fraktal tuzilishga ega bo‘lgan g‘ovak muhitlarda kuzatiladigan anomal modda ko‘chish jarayonlarini tasvirlovchi kasr tartibli differensial modelda hosila tartibini tiklash masalasi ko‘rib chiqiladi. Bunday modellarda funksiyalarning hosila tartibini aniqlash ko‘pincha murakkab yoki amaliy jihatdan imkonsiz bo‘lganligi sababli, parametrlarni aniqlash va modellashtirish aniqligini oshirish uchun hosilalarsiz optimallashtirish yondashuvlaridan foydalanish talab etiladi. Kasr tartibli hosilalar tartibini tiklash uchun samarali natija beruvchi Nelder–Mead simpleks algoritmining qo‘llanishi tahlil qilinadi. O‘rganilayotgan masala funksionalni minimallashtirish orqali hosila tartibi va model parametrlarini aniqlash imkonini berib, anomal modda ko‘chishi jarayonining matematik tavsifini aniqlashtirishda barqaror va amaliy vosita sifatida namoyon bo‘ladi.

Kalit so‘zlar: anomal modda ko‘chishi, fraktal g‘ovak muhit, kasr tartibli hosila, hosila tartibini baholash, Nelder–Mead usuli, kasr tartibli differensial tenglamalar, optimallashtirish usullari, parametrlarni identifikatsiya qilish

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОРЯДКА ПРОИЗВОДНЫХ В ЗАДАЧЕ АНОМАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Аннотация. В статье рассматривается задача восстановления порядка производной в дробной дифференциальной модели, описывающей аномальные процессы переноса вещества, наблюдаемые в пористых средах с фрактальной структурой. Поскольку определение порядка производных функций в таких моделях часто является сложным или практически невозможным, для определения параметров и повышения точности моделирования требуется использование подходов к оптимизации без производных. Анализируется применение симплексного алгоритма Нельдера-Мида, дающего эффективный результат восстановления порядка дробных производных. Исследуемая задача представляет собой устойчивый и практический инструмент для уточнения математического описания процесса аномального переноса вещества, позволяющий определить порядок производной и параметры модели путем минимизации функционала.

Ключевые слова: Аномальный перенос вещества, фрактальная пористая среда, дробная производная, оценка порядка производной, метод Нельдера-Мида, дробные дифференциальные уравнения, методы оптимизации, идентификация параметров

RECOVERY OF DERIVATIVE ORDER IN THE ANOMALOUS MASS TRANSFER PROBLEM IN FRACTAL POROUS MEDIA

Abstract. The article examines the problem of restoring the order of the derivative in a fractional differential model describing anomalous solute transport processes observed in porous media with a fractal structure. Since determining the order of derivative functions in such models is often complex or practically impossible, it is necessary to use optimization approaches without derivatives to determine parameters and improve modeling accuracy. The application of the Nelder–Mead simplex algorithm, which gives an effective result in restoring the order of fractional derivatives, is analyzed. The problem under study represents a stable and practical tool for refining the mathematical description of the anomalous solute transport process, allowing for determining the order of the derivative and model parameters by minimizing the functionality.

Keywords: Anomalous mass transfer, fractal porous medium, fractional derivative, derivative order estimation, Nelder-Mead method, fractional differential equations, optimization methods, parameter identification.

Kirish. So'nggi yillarda g'ovak muhitlarda modda ko'chish jarayonlarini tavsiflovchi matematik modellar, ayniqsa, fraktal tuzilishga ega murakkab fraktal muhitlarda anomal modda ko'chishi bilan bog'liq masalalar ilmiy tadqiqotchilarning alohida e'tiborini tortmoqda. Bunga bir nechta omillar sabab bo'lib, ulardan eng muhimi shundan iboratki, real g'ovak muhitlarning tuzilishida kuzatiladigan fraktallik klassik diffuziya tenglamalari bilan yetarli darajada tadqiq etishni qiyinlashtiradi. Moddaning makroskopik darajadagi sekinlashgan yoki tezlashgan ko'chishi ko'pincha kasr tartibli differensial tenglamalar orqali ifodalanadi, ularning parametrlaridan biri bo'lgan hosila tartibi fizik jarayonning chuqur ichki xususiyatlarini belgilab beradi.

Fraktal tuzilishga ega bo'lgan g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishni o'rganishning amaliy qo'llanish sohasi nihoyatda keng: 1) geofizik jarayonlarda suyuqlikning murakkab qatlamlar bo'ylab tarqalishi, 2) gidrogeologik muhitlarda ifloslantiruvchi moddalarning tarqalish tezligini baholash, 3) kimyo-texnologik tizimlarda diffuziya jarayonlari, 4) neft-gaz konlarida filtratsiya va kollektor xossalari aniqlash, 5) ekologik monitoring, 6) biologik to'qimalardagi modda almashinuvi, 7) materialshunoslikda g'ovak strukturalarning o'tkazuvchanlik xususiyatlarini tahlil qilish va boshqalar. Mazkur jarayonlarning fraktal tabiati ularni tavsiflovchi tenglamalarning ko'pincha teskari va nekorrekt masalalar turkumiga kirishiga olib keladi.

Hosila tartibini tiklash masalasi ham shunday murakkab teskari masalalardan biri bo'lib, u kasr tartibli differensial tenglamalarda mavjud bo'lgan fizik parametrning bevosita kuzatishlarga asoslanib aniqlanishini talab qiladi. Zamonaviy sonli metodlarning rivojlanishi, fraktal geometriya asosidagi modellar paydo bo'lishi, hisoblash texnologiyalarining takomillashuvi anomal ko'chishning murakkab teskari masalalarini samarali yechishga yo'l ochmoqda.

Kasr hosilalar bilan ifodalangan modellar real fizik jarayonlarning murakkab xususiyatlarini aniqroq aks ettiradi. Biroq, bunday modellar uchun kasr tartibli hosilalarning parametrlari va tartiblarini aniqlash masalalari, ayniqsa, teskari qo'yilishdagi tadqiqotlar nazariy va amaliy jihatdan murakkab bo'lib, fanning ko'plab sohalarida hali yetarlicha o'rganilmagan. Bir o'lchovli va ikki o'lchovli kasr tartibli diffuziya tenglamasining koeffitsiyentini aniqlash uchun teskari masalalar [1, 2, 3, 4, 5, 6] ishlarda o'rganilgan.

Ushbu maqolada fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitlarda anomal modda ko'chishi tenglamalaridagi kasr tartibli hosilaning tartibini kuzatuv ma'lumotlari asosida tiklash, ya'ni hosila tartibini aniqlash bo'yicha teskari masalani ishlab chiqish va uni tahlil qilishdir.

1. Masalaning qo'yilishi. Ikki zonadan iborat bo'lgan fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitda moddaning anomal ko'chishi tenglamalari uchun teskari masala qaralgan. Birjinslimas muhit fraktal tuzilishga ega bo'lsa modda ko'chishi tenglamalari ham fraktal o'lchamga bog'liq tarzda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Modda ko'chishi tenglamalari aynan kasr hosilali ko'rinishda bo'lsa tajriba natijalariga yaxshiroq mos kelishi ko'rsatilgan. Ikki zonadan iborat bo'lgan fraktal tuzilishga ega g'ovak muhitda modda ko'chishi jarayoni quyidagi kasr hosilali tenglamalar yordamida yoziladi [7-9].

Tenglamalar quyidagicha bo'ladi:

$$\theta_m \frac{\partial c_m}{\partial t} + \gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \theta_m D_m \frac{\partial^\beta c_m}{\partial x^\beta} - v_m \theta_m \frac{\partial c_m}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\gamma \theta_{im} \frac{\partial^\alpha c_{im}}{\partial t^\alpha} = \omega (c_m - c_{im}), \quad (2)$$

bu yerda α, β – hosila tartiblari, θ_m, θ_{im} – g'ovaklik koeffitsiyenti, c_m, c_{im} – hajmiy konsentratsiya, D_m – gidrodinamik dispersiya koeffitsiyenti, t – vaqt, x – koordinata bo'yicha o'zgaruvchi, v_m – zarracha harakatining o'rtacha tezligi, γ – massa uzatish koeffitsiyenti. $[\gamma] = T^{\alpha-1}$, $[\omega] = T^{-1}$. c – o'lchamsiz kattaliklar, $[\partial^\alpha c / \partial t^\alpha] = T^{-\alpha}$, $[D] = L^\gamma / T^\alpha$, L – uzunlik o'lchovi, T – vaqt o'lchovi. α va β kasr hosilalarning tartiblari quyidagi oraliqda o'zgaradi: $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$.

$[0, \infty]$ sohada masala qaraladi. Boshlang'ich va chegaraviy shartlar:

$$c_m(0, x) = 0, \quad c_{im}(0, x) = 0, \quad (3)$$

$$c_m(t, 0) = c_0, \quad c_m(t, \infty) = 0. \quad (4)$$

Teskari masalani yechish uchun (3), (4) boshlang'ich va chegaraviy shartlardan tashqari qo'shimcha shartlar ham kerak bo'ladi. Bunday shartlar sifatida x_l , $l=1,2,3$ nuqtalarda konsentratsiyaning vaqt

bo'yicha o'zgarishi ma'lum bo'ladi, ya'ni $z_l(t)$, $l=1,2,3$ funksiyalar beriladi. Ko'pincha $z_l(t)$, $l=1,2,3$ funksiyalar tajriba natijalari orqali aniqlanadi. Testkari masalani yechishda $z_l(t)$, $l=1,2,3$ funksiyalarni "kuzatish ma'lumotlari" sifatida qabul qilish mumkin.

Shunday qilib qo'shimcha shartlarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$c_m(t, x_l) = z_l(t), \quad l=1,2,3. \quad (5)$$

Testkari masala quyidagi tartibda qo'yiladi: α, β kasr hosila tartiblari quyidagi funksional minimumidan aniqlanadi:

$$J(\xi) = \sum_{l=1}^n \int_0^T [c_m(t, x_l) - z_l(t)]^2 dt, \quad \xi = (\alpha, \beta), \quad (6)$$

bu yerda $c_m(t, x_l)$ – (1)-(4) masala α, β parametrlarining qandaydir berilgan qiymatlaridagi yechimi hisoblanadi. α, β larni (6) funksional minimumidan aniqlash uchun Nelder–Mead usulini qo'llaymiz.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning lokal minimumini topishning simpleks usuli Neler va Mid tomonidan ixtiro qilingan. Ikki o'zgaruvchi uchun simpleks uchburchak bo'lib, usul uchburchakning uchta uchidagi funksiyaning qiymatlarini taqqoslaydigan qidiruv sxemasidir. Funksiya eng katta qiymat qabul qiladigan eng yomon cho'qqi tashlab yuboriladi va yangi cho'qqi bilan almashtiriladi. Yangi uchburchak hosil bo'ladi va qidiruv davom etadi. Bunda uchburchaklar ketma-ketligi quriladi (ular har xil shaklda bo'lishi mumkin), ularning uchlaridagi funksiyaning qiymatlari borgan sari kamayib boradi. Uchburchakning o'lchami kichraytiriladi va natijada minimum nuqtasining koordinatalari topiladi [10].

2. Ayirmali masala. (1) – (4) masala $\alpha = \overset{s}{\alpha}$, $\beta = \overset{s}{\beta}$ da chekli ayirmalar usuli yordamida sonli yechiladi [3]. $\Omega = \{0 \leq x \leq \infty, 0 \leq t \leq T\}$ sohada o'zgarimas qadam bilan to'r kiritib olamiz. $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = L/N, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}$, bu yerda h – x koordinata bo'yicha to'r qadami, τ – t bo'yicha vaqt qadami, L – g'ovak muhitning xarakterli uzunligi.

Kvazireal eksperiment o'tkazish uchun dastlab (1) – (4) to'g'ri masala $\alpha^{exact} = 0,8$, $\beta^{exact} = 1,8$ berilgan qiymatlarda chekli ayirmalar usuli bilan sonli yechiladi. Sonli hisoblashlar natijalari bo'yicha $z_l = z_l(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, M$, $l = 1, 2, \dots, n$ to'rli funksiya aniqlanadi. $z(t_j)$ funksiya testkari masalani yechish uchun berilgan ma'lumotlar bo'lib xizmat qiladi. Ko'pincha real holatlarda bu funksiya eksperimental aniqlanadi va ma'lum xatolikka ega bo'ladi. Bu xatolikni modellastirish uchun $z(t)$ funksiya quyidagi tarzda hisoblanadi:

$$z_l^\delta(t_j) = z_l(t_j) + 2\delta \left(\sigma(t_j) - \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

bu yerda δ – xatolik darajasi, $\sigma(t_j)$ – tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar $\sigma(t_j) \in (0, 1)$.

(1) tenglama chekli ayirmalar usuli yordamida Kaputo ta'rifidan foydalanib quyidagicha approksimatsiya qilinadi:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_m ((c_m)_i^{j+1} - (c_m)_i^j)}{\tau} + \\ & + \frac{\gamma \theta_{im}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left[\sum_{l=0}^{j-1} ((c_{im})_i^{l+1} - (c_{im})_i^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}) + ((c_{im})_i^{j+1} - (c_{im})_i^j) \right] = \\ & = \frac{\theta_m D_m}{\Gamma(3-\beta)h^\beta} \left[\sum_{l=0}^{i-1} ((c_m)_{i-(l+1)}^j - 2(c_m)_{i-l}^j + (c_m)_{i-(l-1)}^j) \cdot ((l+1)^{2-\beta} - (l)^{2-\beta}) \right] - \\ & - v_m \theta_m \frac{(c_m)_{i+1}^j - (c_m)_{i-1}^j}{2h}, \end{aligned} \quad (8)$$

Ayirmali approksimatsiyalar kinetika tenglamasi (2) uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma \theta_{im}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \left[\sum_{l=0}^{j-1} ((c_{im})_i^{l+1} - (c_{im})_i^l) ((j-l+1)^{1-\alpha} - (j-l)^{1-\alpha}) + ((c_{im})_i^{j+1} - (c_{im})_i^j) \right] = \\ & = \omega ((c_m)_i^j - (c_{im})_i^{j+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

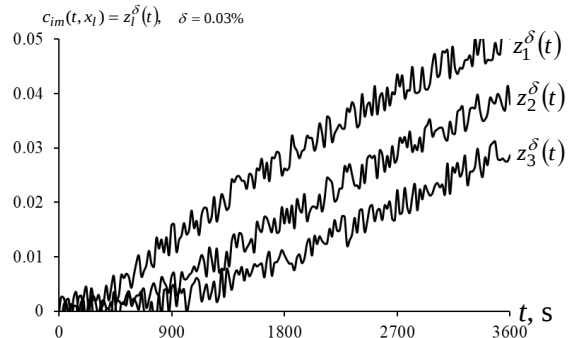
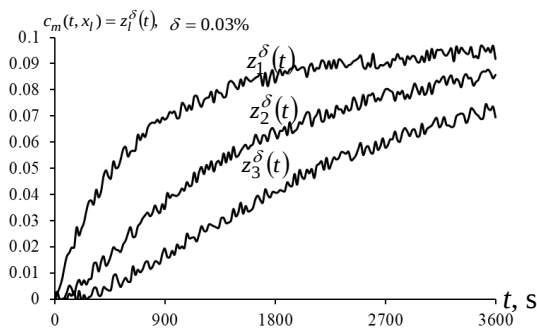
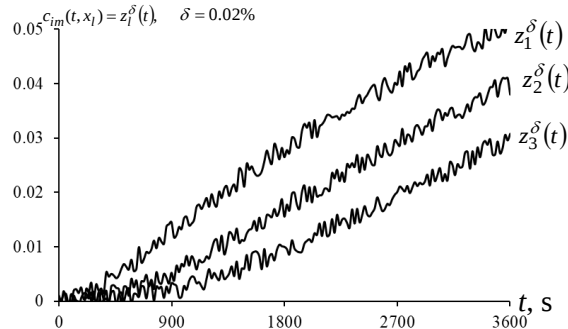
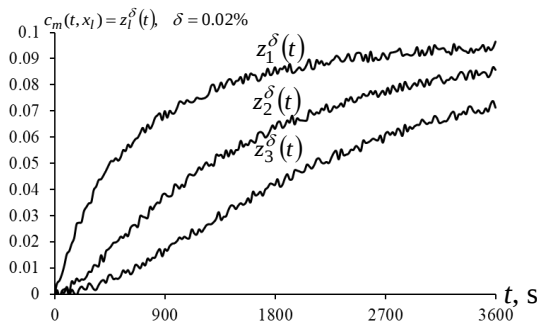
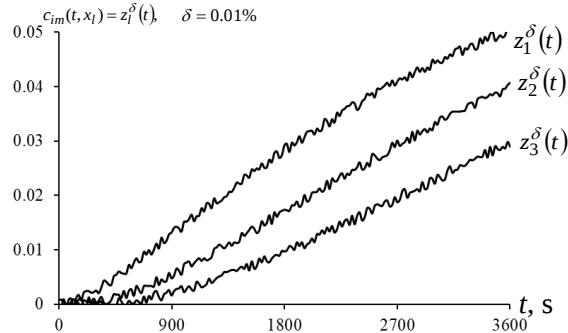
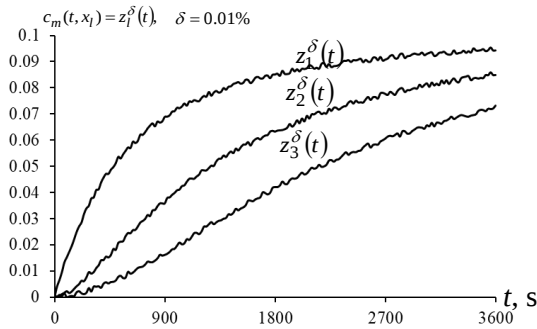
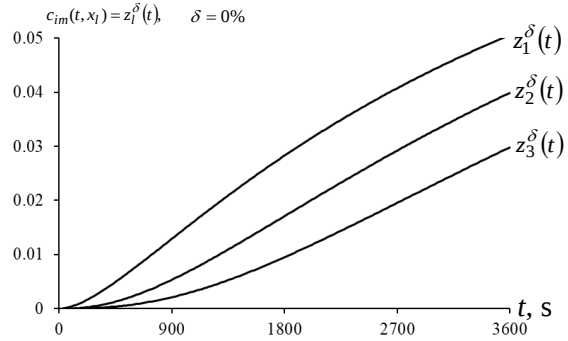
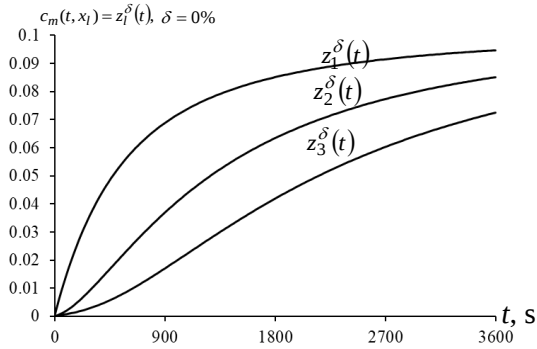
bu yerda $\Gamma(\cdot)$ - Eylerning gamma funksiyasi, $c_i^j - (t_j, x_i)$ nuqtada aniqlangan to'r funksiya.

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha approksimatsiya qilinadi:

$$(c_m)_i^0 = 0, \quad (c_{im})_i^0 = 0, \quad (10)$$

$$(c_m)_0^j = 0, \quad (c_m)_N^j = 0. \quad (11)$$

$z_l^\delta(t)$ funksiyalar grafiklari 1 – rasmda tasvirlangan.



(6) funksional quyidagi integral yig'indi yordamida hisoblanadi:

$$J = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=0}^M \tau [c_m(t_j, x_l) - z_l(t_j)]^2,$$

bu yerda x_l , $l = 1, 2, 3$ – koordinata to'ri tugunlariga mos tushadi.

3. Sonli hisoblash natijalari

Hisoblashlarda parametrlarning quyidagi qiymatlaridan foydalanilgan: $c_0 = 0,1$, $\tau = 1$, $h = 0,1$, $\theta_m = 0,4 m^3 / m^3$, $\theta_{im} = 0,1 m^3 / m^3$, $D = 10^{-5} \mathcal{M}^y / c$.

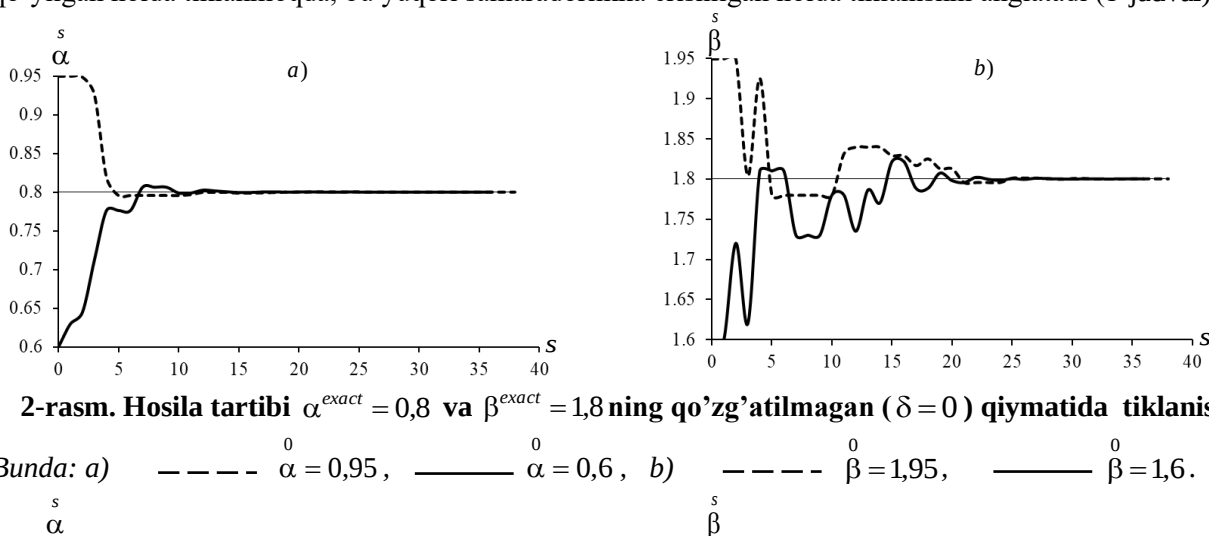
Sonli hisoblashlarda MATLAB muhitining Nelder–Mead usuliga asoslangan fminsearch() funksiyasi qo'llanildi.

1-jadvalda kasr tartibli modda ko'chishi jarayonlarini tavsiflovchi matematik modellar tarkibidagi kasr hosila tartibini gradient talab qilmaydigan Nelder–Mead simpleks usuli orqali identifikatsiya qilish natijalari keltirilgan. Bu usul ko'p o'lchamli maqsad funksiyasini minimallashtirishda geometrik simpleks prinsipiga tayanadi va har bir iteratsiyada simpleksning eng yomon tugunini akslantirish (reflection), kengaytirish (expansion), siqish (contraction) yoki global kichraytirish (shrink) orqali yangilaydi. Boshlang'ich yaqinlashish tugunlari sifatida α , β hosila tartiblari tanlanib, ularning haqiqiy qiymatlariga yaqinlashish jarayoni iterativ baholangan.

1-jadval.

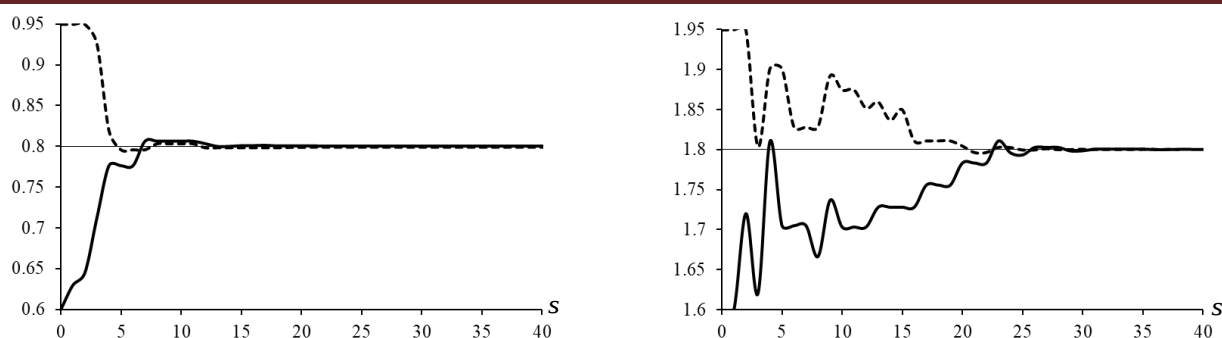
$\delta \%$	Boshlang'ich yaqinlashish		Hisoblangan qiymat		Nisbiy xatolik	
	α	β	α	β	$\frac{ \alpha - \alpha^{exact} }{\alpha^{exact}} \cdot 100\%$	$\frac{ \beta - \beta^{exact} }{\beta^{exact}} \cdot 100\%$
$\alpha^{exact} = 0,8$, $\beta^{exact} = 1,8$						
0	0,6	1,6	0,80000047	1,799971	0,00000058	0,0000159
3%	0,6	1,6	0,80024851	1,793342	0,00031063	0,0036988
0	0,95	1,95	0,80000054	1,799972	0,00000067	0,0000153
3%	0,95	1,95	0,79871292	1,80998	0,00160885	0,0055447

$\delta = 0$ da boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo'lganda α vaqt bo'yicha hosila tartibi 0,000058% va β koordinata bo'yicha kasr hosila tartibi 0,00159% aniqlada tiklanmoqda, boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo'lganda ham α 0000067% va β esa 000153% nisbiy xatolikka yo'l qo'yilgan holda tiklanmoqda, bu yuqori samaradorlikka erishilgan holda tiklanishni anglatadi (1-jadval).



2-rasm. Hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va $\beta^{exact} = 1,8$ ning qo'zg'atilmagan ($\delta = 0$) qiymatida tiklanishi.

Bunda: a) — — — $\alpha = 0,95$, — — — $\alpha = 0,6$, b) — — — $\beta = 1,95$, — — — $\beta = 1,6$.



3-rasm. Hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va $\beta^{exact} = 1,8$ ning qo'zg'atilgan ($\delta = 3\%$) qiymatida tiklanishi.

Bunda: a) $\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,6$, b) $\beta = 1,95$, $\beta = 1,6$.

$\delta = 3\%$ da boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo'lganda α vaqt bo'yicha hosila tartibi 0,031063% va β koordinata bo'yicha kasr hosila tartibi 0,36988% aniqlada tiklanmoqda, boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo'lganda ham α 0,160885% va β esa 0,55447% nisbiy xatolikka yo'l qo'yilgan holda tiklanmoqda, jadval natijalari shuni ko'rsatadiki, δ ortgan sari, model parametrlarini tiklashdagi nisbiy xatolik ham oshadi. Bu esa, boshlang'ich tugunlarda delta xatolik darajasi yuqori bo'lsa, parametrlarni aniqlash aniqligi pasayishini bildiradi. (1-jadval).

2, 3 – rasmlarda modda ko'chishi masalasidagi konsentratsiyaning vaqt bo'yicha hosila tartibi $\alpha^{exact} = 0,8$ va modda ko'chishi masalasidagi diffuziya hadidagi hosila tartibi $\beta^{exact} = 1,8$ qiymatlarini tiklashning turli qo'zg'alishlarda hisoblash natijalari keltirilgan.

Hisoblashlar dastlab boshlang'ich ma'lumotlar qo'zg'atilmagan holda, yani $\delta = 0$ bo'lgan hol uchun olingan (2(a, b) – rasm). 3(a, b) – rasmda $\delta = 3\%$ bo'lgan hollar uchun grafiklar keltirilgan. Hosila tartibi α va β ni tiklash bo'yicha keltirilgan grafiklarda dastlabki 40 ta iteratsiya natijalari keltirilgan. 2 - rasmda

$\delta = 0\%$ da pastdan boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,6$, $\beta = 1,6$ bo'lganda α va β ning tiklangan qiymatlari $\alpha^s = 0,80000047$ ba $\beta^s = 1,799971$ tashkil qildi. α ni tiklashdagi nisbiy xatolik 0,000058%, β ni

tiklashdagi nisbiy xatolik esa 0,00159%. Yuqoridan boshlang'ich yaqinlashish $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ bo'lganda

α va β ning tiklangan qiymatlari $\alpha^s = 0,80000054$ va $\beta^s = 1,799972$ tashkil qildi. α ni tiklashdagi nisbiy xatolik 0,000067%, β ning qiymati esa 0,00153% ga teng. 3-rasmda dastlabki xatolik $\delta = 3\%$ da xuddi

2 - rasmdagi kabi pastdan boshlang'ich yaqinlashishlarda tiklangan qiymatlar $\alpha^s = 0,8024851$ va $\beta^s = 1,793342$ tashkil qildi. Bunda nisbiy xatolik mos ravishda 0.031063% , 0,36988% ga teng. Yuqoridan

boshlang'ich yaqinlashishlarda tiklangan qiymatlar $\alpha^s = 0,78871292$ va $\beta^s = 1,80998046$ tashkil qildi. Bunda nisbiy xatolik mos ravishda 0,160885%, 0,55447% ga teng. 2 va 3 rasmlarni solishtirsak xatolik berilmagan holatda kamroq iteratsiya talab qilgan holda tezroq tiklanmoqda, xatolik berilganda esa nisbatan iteratsiyalar soni ko'proq va mos ravishda tiklanish ham ozgina kechikayotganini ko'rishimiz mumkin.

ЛИТЕРАТУРА:

1. C. L. Sun, J. J. Liu, An inverse source problem for distributed order time-fractional diffusion equation, *Inverse Problems* 36 (2020) 055008.
2. L. L. Sun, Y. Zhang, T. Wei, Recovering the time-dependent potential function in a multi-term time-fractional diffusion equation, *Applied Numerical Mathematics* 135 (2019) 228–245.
3. Y. Kian, L. Oksanen, E. Soccorsi, M. Yamamoto, Global uniqueness in an inverse problem for time fractional diffusion equations, *Journal of Differential Equations* 264 (2018) 1146–1170.

4. M. Yamamoto, Uniqueness in determining fractional orders of derivatives and initial values, *Inverse Problems* 37 (2021) 095006.
5. J. Xian, X.-B. Yan, T. Wei, Simultaneous identification of three parameters in a time-fractional diffusion-wave equation by a part of boundary Cauchy data, *Applied Mathematics and Computation* 384 (2020) 125382.
6. X. C. Zheng, J. Cheng, H. Wang, Uniqueness of determining the variable fractional order in variable-order time-fractional diffusion equations, *Inverse Problems* 35 (2019) 125002.
7. Guleria, A.; Swami, D. Solute Transport Through Saturated Soil Column with Time-Dependent Dispersion. *Hydrol. J.* 2018, 40, 1–15.
8. Gao, G.; Zhan, H.; Feng, S.; Fu, B.; Ma, Y.; Huang, G. A new mobile-immobile model for reactive solute transport with scale-dependent dispersion. *Water Resour. Res.* 2010, 46, W08533.
9. Khuzhayorov, B.; Usmonov, A.; Kholliiev, F. Numerical Solution of Anomalous Solute Transport in a Two-Zone Fractal Porous Medium. In *APAMCS 2022: Current Problems in Applied Mathematics and Computer Science and Systems*; Springer: Cham, Switzerland, 2023; Volume 702, pp. 98–105. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_10.
10. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. – 720 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕЙКИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

*Даминова Мукаррам Султон қизи,
Каршинский государственный университет
Шодиева Севинч Расул қизи,
Каршинский государственный университет
Абдижабборов Махмуд Абдижалил ўғли,
Каршинский государственный университет*

Аннотация. Данная работа посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка. Единственность поставленной задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: Нагруженное уравнение, уравнение параболо-гиперболического типа, оператор дробного порядка в смысле Капуто, интегральное условие склеивания, единственность и существование решения.

A NONLOCAL PROBLEM WITH AN INTEGRAL GLUING CONDITION FOR A LOADED EQUATION OF MIXED TYPE WITH A FRACTIONAL CAPUTO DERIVATIVE

Abstract. This paper is devoted to proving the uniqueness and existence of a solution to a nonlocal problem with an integral gluing condition for a loaded parabolic-hyperbolic equation including a fractional-order Caputo operator. Uniqueness of the problem is proved using the energy integral method, and existence is proved using the integral equation method.

Keywords: Loaded equation, parabolic-hyperbolic equation, fractional-order Caputo operator, integral gluing condition, uniqueness and existence of a solution.

3. KASR TARTIBLI KAPUTO HOSILASI BILAN ARALASH TURDAGI YUKLANGAN TENGLAMA UCHUN INTEGRAL YAQINLASHISH SHARTI BILAN NOLOKAL MASALA

4. Annotatsiya. Ushbu maqola yuklangan parabolik-giperbolik tenglama, shu jumladan, kasr tartibli Kaputo operatori uchun integral yaqinlashish sharti bilan nolokal muammoning yechimining o'ziga xosligi va mavjudligini isbotlashga bag'ishlangan. Masalaning o'ziga xosligi energiya integral usuli yordamida, mavjudligi esa integral tenglama usuli yordamida isbotlanadi.

5. Kalit so'zlar: yuklangan tenglama, parabolik-giperbolik tenglama, kasr tartibli Kaputo operatori, integral yaqinlashish sharti, yechimning yagonaligi va mavjudligi.

Введение. Применение теории дробного интегрирования и дифференцирования в дробных электрических сопротивлениях биологических элементов, в дробном управлении диффузионными системами, в управлении движением, для анализа сигналов, используемых в робототехнике, динамических системах и управлении механическими манипуляторами, можно найти в работах А.А. Килбаса, Х. М. Шриваставы, Дж. Дж. Трухильо [1], К. С. Миллер и Б. Росс [2], И. Подлубный [3], С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричив [4] Краевые задачи для уравнений параболического и смешанного типов, исключаяющие дробные интегро-дифференциальные операторы, такие как Капуто и Риман-Лиувилль, были исследованы в работах [5-9]. Первые фундаментальные исследования теории нагруженных уравнений принадлежат А.М. Нахушеву [10-11]. В этих работах дается наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация нагруженных уравнений: нагруженные дифференциальные, интегральные, интегродифференциальные, функциональные уравнения, а также их многочисленные приложения. За этими исследованиями последовали работы [12-17], в которых были получены интересные результаты. С другой стороны, нам необходимо

отметить работы [18-20], в которых методом отдельных переменных было исследовано несколько локальных и нелокальных начально-краевых задач для нагруженных уравнений в прямоугольных областях.

Вышеприведенные публикации привели к выводу, что исследования в области теории нагруженных дифференциальных уравнений дробного порядка актуальны, и эта теория является одной из современных и развивающихся теорий PDE. Однако краевые задачи с интегральным условием склеивания для уравнений со смешанной нагрузкой дробного порядка еще недостаточно изучены. Следует отметить работы [21], [22]. Данная статья посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа, включающего оператор Капуто дробного порядка.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^\alpha u + p(x, y) \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} u_t(t, 0) dt, & \text{at } y \geq 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - q(x+y) \int_{x+y}^1 (t-x-y)^{\gamma-1} u_t(t, 0) dt, & \text{at } y \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

С оператором Капуто:

$${}_C D_{0y}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t) dt, \quad (2)$$

где $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$; $p(x, y)$ и $q(x, y)$ заданные функции. Пуст Ω ограничена сегментами:

$$B_1 B_2 = \{(x, y) : x=0, 0 < y < h\},$$

$$B_2 A_2 = \{(x, y) : y=h, 0 < x < 1\}$$

при $y < 0$ и характеристиками: $A_1 C : x-y=1$, $B_1 C : x+y=0$.

Для уравнения (1) при $y > 0$, здесь $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C(0,5;-0,5)$.

Вводим обозначения: $\theta(x) = \theta\left(\frac{x+1}{2}; \frac{x-1}{2}\right)$,

$$D_{xb}^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b (t-x)^{\beta-1} f(t) dt, \quad (3)$$

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega^- = \Omega \cap (y < 0), \quad I = \{x : 0 < x < 1\}, \quad I_1 = \left\{x : \frac{1}{2} < x < 1\right\}, \quad I_2 = \{y : 0 < y < h\},$$

В области Ω доказываем единственность и существование решения следующую задачу

Задача. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) из классов функции

1. $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$;
2. ${}_C D_{0y}^\alpha u \in C(\Omega^+)$,
3. $u_{xx}(x, y) \in C(\Omega^- \cup \Omega^+)$, $u_{yy}(x, y) \in C(\Omega^-)$,
4. $u_x(x, y) \in C(\overline{B_1 B_2} \cup \overline{A_1 A_2})$, $y^{1-\alpha} u_y(x, y) \in C(\Omega^+ \cup I)$, $u_y(x, y) \in C(\Omega^- \cup I)$;

удовлетворяющие граничными условиями:

$$u_x(x, y)|_{A_1 A_2} = \varphi(y), \quad y \in \bar{I}_2, \quad (4)$$

$$u_x(x, y)|_{B_1 B_2} = \psi(y), \quad y \in \bar{I}_2, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} u[\theta(x)] = a(x) u_y(x, 0) + b(x) u_x(x, 0) + c(x) u(x, 0) + d(x), \quad x \in I_1, \quad (6)$$

и условием склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = \lambda_1(x) u_y(x, -0) + \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) u_t(t, 0) dt + \lambda_3(x) u(x, 0), \quad x \in I, \quad (7)$$

где $\varphi(y)$, $\psi(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, и $\lambda_j(x)$ ($j = \overline{1,3}$), заданные функции, такой, что

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_j^2(x) \neq 0$$

Единственность решения Задачи. Известно, что уравнение (1) по характерической координате $\xi = x + y$ и

$\eta = x - y$ при $y \leq 0$ будет иметь вид:

$$u_{\xi\eta} = \frac{q(\xi)}{4} \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} u_t(t, 0) dt. \quad (8)$$

Вводим обозначения:

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad x \in \bar{I}, \quad v^-(x) = u_y(x, -0), \quad x \in I. \quad (9)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^- можно представить в виде:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} v^-(t) dt + \frac{1}{4} \int_{x+y}^{x-y} q(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 d\eta \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} \tau'(t) dt, \\ u[\theta(x)] = \frac{\tau(x) + \tau(1)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^1 v^-(t) dt + \frac{1}{4} \int_x^1 q(\xi) d\xi \int_{\xi}^1 d\eta \int_{\xi}^1 (t - \xi)^{\gamma-1} \tau'(t) dt, \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} u[\theta(x)] = \frac{\tau'(x) + v^-(x)}{2} - \frac{q(x)}{4} \int_x^1 d\eta \int_{\eta}^1 (t - x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt. \quad (11)$$

После использован (6) с учетом (3) из (11) мы получим:

$$(1 - 2a(x))v^-(x) = (2^{-1}(1-x)^{\gamma} q(x) + 2c(x))\tau(x) - (1 - 2b(x))\tau'(x) + \\ + 2^{-1} \Gamma(1+\gamma) q(x) D_{x1}^{-\gamma} \tau'(x) - 2d(x), \quad (x, 0) \in I. \quad (12)$$

С учетом обозначений и условия склеивания (7) имеем:

$$v^+(x) = \lambda_1(x)v^-(x) + \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt + \lambda_3(x)\tau(x), \quad x \in I. \quad (13)$$

Дальше от уравнения (1) при $y \rightarrow +0$ с учетом (2), (3) и

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} f(y)$$

Получили [20]:

$$\tau''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)v^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt - \quad (14)$$

$$- \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\tau(x) + \Gamma(\beta)p(x, 0)D_{x1}^{-\beta} \tau'(x) = 0, \\ \tau'(0) = \psi(0), \quad \tau'(1) = \varphi(0). \quad (14)$$

Теорема 1. Если $1 - 2a(x) \neq 0$ и для заданных выполняются условия:

$$c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1) \leq 0, \quad c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0) \geq 0, \quad (\lambda_2(x)/r(x))' \leq 0, \quad (15)$$

$$\lambda_1(0)q(0)/(1 - 2a(0)) \geq 0, \quad p(0, 0) \geq 0, \quad p'(x, 0) \geq 0, \quad \lambda_2(0)/r(0) \leq 0, \quad (16)$$

$$(\lambda_1(x)q(x)/(1 - 2a(x)))' \geq 0, \quad (\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x))' \geq 0, \quad (1 - 2b(x))\lambda_1(x)/(1 - 2a(x)) \geq 0, \quad (17)$$

то, решение $u(x, y)$ Задачи единственно.

Доказательство. Известно, что если однородная задача имеет только тривиальное решение, то мы можем утверждать, что исходная задача имеет единственное решение. Для этого предположим, что Задача имеет два решения, а затем обозначив их разность как $u(x, y)$ мы получим соответствующую однородную задачу. Уравнение (14) умножаем на $r'(x)$ и интегрируем от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx = & \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_1(x) \tau'(x) v^-(x) dx + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_2(x) \tau'(x) dx \int_0^1 r(t) \tau'(t) dt + \\ & + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \lambda_3(x) \tau(x) \tau'(x) dx - \Gamma(\beta) \int_0^1 \tau'(t) p(x, 0) D_{x1}^{-\beta} \tau'(x) dx \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (12) на счет $d(x) = 0$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx = & \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 (c_1(x) \lambda_1(x) + \lambda_3(x)) d\tau^2(x) - \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{(1-2b(x)) \lambda_1(x)}{1-2a(x)} [\tau'(x)]^2 dx - \\ & - \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1+\gamma)}{2\Gamma(\gamma)} \int_0^1 \frac{\lambda_1(x) \tau'(x) q(x)}{1-2a(x)} \int_x^1 (t-x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt - \\ & - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \frac{\lambda_2(x)}{r(x)} d \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 - \int_0^1 \tau'(x) p(x, 0) dx \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} \tau'(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где $c_1(x) = (1-x)^\gamma q(x) + 2c(x)/(1-2a(x))$.

Основываясь на формуле [23]

$$|x-t|^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma) \cos \pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{\gamma-1} \cos[z(x-t)] dz, \quad 0 < \gamma < 1$$

после некоторых упрощений из (19) мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau''(x) \tau'(x) dx = & \frac{\Gamma(\alpha)}{2} [\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1)) - \tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0))] - \\ & - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 [\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x)]' \tau^2(x) dx - \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)} \tau'^2(x) dx + \\ & + \frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)} \left(\int_0^1 r(x) \tau'(x) dx \right)^2 + \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)} \right)' dx \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 + \\ & + \frac{\gamma \Gamma(\alpha)}{2 \cos \pi(1-\gamma)/2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^\gamma} \int_0^1 \frac{\lambda_1(x) q(x)}{1-2a(x)} d \left[\left(\int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau'(t) \sin zt dt \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1-\beta) \cos \pi(1-\beta)/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \int_0^1 p(x, 0) d \left[\left(\int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt \right)^2 + \left(\int_x^1 \tau'(t) \sin zt dt \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Далее, объединяя по частям в последние два члена, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\tau'^2(1) - \tau'^2(0)] - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} [\tau^2(1)(c_1(1)\lambda_1(1) + \lambda_3(1)) - \tau^2(0)(c_1(0)\lambda_1(0) + \lambda_3(0))] + \\ & + \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 [\lambda_3(x) + c_1(x)\lambda_1(x)]' \tau^2(x) dx + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \frac{\lambda_1(x)(1-2b(x))}{1-2a(x)} \tau'^2(x) dx - \\ & - \frac{\Gamma(\alpha)\lambda_2(0)}{2r(0)} \left(\int_0^1 r(x) \tau'(x) dx \right)^2 - \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \int_0^1 \left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)} \right)' \left(\int_x^1 r(t) \tau'(t) dt \right)^2 dx + \\ & + \frac{\gamma \Gamma(\alpha) q(0) \lambda_1(0)}{4(1-2a(0)) \sin \pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} (M^2(0, z) + N^2(0, z)) dz + \frac{\gamma \Gamma(\alpha)}{4 \sin \pi\gamma/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \times \\ & \times \int_0^1 \left[\frac{\lambda_1(x) q(x)}{1-2a(x)} \right]' [M^2(x, z) + N^2(x, z)] dx + \frac{p(0, 0)}{2\Gamma(\beta) \sin \pi\beta/2} \int_0^\infty \frac{M^2(0, z) + N^2(0, z)}{z^\beta} dz + \\ & + \frac{1}{2\Gamma(\beta) \sin \pi\beta/2} \int_0^\infty z^{-\gamma} dz \int_0^1 (M^2(x, z) + N^2(x, z)) p_x(x, 0) dx = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

где $M(x, z) = \int_x^1 \tau'(t) \cos zt dt$,

Таким образом, в силу $\tau'(0) \equiv 0$, $\tau'(1) \equiv 0$ при $\varphi(y) = \psi(y) = 0$ (18) в силу (15)-(17) из (20) делается вывод, что $d(x) \equiv 0$. Следовательно, на основе решения второй краевой задачи для

уравнения (1) с учетом [20], [24] на счет (4) и (5), получим $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Далее, из функциональных соотношений (12), с учетом $d(x) \equiv 0$ получаем, что $v^-(x) \equiv 0$. Следовательно, на основании решения $u(x, y) \equiv 0$ в замкнутой области $\bar{\Omega}^-$.

Существование решения Задачи

Теорема 2. Если условия (15)-(17) и

$$p(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}^+) \cap C^2(\Omega^+), \quad q(x+y) \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C^2(\Omega^-), \quad (21)$$

$$\varphi(y), \psi(y) \in C(\bar{I}_2) \cap C^1(I_2); \quad a(x), b(x), c(x), d(x), \lambda_j(x) \in C^1(\bar{I}_1), \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (22)$$

выполнены, то решение исследуемой задачи существует.

Доказательство. С учетом (12) на счет уравнения (14) получим

$$\begin{aligned} \tau''(x) + A(x)\tau'(x) + B(x) \int_x^1 (t-x)^{\gamma-1} \tau'(t) dt + p(x, 0) \int_x^1 (t-x)^{\beta-1} \tau'(t) dt - \\ - \Gamma(\alpha) \lambda_2(x) \int_x^1 r(t) \tau'(t) dt + C(x)\tau(x) = D(x) \end{aligned} \quad (23)$$

здесь

$$\begin{aligned} A(x) = \frac{\Gamma(\alpha)(1-2b(x))\lambda_1(x)}{1-2a(x)}, \quad B(x) = -\frac{\gamma\Gamma(\alpha)q(x)\lambda_1(x)}{2(1-2a(x))}, \\ C(x) = -\Gamma(\alpha)(c_1(x)\lambda_1(x) + \lambda_3(x)), \quad D(x) = -\frac{2\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)d(x)}{1-2a(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда, при $x \rightarrow 1$ в силу $v(1) = \varphi(0) = \tau'(1)$ заключаем, что

$$\tau(1) = \frac{(1-b(1)-a(1))\varphi(0) - \frac{1}{2}d(1)}{c(1)}. \quad (24)$$

Интегрируем уравнение (23) от x до 1 и считая (24) после некоторых вычислений, получаем

$$\tau'(x) - \int_x^1 K(x, t) \tau'(t) dt = F(x), \quad x \in \bar{I}, \quad (25)$$

Заметим, что это уравнение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, где

$$K(x, t) = A(t) + \int_x^t \frac{B(z)}{(t-z)^{1-\gamma}} dz + \int_x^t \frac{p(z, 0)}{(t-z)^{1-\beta}} dz - \Gamma(\alpha) \int_x^t \lambda_2(z) r(z) dz - \int_x^t C(z) dz. \quad (26)$$

$$F(x) = \varphi(0) - \int_x^1 D(t) dt - \tau(1) \int_x^1 C(t) dt. \quad (27)$$

В силу (22) и (23) из (26) и (27) с учетом $0 < \beta, \gamma < 1$ следует, что

$$|K(x, t)| \leq C_1 \quad \text{для любого } 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (28)$$

$$F(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I). \quad (29)$$

Таким образом, учитывая (28) и (29), мы делаем вывод, что уравнение (25) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода и, основываясь на теории интегральных уравнений типа Вольтерра, мы найдем уникальные решения уравнения (25) в классе $C(\bar{I}) \cap C^2(I)$. Это решение задается формулой [24]:

$$\tau'(x) = \int_x^1 R(x, t) F(t) dt + F(x), \quad x \in \bar{I}. \quad (30)$$

где $R(x, t)$ резольвента-ядро из $K(x, t)$. Интегрируя уравнение (30) от x до 1, получаем

$$\tau(x) = - \int_x^1 dt \int_t^1 \left[\varphi(0) - \int_z^1 D(\zeta) d\zeta - \tau(1) \int_z^1 C(\zeta) d\zeta \right] R(t, z) dz -$$

$$-\int_x^1 \left[\varphi(0) - \int_t^1 D(z) dz - \tau(1) \int_t^1 C(z) dz \right] dt, \quad x \in \bar{I}. \quad (31)$$

В силу (27) и (28) из (30) мы заключаем, что

$$\tau(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I). \quad (32)$$

Подставляя (30) и (31) в (13) с учетом (21), (22), (32) мы определяем $\nu^-(x)$ в классе

$$\nu^-(x) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I). \quad (33)$$

Далее, в силу (32), (33), принимая во внимание (12), $x=1$ считая, что $\nu(1) = \tau'(1) = \varphi(0)$ и $c(1) \neq 0$ мы находим неизвестную постоянную $\tau(1)$:

$$\tau(1) = [(1-a(1)-b(1))\varphi(0)+d(1)]/c(1). \quad (34)$$

Таким образом, решение сформулированной задачи может быть восстановлено в области Ω^+ как решение второй краевой задачи для уравнения (1) (см. [5]), а в области Ω^- как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (9)). Следовательно, сформулированная задача однозначно разрешима.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если $a(x) = \frac{1}{2}$, тогда из (12) следует, что сформулированная задача эквивалентно сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно приведенного $\tau(x)$ выше, то будет доказана однозначная разрешимость полученного интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
2. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York. 1993.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press. New York. 1999. 364 p.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk: Science and Technology. 1987. 688 p.
5. Pskhu A.V. *Fractional partial differential equations*. Moscow: Nauka, 2005. 199 p.
6. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014. **2014**(57) . pp. 1–7.
7. Karimov E.T., Akhatov J.A. Boundary value problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014. **2014**(14). pp. 1–6.
8. Ashurov R.R., Cabada A., Turmetov B.Kh. Operator method for construction of solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients. *Fract. Calc. & Appl. Anal.* Springer, 2016. **19**(1). pp. 229–251.
9. Islomov B. I., Yuldashev T. K., Ubaydullayev U.Sh. On Boundary Value Problems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*. □2021. **1**(101). pp.127–137.
10. Nakhushev A.M. *Equations of Mathematical Biology*. M.: Higher school, 1995. 301p.
11. Nakhushev A.M. *Loaded equations and their applications*. M.: Science. 2012. 233p.
12. Kaziev V.M. Goursat problem for one loaded integro-differential equations. *Differential. equations*. 1981. T. 17. No 2. pp. 313–319.
13. B. I. Islomov1, O. Kh. Abdullayev, N. K. Ochilova. On a problem for the loaded degenerating mixed type equation involving integral-differential operators. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*, 2017, **8** (3), p. 1{12}

14. B. I. Islomov, O. Kh. Abdullayev. Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with Caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order. *Russian Mathematics*, 2020, Vol. 64, No. 10, pp. 29–42.
15. Khubiev K.U. On a boundary value problem for a loaded equation of a mixed hyperbolic-parabolic type. *Dokl. Adyg. (Circassian.) Intern. acad. sciences*. 2005.
16. Abdullaev O. Kh. A nonlocal problem for a loaded mixed-type equation with integral operator. *Vestnik Sam. state tech. university. Series of Physics and Mathematics*. 2016.
17. Abdullaev O.Kh. Some problems for the degenerate mixed type equation involving Caputo and Atangano-Baleanu operators fractional order. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 6, No. 2, 1-14 (2020)
18. Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Math.* 2013. 57(7). pp. 53-65.
19. Sabitov K.B. An initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with loaded terms, *Russian Math.* 2015.59 (6). pp. 23-33.
20. Ramazanov M.I. On a nonlocal problem for a loaded hyperbolic-elliptic equation in a rectangular domain. // *Mat. magazine. Almaty*. 2002.2 (4). pp. 75–81
21. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. On a nonlocal problem with conjugation conditions of the integral form for the parabolic-hyperbolic one with the Caputo operator. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 2014. No. 4. pp.6-9.
22. Abdullaev O. Kh. Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 479–489
23. Smirnov M.M. *Mixed type equations*. M.: Higher school. 1985.304 p.
24. Mikhlin S.G. *Lectures on linear integral equations*. M.: Fizmatgiz. 1959.232 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Зокиров Мухаммад Собирович,

Самаркандский государственный университет им.Шарофа Рашидова
mzokirov45@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается радиальная задача аномальной фильтрации однородной жидкости. Течение однородной жидкости в пористой среде моделировалось дифференциальным уравнением с дробными производными. Дробные производные определены в смысле Капуто. Задача решена численно с методом конечных разностей. Представлены профили скорости фильтрации при различных значениях дробной производной времени в плоской радиальной пористой среде.

Ключевые слова: аномальная фильтрация, время релаксации, дробная производная, метод конечных разностей, пористая среда.

NUMERICAL MODELING OF PLANE-RADIAL FILTRATION PROCESSES WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

Abstract. The paper considers the radial problem of anomalous filtration of a homogeneous fluid. The flow of a homogeneous fluid in a porous medium was modeled by a differential equation with fractional derivatives. Fractional derivatives are defined in the Caputo sense. The problem was solved numerically using the finite difference method. The filtration velocity profiles are presented for different values of the fractional derivative of time in a flat radial porous medium.

Key words: anomalous filtration, fractional derivative, finite difference method, porous media, relaxation time.

KASR HOSILALI TEKIS RADIAL SIZISH JARAYONLARINI SONLI MODELLASHTIRISH

Annotatsiya. Ushbu ishda bir hil suyuqlikni anomal sizishning tekis radial masalasi ko'rib chiqilgan. Birjinsli suyuqlikning g'ovak muhitdagi sizishi kasr tartibli differentsial tenglama bilan modellashdirilgan. Kasr hosila Kaputo ta'rif asosida aniqlangan. Masala chekli ayirmalar usuli bilan yechilgan. Tekis radial g'ovak muhitda vaqt bo'yicha kasr hosila tartibning turli qiymatlarida sizish tezligi profillari keltirilgan.

Kalit so'zlar: anomal sizish, kasr tartibli hosila, relaksatsiya, g'ovakl muhit, chekli ayirmalar usuli.

Введение. Известно, что нефти многих месторождений имеют аномальные реологические свойства. Аномальные свойства нефти обусловлены наличием в ее составе различных веществ, в частности асфальтенов, смол, парафинов и др. Аномальная вязкость нефти отражается на движение ее в системе сбора и внутрипромысловый подготовки, трубопроводного транспорта и др. Аномальная вязкость обычно оказывает более сильное влияние на процесс движения нефти в пласте [1], что отражается на закон фильтрации. Классический закон Дарси при этом нарушается.

В [2] показано, что для течения вязкой жидкости в упругих пористых средах получено дробное соотношение между силой и потоком.

Для количественной оценки потока жидкости в естественных геологических средах использовались различные формулы, описывающие поток, не подчиняющийся закону Дарси, однако не существует общего закона или формулы для расчета сложной взаимосвязи между скоростью потока и градиентом давления для однофазного потока жидкости в естественных средах. Целью в работе [3] является предложение и оценка фрактальной модели закона Дарси для расчета расхода жидкости в неоднородных нефтяных пластах.

В последнее время появились модели фильтрации, где широко стал использоваться аппарат дробного дифференцирования. Для лучшего описания потока и давления жидкостей закон Дарси был

модифицирован с целью введения общего формализма памяти, работающего с градиентами потока и давления [4], что подразумевает фильтрацию градиента давления без разделения.

В [5] представлен закон типа Дарси из дробного закона вязкости Ньютона, который предназначен для описания явлений напряжения сдвига в неоднородных пористых средах. В этом смысле закон вязкости Ньютона представляет собой обобщение классического закона Дарси.

В данной работе рассматривается обобщенная релаксационная дробно-дифференциальная модель фильтрации однородной жидкости в пористой среде с учетом плоскорадиальной фильтрации. Выведено уравнение релаксационной фильтрации с учетом плоскорадиальной фильтрации. Поставлена и численно решена задача фильтрации для этого уравнения. Оценено влияние плоскорадиальной фильтрации и релаксационных свойств на поле давления и скорости фильтрации.

Постановка задачи. Область фильтрации показана на рис.1. Фильтрация жидкости происходит

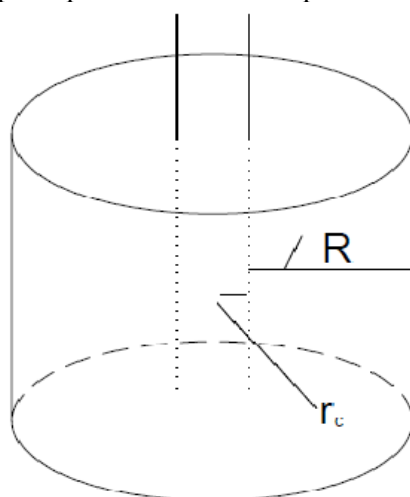


Рис.1. Область фильтрации

в радиальном направлении в сторону центра области. В центре находится скважина радиуса r_c . Внешний контур области имеет радиус R . Учитывая круговую симметрию считается, что показатели фильтрации не зависят от угловой координаты, а зависят от радиальной координаты r и времени t . Закон фильтрации в радиальном случае с учетом релаксации по скорости фильтрации и градиента давления с использованием дробных производных записывается в виде

$$v + \lambda_v D_t^\beta v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \lambda_p D_t^\alpha \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где λ_v , λ_p - времена релаксации скорости фильтрации v и давления p , k - проницаемость среды, μ - вязкость жидкости, r - координата, D_t^α , D_t^β - операторы дробной производной в смысле Капуто [4], по времени t порядка β и α , соответственно.

Заметим, что времена релаксации λ_v и λ_p в (1) имеют дробную размерность $[\lambda_p] = c^\alpha$, $[\lambda_v] = c^\beta$, соответственно.

Аналогично [6] на основе (1) выведено уравнение пьезопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} (p + \lambda_p D_t^\beta p) = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (p + \lambda_v D_t^\alpha p) \right], \quad (2)$$

где $\kappa = \frac{k}{\mu \beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности.

Пусть в начальный момент в области было постоянное давление p_k . Начиная с $t > 0$ на скважине устанавливается постоянное давление p_c . На контуре пласта $r = R$ поддерживается первоначальное давление p_k , что соответствует режиму работы открытого пласта, где за счет притока жидкости извне давление поддерживается на постоянном уровне.

При отмеченных условиях начальные и граничные условия принимаются в следующем виде

$$p(0, r) = p_k, \quad D_t^\beta p(0, r) = 0, \quad (3)$$

$$p(t, r_c) = p_c, \quad p(t, R) = p_k \quad (4)$$

$p_k, p_c = \text{const.}$

Уравнение (2) решается при условиях (3), (4).

Численное решение задачи. В области $\Omega = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ введем равномерную сетку $\Omega = \{(r_i, t_j), r = r_c + ih, i = \overline{0, N}, h = R/N, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}$, где h – шаг сетки по координате r , τ – шаг сетки по времени. Сеточную функцию в точке (r_i, t_j) обозначим через p_i^j .

Разностная аппроксимация уравнения (2) имеет вид

$$(5) \quad \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \lambda_v \cdot \frac{\tau^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \cdot \left[\sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2 \cdot p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot ((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta}) + \right. \\ \left. + \frac{p_i^{j+1} - 2 \cdot p_i^j + p_i^{j-1}}{\tau^2} \right] = \kappa \frac{1}{r} \left(\frac{r_{i+0.5} \cdot p_{i+1}^{j+1} - (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot p_i^{j+1} + r_{i-0.5} \cdot p_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_p}{h^2} \left(\frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5} \cdot S_1}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i+0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} - \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5}) \cdot S_2}{\Gamma(2-\alpha)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot (r_{i+0.5} + r_{i-0.5})}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5} \cdot S_3}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\tau^{1-\alpha} \cdot r_{i-0.5}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{\tau} \right) \right),$$

где

$$S_1 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \quad S_2 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \\ S_3 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k}{\tau} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \\ S_4 = \sum_{k=0}^{j-2} \frac{p_i^{k+1} - 2 \cdot p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \cdot ((j-k+1)^{2-\beta} - (k-1)^{2-\beta}), \\ r_{i+0.5} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2}, \quad r_{i-0.5} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}, \quad r_i = (i-1) \cdot h, \quad k_v = \frac{\lambda_v}{\Gamma(3-\beta) \cdot \tau^\beta}, \quad k_p = \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot h^2}, \\ r_1 = \frac{2 \cdot i \cdot h - h}{2}, \quad r_0 = \frac{2 \cdot i \cdot h - 3 \cdot h}{2},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

При известном $p(t, r)$ скорость фильтрации определяется из (1), после дискретизации которого имеем

$$v_i^{j+1} + \frac{\lambda_v}{\Gamma(2-\beta) \cdot \tau^\beta} \sum_{k=0}^{j-1} (v_i^{k+1} - v_i^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\beta} - (j-k)^{1-\beta}) + (v_i^{j+1} - v_i^j) = \\ = -\frac{k}{\mu \cdot h} ((p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}) + \frac{\lambda_p}{\Gamma(2-\alpha) \cdot \tau^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{j-1} (p_i^{k+1} - p_i^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) - p_i^{j+1} + p_i^j \right)) \quad (6)$$

При аппроксимации дробных производных в (5) использована методология [6-8].

Результаты и обсуждение. Задача (1)-(4) решена численно и анализировано влияние λ_p , λ_v , α и β на распределение давления и скорости фильтрации в пласте для $k = 10^{-13} \text{ м}^2$; $\mu = 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $p_k = 20 \text{ МПа}$, $p_c = 15 \text{ МПа}$; $\beta^* = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $r_c = 0,1 \text{ м}$ $R = 40 \text{ м}$.

Результаты. Характеристики изменения v полностью согласуются с изменением p . При малых r , т.е. вблизи r_c скорость фильтрации резко возрастает, что объясняется уменьшением поперечного сечения фильтрационного потока. Это характерно для радиальных фильтрационных потоков. Как и в случае изменения давления, уменьшение β приводит к уменьшению значений v , а уменьшение α – к увеличению v (рис.8, 9). Влияние λ_v и λ_p на v также вполне аналогично с влиянием на p (рис.10, 11); λ_v уменьшает, а λ_p увеличивает v . С увеличением времени t скорость фильтрации увеличивается во всей области (рис.12).

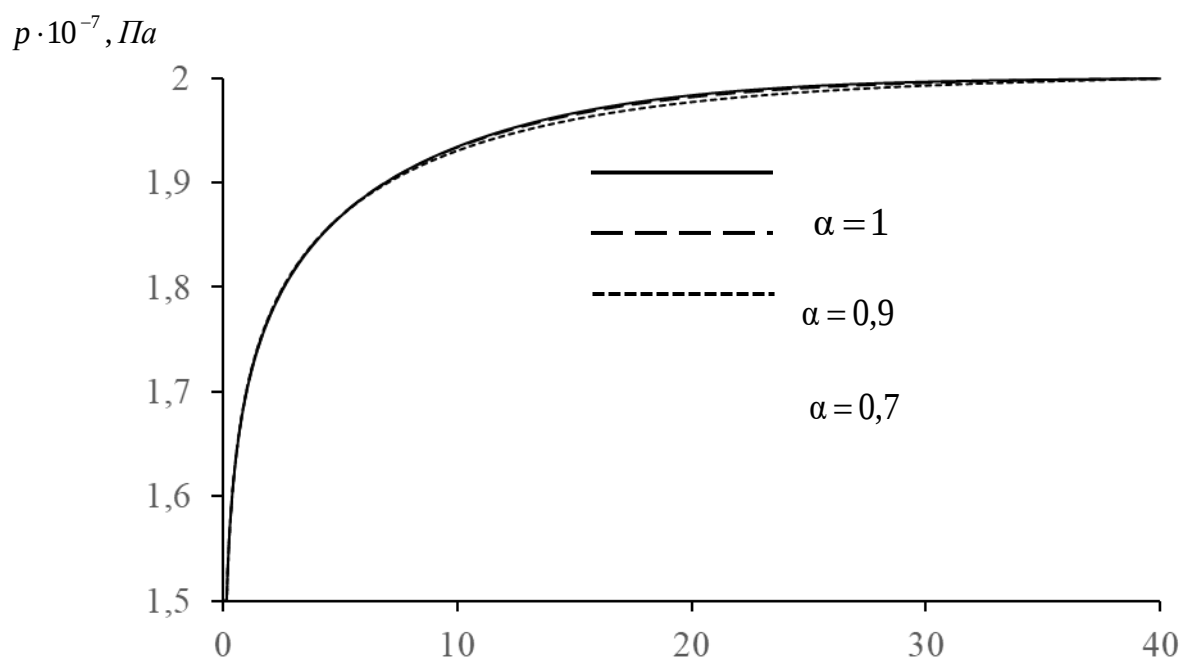


Рис. 8. Профили давления при различных α при $t = 3600 \text{ с}$, $\lambda_v = 500 \text{ с}^\beta$, $\lambda_p = 500 \text{ с}^\alpha$, $\beta = 1$.

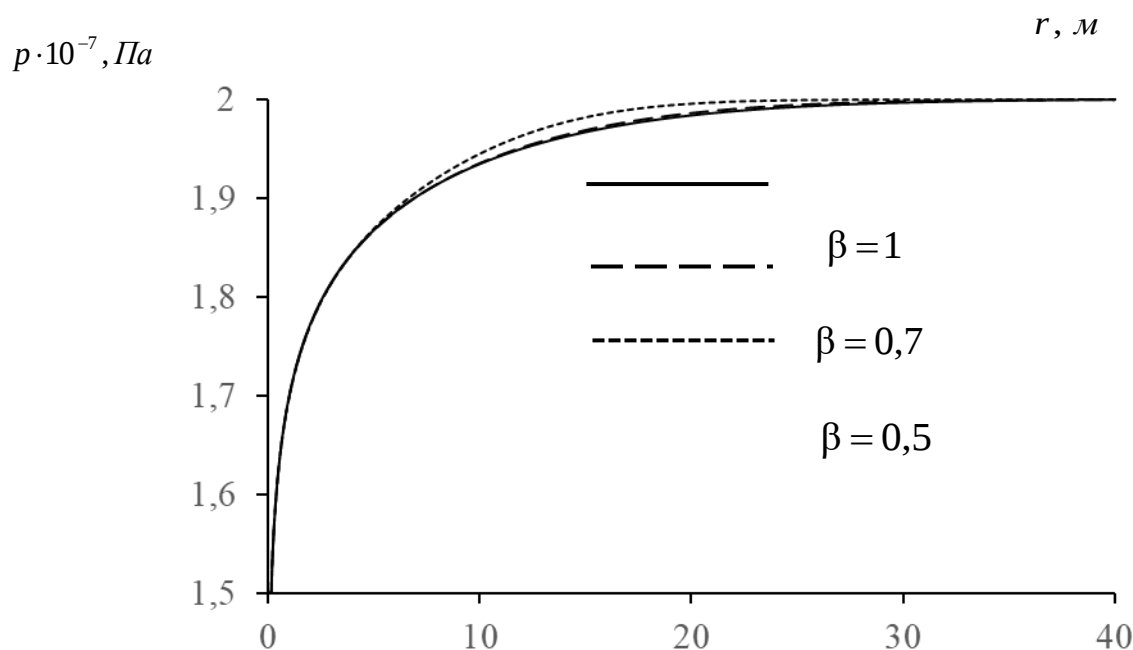


Рис. 9. Профили давления при различных β при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 500$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\alpha = 1$.

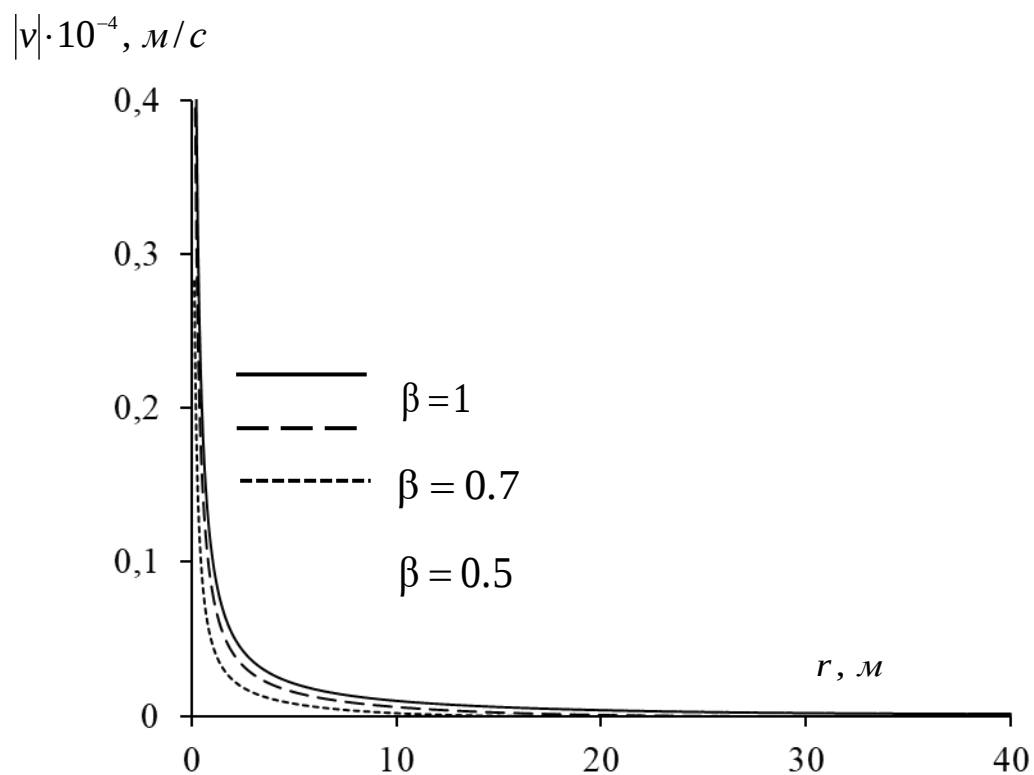


Рис. 10. Профили изменения скорости при различных β при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 1000$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\alpha = 0.7$

$v \cdot 10^{-4}$, м/с

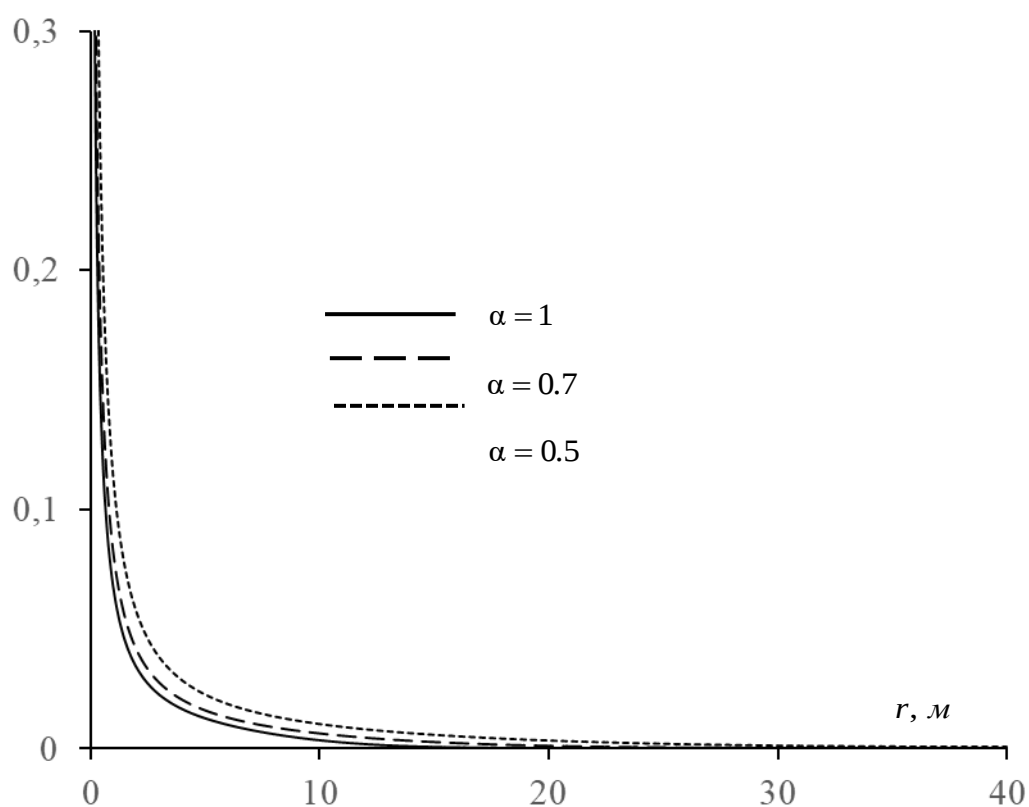


Рис. 11. Профили изменения скорости при различных α при $t = 3600$ с, $\lambda_v = 1000$ с $^\beta$, $\lambda_p = 500$ с $^\alpha$, $\beta = 0.7$.
 $v \cdot 10^{-4}$, м/с

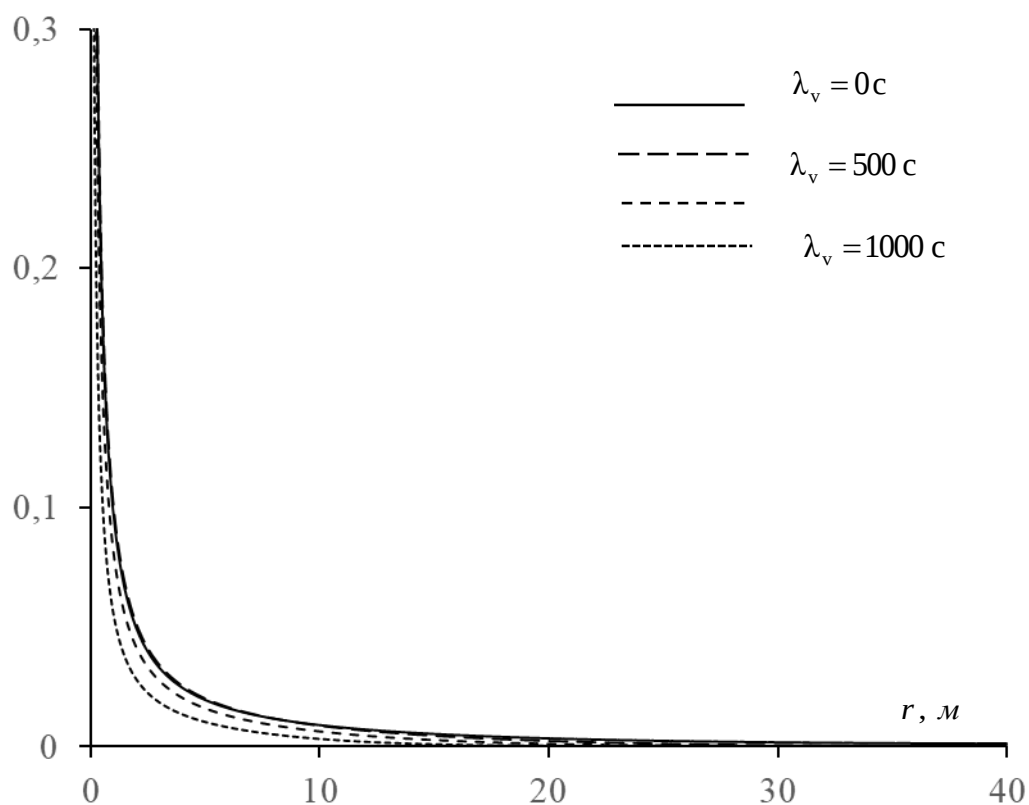


Рис. 12. Профили изменения скорости при $t = 3600$ с, $\lambda_p = 500\text{с}^\alpha$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.7$ и различных λ_v .

Заключение. Численно решена задача аномальной фильтрации однородной жидкости в плоско – радиальной пористой среде. Показано, что уменьшение порядка производной в релаксационном члене по скорости фильтрации приводит к замедлению развития поля давления и скорости фильтрации. Уменьшение порядка производной в релаксационном члене закона фильтрации по градиенту давления, наоборот, приводит к интенсификации развития полей давления и скорости фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М. Аномальные нефти. М.: «Недра», 1975. - 168 с.
2. Luca Deseri., Massimiliano Zingales. A mechanical picture of fractional-order Darcy equation // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 20. 2015 P.940–949. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.06.021>.
3. Ailian Chang., HongGuang Sun., Yong Zhang., Chunmiao Zheng., Fanlu Min. Spatial fractional Darcy's law to quantify fluid flow in natural reservoirs // Physica A. 0378-4371, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.11.040>.
4. Caputo M. Models of flux in porous media with memory //Water Resources Research. Vol. 36. №3. 2000, P. 693-705.
5. Alberto Ochoa-Tapia J., Francisco J., Valdes-Parada., Jose Alvarez-Ramirez. A fractional-order Darcy's law //Physica A. 374. 2007. P.1-14. doi: 10.1016/j.physa.2006.07.033.
6. Khuzhayorov B., Djiyanov T.O., Zokirov M.S, Generalized relaxation fractional differential model of fluid filtration in a porous medium. // International Journal of Applied Mathematics. Volume 37. №1. Pp.119–132. 2024. doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v37i1.10>.
7. Makhmudov J.M., Usmonov A.I., Kuljanov J.B. Solution of the Anomalous Filtration Problem in Two Dimensional Porous Media APAMCS, – 2022. – P. 68–80. doi: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-34127-4_7.
8. Y. Xia, J. C. Wu and L. Y. Zhou, “Numerical Solutionsof Time-Space Fractional Advection-Dispersion Equations,” ICCES, Vol. 9, №.2, 2009, pp. 117-126.

YEVROPIY BILAN LEGIRLANGAN KREMNIYDA MAGNITLANISHNING GISTEREZISI

*Abdug'aniyev Yo'ldoshali Adashali o'g'li,**Fizika-matematika fanlari bo'yicha PhD**Islom Karimov nomidagi Toshkent Davlat Texnika Universiteti**yoldoshaliabduganiyev2@gmail.com*

Annotatsiya. Yevropiy kirishma atomlarini kremniyga kiritish natijasida magnit nanoklastarlari shakllantirilgan p-tipli legirlangan kremniy namunalari magnit xususiyatlarini o'rganish bo'yicha tadqiqot natijalari keltirilgan. Bunda asosiy vazifa diffuziya usuli bilan olingan materialda elektron paramagnit rezonans xususiyatini o'rganish, magnit qarshilikning elektr va magnit bo'yicha o'zgarishi qonuniyatlarini o'rnatish, xona haroratida magnitlanish gisterizisi tashqi magnit maydon ta'siriga bog'liqligini aniqlashdan iborat.

Kalit so'zlar: Gisterezis, diffuziya, magnit qarshilik, ferromagnit, konsentratsiya

ГИСТЕРЕЗИС НАМАГНИЧЕННОСТИ В КРЕМНИИ ЛЕГИРОВАННОМ ЕВРОПИЙ

Аннотация. Представлены результаты исследования магнитных свойств образцов кремния, легированного р-типом, в которых в результате введения в кремний легирующих добавок европия формируются магнитные нанокластеры. Основная задача – изучение свойств электронного парамагнитного резонанса в материале, полученном методом диффузии, установление закономерностей изменения магнитосопротивления в электрическом и магнитном направлениях, а также определение зависимости гистерезиса намагниченности при комнатной температуре от воздействия внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: Гистерезис, диффузия, магнитосопротивление, ферромагнетизм, концентрация

HYSTERESIS OF MAGNETIZATION IN SILICON ALLOYED WITH EUROPIUM

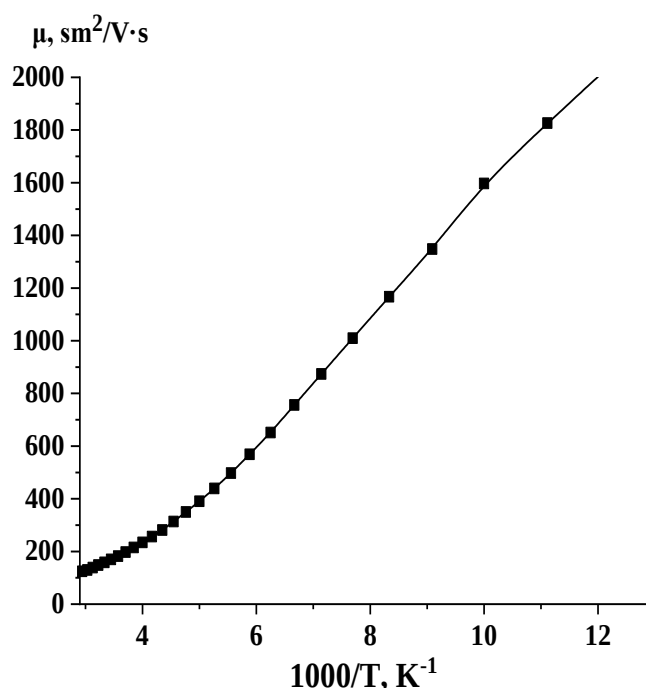
Abstract. The results of the study on the magnetic properties of p-type doped silicon samples, in which magnetic nanoclusters are formed as a result of introducing europium dopants into silicon, are presented. The main task is to study the properties of electron paramagnetic resonance in the material obtained by the diffusion method, to establish the laws of the change of magnetic resistance in electric and magnetic directions, and to determine the dependence of magnetization hysteresis at room temperature on the effect of an external magnetic field.

Key words: Hysteresis, diffusion, magnetoresistance, ferromagnetism, concentration

Kirish. Adabiyotlarning ilmiy tahlili asosida lantanoid elementlarning kirishma atomlari kiritilgan kremniyda ferromagnitizm holatining kuzatilishi kirishma atomlarning magnit momentlarini qattiq hajmida o'zaro parallel tartiblanishi bilan izohlangan. Metallarda elektronlarning konsentratsiyasi ko'p bo'lganligi uchun ularning spinlarini boshqarish nisbatan oson bo'ladi [1]. Ishda ko'rsatib o'tilgandek yarimo'tkazgichli qurilmalar odatda elektronlarning zaryadidan foydalanadilar, magnit materiallar esa elektron spin bilan bog'liq ma'lumotlarni yozib olish uchun ishlatiladi. Yarimo'tkazgichlarda ferromagnit material olish uchun hammda elektronlarning zaryadi va spinidan foydalanish magnit bo'lmagan yarimo'tkazgichlarga magnit elementlarning yuqori konsentratsiyasini kiritish mumkin. Kremniyga yuqori spin tartiblanish xususiyatiga ega lantanoid guruhiga mansub elementlarning kirishma atomlarini kiritish orqali boshlang'ich kremniyning magnit xossasini o'zgartirish mumkinligi [2] ishda ko'rsatib berilgan. Olingan natijalar yarimo'tkazgich kremniy materialini spintronikada magnit datchiklarni yaratishda foydalanish imkoniyatini beradi, masalan, spin tranzistorlarni ishlab chiqarishda. 4f– guruh elementlarining kirishma atomlarini kremniyga kiritib, uning magnit xususiyatlarini boshqarishga qiziqish ortib bormoqda. Eu atomlarining tashqi elektron qobiqlaridagi 4f⁷ elektronlar spini S=7/2 ga teng. Eu va kirishma atomlarining kremniyga kiritib uning magnit xususiyatlarini o'rganish ilmiy va amaliy ahamiyatga ega hisoblanadi.

Kremniyda ferromagnit xususiyatini olish uchun yuqoridagi boblarda o'rganilgandek yevropiy kirishma atom tanlab olindi. Boshlang'ich material sifatida parametrlari solishtirma qarshiligi $77\div 80\ \Omega\cdot\text{sm}$ va fosfor konsentratsiyasi $N=7.25\cdot 10^{13}\ \text{sm}^{-3}$ (kristal sirt orientatsiyasi (111)) bo'lgan n-turli kremniy Si<P>-80 asosida namunalar olingan. Diffuziya texnologiyasi doimiy manbaning gaz fazasidan amalga oshirildi.

Yevropiy kirishma atomi bilan legirlangan kremniydagi tok tashuvchilarning konsentratsiyasi va harakatchanlini haroratga bog'liqligi ECOPIA HALL HMS-7000 rusumli qurilmada azot haroratidan boshlab ($T=77\ \text{K}$) o'rganib chiqildi. Ko'p namunalarda takroriy o'lchovlar bir xil natijalarni berdi



1-rasm. Yevropiy kirishma atomlari kiritilgan kremniyda tok tashuvchilarning harakatchanligini haroratga bog'liqligi

O'rganilayotgan namunadagi o'lchash natijalaridan ko'rishimiz mumkinki haroratni oshishi, ya'ni kT energiyani oshirish bilan kristall panjara tugundagi atomlarining tebranishlarini amplitudasi ortishi oqibatida kristall panjara doimiysi o'zgaradi, kuzatilgan tebranish mehanizimi zaryad tashuvchilarni sochilishi deb ataladi [3]. Olingan natijalarga nazariy jihatdan qaraydigan bo'lsak, elektronlar va kovaklarning harakatchanligi $\mu_p \propto \mu_n \propto T^{\pm \frac{3}{2}}$ ifodaga to'g'ri proporsional bo'ladi. Adabiyotlarda o'rganilgan yarimo'tkazgich elementlarining harorat $T=0-100\ \text{K}$ oraliqda harakatchanlik $T^{\frac{3}{2}}$ qonuniyat bo'yicha o'zgaradi. Harorat $T=100\ \text{K}$ dan oshganda $T^{-\frac{3}{2}}$ qonuniyat bo'yicha kamayadi. Tajribada o'rganilgan namunasida zaryad tashuvchilarning harakatchanligi $T^{\frac{3}{2}}$ qonuniyat bo'yicha kamayib bordi. 2 rasmdagi grafikda $T^{\frac{3}{2}}$ qonuniyat kuzatilmadi, buning asosiy sabablari qurilmaning o'lchash chegarasini $T=77\ \text{K}$ haroratgachaligi hamda azot suyuqligining kimyoviy tozaligiga bog'liq bo'lishidir.

[3.] Ishlar aytib o'tilgan EuO birikmasi istiqbolli ferromagnit yarimo'tkazgich material hisoblanadi. Bu birikmaning kristall tuzulishi tosh tuzi kristall panjara tuzilishiga ega.[4-7] ishlardan Si<EuO> klaster bo'lganini ilmiy asoslangandan keyin namunaning magnit xususiyatini o'rganish uchun Istanbul texnika universiteti laboratoriyasida mavjud "Quantum Design MPMS-3 SQUID VSM" markali magnetometr qurilmasi yordamida bir necha bor xona haroratida o'rganildi

Olish texnologiyasi. Tadqiqotni asosiy maqsadi kremniy sirtida yuqori klaterni hosil qilib uning katta magnit momentga ega materilni tatbiq etishdan iborat. Yevropiy atomlarining nanoklasterlarining turli konsentratsiyasi bo'lgan kremniy magnitlanishining magnit maydonga bog'liqligi o'rganildi 1-rasm. Shu sabab klasterlarni hosil bo'lish uchun yuqori ikki xil haroratda $T_1=1200^\circ\text{C}$, $T_2=1250^\circ\text{C}$

diffuziya qilib, magnit xussiyatini o'rganildi. Tadqiqot natijasidan malumki harorat yuqori qilishdan asosiy maqsan kremniy sirtidagi konsentratsiyasini oshirishdan iborat. Namunalarning magnitlanishi 1-jadvalda tahlili keltirib o'tilgan.

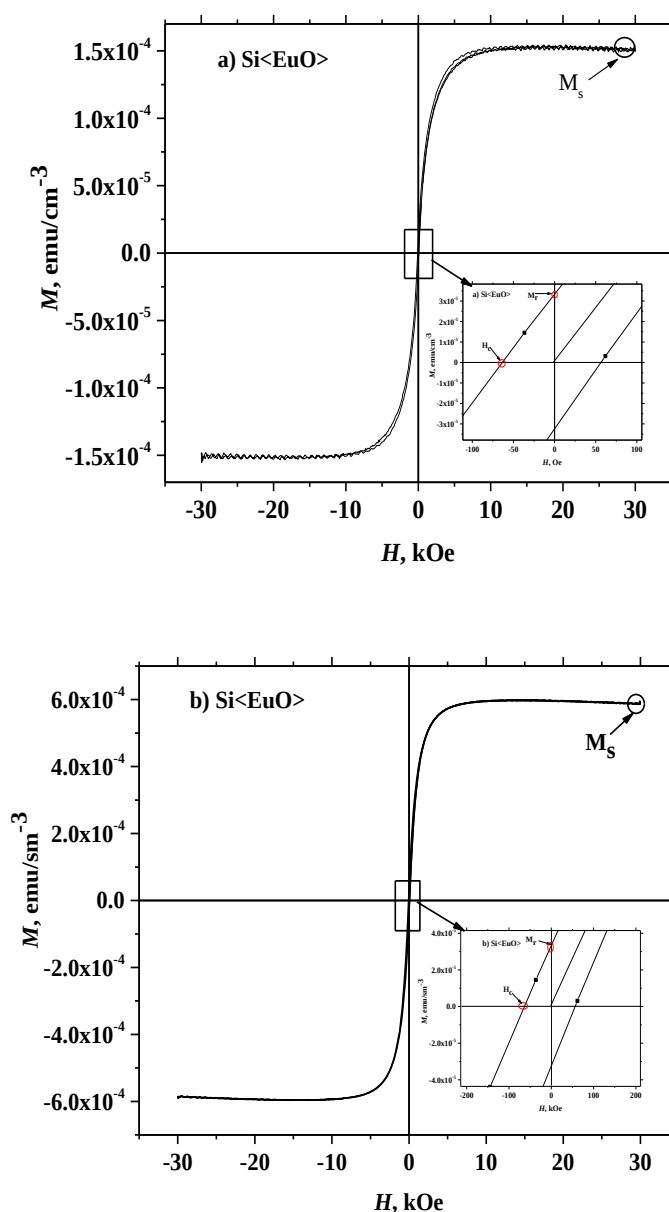
1-jadval.

Namunalarning magnitlanishi tahlili

Namunalar	Konsentratsiya N, sm^{-3}	Magnitlanishning to'yinganligi $M_s, \text{emu/sm}^{-3}$	Magnitlanish qoldig'i $M_r, \text{emu/sm}^{-3}$	Majburiy kuch H_c, Oe
<i>a</i>	$8.2 \cdot 10^{17}$	$\pm 1.47 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	58
<i>b</i>	$1.8 \cdot 10^{18}$	$\pm 5.95 \cdot 10^{-4}$	$3.42 \cdot 10^{-5}$	65.3

Tadqiqot natijasidan ko'rishimiz mumkinki xona haroratida o'rganilyotgan namunada magnitlanish Gisterezis hodisasi kuzatildi.

Agarda magnitlanganlikni (χ) quydagi 1 formula orqali hisoblab chiqsak xona haroratida $\chi=10^{-5}$ ga teng bo'ldi.



2-rasm. Turli haroratlarda yevropiy kirishma atomlarini diffuziya qilingan kremniy namunalarning magnitlanganligini tashqi magnit maydonga bog'liqligi; a-harorat $T_1=1200^\circ\text{C}$, b-harorat $T_2=1250^\circ\text{C}$.

$$\chi = \frac{M}{H}$$

bunda M –Magnitlanish, H –Magnit maydon kuchi

Yevropiy kirishma atomlari diffuzion usul bilan kiritilgan kremniyning magnit xususiyatlarini oʻrganish asosida tezkor ishlaydigan magnit sensorlar, magnit diodlar, tranzistorlar, integralsxemalar hamda sezgirligi yuqori magnit datchiklarni yaratish imkoniyatlari koʻrsatilgan.

Xulosa. Xona haroratda ($T=300$ K) yevropiy kirishma atomlari bilan legirlangan kremniy sirtida magnit domenlarni shakllantrishni yangi texnologiyasini yaratildi hamda tashqi magnit maydon taʼsirda tartibli oshishi kuzatildi. Si<EuO> namunalardagi magnitlanganlikni (χ) xona haroratida $\chi=10^{-5}$ ga teng ekanligi aniqlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Ohno H., *Making Nonmagnetic Semiconductors Ferromagnetic. Control and use of defects in materials*//1998. Vol 281 No5379. pp 951–956. doi:10.1126/science.281.5379.951.
2. Zikrillaev N.F., Mavlonov G.H., Trabzon L., Isamov S.B., Abduganiev Y.A., Ibodullaev Sh.N., Kushiev G.A. *Magnetic Properties of Silicon Doped with Impurity Atoms of Europium*// *Journal of Nano- and Electronic Physics*. 2023. Vol. 15 No 6, 06001.pp 1-4. ISSN: 2077-6772 IF: 0.716. [https://doi.org/10.21272/jnep.15\(6\).06001](https://doi.org/10.21272/jnep.15(6).06001)
3. Бахадырханов М. К., Якубов А. А. *Энциклопедический справочник по полупроводниковым материалам.*: ТашГТУ// 2010. 204 с.
4. Lahtinen T.H.E.; Tuomi J.O.; Van Dijken S. *Electrical Writing of Magnetic Domain Patterns in Ferromagnetic.Ferroelectric Heterostructures*. *IEEE transactions on magnetics*// 2011. Vol 47(10), Pp 3768–3771. doi:10.1109/tmag.2011.2143393.
5. Tagantsev A K.; Cross L E; Fousek J. *Domains in Ferroic Crystals and Thin Films*. Springer Science+Business//2010. pp 1-821. doi:10.1007/978-1-4419-1417-0.
6. Mavlonov G.H., Isamov S.B., Koveshnikov S.V., Zikrillaev Kh.F., Abduganiev Y. A., Sattorov A.A., Ibrohimov A.B. *Ordering of europium magnetic domains in silicon at room temperature*//*Indian Journal of Physics*. 2024. Vol 99(7) pp 2429–2435. ISSN:0973-1458 <https://doi.org/10.1007/s12648-024-03473-0>.
7. Мавлонов Г.Х., Абдуганиев Й.А. *Исследование электронного парамагнит-ного резонанса редкоземельных элементов (Nd, Eu, Gd), легированных в монокристаллическом кремнии* // *Buxoro Davlat Universiteti ilmiy axboroti* 2024. 88-91 б.
8. Mavlonov G‘.H., Abdug‘aniyev Y.A. *Yevropiy kirishma atomlari bilan legirlangan kremniyning magnit xususiyati*// *Buxoro Davlat Universiteti ilmiy axboroti*.№3. 2025. 96-100 б.

ERKIN TEBRANISHLAR TUSHUNCHASI VA FIZIK MOHIYATI

Axmedova Umeda Farhod qizi,

Buxoro davlat pedagogika instituti 2-bosqich magistranti

umidaaxmedova661@gmail.com

Ro'ziyev To'liq Razzoqovich,

Buxoro davlat pedagogika instituti fizika kafedrasida dotsenti, f.-m.f.f.d. (PhD)

ruzievtulqin@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada erkin tebranishlar tushunchasi, ularning fizik mohiyati, matematik ifodasi hamda turli tizimlarda ro'y berish sabablari keng yoritilgan. Shuningdek, tebranish jarayonining asosiy parametrlari amplituda, davr, chastota va fazaning o'zaro bog'lanishi tahlil qilinadi. Erkin tebranishlarning mexanik, elektr va akustik tizimlardagi namoyon bo'lishi nazariy asosda ko'rib chiqilib, ularning differensial tenglamalar orqali modellashtirilishi amaliy misollar bilan ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: erkin tebranishlar; mexanik tizim; differensial tenglama; burchak chastota; amplituda; faza burchagi; rezonans; energiya saqlanishi; LC-kontur; elastik kuch; Guk qonuni; Nyuton qonuni; tebranish nazariyasi; barqarorlik tahlili.

КОНЦЕПЦИЯ И ФИЗИЧЕСКАЯ СУТЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Аннотация. В статье дан комплексный обзор понятия свободных колебаний, их физической природы, математического выражения и причин возникновения в различных системах. Проанализирована взаимосвязь между основными параметрами колебательного процесса: амплитудой, периодом, частотой и фазой. Теоретически рассмотрено проявление свободных колебаний в механических, электрических и акустических системах, а также показано их моделирование дифференциальными уравнениями на практических примерах.

Ключевые слова: свободные колебания; механическая система; дифференциальное уравнение; круговая частота; амплитуда; фазовый угол; резонанс; закон сохранения энергии; LC-контур; сила упругости; закон Гука; закон Ньютона; теория колебаний; анализ устойчивости.

THE CONCEPT AND PHYSICAL ESSENCE OF FREE VIBRATIONS

Abstract. This article provides a comprehensive overview of the concept of free oscillations, their physical nature, mathematical expression, and the causes of their occurrence in various systems. The relationship between the main parameters of the oscillatory process—amplitude, period, frequency, and phase—are analyzed. The manifestation of free oscillations in mechanical, electrical, and acoustic systems is theoretically examined, and their modeling using differential equations is demonstrated using practical examples.

Keywords: free vibrations; mechanical system; differential equation; angular frequency; amplitude; phase angle; resonance; energy conservation; LC-circuit; elastic force; Hooke's law; Newton's law; vibration theory; stability analysis.

Kirish. Tebranishlar hodisasi tabiatda keng tarqalgan bo'lib, u mexanik, elektr, akustik, hatto kvant tizimlarida ham kuzatiladi. Har qanday tizim muvozanat holatidan chetlashtirilganda va unga tiklovchi kuch ta'sir qilganda, u ma'lum vaqt davomida muvozanat holati atrofida davriy harakatni amalga oshiradi. Ana shu jarayon **tebranish** deb ataladi. Agar bu tebranishlar tashqi kuchlarning aralashuvisiz, faqat tizimning ichki energiyasi hisobiga yuzaga kelsa, u holda bu **erkin tebranish** deyiladi.

Erkin tebranishlar bu energiyaning bir shakldan ikkinchi shaklga uzluksiz almashinuvi bilan kechadigan murakkab dinamik jarayondir. Masalan, buloqqa osilgan yuk tebranganda, dastlabki potensial energiya kinetik energiyaga, so'ng yana potensial energiyaga aylanishda davom etadi. Shu kabi tebranishlar elektr konturlarida (induktivlik va sig'im orasida zaryad almashinuvi), akustik tizimlarda (tovush to'liqlari shaklida), va hatto atom hamda molekullar darajasida ham kuzatiladi.

Erkin tebranishlarning mohiyatini chuqur anglash mexanika, qurilish, akustika, elektrodinamika, avtomatika va hatto nanofizika kabi ko'plab sohalarda alohida ahamiyatga ega. Chunki real tizimlarning

barqarorligi, chidamliligi va rezonans holatlarida yuzaga keladigan xavfli tebranishlarni aniqlash, ulardan himoyalash va ularni boshqarish imkoniyati aynan shu nazariy asosga tayanadi. Masalan, bino konstruksiyalarida, ko'priklarda yoki mashina detallarida paydo bo'ladigan erkin tebranishlarni hisobga olmaslik rezonans hodisasiga olib kelib, jiddiy mexanik shikastlanishlar keltirib chiqarishi mumkin.

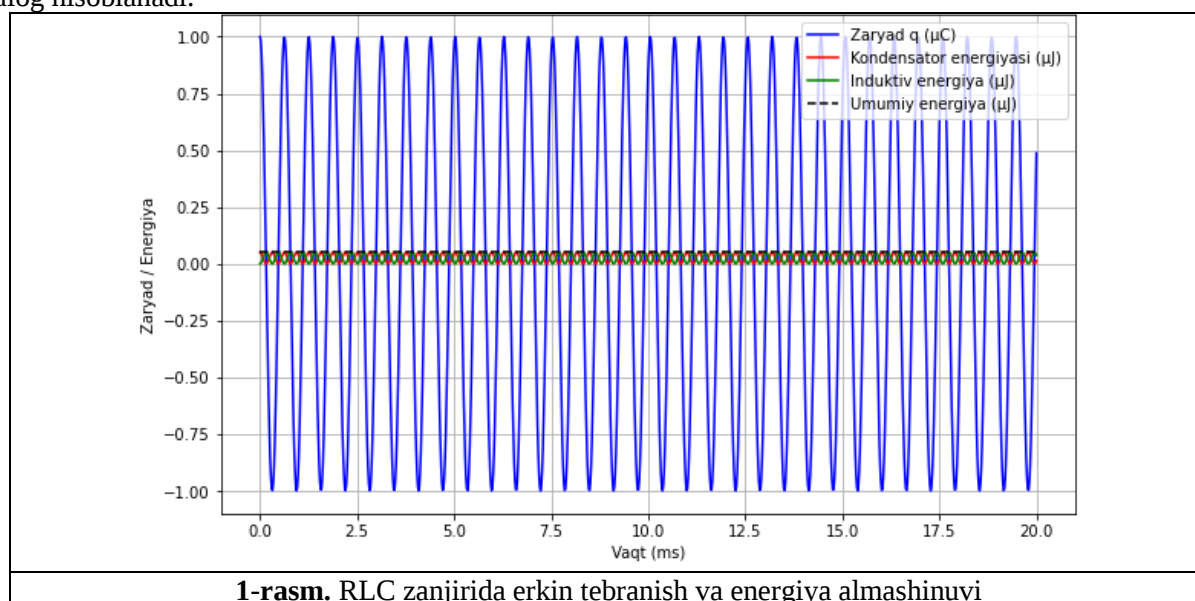
Shu bois erkin tebranishlar nazariyasini o'rganish, ularning differensial tenglamalar orqali ifodalanishi va asosiy parametrlarini (amplituda, chastota, faza, davr) tahlil qilish bugungi kunda ilm-fan va muhandislik amaliyotida muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu tadqiqot natijalari turli tizimlarning dinamik xatti-harakatini prognoz qilish, rezonansni oldini olish hamda energiya tejankor boshqaruv usullarini ishlab chiqishda keng qo'llaniladi.

Adabiyotlar tahlili. Erkin tebranishlar nazariyasi asrlar davomida ko'plab olimlar tomonidan chuqur o'rganilgan va rivojlantirilgan. Bu sohadagi tadqiqotlar mexanik tizimlardan boshlanib, keyinchalik elektr va boshqa fizik tizimlarga kengaytirilgan. A. Lagrange, I. Nyuton va D. Bernulli mexanik tebranishlarni matematik jihatdan tavsiflashga asos solgan olimlardir. Ular differensial tenglamalar yordamida tizimning harakatini ifodalash va energiya almashinuvi prinsiplarini tushuntirishga kirishgan, bu esa massalar, buloqlar va pendullar kabi klassik tizimlarda erkin tebranishlarni matematik modellashga imkon yaratgan. Keyinchalik, Lord Rayleigh tebranishlar energiyasi, amplituda, davr va rezonans hodisalarini chuqur tahlil qilgan, tebranishlarning tabiiy chastotalari, tizimning tashqi kuchlarga javobi va energiya saqlanishini o'rganish orqali nazariyani yangi bosqichga olib chiqqan va rezonans hodisasining xavfsizlik hamda muhandislik ilovalaridagi ahamiyatini aniqlagan. So'nggi asrlarda zamonaviy olimlar erkin tebranishlarni kengroq tizimlarda o'rganishga e'tibor qaratgan; struktura tahlilida binolar, ko'priklar va mashinalar elementlarining tabiiy tebranish chastotalari, amplitudasi va energiya almashinuvi o'rganiladi, elektr tizimlarda esa RLC zanjirlari orqali zaryad va tokning almashinuvi mexanik tebranishlarning analogi sifatida tahlil qilinadi. Zamonaviy tadqiqotlar erkin tebranishlarni matematik modellash va kompyuter simulyatsiyalari yordamida batafsil o'rganishga yo'naltirilgan bo'lib, turli chegaraviy shartlar va tashqi ta'sirlar ostida tizimlarning javobi oldindan bashorat qilinadi. Shu tariqa, adabiyotlar tahlili erkin tebranishlarni tushunishda tarixiy asoslar, matematik modellash, energiya almashinuvi va zamonaviy tadqiqotlarning bir-biriga bog'liqligini ko'rsatadi, bu esa nafaqat nazariy, balki amaliy muhandislik masalalarini yechishda ham muhim ahamiyatga ega.

Zamonaviy adabiyotlarda (masalan, Landau va Lifshits "Mexanika" asarida) erkin tebranishlar umumiy differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi. Elektr tizimlaridagi erkin tebranishlar esa *LC*-kontur modeli orqali ifodalanadi (1-rasm):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (1)$$

Bu yerda *L*- induktivlik, *C*- sig'im, *q*- zaryad. Ushbu tenglama mexanik tebranish tenglamasiga to'liq analog hisoblanadi.



Adabiyotlarda qayd etilishicha, erkin tebranish tizimlarida energiyaning saqlanish qonuni asosiy rol o'ynaydi. Tizimga tashqi energiya ta'sir qilinmasa, uning umumiy energiyasi doimiy qoladi.

Boshlang'ich nuqtada tizimning energiyasi turli shakllarda bo'lishi mumkin: ba'zan u to'liq potensial energiya shaklida, ba'zan esa to'liq kinetik energiya shaklida bo'ladi. Harakat davomida bu energiyalar o'zaro almashadi: potensial energiya kinetik energiyaga aylanadi, kinetik energiya esa yana potensial energiyaga. Shu tarzda energiya doimiy ravishda tizim ichida aylanishi natijasida erkin tebranishlar davom etadi.

Bu jarayon mexanik, elektr va boshqa turdagi tizimlarda bir xil prinsipda ishlaydi va tizimning har bir vaqtdagi holatini, tezligini va harakat xususiyatlarini aniqlashda muhim ahamiyatga ega:

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const} \quad (2)$$

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu tadqiqot erkin tebranishlarning fizik mohiyatini, ularni matematik modellashtirish usullarini va vaqt bo'yicha o'zgarishlarini batafsil tahlil qiladi.

Erkin tebranishlar bu tizim tashqi ta'sirlarisiz tabiiy ravishda harakatlanadigan holatlar. Masalan, elastik jismlar, pendullar yoki massali-spring tizimlar o'zining ichki energiyasi yordamida harakat qiladi. Tizimga tashqi kuchlar ta'sir qilinmasa, bu harakatlar davom etadi.

Erkin tebranishlarni matematik jihatdan tavsiflash uchun differensial tenglamalar ishlatiladi. Ularning yordamida tizimning asosiy xususiyatlari aniqlanadi:

Davr (T) - tebranishning bir to'liq sikli uchun ketadigan vaqt.

Chastota (f) - bir vaqt birligida qancha tebranish amalga oshishini bildiradi.

Amplituda (A) - tebranishning maksimal qiymati yoki eng katta siljish hajmi.

Fazaviy burchak - tebranish boshlanish nuqtasi va boshlang'ich holatini belgilaydi.

Bu parametrlar bir-biri bilan chambarchas bog'liq bo'lib, tizimning har bir vaqtdagi holatini, tezligini va harakat yo'nalishini aniqlash imkonini beradi.

Tadqiqot davomida erkin tebranishlarning matematik modellashtirilishi turli tizimlar uchun qo'llaniladi. Bu mexanik tizimlar, struktura tahlillari va muhandislik ilovalarida tebranishlarning oldindan bashorat qilinishini ta'minlaydi.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ va } f = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

bu yerda T - tebranish davri (s), f - chastota (Hz), ω - burchak chastota (rad/s).

Grafik jihatdan erkin tebranishlar sinusoidal shaklda ifodalanadi. Bu chiziqli grafik tebranish jarayonining davriy va muvozanat holati atrofida takrorlanib turuvchi xarakterini aniq ko'rsatadi. Sinusoidal shakl tizimning energiya almashinuvi jarayonini - ya'ni kinetik va potensial energiyalarning o'zaro aylanishini - tasvirlaydi.

Tajriba va modellashtirish natijalari shuni ko'rsatadiki, agar tizimda ishqalanish yoki qarshilik kuchlari mavjud bo'lsa, tebranishlar vaqt o'tishi bilan susayadi. Bunday holatlarda erkin tebranishning matematik ifodasi so'nuvchi eksponenta ko'rinishida yoziladi:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4)$$

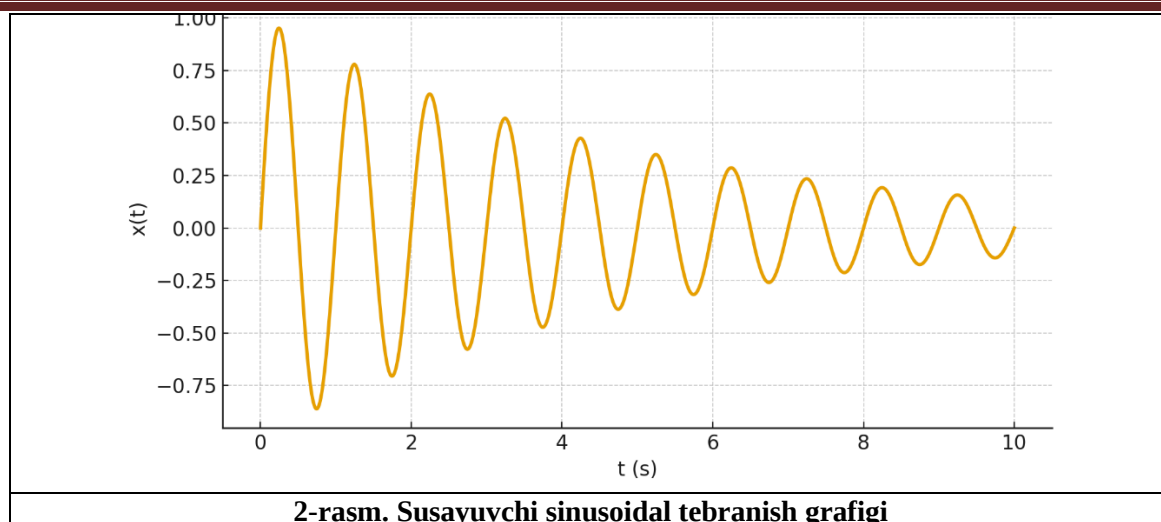
bu yerda β - so'nish (susayish) koeffitsiyenti bo'lib, u tizimdagi energiya yo'qotish darajasini belgilaydi.

Metodologik jihatdan, tadqiqot ikki asosiy bosqichda olib borildi:

1. Nazariy modellashtirish – erkin tebranish tenglamalari asosida parametrlar o'rtasidagi bog'lanish aniqlanib, tebranish jarayonining matematik modeli tuzildi.

2. Grafik tahlil – sinusoidal va susayuvchi tebranishlarning vaqt bo'yicha o'zgarish grafigi qurilib, ularning amplituda va chastota xususiyatlari solishtirildi (2-rasm).

Ushbu metodologiya tebranish jarayonini chuqur tahlil qilish, tizimdagi energiya almashinuvi va so'nish tezligini aniqlash, shuningdek, rezonans holatlarida barqarorlik sharoitlarini baholash imkonini beradi.



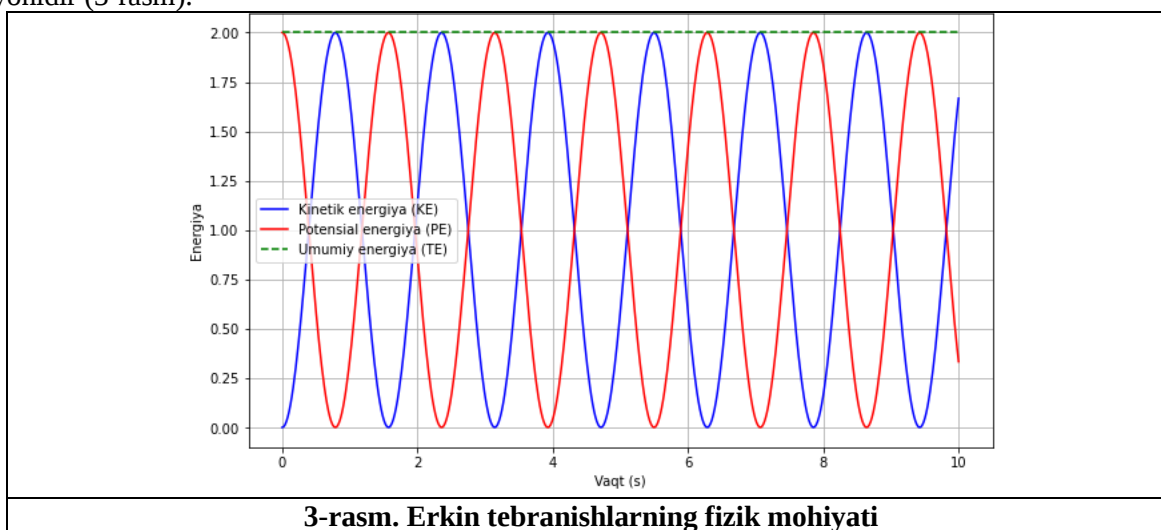
Fizik mohiyat. Erkin tebranishlarning fizik mohiyati shundan iboratki, ular tizim ichidagi energiya muvozanati asosida yuzaga keladi. Boshqacha aytganda, tizim tashqi ta'sirsiz o'z ichki energiyasidan foydalangan holda tabiiy ravishda harakatlanadi. Bu jarayonda energiya bir turdan boshqasiga uzluksiz o'tadi va doimiy almashinuv sodir bo'ladi.

Masalan, mexanik tizimlarda, erkin tebranishlarni buloq va massa orqali tasavvur qilish mumkin. Buloq siqilganda yoki cho'zilganda uning potentsial energiyasi maksimal bo'ladi, bu energiya massaning harakati boshlanishi bilan kinetik energiyaga aylanadi. Massaning harakati to'xtaganda, kinetik energiya yana buloqning potentsial energiyasiga aylanadi. Shu tarzda energiya doimiy ravishda bir turdan boshqasiga o'tadi, natijada tizimda erkin tebranishlar davom etadi.

Shunga o'xshash jarayon elektr tizimlarda ham kuzatiladi. Masalan, RLC zanjirida kondensator va induktivlik energiyasi o'rtasida almashuv sodir bo'ladi. Kondensator zaryadi maksimal bo'lgan paytda uning energiyasi eng yuqori bo'ladi, tok esa nolga teng bo'ladi. Tok maksimal bo'lganda, kondensator zaryadi nolga tushadi va uning energiyasi induktivlik energiyasiga aylanadi. Shu bilan elektr energiyasi ham mexanik tizimdagi kabi bir turdan boshqasiga uzluksiz almashadi.

Shunday qilib, erkin tebranishlar — bu energiyaning bir turdan boshqasiga o'tib, tizim ichida qayta tiklanib turish jarayoni bo'lib, u nafaqat mexanik, balki elektr va boshqa fizik tizimlarda ham bir xil prinsipda amalga oshadi. Bu tushuncha erkin tebranishlarni chuqur tahlil qilish, ularning davriyligi, amplitudasi va fazaviy holatini aniqlashda asosiy rol o'ynaydi.

Shunday qilib, tebranishlar - bu energiyaning bir turdan boshqasiga o'tib, qayta tiklanib turish jarayonidir (3-rasm).



Natijalar va ularning muhokamasi. O'tkazilgan tahlillar natijasida susayuvchi sinusoidal tebranish grafigi vaqt o'tishi bilan amplitudaning eksponentsial kamayishini aniq ko'rsatdi. Grafikdan ko'rinib turibdiki, tebranish dastlab yuqori energiyaga ega bo'lib, vaqt o'tishi bilan asta-sekin so'nadi. Bu jarayon

tizimdagi ishqalanish, qarshilik yoki energiya yo'qotish holatlari bilan izohlanadi. Dastlabki bosqichda amplituda maksimal qiymatga ega bo'ladi, biroq har bir davrda u β koeffitsientga bog'liq holda kamayib boradi. Egri chiziq ustidagi qizil punktir konvertlar - $\pm A e^{-\beta t}$ - tebranish amplitudasining chegaraviy qiymatlarini ko'rsatadi. Ular orasida joylashgan sinusoidal egri chiziq esa tebranishning davriy xarakterini aks ettiradi. Har bir davrda amplituda kamaygani sari tizimning kinetik energiyasi potensial energiyaga nisbatan qisqaradi, natijada umumiy mexanik energiya ham pasayadi. Bu holat **energiyaning so'nuvchi almashinuvi** sifatida talqin qilinadi. Susayuvchi tebranishlarning muhim xususiyati shundaki, ular vaqt o'tishi bilan muvozanat holatiga intiladi. So'nish tezligi β koeffitsiyent orqali belgilanib, tizimning fizik xususiyatlariga (masalan, ishqalanish kuchi, o'tkazuvchanlik, qarshilik) bevosita bog'liqdir. β qiymati ortgan sari tebranish tezroq so'nadi, ya'ni tizim barqaror holatga tezroq qaytadi. Aksincha, β juda kichik bo'lsa, tebranish uzoq davom etadi - bu holat amaliy tizimlarda rezonansga yaqin xatti-harakatlarni keltirib chiqarishi mumkin. Olingan natijalar mexanik va elektr tizimlarning dinamik javobini tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega. Masalan, **buloq-yuk tizimi**, **LC-kontur**, yoki **akustik rezonatorlarda** tebranish energiyasining so'nish tezligini baholash, barqarorlikni saqlash hamda rezonansni oldini olish aynan shu matematik model orqali amalga oshiriladi. Shu tarzda olingan tahliliy natijalar amaliy konstruksiyalarni loyihalashda energiya yo'qotishlarni minimallashtirish va tizimning xizmat muddatini uzaytirishga xizmat qiladi.

Xulosa. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, erkin tebranishlar har qanday fizik tizimning asosiy dinamik xususiyatlaridan biri bo'lib, u energiyaning bir shakldan boshqasiga uzluksiz almashinuvi jarayonida kechadi. Tebranishlar matematik jihatdan sinusoidal shaklda ifodalanadi va ularning asosiy parametrlari - amplituda, davr, chastota hamda faza - o'zaro muvofiq bog'langan miqdorlar hisoblanadi.

Ishqalanish yoki tashqi qarshilik mavjud bo'lgan holatlarda tebranishlar so'nuvchi xarakterga ega bo'ladi. (4)- tenglama ko'rinishidagi funksiya yordamida bu jarayon aniqlik bilan tavsiflanadi. Grafik tahlil shuni ko'rsatadiki, amplituda vaqt o'tishi bilan eksponentsial kamayadi, bu esa tizimdagi energiya yo'qotish darajasini ifodalaydi.

β koeffitsiyentning qiymati tebranishning so'nish tezligini belgilab, tizimning barqarorlik holatini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Katta β qiymati tez so'nuvchi, kichik β qiymati esa uzoq davom etuvchi tebranishlarga olib keladi. Ushbu qonuniyatlar mexanik, elektr va akustik tizimlarni loyihalashda rezonansni oldini olish, barqarorlikni ta'minlash va energiya samaradorligini oshirish uchun amaliy asos yaratadi.

Umuman olganda, erkin tebranishlarning nazariy va grafik tahlili murakkab tizimlarning dinamik javobini tushunish, ularni modellashtirish va optimallashtirishda muhim ilmiy hamda amaliy ahamiyatga ega.

ADABIYOTLAR:

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Mexanika*, Moskva: Nauka, 1976.
2. Rayleigh J.W. *The Theory of Sound*, London, 1896.
3. Yakubov A.R. *Mexanik tebranishlar asoslari*, Toshkent: O'qituvchi, 1998.
4. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Differensial tenglamalar nazariyasi*, Moskva, 1983.
5. Feynman R. *Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, 1964.
6. Thomson W. *Theory of Vibrations*, Cambridge University Press, 1887.
7. Poincaré H. *Mécanique*, Paris: Gauthier-Villars, 1892.
8. Papaleksi Y. *Elastic Systems and Vibrations*, Moscow: Nauka, 1970.
9. Meirovitch L. *Elements of Vibration Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1975.
10. Den Hartog J.P. *Mechanical Vibrations*, London: McGraw-Hill, 1956.
11. Clough R.W., Penzien J. *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
12. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*, Pearson, 2004.
13. Inman D.J. *Engineering Vibrations*, Prentice Hall, 2001.
14. Thomson W.T., Dahleh M.D. *Theory of Vibration with Applications*, Prentice Hall, 1998.
15. Graff K.F. *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, 197

CaMoO₄ KRISTALLARIDA AKUSTIK TO‘LQINLARDA KOLLINEAR YORUG‘LIK DIFRAKSIYASI

Axmedjanov Farxad Rashidovich,

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti

“Ko‘p fazali tizimlar issiqlik fizikasi” laboratoriya mudiri,

Boltabaev Azizbek Farxadovich,

Respublika radioaktiv chiqindilarni ko‘mish

punkti davlat unitar korxonasi, direktori,

Elboyeva Moxinur Imomnazar qizi

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti Katta ilmiy xodimi

elboyevamoxinur1990@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda kalsiy molibdati (CaMoO₄) kristallarida yorug‘likning ko‘ndalang akustik to‘lqinlarda kollinear Bragg difraktsiyasi o‘rganildi. Mustaqil fotoelastiklik tenzori komponentlari modifikatsiyalangan Dikson usuli yordamida aniqlanib, ular asosida samarali fotoelastik doimiyi hamda akustooptik sifat koeffitsienti M_2 ning turli geometriyali difraktsiyalari hisoblandi. Natijalarga ko‘ra, CaMoO₄ kristallarining ko‘ndalang to‘lqinlar uchun M_2 ning qiymati PbMoO₄ va LiNbO₃ kristallariga nisbatan yuqori ekanligi aniqlangan. Maksimal M_2 qiymati ($12.1 \times 10^{-15} \text{ s}^3/\text{kg}$) 120° va 210° yo‘nalishlarda kuzatildi. Olingan natijalar CaMoO₄ kristallarining akustooptik filtr va modulyatorlarda samaradorligini oshirish imkonini beradi.

Kalit so‘zlar: kalsiy molibdati, akustooptik effekt, Bragg difraktsiyasi, fotoelastiklik, kollinear difraktsiya.

КОЛЛИНЕАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ СВЕТА НА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В КРИСТАЛЛАХ CaMoO₄

Аннотация. В работе исследована коллинеарная Брэгговская дифракция света на **поперечных акустических волнах** в кристаллах CaMoO₄. Независимые компоненты тензора фотоупругости были определены модифицированным методом Диксона. На их основе рассчитаны эффективная фотоупругая постоянная и акустооптический коэффициент качества M_2 для различных геометрий дифракции. Показано, что для поперечных волн значение M_2 в кристаллах CaMoO₄ значительно выше, чем у PbMoO₄ и LiNbO₃. Максимум M_2 ($12.1 \times 10^{-15} \text{ s}^3/\text{kg}$) наблюдается при углах 120° и 210° . Эти результаты подтверждают, что CaMoO₄ является перспективным материалом для акустооптических фильтров и модуляторов.

Ключевые слова: молибдат кальция, акустооптический эффект, Брэгговская дифракция, фотоупругость, коллинеарная дифракция.

COLLINEAR DIFFRACTION OF LIGHT ON ACOUSTIC WAVES IN CaMoO₄ CRYSTALS

Abstract. The collinear Bragg diffraction of light by transverse acoustic waves in calcium molybdate (CaMoO₄) crystals has been investigated. Independent components of the photoelastic tensor were determined using the modified Dixon method. Based on these values, the effective photoelastic constant and the acousto-optic figure of merit (M_2) were calculated for different diffraction geometries. It was shown that for transverse waves M_2 value in CaMoO₄ crystals is a significantly higher compared to PbMoO₄ and LiNbO₃. The maximum M_2 ($12.1 \times 10^{-15} \text{ s}^3/\text{kg}$) is observed at 120° and 210° . These results confirm that CaMoO₄ is a promising material for acousto-optic filters and modulators.

Key words: calcium molybdate, acousto-optic effect, Bragg diffraction, photoelasticity, collinear diffraction.

Kirish. Kalsiy molibdati (CaMoO₄) sheyelit turkumiga mansub tetragonal tuzilishga ega bo‘lib, yuqori optik shaffoflik, past akustik so‘nuvchanlik, mexanik barqarorlik va ekologik xavfsizlik bilan ajralib turadi

[1–4]. Bu xususiyatlar uni akustooptik qurilmalar filtrlash, modulyatsiya, lazer chastota stabilizatsiyasi va spektral analizatorlar uchun muhim funksional materialga aylantiradi [5–6].

Akustooptik effekt fotoelastiklik hodisasi bilan bog‘liq bo‘lib, elastik to‘lqinlar tomonidan keltirilgan davriy sinish ko‘rsatkichi modulyatsiyasi natijasida yorug‘likning difraksiyalanishiga olib keladi. Kollinear Bragg difraksiyasi holatida optik va akustik to‘lqinlar bir yo‘nalishda tarqaladi, bu faza sinxronizatsiyasining eng qulay sharoitini yaratadi [7–8]. Ushbu jarayonning samaradorligi fotoelastiklik tenzori komponentlari, akustik to‘lqin tezligi, zichlik va optik sindirish ko‘rsatkichiga bog‘liq bo‘lib, ular M_2 akustooptik sifat koeffitsienti orqali baholanadi [9–10].

Avvalgi ishlar CaMoO_4 kristalining yuqori fotoelastik xususiyatlarga ega ekanligini ko‘rsatgan bo‘lsa-da, ayniqsa *ko‘ndalang* akustik to‘lqinlar uchun *kollinear difraksiyaning* burchakka bog‘liqligi hali yetarlicha o‘rganilmagan [3, 11]. Shu bois ushbu tadqiqot CaMoO_4 kristallarining kollinear Bragg difraksiyasi mexanizmlarini chuqur tahlil qilishga, samarali fotoelastik konstantalar va M_2 koeffitsientining burchakka bog‘liqligini aniqlashga qaratilgan. Taqqoslash uchun keng qo‘llaniladigan PbMoO_4 va LiNbO_3 kristallari ham tekshirildi [12–15].

Tadqiqot metodologiyasi. Tajribalarda He–Ne lazer ($\lambda=632.8$ nm) nuri yordamida yorug‘likning akustik to‘lqinlarga Bragg difraksiyasi kuzatildi. Akustik to‘lqinlar kvarts transduserlar orqali 10–30 MHz chastotalarda qo‘zg‘atildi. Effektiv fotoelastik konstantalar modifikatsiyalangan Dikson usuli bilan aniqlanib, quyidagi ifoda asosida hisoblandi [4]:

$$p_{\text{eff}} = \frac{n^3 V}{2\rho\lambda} \sqrt{\frac{I_x}{I_s}} \quad (1)$$

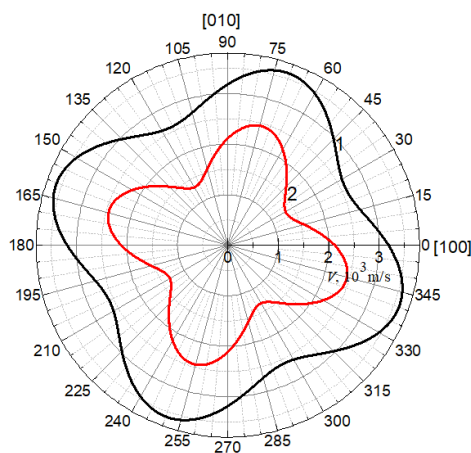
bu yerda n – sinish ko‘rsatkichi, V – akustik to‘lqin tezligi, ρ – zichlik, I_x va I_s tadqiqot namunasi va etalon uchun difraksiyon intensivliklardir.

Olingan tezliklar va p_{eff} qiymatlaridan foydalanib, akustooptik sifat koeffitsienti quyidagi formula orqali topildi [5]:

$$M_2 = \frac{n^6 p_{\text{eff}}^2}{\rho V^3} \quad (2)$$

Ushbu metodologiya orqali CaMoO_4 , PbMoO_4 va LiNbO_3 kristallarining ko‘ndalang to‘lqinlar uchun akustooptik xossalari aniqlandi.

Natijalar va muhokama. Kristallarda akustik to‘lqinlarning faza tezligi ularning elastik konstantalari va simmetriyasiga bog‘liq bo‘lib, anizotrop materiallarda bu tezlik to‘lqin vektorining yo‘nalishiga qarab sezilarli o‘zgaradi. CaMoO_4 va PbMoO_4 kabi tetragonal simmetriyaga ega kristallarda kvazi-ko‘ndalang to‘lqinlar uchun faza tezliklari Kristoffel tenglamalari asosida hisoblanadi va bu qiymatlar akustooptik samaradorlikka bevosita ta‘sir ko‘rsatadi. Yo‘nalish bo‘yicha faza tezligining kamayishi M_2 koeffitsientining ortishiga olib keladi, chunki M_2 akustik tezlikning uchinchi darajasiga teskari proporsionaldir. (001) tekislikdagi CaMoO_4 va PbMoO_4 kristallarining kvazi-ko‘ndalang to‘lqinlar faza tezliklarining burchakka bog‘liqligi 1-rasmda keltirilgan.



a.

1-rasm. CaMoO_4 (1) va PbMoO_4 (2) kristallarining (001) tekislikda kvazi-ko‘ndalang akustik to‘lqinlar faza tezligining akustik to‘lqin vektoriga bog‘liqligi

Grafik faza tezliklarining burchak bo‘yicha anizotropligini yaqqol aks ettiradi. Har ikki kristalda faza tezligi yo‘nalish o‘zgarishi bilan sezilarli darajada farq qiladi, biroq CaMoO_4 kristalida bu o‘zgarish nisbatan

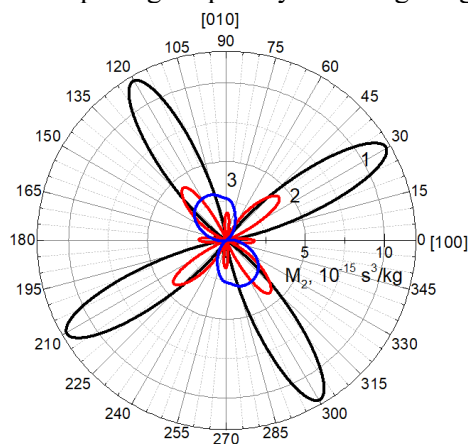
barqaror va silliq xarakterga ega. PbMoO_4 kristalida esa elastik modullarning og'ir metall komponentlari sababli faza tezligining burchakka sezgirliigi kuchliroq. Grafikdan ko'rinadiki, CaMoO_4 kristali ko'plab yo'nalishlarda PbMoO_4 ga nisbatan yuqori faza tezligiga ega bo'lib, bu akustooptik jarayonda qulay dinamik sharoitlarni yaratadi. Faza tezligining burchakka bog'liq bu farqlari M_2 ko'effitsientining maksimal qiymatlarining ham aynan ma'lum yo'nalishlarda (120° va 210°) kuzatilishiga sabab bo'ladi. Zero, faza tezligi qanchalik past bo'lsa, akustooptik o'zaro ta'sir uchun shunchalik qulay bo'ladi, chunki M_2 ko'effitsienti tezlikning uchinchi darajasiga teskari proporsional. Shu bois CaMoO_4 ning (001) tekislikdagi faza tezliklari taqsimoti materialning yuqori akustooptik samaradorligini tushuntiruvchi asosiy fizik omillardan biridir. 1- jadval uchta material orasida to'liq va kompleks taqqoslash imkonini beradi.

1-jadval.

Kristallarning akustooptik parametrlari

Kristall	N	ρ (kg/m ³)	V (m/s)	p_{eff}	$M_{2,max}$ ($\times 10^{-15}$ s ³ /kg)
CaMoO_4 (CMO)	1.98	4250	2850	0.17	12.12
PbMoO_4 (PMO)	2.20	6950	2700	0.12	4.43
LiNbO_3	2.23	4650	3700	0.10	3.07

Jadvalda CaMoO_4 , PbMoO_4 va LiNbO_3 kristallarining asosiy akustooptik parametrlarining taqqoslanishi keltirilgan bo'lib, ular materiallarning difraksion samaradorligini aniqlovchi asosiy omillardan hisoblanadi. CaMoO_4 kristalining nisbatan past sindirish ko'rsatkichi ($n = 1.98$) va ayniqsa past zichligi ($\rho = 4250$ kg/m³) uning akustooptik samaradorligini oshiradi, chunki M_2 ko'effitsienti zichlik va akustik tezlikning kubiga teskari proporsionaldir. CaMoO_4 ning ko'ndalang akustik to'lqin tezligi ($V=2850$ m/s) ham boshqa kristallarga nisbatan past bo'lib, bu M_2 ning ortishiga yana bir omil bo'ladi. Eng muhim parametr samarali fotoelastik konstantaning ($p_{eff} = 0.17$) PbMoO_4 va LiNbO_3 ga qaraganda yuqori bo'lishi CaMoO_4 ning optik modulyatsiyaga javob berish xususiyatini kuchaytiradi. Tahlil shuni ko'rsatadiki, CaMoO_4 akustooptik qurilmalar uchun eng qulay parametrlar kombinatsiyasiga ega materialdir. Bu jadval akustooptik modulyatorlar, filtrlash tizimlari, spektral analizatorlar va lazerlar uchun material tanlashda asosiy ilmiy manba sifatida xizmat qilishi mumkin. CaMoO_4 , PbMoO_4 va LiNbO_3 kristallarida akustooptik sifat ko'effitsientining (001) tekislikda akustik to'lqinning tarqalish yo'nalishiga bog'liqligi 2-rasmda keltirilgan.



2-rasm. CaMoO_4 (1), PbMoO_4 (2) va LiNbO_3 (3) kristallarida M_2 ko'effitsiyentining (001) tekislikda akustik to'lqinning tarqalish yo'nalishiga bog'liqligi

Grafikdan ko'rinib turibdiki, M_2 ning qiymati CaMoO_4 kristali uchun 120° va 210° burchaklarda maksimumga ega bo'lib, qiymat 12.1×10^{-15} s³/kg ga yetadi. Bu PbMoO_4 va LiNbO_3 kristallaridagi mos ravishda 4.4 va 3.1×10^{-15} s³/kg qiymatlardan mos ravishda 2.7 va 4 baravar yuqoridir. Bu yo'nalishlarda optik-akustik faza uyg'unlashuvi maksimal bo'lib, kollinear Bragg difraksiyasi uchun optimal geometriya ta'minlanadi. Bu natija CaMoO_4 kristallarining kollinear Bragg difraksiyasi sharoitida optik va akustik to'lqinlar energiya almashinuvi eng samarali yo'nalishlarga ega ekanini ko'rsatadi. Shuningdek, uning past zichligi (4250 kg/m³) tufayli energiya o'tish samaradorligi yuqori bo'ladi, bu esa akustooptik filtrlarda sezilarli afzallik beradi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda CaMoO_4 kristallarida ko'ndalang akustik to'lqinlar bilan yorug'likning kollinear Bragg difraksiyasi o'rganildi. Modifikatsiyalangan Dikson usuli yordamida fotoelastik tenzor komponentlari aniqlanib, samarali fotoelastik konstantalar va akustooptik sifat koeffitsiyenti M_2 hisoblandi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, CaMoO_4 kristallarida M_2 PbMoO_4 va LiNbO_3 ga nisbatan yuqori bo'lib, maksimal qiymat 120° va 210° yo'nalishlarda kuzatildi. Faza tezligining barqaror taqsimoti, past zichlik va yuqori fotoelastik konstantalar CaMoO_4 ning akustooptik jarayonlarda yuqori samaradorlik ko'rsatishiga imkon beradi. Shu bilan birga, u akustooptik modulyatorlar, filtrlash tizimlari va lazerlarda qo'llash uchun istiqbolli material sifatida ajralib turadi. Olingan natijalar kollinear Bragg difraksiyasi va akustooptik samaradorlik o'rtasidagi bog'liqlikni ilmiy jihatdan tasdiqlaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Dixon R.W., Cohen M.G. *A new technique for measuring magnitudes of photoelastic tensors...* Appl. Phys. Lett., 1966.
2. Venturini E.L., Spencer E.G., Ballman A.A. *Elasto-optic properties of $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$...* J. Appl. Phys., 1969.
3. Akhmedzhanov F.R., Elboeva M.I. *Collinear Diffraction of Light in CaMoO_4 Crystals*, 2024.
4. Yao X., Zhang W. *Acousto-optic properties of CaMoO_4 and PbMoO_4* , Optical Materials, 2020.
5. Yariv A. *Optical Electronics in Modern Communications*, OUP, 2019.
6. Boyd R.W. *Nonlinear Optics*, Academic Press, 2020.
7. Dmitriev V. et al. *Handbook of Nonlinear Optical Crystals*, Springer, 2021.
8. Smith J. et al. *Acousto-Optic Devices*, J. Appl. Phys.
9. Chang R. *Advanced Acousto-Optic Theory*, Physics Reports, 2018.
10. Kolbus R., et al. *Elastic Wave Propagation in Anisotropic Crystals*, Optics Express, 2017.
11. Müller M. *Sheelite-type Crystals for Modern Optics*, Crystal Growth Reports, 2022.
12. Lin S., et al. *Photoelastic characterization of tetragonal oxides*, Optics Letters, 2019.
13. Kuroda T. *Bragg diffraction in acousto-optic systems*, JOSA B, 2021.
14. Pavlov P. *Elastic and acoustic properties of Mo-based crystals*, J. Crystal Phys., 2020.
15. Huang Y., et al. *Comparative acousto-optic study of LiNbO_3 and Mo-based crystals*, Optical Engineering, 2023.

URAN VA PLUTONIY IZOTOPLARINI BOYITILISHI VA ULARNI YADRO
REAKTORLARIDA QO‘LLANILISHI

Eshbo‘riyev Rashid,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro texnologiyalari instituti Yadro fizikasi va
astronomiya kafedrası professori
eshburiyev0082@gmail.com

Ubaydullayeva Muhayyo Abdurasul qizi,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro texnologiyalari instituti Yadro fizikasi va
astronomiya kafedrası magistranti
ubaydullayevamuhayyo80@gmail.com

Fayzullayeva Mukarram Lutfullo qizi,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro texnologiyalari instituti Yadro fizikasi va
astronomiya kafedrası stajyor-tadqiqotchisi
mukarramfayzullayeva@gmail.com

Abdusamadova Dilfuza Iskandar qizi,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro texnologiyalari instituti Yadro fizikasi va
astronomiya kafedrası magistranti
dilfuzaabdusamadova28@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur ishda uran izotoplarini boyitilish usullari va texnologiyalari chuqur tahlil qilingan va bu usullarning bir-biridan ustunligi hamda aniqlik darajasi ko‘rsatilgan. Uran-235 izotopini boyitishning ayniqsa gaz-diffuziya, lazer va kimyoviy usullari to‘liq tahlil qilingan.

Shuningdek, uran-235 izotopini matematik tenglamalardan foydalanib boyitishning bir bosqichli usuli taklif etilgan, bu bo‘yicha matematik tenglamalar sistemasi va uning yechimlari keltirilgan. Uran-235 izotopini boyitilishini matematik tenglamalar yordamida bir bosqichli usuli bilan hisoblangan qiymati boshqa usullar bilan olingan qiymatlariga mos kelishi ko‘rsatildi.

Kalit so‘zlar: ajratish koeffitsiyenti, atom reaktori, boyitilgan uran, gaz diffuziya, izotop almashinuv, izotop boyitish, izotop ajratish, kimyoviy usuli, lazer usuli, magnit maydoni, matematik modellash, matematik tenglama, massa balansi, neytron, tabiiy uran, uran izotoplari, uran-233, uran-235, uran-238, yadro yoqilg‘isi.

ENRICHMENT OF URANIUM AND PLUTONIUM ISOTOPES AND THEIR APPLICATION
IN NUCLEAR REACTORS

Abstract. In this work, the methods and technologies for uranium isotope enrichment have been thoroughly analyzed, highlighting their relative advantages and levels of precision. The enrichment methods of the Uranium-235 isotope, particularly the gas diffusion and chemical methods, are presented in detail.

Furthermore, a single-stage method for enriching the U-235 isotope based on mathematical equations has been proposed. The system of mathematical equations and their solutions are provided. It has been demonstrated that the calculated values obtained through the single-stage mathematical method for Uranium-235 enrichment correspond closely with the values derived from other established methods.

Keywords: chemical method, diffusion coefficient, enriched uranium, gas diffusion method, isotope enrichment, isotope exchange, isotope separation technology, laser method, magnetic field, mathematical equations, mathematical modeling, mass balance, natural uranium, neutron, nuclear fuel, uranium isotopes, uranium-233, uranium-235, uranium-238.

ОБОГАЩЕНИЕ ИЗОТОПОВ УРАНА И ПЛУТОНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В
ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

Аннотация. В данной работе проведён глубокий анализ методов и технологий обогащения изотопов урана, показаны их преимущества и степень точности. Особое внимание уделено методам обогащения изотопа урана-235, в частности газодиффузионному и химическому методам, которые изложены подробно.

Кроме того, предложен одноступенчатый метод обогащения изотопа уран-235 с использованием математических уравнений. Приведена система математических уравнений и их решения. Показано, что рассчитанные значения, полученные с помощью одноступенчатого математического метода обогащения урана-235, хорошо согласуются со значениями, полученными другими методами.

Ключевые слова: газодиффузионный метод, изотопное обогащение, изотопный обмен, изотопы урана, химический метод, коэффициент разделения, лазерный метод, магнитное поле, математическое моделирование, математические уравнения, массовый баланс, нейтрон, обогащённый уран, природный уран, разделение изотопов, ядерное топливо, уран-233, уран-235, уран-238.

Kirish. Yadro yoqilg'isi deb-neutronlar ta'sirida bo'linadigan, tarkibida nuklidlar mavjud bo'lgan yadro materiallari (YaM) ga aytiladi. Bo'linuvchi nuklidlarga:

-Uran va toriyning tabiiy izotoplari (^{238}U , ^{232}Th , ^{235}U , ^{234}U);

-Plutoniyning sun'iy izotoplari (^{239}Pu , ^{240}Pu , ^{241}Pu). ^{239}Pu izotopi ^{238}U izotopining tez neutronni qamrashidan va ketma-ket β yemirilishdan hosil bo'ladi).

-Transuran elementlar (Np , Am , Cm , Bk , Cf) izotoplari;

-Uraning ^{233}U sun'iy izotopi. Bu izotop ^{232}Th izotopining tez neutronni qamrab 2 marta β^- yemirilishidan hosil qilinadi [1].

Asosiy qism. Ma'lumki tabiiy uran tarkibida uranning 3 ta izotopi uchraydi, bu izotoplarga:

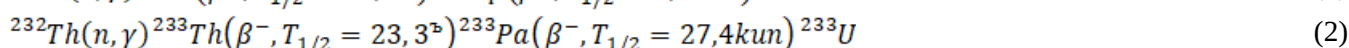
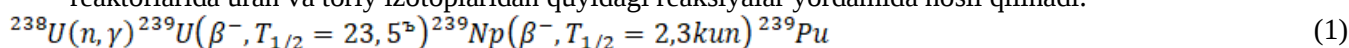
$$^{238}\text{U} - 99,25\% \left(T_{\frac{1}{2}} = 4,5 \cdot 10^9 \text{yil} \right),$$

$$^{235}\text{U} - 0,71\% \left(T_{\frac{1}{2}} = 0,7 \cdot 10^9 \text{yil} \right)$$

$$^{234}\text{U} - 0,0056\% \left(T_{\frac{1}{2}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{yil} \right)$$

kiradi.

Ammo yadro yoqilg'isi sifatida qo'llanadigan ^{233}U va plutoniyning -239,240 va 241 izotoplari yadro reaktorlarida uran va toriy izotoplaridan quyidagi reaksiyalar yordamida hosil qilinadi:



^{239}Pu va ^{233}U izotoplari yadro reaktorlarida yoqilg'i sifatida qo'llaniladi va sun'iy izotoplar hisoblanadi. ^{235}U , ^{239}Pu va ^{233}U izotoplari issiq neytronlar ($\epsilon = 0,025\text{eV}$) ta'sirida bo'linadi. ^{238}U va ^{232}Th izotoplari tabiiy yadro materiali (YaM) hisoblanadi va bu izotoplar tez neytronlar ($\epsilon \approx 1 - 10\text{MeV}$) ta'sirida parchalanadi va to'g'ridan-to'g'ri yadro yoqilg'isi sifatida qo'llanilmaydi, ya'ni yadro xom-ashyosi bo'lib hisoblanadi.

Hozirda yadro energetikasi asosan boyitilgan uran izotoplariga asoslanadi. Boyitilgan uran- ^{235}U bo'linuvchi izotopining miqdori tabiiy urandagi miqdoridan (0,71%) yuqori bo'lgan uran tushuniladi. Hozirgi zamon AESlarining aksariyatini, tarkibida ^{235}U izotopli past boyitilgan (2-5%) uranoksidli yoqilg'isidan foydalanadigan yengil suvli, issiq reaktorlar tashkil qiladi.

Uranni izotop boyitishning bir qator, ko'plab yadro texnologiyalari mavjud. Bularning barchasining asosida ^{238}U va ^{235}U izotoplarining massalari farqini aniqlashga asoslangan. Bu massalar farqi (3 m.a.b) magnit maydonida (elektromagnit usul) ionlashgan atomlarning har xil burchaklarga og'ishiga; atomlarning g'ovak to'siqlar (gaz diffuziyali usul) orqali o'tish tezliklari farqi; markazdan qochma kuchlar maydonida atomlar (molekulalarning) har xil fazoviy taqsimlanishi (gazli sentrafuga usuli); kichik egrilik radiusli

(ajratuvchi sonli usuli) to'siqni aylanib o'tishda atom (molekula)lar turli harakat trayektoriyalariga ega bo'lishiga asoslangan.

Uran izotoplarini ajratishni miqdoriy baholash usulini birinchi marta ingliz fiziklari R. Payerls va P. Diraklar taklif etishgan [2]. Ular izotop birikmalarini xarakterlovchi U funksiyani kiritgan. Bu funksiya birikma miqdori T ni faqat hosil qilingan izotop miqdoridan bog'liq bo'lgan biror o'lhamsiz funksiya $V(C_T)$ ko'paytmasi ko'rinishida ifodalagan,

$$U_T = T \cdot V(C_T)$$

va $V(C_T)$ –funksiyani izotoplarni ajratish potentsiali deb atagan.

Olimlar bu potentsial yordamida birlashgan va boyitilgan uran miqdorlarini aniqlagan.

Uranni boyitishning eng asosiy usullaridan biri gaz diffuziya usulidir (GD). Bu usulda issiqlik harakati hisobidan gaz birikmasida massalar ko'chishi jarayoni tushuniladi. GD usuli yordamida uranni boyitish og'ir va yengilroq molekulalarning issiqlik harakati tezliklari farqi hamda yengilroq molekulalarning yupqa g'ovak to'siqchadan o'tish qobiliyatiga asoslangan.

Bir xil temperaturali ikki xil gaz aralashmasida yengil va og'ir molekulalarning kinetik energiyalari ham bir xil,

$$m_e \vartheta_e^2 = m_0 \vartheta_0^2 \quad (1)$$

ya'ni, yengil molekulaning o'rtacha tezligi og'ir molekulanikidan kattaroq,

$$\vartheta_e = \vartheta_0 \left(\frac{m_0}{m_e} \right)^{1/2} \quad (2)$$

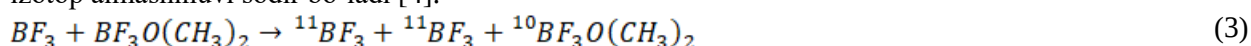
g'ovak to'siq orqali o'tuvchi ikkita gaz aralashmalarining ideal ajratish koeffitsiyenti:

$$\beta = \frac{\vartheta_e}{\vartheta_0} = \left(\frac{m_0}{m_e} \right)^{1/2} \approx 1 + \Delta m / 2m_e \quad (3)$$

Δm –og'ir va yengil molekulalar massalari farqi. Geksoftorid uran $^{235}\text{UF}_6$ va $^{238}\text{UF}_6$ uchun massalar farqi mos ravishda $m_e = 349$, $m_0 = 352$ va ajratish koeffitsiyenti hamda boyitilishi quyidagiga teng: $\beta = 0,043$; $A = 1 + \beta$, $A = 1 + 0,043$, $A_0 = 0,043\% = 4,3\%$. Gaz diffuziya usuli uran izotoplarini ajratish va boyitishning asosiy usuli hisoblanadi [3].

Bundan tashqari uranni izotop boyitilishining lazer usuli ham mavjud bo'lib bu usul ikki ko'rinishda ro'y berishi aniqlangan [3]. Birinchi ishchi jism-uranning atomar bug'i, ikkinchi-ishchi jism-molekulyar gaz ko'rinishidagi geksaftorid uran UF_6 dan iborat. Atomar ajratish lazer nuri yordamida ^{235}U atomlarining tanlab uyg'onishiga asoslangan. So'ngra uyg'ongan atomlar lazer nuri bilan nurlantirilib tanlab ionlashadi va elektromagnit usuli bilan ^{238}U atomlari elektr neytral ko'rinishda uyg'onmagan birikmadan ajratib olinadi. ^{238}U va ^{235}U izotoplarini molekulyar ajratish $^{235}\text{UF}_6$ (geksoftorid uran) molekulalarini selektiv uyg'onishiga asoslangan. Jarayonning birinchi bosqichida $^{235}\text{UF}_6$ molekulalari lazer nuri yordamida selektiv uyg'onadi, ikkinchi bosqichda esa $^{235}\text{UF}_6$ ning uyg'ongan molekulalari lazer nurlanishi ta'sirida selektiv dissotsiatsiyanadi va $^{235}\text{UF}_6$ qattiq kukunini hosil qiladi.

Har xil kimyoviy birikmalarda izotoplarning turli mustahkamligiga asoslangan kimyoviy boyitish usuli ham mavjud. Kimyoviy usulda bitta elementning ikkita har xil kimyoviy birikmalari o'rtasida izotop almashinuv yuz beradi. Alohida izotoplar har holda mustahkamroq birikmalarda to'planadi. Bunga tabiiy borning ^{10}B izotopi bilan boyitilishi misol bo'la oladi. Tabiiy bor-20% ^{10}B izotopidan va 80% ^{11}B izotopidan iborat. Ammo bu izotoplarning issiq neytronlarni qamrash kesimi bir-biridan keskin farq qiladi: ^{11}B izotopi uchun qamrash kesimi 0,005 barn, ^{10}B izotopi uchun esa 3837 barn. Shuning uchun ham yadro reaktorlarini boshqarishda foydalaniladigan borni ^{10}B izotopi bilan boyitish maqsadga muvofiq. BF_3 birikmasini dimetilefirat triflorid bor- $\text{BF}_3\text{O}(\text{H}_3)_2$ bilan aralashganda organik birikmada ^{10}B to'planishi bilan izotop almashinuvi sodir bo'ladi [4]:



Turli valentli uran birikmalarida ham xuddi shunday izotop almashinuv reaksiyasini hosil qilish mumkin. Magnit maydonida ionlar maydon kuch chiziqlari bo'ylab spiral bo'yicha harakatlanadi. ^{235}U va ^{238}U ionlari ma'lum radiusli orbita bo'ylab harakatlanishi natijasida fazoviy ajraladi. Bu esa ^{235}U va ^{238}U izotoplarini alohida-alohida to'plash imkoniyatini beradi. Umumiy izotoplarni boyitish texnologiyasining

sifati asosan ikkita parametrlar bilan baholanadi: effektivlik va energiya sig'imi. Boyituvchi texnologiyaning effektivligi jarayonning birinchi bosqichida birikmada zarur izotopning miqdorini oshirish qobiliyatidir. Boyituvchi texnologiyaning energiya sig'imi esa bir marta ajratish uchun sarflangan elektr energiyasi bilan aniqlanadi.

Biz bu ishda izotoplarni bir-biridan ajratishning matematik usullaridan va tenglamalaridan foydalanamiz. Buning uchun uran ^{235}U izotopini boyitishning prinsipial sxemasini qaraymiz.

Uran misolida dastlabki material massasini M va boyitilishini $C_M(^{235}\text{U})$ deb belgilaymiz. Ajratuvchi bosqich tizimidan so'ng ikkita yangi materialni hosil qilamiz. N miqdorli boyitilganligi $C_N(^{235}\text{U})$ bo'lgan uran va K miqdorli boyitilganligi $C_K(^{235}\text{U})$ bo'lgan birlashgan uran. Uran izotoplarini ajratishning matematik tenglamasini yozamiz: Asosi $M - C_M(^{235}\text{U})$

→Ajratuvchi bosqichlar tizimi

→Birlashgan uran- K (xom ashyo), $C_K(^{235}\text{U})$ to'plam;

→Boyitilgan uran- N (mahsulot), $C_N(^{235}\text{U})$ →yadro yoqilg'isi. Bu tizimlarni ikkita yadro materialini hisobga olgan matematik tenglama bilan ifodalash mumkin:

1) Uranning massa balansi→ $M = N + K$

2) ^{235}U izotopining massa balansi→

$$C_M \cdot M = C_N \cdot N + C_K \cdot K \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin va natijada uchta noma'lumdan (M, N, K) iborat ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar sistemalarini N ga bo'lib ikkita noma'lumdan $(\frac{M}{N}$ va $\frac{K}{N})$ iborat tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin.

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \frac{M}{N} &= 1 + \frac{K}{N} \\ 2) \quad C_M \cdot \frac{M}{N} &= C_N + C_K \cdot \frac{K}{N} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

bu tenglamalar sistemasini yechib quyidagi koeffitsiyentlarni hosil qilamiz:

a) birlik mahsulotda tabiiy uran sarfi:

$$\frac{M}{N} = \frac{C_N - C_K}{C_M - C_K} \quad (6)$$

b) birlik mahsulotda birlashgan uran hosil bo'lishi,

$$\frac{K}{N} = \frac{C_N - C_M}{C_M - C_K} \quad (7)$$

Umumiy holda (6) va (7) tenglamalarni quyidagicha yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{N} &= \frac{C_N(^{235}\text{U}) - C_K(^{235}\text{U})}{C_M(^{235}\text{U}) - C_K(^{235}\text{U})} \\ \frac{K}{N} &= \frac{C_N(^{235}\text{U}) - C_M(^{235}\text{U})}{C_M(^{235}\text{U}) - C_K(^{235}\text{U})} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

v) tabiiy uranning bo'linish oqimi-F

$M = N + K = F \cdot M + (1 - F) \cdot M$, bundan

$$F = \frac{N}{M} = \frac{C_M(^{235}\text{U}) - C_K(^{235}\text{U})}{C_N(^{235}\text{U}) - C_K(^{235}\text{U})} \quad (8)$$

(8) ifoda tabiiy uranning bo'linish oqimini xarakterlaydi.

1) Boyitilish jarayonni xarakteristikasi sifatida bir bosqichli ajratishda birikish yoki boyitilishni xarakterlovchi ajratish koeffitsiyentidan foydalaniladi:

2) Boyitilgan qoldiq bo'yicha ajratish koeffitsiyenti

$$\beta = \frac{D}{D} = \frac{C_N / (1 - C_N(^{235}\text{U}))}{C_M(^{235}\text{U}) / (1 - C_M(^{235}\text{U}))} \quad (9)$$

g) birlashgan qoldiq bo'yicha ajratish koeffitsiyenti;

$$\gamma = \frac{D'}{D''} = \frac{C_M(^{235}\text{U}) / (1 - C_M(^{235}\text{U}))}{C_K(^{235}\text{U}) / (1 - C_K(^{235}\text{U}))} \quad (10)$$

Boyitilish koeffitsiyenti:

$$A = \beta - 1 \quad (11)$$

birlashish koeffitsiyenti:

$$A' = \gamma - 1 \quad (12)$$

bir bosqichda to'liq boyitilish koeffitsiyenti:

$$A_0 = A + A' \quad (13)$$

Yuqorida (9) va (10) tenglamlarni hisobga olsak, to'liq boyitilish koeffitsiyenti uran-235 izotopi uchun turli qiymatlarni qabul qiladi.

Masalan: $A_0 = 0,02(2\%)$, $A_0 = 0,04(4\%)$ va hokazo.

Demak dastlabki uran izotopini M va ajratilgan, boyitilgan uran miqdori N va birlashgan uran miqdorlari K ni aniqlab (7-10) formulalar yordamida ^{235}U izotopini boyitilish darajasini aniqlash mumkin.

Ko'plab yadroviy reaktorlarda, jumladan VVER-1000, RBMK-1000 energetik reaktorlarda (2-4) % boyitilgan uran-235 izotopi qo'llaniladi va bu boyitilish darajasi issiq reaktorlarda zanjir reaksiyasini borishini ta'minlaydi.

XULOSA. Biz [5-6] maqolalarda energetik reaktorlarning (3-5) % boyitilgan $^{235}_{92}\text{UO}_2$ -uran oksidida ishlashini aytgan edik. Mazkur ishda uran-235 izotopining boyitilish darajasi [7] da kimyoviy reaksiyalar natijasida hosil qilingan qiymatlariga karralidir.

Shunday qilib yuqorida keltirilgan matematik tenglamalardan foydalanib ^{235}U izotopini yuqori aniqlikda bir bosqichli boyitish koeffitsiyentini aniqlash mumkin. Olingan natijalar boshqa ko'plab usullar yordamida olingan qiymatlarga to'liq mos keladi.

ADABIYOTLAR:

1. Бекман И.Н. Ядерная физика. Учебное пособие, Москва, МГУ, 2010, 520 с.
2. Дяченко А.Н., Петлик И.В. Передерин А.Т. Введение в технологию ядерного топлива. Учебное пособие. Издательство Томского политехнического университета, 2023, 160 с.
3. АПСЭ В.А., Хмелев А.Н. Ядерные технологии, учебная пособия, Москва, 2008, 127 с.
4. Громов Б.В. Введение в химическую технологию урана / Б.В. Громов.-Москва: Атомиздат, 2008,-336 с.
5. Eshbo'riyev Rashid Majidovich, Abdusamadova Dilfuza Iskandar qizi, Sharipov Dilshod Elmurod o'g'li, Fayzullayeva Mukarram Lutfullo qizi. Yadro energiyasini hosil qilish muammolari. Buxoro davlat universiteti Ilmiy axboroti. 6-son. 2025-yil. 159-164 betlar.
6. D.I. Abdusamadova, R.M. Eshburiyev, M. Fayzullaeva, D. Sharipov. The Advantages Of Nuclear Energy Over Other Energy Sources. Texas Journal of Engineering and Technology ISSN NO: 2770-4491 <https://zienjournals.com> May 2025. Peer Reviewed International Journal Volume 44. 8-12 pages.
7. Rashid Eshbo'riyev, Muhayyo Ubaydullaeva, Mukarram Fayzullaeva, Dilfuza Abdusamadova. Investigation of nuclear fuel characteristics based on uranium isotopes. ISSN: 2776-0979, Volume 6, Issue 10, October- 2025. Web of scientist: international scientific research journal. 28-38 pages.

**KUBIK SIMMETRIYALI KRISTALLARINING AKUSTIK XOSSALARI
ANIZOTROPIYASI VA RELAKSATSIYA VAQTLARI**

Axmedjanov Farxad Rashidovich,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti*

akhmedzhanov.f@gmail.com

Maharov Nodir Mamadiyor o‘g‘li,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi,
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti*

maxarovnodir217@gmail.com

Avdievich Vladimir Nikolaevich,

*O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi
Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti*

avdievich@iplt.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada kubik simmetriyaga ega bo‘lgan KBr, NaBr, NaCl va MgO kristallarining akustik xossalari keng ko‘lamda eksperimental ravishda tadqiq etilgan. Tadqiqotda impulsli interferensiya usuli qo‘llanilib [100], [110] va [111] kristolografik yo‘nalishlar bo‘ylab bo‘ylama va ko‘ndalang akustik to‘lqinlarning tarqalish tezliklari hamda ularning so‘nish ko‘effitsiyentlari yuqori aniqlik bilan o‘lchangan. Olingan natijalar asosida kristallarning haqiqiy va mavhum elastiklik konstantalari aniqlanib Akheizer mexanizmi asosida akustik fononlarning relaksatsiya vaqtlariga baho berilgan. Shuningdek, MgO kristallida so‘nish ko‘effitsiyentining temperaturaga bog‘liqligi o‘rganilib issiqlik ta‘sirida akustik xossalarning o‘zgarish tendensiyasi aniq ko‘rsatilgan. Ushbu tadqiqot natijalari kubik galogenid kristallarining akustik, termoe elastik va akustooptik qurilmalarda qo‘llanilishi uchun asos yaratadi hamda materiallarning anizotrop elastik xatti xarakterlarini chuqur tushunishga yordam beradi.

Kalit so‘zlar: kubik kristallar, Impulsli interferensiya, anizotropiya, akustik to‘lqin, qutblanish vektori, to‘lqin vektori, so‘nish ko‘effitsiyenti, elastik doimiy, to‘lqin tezligi.

**АНИЗОТРОПИЯ И ВРЕМЕНА РЕЛАКСАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
КУБИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ КРИСТАЛЛОВ**

Аннотация. В данной статье проведено обширное экспериментальное исследование акустических свойств кубических кристаллов KBr, NaBr, NaCl и MgO. В ходе исследования с использованием метода импульсной интерференции с высокой точностью измерены скорости распространения продольных и поперечных акустических волн вдоль кристаллографических направлений [100], [110] и [111], а также их коэффициенты затухания. На основании полученных результатов определены действительные и абстрактные упругие постоянные кристаллов, а также оценены времена релаксации акустических фононов на основе механизма Ахейзера. Также изучена температурная зависимость коэффициента затухания в кристаллах MgO и наглядно показана тенденция к изменению акустических свойств под воздействием тепла. Результаты данного исследования создают основу для применения кубических галогенидных кристаллов в акустических, термоупругих и акустооптических устройствах и способствуют более глубокому пониманию анизотропного упругого поведения материалов.

Ключевые слова: кубические кристаллы; импульсная интерференция; анизотропия; акустическая волна; вектор поляризации; волновой вектор; коэффициент затухания; упругая постоянная; скорость волны.

**ANISOTROPY AND RELAXATION TIMES OF ACOUSTIC PROPERTIES OF CUBIC
SYMMETRICAL CRYSTALS**

Abstract. In this article, the acoustic properties of cubic symmetry KBr, NaBr, NaCl, and MgO crystals have been extensively experimentally investigated. In the study, the propagation velocities of longitudinal and transverse acoustic waves along the [100], [110], and [111] crystallographic directions

and their extinction coefficients were measured with high accuracy using the pulsed interference method. Based on the results obtained, the real and abstract elastic constants of the crystals were determined, and the relaxation times of acoustic phonons were estimated based on the Akheizer mechanism. Also, the temperature dependence of the extinction coefficient in MgO crystals was studied, and the tendency of the acoustic properties to change under the influence of heat was clearly shown. The results of this study create a basis for the application of cubic halide crystals in acoustic, thermoelastic, and acousto-optic devices, and contribute to a deeper understanding of the anisotropic elastic behavior of materials.

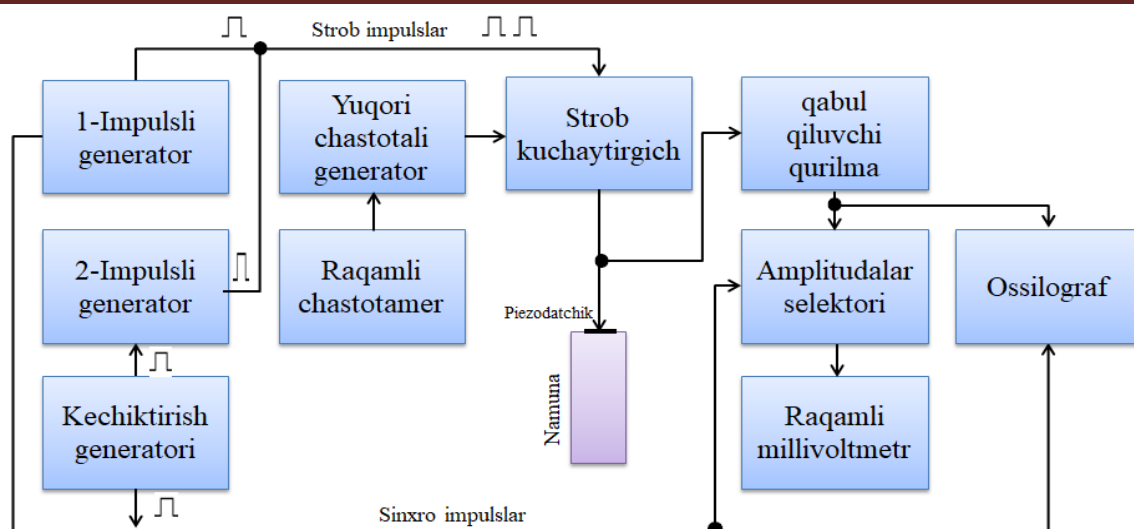
Keywords: cubic crystals; pulse interference; anisotropy; acoustic wave; polarization vector; wave vector; attenuation coefficient; elastic constant; wave velocity.

Kirish. Kubik simmetriyalı galogenid kristallari jumladan KBr NaBr NaCl va MgO Fm3m simmetriyaning kubik nuqta guruhiga kiradi va ko'plab fizik xususiyatlarda izotropdir. Biroq, elastiklik xususiyatlariga ko'ra, bu kristallar anizotropikdir va ularni akustik va akusto-optik qurilmalarda qo'llash akustik to'lqinlarning tarqalish tezligi va zaiflashuv koeffitsienti kabi muhim xususiyatlarning orientatsiya bog'liqligini bilishni talab qiladi [1-3]. Ushbu qurilmalarda ishlaydigan muhit ko'pincha ko'rinadigan va infraqizil elektromagnit to'lqinlarda yuqori elastik va fotoelastik konstantalarga ega bo'lgan Magniy oksidi kabi galogenid gidroksidi kristallari ishlatiladi [1-4].

Tarqalish tezligi va ulardagi so'nish koeffitsienti past ultratovush chastotalari diapazonida yetarli darajada batafsil o'rganilgan, bunda so'nish Axiezer mexanizmi [5-7] bo'yicha kvadratik qonun bo'yicha chastotaga bog'liq. Shu bilan birga, yuqori chastotalarda bunday tadqiqotlar deyarli yo'q, chunki ulardan foydalanishni cheklovchi asosiy omil zaiflashuv koeffitsientining katta qiymati hisoblanadi. Shu munosabat bilan ushbu ishda ishqor galogenid kristallarining gomologik qatoridagi uzunlamasına va ko'ndalang akustik to'lqinlarning tarqalish tezligi, samarali elastik konstantalari va susaytirish koeffitsienti ultratovush usullari yordamida o'rganildi.

Tadqiqot metodologiyasi. KBr, NaBr va NaCl kristallari klassik NaCl-tipi panjara tuzilmasiga ega bo'lib, bu tuzilma kubik simmetriyaning Fm3m fazoviy guruhiga kiradi. Magniy oksidi (MgO) kristali ham shu turdagi tuzilmani namoyon qiladi va o'xshash fazoviy guruhga mansub hisoblanadi. Bunday kristallarning simmetriya xususiyatlari ularning elastik va akustik xossalari izchil o'rganish imkonini beradi chunki kristall panjarasining yuqori darajadagi simmetriyasi fizik kattaliklarning aniq yo'nalishlarda o'lchanishini soddalashtirish imkonini beradi. Kristallar namunalari shakli kubik prizma bo'lib, kubning qirralari taxminan 15 mm ni tashkil etadi. Namunalarning yuzalari kristallofizik o'qlar [100], [010] va [001] yo'nalishida yo'naltirilgan bo'lib. Bunday yo'naltirish barcha to'lqin turlari bo'yicha o'lchovlarni bir xil namunalar asosida amalga oshirishga imkon beradi. Bu esa, har xil namunalar o'rtasidagi o'qlar orientatsiyasi farqlari, strukturaviy nuqsonlar kabi turli omillarning eksperimental natijalarga ta'sirini kamroq bo'lishiga yordam beradi.

Biz akustik to'lqinlarning tezligini va so'nish koeffitsiyentini aniqlash uchun Impulsli interferensiya usulidan foydalanganmiz[9]. Ushbu usulning mohiyati shundaki unda tadqiq qilinayotgan namunadan turlicha yo'l bosib otgan akustik to'lqinlarning fazalar farqi taqqoslanadi. Past chastotali o'lchov tizimining asosiy qismlaridan biri **amplituda selektori** bo'lib, u faqat ma'lum vaqt oralig'ida ochiladi. Mazkur vaqt oralig'i signalning kerakli qismigina o'tishiga imkon beradi. Quyidagi rasmdan Impulsli interferensiya usulining blok sxemasi keltirilgan.



1-rasm. Akustik o'lchov tizimining blok-sxemasi [10]

Sxemada quyidagi qurilmalardan foydalanilgan: yuqori chastotali elektromagnit tebranishlar generatori, strob kuchaytirgich, qabul qiluvchi (detektor), va ikkita impuls ketma-ketligining bir-biriga nisbatan kechikishini 0.01 mikrosekundgacha aniqlikda ta'minlay oluvchi impulsli signal generatorlari va kechikish generatoridan tashkil topgan diskret kechikish tizimi. Namunaga yuboriluvchi radioimpulsni yaratish uchun maxsus kuchaytirgich – rezonansli strob kuchaytirgich ishlatiladi. Bu kuchaytirgich hosil qilgan radioimpuls namunaga ulangan pyezodatchikka yuboriladi. Pyezodatchikda quyidagi bosqichlar bajariladi: radioimpulsni tovush (elastik) impulsga aylantiradi; namunaning qarama qarshi tomonidan qaytgan tovush impulsini yana radioimpulslarga aylantirib qabul qiladi. Qabul qilgichda hosil bo'lgan sekin-asta so'nuvchi radio-ehoimpuls ketma-ketligi amplituda bo'yicha kuchaytiriladi. Bu yerda qabul qilgich sifatida kuchaytirish darajasi 100 dB gacha sozlanadigan maxsus rezonansli kuchaytirgich qo'llaniladi. Kuchaytirgich tarkibidagi amplitudaviy detektor radioimpuls ketma-ketligini mos keluvchi videoimpuls ketma-ketligiga aylantiradi. Kuchaytirgich kirishidagi attenyuator (signalni zaiflashtiruvchi qurilma) va kuchaytirish darajasining sozlanishi yordamida kuchaytirgichning chiziqli rejimi (ya'ni, signalni buzmasdan kuchaytirish) taminlanadi. Qabul qilgichdan kelgan impuls yuboriladigan amplitudaviy selektor orqali impuls ketma-ketligidan keraklisini tanlab olish mumkin. Tanlangan impulsning amplitudasini voltmeter yordamida o'lchash amalga oshiriladi. Qo'shni ikkita impuls amplitudalari — A_1 va A_2 , hamda namuna uzunligi L bo'yicha akustik to'lqinlarning so'nish koeffitsiyenti quyidagi formula yordamida aniqlanadi [11].

$$\alpha = \frac{20 \lg \left(\frac{A_k}{A_n} \right)}{2L(k - n)} \quad (1)$$

Bu yerda L — namunani uzunligi. So'nish koeffitsientini aniqlash aniqligi esa taxminan 5 % ni tashkil etadi. Bunday aniqlikka erishish uchun impuls amplitudalari bir necha marta o'lchandi va olingan natijalar keyinchalik o'rtacha qiymatlarga keltiriladi qilindi.

Generatorning uzluksiz tebranish chastotasi o'zgartirilganda kuzatiladigan interferensiya minimumlari yoki impuls amplitudasining maksimumlari yordamida namunadagi akustik to'lqin tezligi V quyidagi munosabat asosida aniqlanadi [9]:

$$V = 2L \cdot \Delta \nu \quad (2)$$

Bu yerda $\Delta \nu$ — yuqori chastotali generatorning qarama-qarshi fazali interferensiyaga mos keluvchi ikki qo'shni chastotalar farqi. Ushbu chastotalar raqamli chastotomer yordamida o'lchangan bo'lib, u chastotalar farqini ± 10 Gts aniqlik bilan aniqlash imkonini beradi. Akustik to'lqin tezligini aniqlashdagi umumiy aniqlik esa namuna uzunligini o'lchashdagi aniqlik bilan chegaralangan va taxminan 0,01 % ni tashkil etgan.

Shuningdek ushbu ishda Akustik fononlarning relaksatsiya vaqtlari ham aniqlangan. Relaksatsiya vaqtlarini aniqlashda quyidagi formuladan foydalanilgan[12]:

$$\tau = \frac{3c''_{eff}}{\gamma^2 C_V T \omega} \quad (3)$$

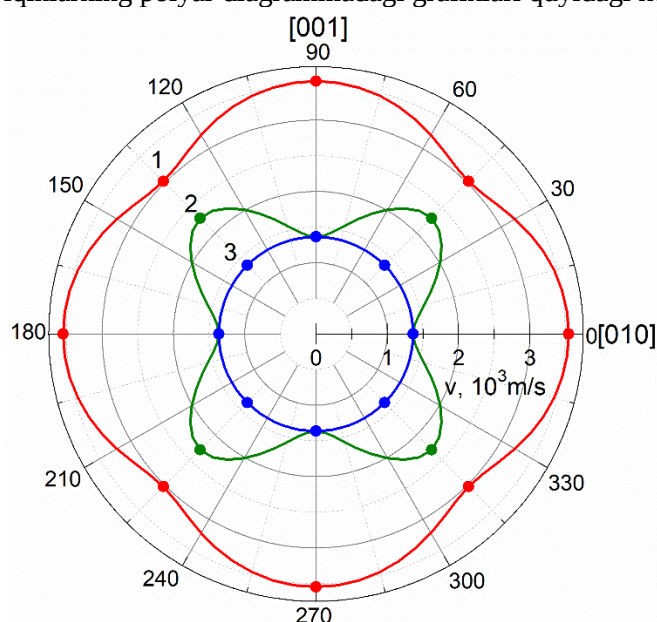
Bu yerda c''_{eff} -kristallarning mavhum elastiklik koeffitsiyenti, γ - grunayzen parametri, C_V - kristallarning hajmiy issiqlik sig'imi, T - temperaturaning kelvin qiymati, ω - akustik tolqin chastotasi.

Natijalar va muhokama. [100], [110] kristallografik yo'nalishlar bo'ylab bo'ylama va ko'ndalang akustik to'lqinlarning so'nish koeffitsientlarini aniqlash natijalari hamda tadqiq qilingan kristallar uchun hisoblangan haqiqiy va mavxum samarali elastiklik konstantalari qiymatlari 1-jadvalda keltirilgan. Akustik to'lqinlarning tezlik qiymatlari esa adabiyotdagi ma'lumotlar bilan yaxshi mos kelgani sababli ular 1-jadvalda keltirilmagan.

q	η	c'_{eff} , $10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$			α , $\text{dB}\cdot\mu\text{s}^{-1}$			c''_{eff} $10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$		
		KBr	NaBr	MgO	KBr	NaBr	MgO	KBr	NaBr	MgO
[100]	[100]	3.52	3.96	28.6	38	25	4.34	4.82	3.7	4.56
	[001]	0.51	0.99	14.8	6.0	3.1	0.60	0.11	0.11	0.33
[110]	[110]	2.55	3.49	33.4	28	17	1.90	2.81	2.01	2.33
	[110]	1.48	1.47	9.95	40	34	7.01	2.12	1.79	2.56
	[001]	0.51	0.99	14.8	6.0	3.1	0.60	0.11	0.11	0.33
[111]	[111]	2.22	3.33	35.06	26.4	11.9	1.23	2.14	1.45	1.59
	[110]	1.15	1.31	11.56	34.8	25.6	4.26	1.45	1.23	1.81

1-jadval KBr, NaBr va RbBr kristallarida akustik to'lqinlarning so'nish koeffitsienti ($v = 1$ GGts da) hamda samarali haqiqiy va mrim elastiklik konstantalar qiymatlari

O'rganilgan barcha kristallar uchun elastiklik tenzori haqiqiy va mavhum qismlaring uchta mustaqil komponentalari barcha kristallografik yo'nalishlar bo'yicha o'lchangan bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlarning tezligi va so'nish koeffitsiyentlaridan aniqlangan. Jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida KBr kristali uchun akustik to'lqinlarning polyar diagrammadagi grafiklari quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



2-rasm. Kaliy brom kristallaridagi akustik to'lqin tarqalish tezligi sirtlarining (100) tekislik bo'yicha ko'rinishi: 1 - kvazi-bo'ylama, 2 - kvazi-ko'ndalang, 3 - sof ko'ndalang akustik to'lqinlar

1-jadvaldagi malumotlar asosida aniqlangan akustik fononlarning relaksatsiya vaqtlari va grunayzen parametrlarining qiymatlari 2- jadvalda keltirilgan. Fonon relaksatsiya vaqtlarini aniqlashda 3- formuladan foydalanilgan.

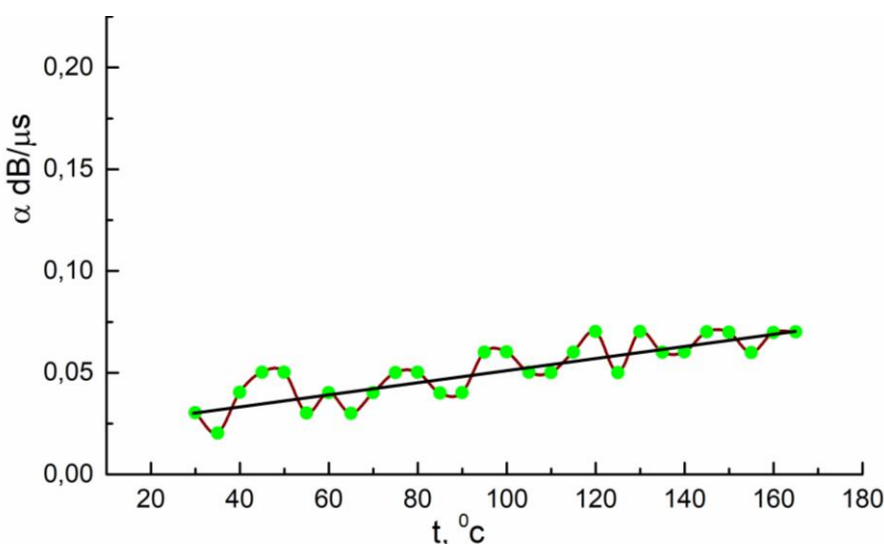
q	η	γ_{eff}				$\tau \cdot 10^{-12} \text{ s}$			
		KBr	NaBr	NaCl	MgO	KBr	NaBr	NaCl	MgO
[100]	[100]	2.60	2.1	2.50	2.58	9.5	9	4.15	3.48
	[001]	0.48	0.44	0.51	0.69	6.35	6.15	2.81	3.5

[110]	[110]	2.32	1.94	1.78	1.69	6.94	5.78	4.15	4.1
	[110]	2.47	1.67	2.28	1.77	4.62	6.95	2.64	4.15
	[001]	0.56	0.48	0.53	0.63	4.66	5.17	2.6	4.22
[111]	[111]	2.51	1.63	1.48	1.38	4.52	5.9	4.3	4.24
	[110]	2.17	1.86	1.94	1.48	4.1	3.54	2.26	4.2

2-jadval KBr, NaBr, NaCl va MgO kristallari uchun grunayzen parametri va relaksatsiya vaqtlari

2- jadvaldan ko'rishimiz mumkinki, KBr, NaBr, NaCl va MgO kristallaridagi akustik fononlarning turli yo'nalishlarda va qutublanishlarda tarqalish vaqtida yuzaga keladigan angarmoniklik va relaksatsiya vaqtlari keltirilgan. [100] yo'nalish bo'yicha grunayzen parametri boshqa yonalishlarga nisbatan katta qiymatlarga ega bu ushbu yo'nalishda panjara atomlarining angarmoniklik darajasi yuqori ekanligini ko'rsatadi. E'tibor qilsak shu yo'nalishda fononlarning relaksatsiya vaqtlari ham katta bu fononlarning uzoq yashashini va akustik to'lqinlarning so'nishi sekin kechishini bildiradi. Shuningdek biz MgO Kubik simmetriyali kristallarida Akustik to'lqinlarning so'nish koeffitsiyentining temperaturaga bog'liqligi o'rganilgan va olingan natijalar grafik ko'rinishida keltirilgan.

MgO kristallari uchun so'nish koeffitsiyentining temperaturaga bog'liqligi hona haroratidan 170°C gacha o'lchandi. Grafikda ko'k rangli nuqtalar o'lchov natijalarini ko'rsatadiva ko'rishimiz mumkinki akustik to'lqinlarning so'nish koeffitsiyenti temperatura ortishi bilan chiziqli ortadi bunga sabab esa kristal panjara atomlarining issiqlik natijasida tebranishi va fonon harakatiga qarshiligining ortishi hisoblanadi.



3- rasm MgO kristalining [110] yo'nalish bo'yicha akustik to'lqinlari so'nish koeffitsiyentining temperaturaga bog'liqligi

Xulosa. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, kristall panjarasining simmetriyasi yuqori bo'lishiga qaramay, elastik xossalar sezilarli darajada anizotrop bo'lib, akustik to'lqinlarning tezligi va yo'qolish koeffitsiyenti kristallografik yo'nalishga kuchli bog'liqdir. Grunayzen parametrlari va relaksatsiya vaqtlarining qiymatlari fononlarning angarmon harakatini chuqur tushunish imkonini berdi. Xususan, [100] yo'nalishida relaksatsiya vaqtlarining yuqori bo'lishi ushbu yo'nalishda fononlarning uzoq umrli ekanini ko'rsatadi. MgO kristallida o'tkazilgan temperatura tajribalari esa so'nish koeffitsiyentining harorat oshishi bilan deyarli chiziqli ortishini tasdiqladi. Bu hodisa issiqlik tebranishlarining kuchayishi va fononlarning o'zaro to'qnashuv chastotasining ortishi bilan izohlanadi. Olingan natijalar kubik galogenid kristallarining akusto-optik, akustik, termoelastik va yuqori aniqlik talab qilinadigan sensor qurilmalarda qo'llanishi uchun muhim ilmiy asos yaratadi. Bundan tashqari, materiallarning anizotrop elastik xatti-harakatlarini chuqurroq tushunishga, fonon kinetikasini baholashga va akustik qurilmalar parametrlarini optimallashtirishga xizmat qilishi mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. D. Royer, E. Dieulesaint. *Elastic Waves in Solids II /Generation/Acousto-optic Interaction/Applications.* (Verlag Berlin Heidelberg, Springer, 2000), p. 474.
2. R.E. Newnham. *Properties of Materials /Anisotropy/Symmetry/Structure.* (New York, Oxford University Press, 2005), p. 378.
3. Ф.Р. Ахмеджанов, Ж.О. Курбанов, Н.М. Махаров. *Затухание акустических волн в кубических кристаллах фторида лития. Доклады АН РУз. Вып. 5. 2021, С. 11-15.*
4. *Акустические кристаллы. Справочник /Под ред. М. П. Шаскольской. – М. Наука, 1982, 632 с.*
5. Akhiezer A. About Sound Absorption in Solids, *J. of Experimental and Theoretical Physics (SU).* - Moscow, 1938. - No 8, - P. 1318-1329.
6. R. Nava, M. P. Vecchi, J. Romero and B. Fernandez. Akhiezer damping and the thermal conductivity of pure and impure dielectrics. *Phys. Rev. B. Vol. 14, No 2. 1975, P. 800-807.*
7. Логачев Ю. А., Мойжес Б. Я. *К теории поглощения звука по Ахиезеру. – ФТТ. - Санкт-Петербург, 1974, - Т. 16. - № 8, - С. 2219-2223.*
8. R.E. Newnham. *Properties of Materials /Anisotropy/Symmetry/Structure.* (New York, Oxford University Press, 2005), p. 378.
9. F.R. Akhmedzhanov, J.O. Kurbanov, A.F. Boltabaev, Attenuation of acoustic waves in single-domain and polydomain LiTaO₃ crystals, *Sensors & Transducers* 246, No.7, 2020. P. 43-47.
10. Ахмеджанов Ф.Р., Азаматов З.Т., Болтабаев А.Ф., Саидвалиев У.А., Хусаинов И. *Устройство для прецизионного определения скорости акустических волн в материалах. Патент, № FAP 01545 (28.09.2020)*
11. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. *Ультразвуковые методы в физике твердого тела. - М.: Мир, 1972. - 307 с.*
12. Y. Liao, T. Shiga, M. Kashiwagi & J. Shiomi, Akhiezer mechanism limits coherent heat conduction in phononic crystals, **Phys. Rev. B** 98, 134307 (2018).

THERMAL STABILITY OF ELECTRICAL PARAMETERS OF SILICON WITH NANOCLUSTERS OF MANGANESE ATOMS

Mavlonov Giyosiddin Haydarovich,

Tashkent State Technical University, University St., 2, 100095, Tashkent, Uzbekistan

Uralbaev Khurshid,

Tashkent State Technical University, University St., 2, 100095, Tashkent, Uzbekistan

xurshiduz5427@gmail.com

Tachilin Stanislav Anatolevich,

Tashkent State Technical University, University St., 2, 100095, Tashkent, Uzbekistan

Isakov Bobir Olimjonovich,

Tashkent State Technical University, University St., 2, 100095, Tashkent, Uzbekistan

Ibodullaev Shohboz Nizom ugli.

Tashkent State Technical University, University St., 2, 100095, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. A comprehensive study of the relative change of resistivity from temperature and annealing time in $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$ samples with different concentrations of manganese atoms nanoclusters has been carried out. It was found that with increasing concentration of nanoclusters of manganese atoms, the thermal stability of $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$ samples significantly improves, where at the concentration of nanoclusters $N=10^{15} \text{ cm}^{-3}$ up to the annealing temperature $T=125^\circ\text{C}$ decay is practically not observed, that is, the samples retain their initial electro physical parameters, NMR and the value of impurity photoconductivity

Keywords: semiconductor, silicon, nanocluster, manganese, boron, negative magneto resistance.

MARGANETS ATOMLARI BILAN LEGIRLANGAN KREMNIY NANOKLASTERLARI ELEKTR PARAMETRLARINING ISSIQLIK BARQARORLIGI

Annotatsiya. Marganets atomi nanoklasterlarining turli konsentratsiyalariga ega $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$ namunalarida qarshilikning tovlash harorati va vaqti bilan nisbiy o'zgarishini o'rganish uchun keng qamrovli tadqiqot o'tkazildi. Marganets atomi nanoklasterlari konsentratsiyasining ortishi bilan $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$ namunalarining issiqlik barqarorligi sezilarli darajada yaxshilanishi aniqlandi. $N=10^{15} \text{ cm}^{-3}$ nanoklaster konsentratsiyalarida va $T=125^\circ\text{C}$ tovlash haroratida deyarli parchalanish kuzatilmaydi, bu namunalar boshlang'ich elektrofizik parametrlarini, MMQ va kirishma fotoo'tkazuvchanligini saqlab qolishini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: yarimo'tkazgich, kremniy, nanoklaster, marganets, bor, manfiy magnit qarshilik.

ТЕРМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КРЕМНИЯ С НАНОКЛАСТЕРАМИ АТОМОВ МАРГАНЦА

Аннотация. Проведены комплексные исследования относительного изменения удельного сопротивления от температуры и времени отжига в образцах $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$ с различной концентрацией нанокластеров атомов марганца. Установлено, что с ростом концентрации нанокластеров атомов марганца, существенно улучшается термостабильность образцов $p\text{-Si}\langle B, Mn \rangle$, где при концентрации нанокластеров $N=10^{15} \text{ см}^{-3}$ до температуры отжига $T=125^\circ\text{C}$ распад практически не наблюдается, то есть образцы сохраняют свои исходные электрофизические параметры, ОМС и величину примесной фотопроводимости.

Ключевые слова: полупроводник, кремний, наноклaster, марганец, бор, отрицательное магнетосопротивление.

Introduction. Unlike other semiconductor materials doped with paramagnetic impurity atoms [1-4], silicon with nanoclusters of manganese atoms is characterized by huge negative magnetoresistance (NMR) which is not conventional for other silicon-based materials. This anomalous huge NMR manifests itself at room temperature. Silicon with nanoclusters of manganese atoms is also characterized by high impurity photoconductivity in the region $\lambda=10\div 1.5 \text{ }\mu\text{m}$ [5, 6].

The thermal stability of electrical parameters of manganese-doped silicon samples without nanoclusters was studied in [7]. According to the results of this study, at annealing $T \geq 100$ °C for 30÷40 minutes the material properties tend to change significantly whereas at annealing duration $t = 1,5 \div 2$ hours a complete decay of parameters is observed, i.e. the material acquires its initial electrical parameters. It can be concluded that the compensation in boron- and manganese- doped silicon samples is thermally unstable. This can be explained by the change in the electronic state of manganese multi-atomic complexes in the silicon lattice or by disintegration of neutral boron-manganese complexes. How thermal annealing affects the state of manganese clusters and, consequently, the electrical properties of silicon with nanoclusters of manganese atoms is of great importance.

In [8-10], when studying the state of manganese atoms in silicon by electric paramagnetic resonance (EPR), it was shown that under certain doping conditions the manganese impurities forms nanoscale clusters consisting of four manganese atoms located in the nearest equivalent interstitial positions around the boron atoms in the silicon lattice.

Materials and methods. To ensure the process of formation of nanoclusters in silicon samples, *p*-type single-crystalline silicon with resistivity $\rho = 5 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$ ($p = 4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$) was used as a starting material. Doping with manganese was carried out using a newly developed technology [1-3, 11]. The doping conditions were chosen so as to receive *p*-Si<B, Mn> samples with resistivity in the range of $6 \cdot 10^2 < \rho \leq 10^5 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$ at $T = 20$ °C.

The electrical parameters of the samples (Table 1.) were measured on an Ecopia Hall Effect Measurement Systems HMS7000.

The *p*-Si<B, Mn> type samples with nanoclusters with resistivity $\rho \sim (6 \div 8) \cdot 10^3 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$ exhibit anomalously large negative magnetoresistance (NMR), the value of which reaches more than $\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim 100\%$ at room temperature, as well as very high subband (impurity) photoconductivity [2-4]. As the resistivity of the samples changes toward lower or higher values than $\rho \sim (6 \div 8) \cdot 10^3 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$, the magnitude of NMR decreases. In overcompensated *n*-Si<B, Mn> samples, a small PMR is always observed regardless of their resistivity.

Results and discussion.

Table 1 - Electrical parameters of the samples

Diffusion method	Samples obtained	Type	$\rho, \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$	$\mu, \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$	$N_{n, p}, \text{ cm}^{-3}$	Type and value of magnetoresistance
By applying novel technology	Si<B, Mn> with nanoclusters	p	$7 \cdot 10^2$	98	$9,1 \cdot 10^{13}$	19 % NMR
	Si<B, Mn> with nanoclusters	p	$7,5 \cdot 10^3$	72	$1,15 \cdot 10^{13}$	100 % NMR
	Si<B, Mn> with nanoclusters	p	$2 \cdot 10^4$	128	$2,44 \cdot 10^{12}$	46 % NMR
	Si<B, Mn> with nanoclusters	p	$4,1 \cdot 10^4$	145	$1,05 \cdot 10^{12}$	33 % NMR
	Si<B, Mn> with nanoclusters	p	10^5	224	$2,79 \cdot 10^{11}$	10 % NMR
	Si control	p	5,18	365	$3,7 \cdot 10^{15}$	3-4 % PMR
By applying standard technology	Si<B, Mn> without nanoclusters	p	$6,8 \cdot 10^2$	245	$3,7 \cdot 10^{13}$	4 % PMR
	Si<B, Mn> without nanoclusters	p	$7,3 \cdot 10^3$	271	$3,15 \cdot 10^{12}$	6 % NMR
	Si<B, Mn> without nanoclusters	p	$4 \cdot 10^4$	214	$5,84 \cdot 10^{11}$	2 % PMR
	Si control	p	5,2	352	$3,41 \cdot 10^{15}$	3-4 % PMR

In the samples where the maximum NMR is observed, the hole mobility was significantly smaller than the hole mobility in materials with the same resistivity obtained by conventional high-temperature diffusion and in general was $\mu = 70\text{-}150 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ [1].

The obtained manganese-doped samples had *p*-type conductivity, no overcompensated *n*-type samples were observed.

According to calculations, in the samples $\rho \sim (7 \div 8) \cdot 10^3 \Omega \cdot \text{cm}$ the Fermi level is in the position $F = E_v + 0.38 \text{ eV}$, i.e. it is in the lower half of the band gap of silicon. This allows us to assert that in these samples the majority of manganese atoms is strongly ionized state and is most likely in the state Mn^{+2} , since according to [12], interstitial manganese atoms in silicon are donor impurities and create energy levels in the upper half of the band gap of silicon with ionization energy $E_1 = E_c - 0.27 \text{ eV}$ and $E_2 = E_c - 0.5 \text{ eV}$. Mn^{+2} ions. These ions, in turn, can form nanoscale charged complexes like BMn_4 .

The presence of such nanoclusters of manganese atoms in the studied samples was confirmed by the study of the state of manganese atoms by EPR method, and their high degree of ionization by AFM [11, 13].

The obtained samples at room temperature were characterized by large negative magnetoresistance up to 100%, as well as high impurity photoconductivity in the spectral region $\lambda = 10 \div 1.5 \mu\text{m}$ at temperature $T = -193^\circ\text{C}$, which is characteristic of samples with nanoclusters of manganese atoms [1-6].

Simultaneously, *p*-Si<B, Mn> samples doped with manganese using a typical standard high-temperature diffusion technique [7] with similar parameters but without nanoclusters were received on the basis of *p*-type silicon with $\rho = 5 \Omega \cdot \text{cm}$. The absence of nanoclusters in these samples was also confirmed by EPR.

Temperature annealing of samples was carried out stepwise in a vacuum tube furnace MG17-60/300 with high accuracy of temperature maintenance ($\pm 1^\circ\text{C}$) and annealing time $t = 30$ minutes (± 10 seconds). After each heat annealing step, the samples were chemically treated with 10% HF solution to remove the SiO_2 layer, while the electrical properties of the samples were investigated under identical conditions.

Fig. 1 shows the relative change in resistivity of the studied samples as a function of annealing time at $T = 100^\circ\text{C}$. As can be seen, the resistivity of the material in *p*-Si<B, Mn> samples with nanoclusters practically does not depend on the annealing time (curve 1). At the same time in *p*-Si<B, Mn> samples without nanoclusters (without formation of nanoclusters) the electrical parameters change significantly with increasing annealing time, at annealing $t = 300$ minutes, where there is almost a complete decomposition of complexes containing manganese atoms (curve 2). After complete decay in *p*-Si<B, Mn> samples with nanoclusters, the anomalously small value of hole mobility increase to the value $\mu = 360 \text{ cm}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ as in the original sample.

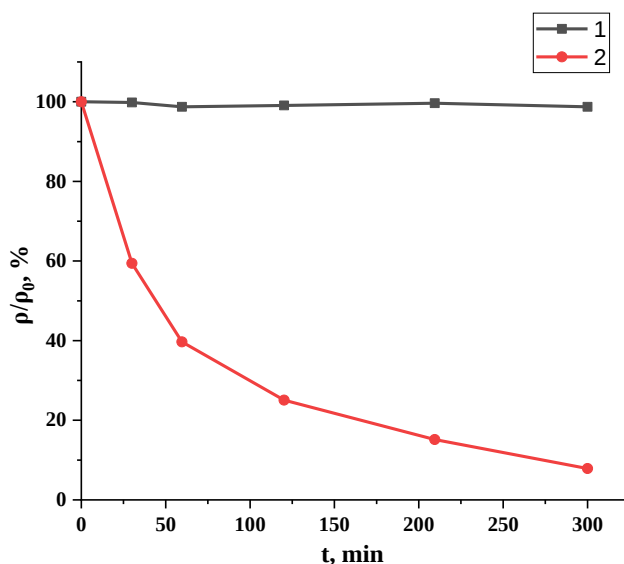
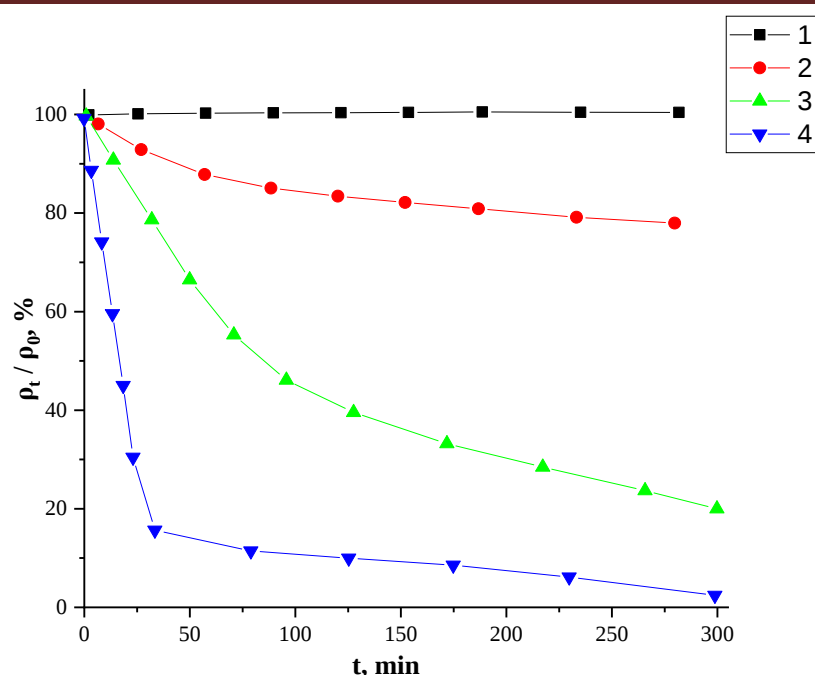


Figure 1 - Relative change in resistivity of manganese-doped silicon samples from annealing time at $T = 100^\circ\text{C}$: 1- with nanoclusters, 2- without nanoclusters



**Figure 2 - Relative change in resistivity of p -Si<B, Mn> silicon samples with nanoclusters of manganese atoms at different annealing temperatures:
1- 100 °C, 2- 125 °C, 3- 140 °C, 4- 160 °C**

Shortly after we investigated p -Si<B, Mn> samples with nanoclusters to determine up to what temperature they maintain the stability of their electro physical parameters (Fig. 2). The results show that no decay is revealed in silicon samples with nanoclusters up to annealing temperature of 110 °C for a long time (7 days). With increasing temperature up to $T=125$ °C a noticeable decomposition starts at annealing time greater than 1 hour.

Thermal stability studies were also carried out on samples having different contents of manganese clusters. For this purpose, p -type Si samples doped with boron $\rho=10 \Omega \cdot \text{cm}$, $\rho=5 \Omega \cdot \text{cm}$ and $\rho=2 \Omega \cdot \text{cm}$ were used as a starting material [1]. Samples of p -Si<B, Mn> with different concentration of nanoclusters were fabricated by the technology similar to [2, 10] with the condition of obtaining samples with resistivity $\rho=(7 \div 8)10^3 \Omega \cdot \text{cm}$ at $T=27$ °C. Taking into account almost complete compensation of boron impurity in these samples by manganese, one could estimate the concentration of nanoclusters as: $N_{(\text{Mn})4}=2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ (p -type Si doped with boron $\rho=10 \Omega \cdot \text{cm}$ starting material), $5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ (p -type Si samples doped with boron $\rho=5 \Omega \cdot \text{cm}$ starting material), 10^{15} cm^{-3} (p -type Si samples doped with boron $\rho=2 \Omega \cdot \text{cm}$ starting material) [1].

The relative variation in resistivity with annealing time in p -Si<B, Mn> samples with different concentrations of manganese atom nanoclusters is shown in Fig. 3. As can be seen from Fig. 3, the thermal stability of p -Si<B, Mn> samples significantly improves with increasing concentration of manganese atom nanoclusters. In p -Si<B, Mn> samples with the concentration of nanoclusters $N=10^{15} \text{ cm}^{-3}$ at annealing temperature $T=125$ °C, the decay is practically not observed, i.e. the samples retain their electro physical parameters. The studies also showed that the NMR and the magnitude of impurity photoconductivity retained their pre-annealing values.

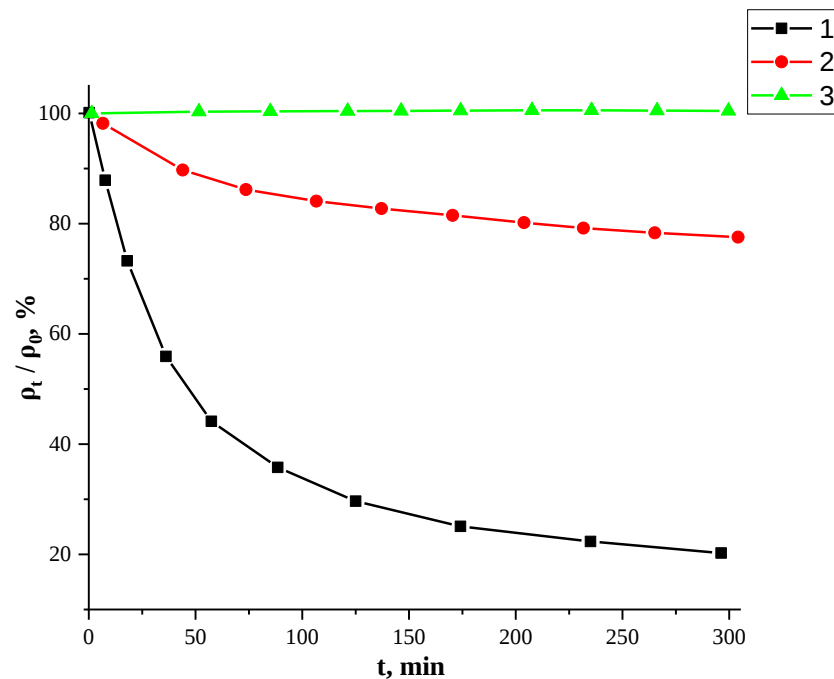


Figure 3 - Relative changes in resistivity of $p\text{-Si}\langle\text{B, Mn}\rangle$ samples with different concentrations of manganese atom nanoclusters at $T=125\text{ }^{\circ}\text{C}$

1) $N_{(\text{Mn})4}=2\cdot 10^{14}\text{ cm}^{-3}$, 2) $N_{(\text{Mn})4}=5\cdot 10^{14}\text{ cm}^{-3}$, 3) $N_{(\text{Mn})4}=10^{15}\text{ cm}^{-3}$

Conclusion. The above experimental results related to the study of changes in the properties of silicon with nanoclusters of manganese atoms in times of heat treatment allow us to determine the operating temperature range of photovoltaic and magnetic devices based on the material $p\text{-Si}\langle\text{B, Mn}\rangle$ with nanoclusters. Sufficiently high maximum operating temperatures ($T\geq 100\text{ }^{\circ}\text{C}$) allow us to use this material to for receiving a wide range of new electronic devices in the field of spintronics and optoelectronics, as well as various highly sensitive sensors of physical quantities [14] operating both at room temperature and at low temperatures.

REFERENCES:

1. Bakhadir Khanov M.K., Ayupov K.S., Mavlyanov G.H., Isamov S.B. Negative magnetoresistance in silicon with manganese-atom complexes $[\text{Mn}]_4$. // *Semiconductors*. -2010. -Vol.44. -No.9. -P.1145–1148. <https://doi.org/10.1134/S106378261009006X>
2. Bakhadir Khanov M.K., Isamov S.B., Zikrillayev N.F., Iliev Kh.M., Mavlonov G.H., Koveshnikov S.V., Ibodullaev Sh.N. Functional Capabilities of Silicon with Nanoclusters of Manganese Atoms. // *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. -2020. -Vol.60. -No.6. -P.734–739. (2020). <https://doi.org/10.3103/S1068375520060046>
3. Bakhadyrkhanov M.K., Mavlonov G.Kh., and Iliev Kh.M. Control of the Magnetic Properties of Silicon with Manganese Atom Nanoclusters. // *Technical Physics*. -2014. -Vol.59. -No.10. -P.1556–1558.
4. Bakhadyrkhanov M.K., Mavlonov G.H., Iliev X.M., Ayupov K.S., Sattorov O.E., Tachilin S.A. Specific features of magnetoresistance in overcompensated manganese-doped silicon. // *Semiconductors*. -2014. -Vol.48. -No.8. -P.986–988. <https://doi.org/10.1134/S106378261408003X>
5. Bakhadyrkhanov M.K., Ayupov K.S., Mavlyanov G.Kh., Iliev Kh.M., Isamov S.B. Photoconductivity of silicon with nanoclusters of manganese atoms. // *Russian Microelectronics*. -2014. -Vol.39. -No.6. -P.401–404. <https://doi.org/10.1134/S1063739710060041>
6. Bakhadyrkhanov M.K., Isamov S.B., Zikrillayev N.F. IR Photodetectors in the Range of $\lambda = 1.5\text{--}8\text{ }\mu\text{m}$, Based on Silicon with Multicharged Nanoclusters of Manganese Atoms. // *Russian Microelectronics*. -2012. -Vol.41. -No 6. -P.354–356. <https://doi.org/10.1134/S1063739712030043>
7. Bakhadyrkhanov M.K., Boltaks B.I., Kulikov G.S. Diffusion, solubility and electrical properties of manganese in silicon. // *FTT*. -1970. -No.14. -P.1671-1678.

8. Ludwig G.W., Woodbury H.H., Carlson R.O. Spin resonance of deep level impurities in germanium and silicon. // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. -1959. -V.8. -P.490. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(59\)90397-X](https://doi.org/10.1016/0022-3697(59)90397-X)
9. Fistul V.I., Kazakova V.M., Bobrovnikov Yu.A., Ryabtsev A.V., Abdurakhmanov K.P., Zainabidinov S., Kamilov T.S., Utamuradova Sh.B. // *SOV PHYS SEMICOND*. -1982. -Vol.16. -No.5. – P.603–605.
10. Kreissl J., Gehlhoff W. Electron Paramagnetic Resonance of the Mn₄ Cluster in Silicon. // *Physica status solidi*. -1988. -Vol.145. -No.2. –P.609–617. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221450227>
11. Bakhadyrkhanov M.K., Mavlonov G.Kh., Isamov S.B., Iliyev Kh.M., Ayupov K.S., Saparniyazova Z.M., and Tachilin S.A. Transport Properties of Silicon Doped with Manganese via Low Temperature Diffusion. // *Inorganic Materials*. -2011. -Vol.47. -No.5 –P.479-483. <https://doi.org/10.1134/S0020168511050062>
12. Abdurakhmanov K.P., Lebedev A.A., Kreysl Y., Utamuradova Sh.B. Deep levels in silicon associated with manganese. // *FTP*. -1985. -Vol.19. -No.2. -P.213-216.
13. Bakhadyrkhanov M.K., Iliyev Kh.M., Mavlonov G.Kh., Ayupov K.S., Isamov S.B. and Tachilin S.A. Silicon with Magnetic Nanoclusters of Manganese Atoms as a New Ferromagnetic Material. // *Technical Physics*. -2019. -Vol.64. -No.3. -P.385–388. <https://doi.org/10.1134/S1063784219030046>
14. Ayupov K.S., Bakhadyrkhanov M.K., Iliyev Kh.M., Mavlonov G.Kh., Tachilin S.A. Multifunctional sensor of physical quantities based on silicon with nanostructures of manganese atoms. // *Pribore*. -2017. – No.4. –P.7-10.

DINAMIKANING ASOSIY MASALALARI: MODDIY NUQTANING DINAMIK HARAKAT QONUNLARINI ANIQLASH USULLARI

Qo'chqorova Farida Tuychi qizi,

QDTU Shahrisabz oziq ovqat muhandisligi fakulteti
faridaquchqorova16@gmail.com

Mannonova Malika Sarvar qizi,

Toshkent kimyo-texnologiya instituti Shahrisabz filiali katta o'qituvchisi
Qarshi davlat texnika universiteti dotsenti (PhD)
mannonovamalika37@gmail.com

Kengboyev Sirojiddin Abrayvich,

Qarshi davlat texnika universiteti assistent o'qituvchisi
sirojmagistrstudent@gmail.com

Dusanova Gulshod Mirzayevna

Qarshi davlat texnika universiteti o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqolaning maqsadi dinamik o'zaro ta'sirlar nazariyasidan olinishi mumkin bo'lgan harakat qonunlarini va uning ko'p va muhim ilmiy qo'llanilishini taqdim etishdir. Bir vaqtning o'zida koaksiyal bo'lmagan aylanishlarga duchor bo'lgan qattiq jismlarning xatti-harakatlarining yangi talqiniga asoslanib, biz ushbu jismlarning dinamik harakati to'g'risida gipotezani ishlab chiqdik. Ushbu gipotezalardan va erkin jismlarning kosmosdagi xatti-harakatlarini kuzatish natijasida biz aksiomalar va matematik-fizik modelni ishlab chiqdik. Shunday qilib, biz gipotezalar va kuzatilgan xatti-harakatlarga mos keladigan harakat tenglamasini chiqardik. Ushbu dinamik model, qattiq qattiq jismlar yoki tizimlar holatida, uning dinamik ishlashi bilan bog'liq bir qator qonunlar va natijalarni ilgari surishga imkon beradi. Bu qonunlar keyinchalik eksperimental sinovlar bilan tasdiqlangan. Ushbu tadqiqotning barchasi biz Dinamik o'zaro ta'sirlar nazariyasi (TID) deb nomlagan oqilona va kontseptual tuzilmani tashkil qiladi. Ushbu mantiqiy deduktiv tizim aylanish natijasida ko'p tezlanishga duchor bo'lgan qattiq jismlarning harakatini bashorat qilish imkonini beradi. Xulosalarda biz printsiplar va aksiomalar, ishlab chiqilgan fizik-matematik model, olingan harakat tenglamasi, chiqarilgan qonunlar va amalga oshirilgan eksperimental testlar o'rtasida muvofiqlikka erishilganligini ta'kidlaymiz.

Kalit so'zlar: Dinamik o'zaro ta'sirlar nazariyasi, qattiq jism, koaksial bo'lmagan aylanish, harakat tenglamasi, matematik-fizik model, dinamik qonunlar, eksperimental sinovlar, tezlanish, gipoteza, aksiomalar tizimi.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Аннотация. Цель данной статьи — представить законы движения, которые могут быть выведены из теории динамических взаимодействий, а также её многочисленные и важные научные применения. На основе нового толкования поведения твёрдых тел, одновременно подвергающихся некоаксиальным вращениям, нами выдвинута гипотеза о динамическом движении этих тел. Из этих гипотез и наблюдений за поведением свободных тел в пространстве были разработаны аксиомы и математико-физическая модель. Таким образом, нами выведено уравнение движения, соответствующее гипотезам и наблюдаемому поведению. Данная динамическая модель позволяет сформулировать ряд законов и выводов, связанных с динамическим поведением твёрдых тел или систем. Эти законы впоследствии были подтверждены экспериментальными испытаниями. Всё это исследование представляет собой рациональную и концептуальную структуру, которую мы назвали **теорией динамических взаимодействий (ТДВ)**. Этот логико-дедуктивный подход позволяет предсказывать движение твёрдых тел, испытывающих множественные ускорения в результате вращения. В заключении отмечается, что достигнуто соответствие между принципами и аксиомами, разработанной физико-математической моделью, полученным уравнением движения, выведенными законами и проведёнными экспериментальными проверками.

Ключевые слова: теория динамических взаимодействий, твёрдое тело, некоаксиальное вращение, уравнение движения, математико-физическая модель, динамические законы, экспериментальные испытания, ускорение, гипотеза, система аксиом.

MAIN PROBLEMS OF DYNAMICS. METHODS FOR DETERMINING THE DYNAMIC LAWS OF MOTION OF A MATERIAL POINT

Abstract. The purpose of this article is to present the laws of motion that can be derived from the theory of dynamic interactions and its numerous and significant scientific applications. Based on a new interpretation of the behavior of rigid bodies subjected simultaneously to non-coaxial rotations, we developed a hypothesis about the dynamic motion of these bodies. From these hypotheses and observations of the behavior of free bodies in space, we formulated axioms and a mathematical-physical model. Thus, we derived an equation of motion consistent with the hypotheses and observed behavior. This dynamic model allows the formulation of a series of laws and results related to the dynamic behavior of rigid bodies or systems. These laws were later confirmed by experimental tests. All of this research constitutes a rational and conceptual framework that we have called the Theory of Dynamic Interactions (TDI). This logical and deductive system makes it possible to predict the motion of rigid bodies subjected to multiple accelerations as a result of rotation. In conclusion, we emphasize that consistency has been achieved among the principles and axioms, the developed physical-mathematical model, the derived equation of motion, the formulated laws, and the conducted experimental tests.

Keywords: Theory of Dynamic Interactions, rigid body, non-coaxial rotation, equation of motion, mathematical-physical model, dynamic laws, experimental tests, acceleration, hypothesis, system of axioms.

Kirish. Dinamika nazariy mexanikaning asosiy bo'limi bo'lib, unda jismlarning mexanik harakat qonunlari shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga bog'liq holda o'rganiladi. Mexanikaning asosiy, birlamchi tushunchasi bo'lgan kuch dinamikada moddiy jismlar harakatini o'zgartiruvchi ta'siri bilan aniqlanadi. Dinamikada jismlarga o'zgarmas kuchlardan tashqari miqdori va yo'nalishi o'zgaruvchan kuchlar ham ta'sir ko'rsatishi mumkin deb qaraladi. Kuchlar aktiv, faol yoki passiv, chunonchi, bog'lanish reaksiya kuchlari bo'lishi mumkin: Massa jismlarning moddiy miqdor o'lchovi bo'lib, dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Jismning harakati faqat unga qo'yilgan kuchgagina bog'liq bo'lmay, uning inertligiga ham bog'liq. Jismning inertligini miqdor jihatdan ifodalovchi fizikaviy kattalik jismning massasi deyiladi. Biz o'rganayotgan mexanika klassik mexanika bo'lib, bunda jismning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik, uning massasi o'zgarmas, skalyar va musbat kattalik deb qaraladi. Harakatini o'rganishda o'lchamlari ahamiyatga ega bo'lmagan, lekin massaga ega moddiy jismga moddiy nuqta deyiladi. Moddiy nuqta asl ma'noda, biror jismni anglatgani uchun u shu jismning massasiga teng massaga va shu sababli, jism kabi ta'sirlasha olish xususiyatiga ega bo'ladi. Moddiy nuqta tushunchasiga binoan, mexanik sistema yoki jism massasi uni tashkil etgan moddiy nuqtalar massalarining yig'indisi bilan aniqlanadi. Umumiy holda Jismning harakati faqat ushbu moddiy nuqtalar yig'indisigagina emas, ularning jism bo'ylab taqsimlanishi (jism shakli)ga ham bog'liq. Dinamikaning masalasi. Dinamikaning masalasi jismga ta'sir etuvchi kuchlar bilan uning harakatining kinematik xarakteristikalari o'rtasidagi bog'lanish qonunlarini aniqlash va bu qonunlarni harakatning xususiy hollariga tatbiq etishdan iborat. Dinamika masalasini dinamikaning asoschisi Nyuton juda yaxshi ta'riflagan. U aytganki, dinamika "harakatning yuz berishiga ko'ra tabiat kuchlarini bilish, so'ngra bu kuchlar bilan tabiatning boshqa hodisalarini tushuntirishi" zarur. Albatta, moddiy nuqta dinamikasining asosiy masalalari va harakat qonunlarini aniqlash usullarini batafsilroq va bo'limlarga bo'linmasdan yoritaman. Moddiy nuqta dinamikasining asosiy vazifasi - moddiy nuqtaning fazoda vaqt o'tishi bilan joylashuvining o'zgarishini, ya'ni uning harakatini sabablari (kuchlar) bilan bog'liq holda o'rganishdir. Buning uchun eng asosiy vosita Nyutonning ikkinchi qonuni bo'lib, u kuch, massa va tezlanish o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalaydi: $m \cdot a = \Sigma F$. Bu tenglama har qanday dinamik masalaning yechimi uchun asos hisoblanadi.

Asosiy masalalar tahlili. Dinamikada ikki turdagi asosiy masala mavjud. Birinchi masalada moddiy nuqtaning massasi, boshlang'ich holati (joylashuvi va tezligi) va unga ta'sir etuvchi barcha kuchlar ma'lum bo'ladi, shu asosda nuqtaning harakat qonuni, ya'ni vaqtning istalgan momentidagi joylashuvi va tezligi topiladi. Bu masalani yechish uchun Nyutonning ikkinchi qonuni asosida harakatning differensial tenglamalari tuziladi va ularning yechimi topiladi. Masalan, Yerga ma'lum burchak ostida otilgan toshning harakat traektoriyasini, maksimal balandligini va uchish masofasini topish. Ikkinchi masalada esa moddiy nuqtaning massasi va uning harakat qonuni ma'lum bo'ladi, shu asosda unga ta'sir etuvchi kuch(lar) topiladi.

Bu masalani yechish nisbatan sodda, chunki u differensial tenglamalarni integrallashni talab qilmaydi. Ma'lum bo'lgan harakat qonunidan ketma-ket hosila olish orqali tezlanish topiladi va so'ngra Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan kuch topiladi. Masalan, Quyosh atrofida ma'lum bir traektoriya bo'yicha harakatlanayotgan sayyoraga qanday kuch ta'sir qilayotganini topish. Harakat qonunlarini aniqlash usullari Harakat qonunlarini aniqlashning asosiy usuli differensial tenglamalarni tuzish va ularni yechishdir. Bu jarayon moddiy nuqtaning dinamik modelini tuzish, faol kuchlarni aniqlash, qulay koordinatalar sistemasini tanlash, harakat differensial tenglamalarini yozish, differensial tenglamalarni yechish va boshlang'ich shartlardan foydalanish bosqichlaridan iborat. Koordinatalar sistemasini tanlash juda muhim, chunki masalaning shartiga qarab Dekart koordinatalari, tabiiy koordinatalar yoki boshqa sistemalardan foydalanish mumkin. Har bir sistema o'ziga xos tenglamalar sistemasini talab qiladi. Differensial tenglamalarni yechish eng murakkab bosqich bo'lib, turli matematik usullar (ajratuvchi o'zgaruvchili, bir jinsli, chiziqli tenglamalar) qo'llaniladi. Yechimda paydo bo'ladigan integrallash doimiylarini aniqlash uchun boshlang'ich shartlar ($t=0$ dagi joylashuv va tezlik) muhim ahamiyatga ega.

Amaliy qo'llanilishi. Moddiy nuqta dinamikasining ushbu tamoyillari va usullari nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki amaliyotda ham keng qo'llaniladi. Mashinasozlikda, qurilishda, aviatsiyada, kosmonavtikada, robototexnikada va boshqa sohalarida har qanday jismning harakatini hisoblash va loyihalash uchun dinamikaning asosiy tamoyillari qo'llaniladi. Masalan, avtomobilning turli yo'l sharoitlarida harakatini modellash tirish, sun'iy yo'ldoshlarning orbitadagi harakatini hisoblash, turbinalarning aylanish dinamikasini tadqiq qilish – bularning barchasi moddiy nuqta dinamikasiga asoslanadi. Dinamika – bu jismlarning harakat sabablarini o'rganuvchi mexanika bo'limi. Nyutonning uchta asosiy qonuni dinamikaning poydevoridir. Birinchi qonun - inersiya qonuni: agar jismga tashqi kuch ta'sir etmasa, u tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli bo'yicha bir jinsli harakatda bo'ladi. Ikkinchi qonun - asosiy dinamika qonuni: kuch jism massasi va tezlanishi ko'paytmasiga teng ($F = m \cdot a$). Uchinchi qonun – ta'sir-qarshilik qonuni: har qanday kuchga unga teng va qarama-qarshi yo'nalgan kuch javob qaytaradi. Moddiy nuqta - bu o'lchamlari e'tiborga olinmaydigan, lekin massasi va inersiyasi saqlanadigan ideal jism. Dinamikada ikki turdagi asosiy masala mavjud: to'g'ri masala va teskari masala. To'g'ri masalada kuchlar ma'lum bo'ladi, harakatni topish kerak. Teskari masalada harakat ma'lum bo'ladi, kuchlarni topish kerak. Kuchlar turlari orasida og'irlik kuchi ($P = mg$), elastiklik kuchi ($F = -kx$), ishqalanish kuchi ($F = \mu N$), markazga intiluvchi kuch ($F = mv^2/r$) muhim ahamiyatga ega. Energiya turlaridan kinetik energiya ($E_k = mv^2/2$) harakat energiyasi, potensial energiya ($E_p = mgh$) esa joylashuv energiyasidir. Impuls - harakat miqdori ($p = mv$), impuls momenti - aylana harakati miqdori ($L = r \times p$). Impulsning saqlanish qonuni yopiq sistemada impuls o'zgarimasligini bildiradi. Koordinata sistemalari orasida Dekart sistemasi (x, y, z) va tabiiy sistema (τ, n, b) keng qo'llaniladi. Tabiiy sistemada normal tezlanish $a_n = v^2/\rho$ formulasi bilan hisoblanadi. Bog'lanishlar dinamikasida g'ayritabiiy va tabiiy bog'lanishlar farqlanadi. Harakat tenglamalari differensial shaklda ifodalanadi va turli koordinata sistemalarida yechiladi. Sonli usullardan Eyler usuli ($y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$), Runge-Kutta usuli, Verlet algoritmi keng qo'llaniladi. Bu usullar kompyuter modellash tirishda muhim ahamiyatga ega. Dinamika qonunlari amaliyotda keng qo'llaniladi: kosmonavtikada orbital hisoblar, mashinasozlikda transport vositalari dinamikasi, qurilishda konstruksiyalar hisobi, robototexnikada harakatni boshqarish, sportda qurilmalar loyihalash. Barcha mexanik hodisalar dinamika qonunlari asosida tushuntiriladi va hisoblanadi. Dinamika - mexanikaning jismlarning harakat sabablarini o'rganadigan bo'limi bo'lib, Nyutonning uch qonuniga asoslanadi. Birinchi qonun - inersiya qonuni: tashqi kuch ta'sir etmasa jism tinch holatda yoki bir jinsli harakatda bo'ladi. Ikkinchi qonun - asosiy dinamika qonuni: $F = m \cdot a$ (kuch massaning tezlanishiga teng). Uchinchi qonun - ta'sir-qarshilik: $F_{12} = -F_{21}$. Moddiy nuqta - o'lchamsiz lekin massali ideal jism. Dinamikada ikkita asosiy masala mavjud: to'g'ri masala (kuch ma'lum, harakat topiladi) va teskari masala (harakat ma'lum, kuch topiladi). Kuch turlari: og'irlik ($P = mg$), elastiklik ($F = -kx$), ishqalanish ($F = \mu N$), markazga intiluvchi ($F = mv^2/r$). Energiya: kinetik ($E_k = mv^2/2$), potensial ($E_p = mgh$), mexanik ish ($A = F \cdot s$). Impuls - harakat miqdori ($p = mv$), impuls momenti ($L = r \times p$), impulsning saqlanish qonuni. Koordinata sistemalari: Dekart (x, y, z), tabiiy (τ, n, b), normal tezlanish $a_n = v^2/\rho$. Bog'lanishlar: g'ayritabiiy (tezlikka bog'liq) va tabiiy (tezlikka bog'liq emas). Harakat tenglamalari differensial shaklda: $d^2x/dt^2 = F_x/m$. Sonli usullar: Eyler ($y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$), Runge-Kutta, Verlet. Amaliy qo'llanilish: orbital hisoblar, transport dinamikasi, qurilish konstruksiyalari, robototexnika, sport qurilmalari. Dinamik tizimlar: erkin (cheklovsiz) va bog'langan (cheklovli). Differensial tenglamalarni yechish usullari: analitik (aniq) va sonli (taxminiy). Fazoviy yondashuv – harakatni fazo-tezlik koordinatalarida tahlil qilish. Dinamikaning universal tamoyillari: D'Alamber printsiplari (dinamikani statikaga keltirish) va kamimalik printsiplari (minimal harakat). Qattiq jismlar dinamikasi moddiy nuqta dinamikasiga asoslanadi. Muhim tushunchalar: massa markazi, inersiya momenti, aylanish dinamikasi. Bog'lanish

reaktsiyalari: $N = mg \cos \alpha$. Tezlanish: tangensial ($a_t = dv/dt$) va normal ($a_n = v^2/\rho$). Kuchlar qo‘shilishi: vektor qoidasi bo‘yicha. Nyuton qonunlari inertial sanoq sistemalarida o‘rinli.

Dinamika tarixi. Arximed, Galiley, Nyuton, Eyler, Laplas, Lagranj, Gamilton. Zamonaviy qo‘llanilish: kosmik apparatlar, samolyotlar, avtomobillar, robotlar, qurilish mexanizmlari. Matematik asoslar: differensial hisob, vektor analizi, variatsion hisob. Eksperimental dinamika: tezlanish o‘lchash, kuch o‘lchash, tezlik o‘lchash. Ushbu tahlil orqali biz doimiy aylanish va orbital harakat o‘rtasidagi dastlabki aporiyamizga (muammoli savolga) to‘liq javob berganimizga ishonamiz. Shu bilan biz tabiatda jismlarning ayni vaqtda aylanishi va orbitada harakatlanishini ularning massaning o‘ziga xos inertsia xatti-harakati bilan izohlab beramiz. Butun bayonot davomida biz “inertsia kuchi” tushunchasidan qochishga, uning o‘rniga inertsia reaksiyasi tushunchasini kiritishga harakat qildik. Moddani kuzatish orqali haqiqiy kuchlarning mavjudligini isbotlab bo‘lmaydi. Ammo biz tezliklarning notekis taqsimlanishini kuzatishimiz mumkin, ularning hosilalari (derivativlari) natijasida inertsia tezlanish maydoni hosil bo‘ladi. Bu maydon bir jinsli emas, ammo uni inertsia kuchlari maydoni sifatida talqin qilish mumkin. Ta’kidlash lozimki, bu inertsia kuchlari maydoni boshqa dinamik nazariyalarda bo‘lgani kabi koordinatalar o‘qini almashtirish natijasida hosil bo‘lmaydi. Aksincha, u qattiq jism ichida, unga berilgan tashqi qo‘zg‘atuvchi ta’sir (moment) natijasida inertsia reaksiyasi sifatida paydo bo‘ladi. Bizning deduktiv tahlilimizda, jismning tekis harakati (translyatsiyasi) holatida ajratib ko‘rsatuvchi gipoteza kiritilgan — ya’ni, translyatsiya tezliklari maydoni ikkinchi, o‘qlar bir-biriga to‘g‘ri kelmaydigan moment (non-koaksial moment) ta’sirida hosil bo‘lgan anizotrop inertsia tezliklari maydoniga ulanadi. Natijada, harakatlanuvchi jismning dastlabki ichki aylanishi bilan bir vaqtda orbital harakat hosil bo‘ladi. Ushbu yangi orbital harakat doimiy modulga ega bo‘lgan translyatsion tezlik vektori aylanishi bilan aniqlanadi. Avvalgi ishlarimizda biz ushbu tahlil yordamida fazodagi har qanday harakatning tabiatini aniqlash va uning nisbiyligini belgilash mumkinligini taklif qilganmiz. Taklif etilgan harakat tenglamasi va formulalangan qonunlar bizga ratsional mexanika va aylanma dinamikani – aylanish orqali tezlanayotgan jismlar uchun — asoslar va aksiomalar asosida tuzish imkonini beradi. Ushbu yangi ratsional tuzilma ichida klassik mexanikadagi g‘ayrioddiy yoki ziddiyatli hodisalar, masalan, girooskopik moment yoki soxta kuchlar, paydo bo‘lmasligi kerak. Dinamik o‘zaro ta’sirlar nazariyasi (Theory of Dynamic Interactions) – bu ba’zi dinamik gipotezalardan tashkil topgan mantiqiy-deduktiv tizimdir. U tabiatni kuzatish, dastlabki gipotezalarni shakllantirish va aksiomalar hamda postulatlardan kelib chiqish orqali aylanma tezlanishlarga duchor bo‘lgan qattiq jismlarga doir bilimlar tuzilmasini yaratadi. Natijada olingan fizik-matematik model ketma-ket, o‘qlari bir-biriga mos kelmaydigan momentlar ta’sirida bo‘lgan jismlarning kuzatiladigan xatti-harakatlarini izohlash, shuningdek, yangi xulosalar, mantiqiy natijalar va bashoratlar chiqarish imkonini beradi. Ushbu nazariya eksperimental sinovlar bilan tekshirilgan va tasdiqlangan. Mazkur matn Nyuton qonunlariga qarshi chiqishni maqsad qilmaydi; aksincha, u aylanish orqali tezlanayotgan tizimlar uchun klassik mexanikaga qo‘shimcha konseptual tuzilma sifatida ishlab chiqilgan. Biz translyatsion klassik mexanika qonunlari amal qilmaydigan, no-inertsia muhitlari uchun maxsus aylanish algebrasiga asoslangan nazariyani taklif qilamiz. Shu tariqa, biz koinotda tez-tez uchrab turadigan, ammo bejizga e’tibordan chetda qolgan ayrim maxsus dinamik holatlar uchun yangi bilim sohasini tadqiq etishni taklif qilamiz. Shuningdek, ushbu tadqiqotlar rivoji davomida boshlang‘ich gipotezalar, qo‘llanilgan prinsipl va aksiomalar, yaratilgan fizik-matematik model, olingan harakat tenglamasi, chiqarilgan qonunlar, yaratilgan modellashirish (simulyatsiya) modellari hamda o‘tkazilgan tajribaviy sinovlar o‘rtasida to‘liq mantiqiy uyg‘unlik (moslik) ta’minlangani alohida ta’kidlashga arziydi. Shuningdek, biz tabiatda kuzatilgan misollarni ham keltirib o‘tdik – ular Dinamik o‘zaro ta’sirlar nazariyasini (Theory of Dynamic Interactions) qo‘llab-quvvatlaydi va ushbu matnda bayon etilgan qonunlarning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Xulosa. Dinamika nazariyasi fizikaning eng fundamental bo‘limlaridan biri bo‘lib, moddiy jismlarning harakat sabablarini va ularning o‘zgarish qonuniyatlarini o‘rganadi. Nyutonning klassik mexanika qonunlari dinamikaning asosini tashkil etadi, ulardan eng muhimi $F = ma$ formulasi bilan ifodalanadigan ikkinchi qonundir. Bu tenglama kuch, massa va tezlanish o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlab, har qanday moddiy nuqta harakatini tavsiflash imkonini beradi. Dinamikaning asosiy masalalarini ikki guruhga ajratish mumkin: birinchisida kuchlar ma’lum bo‘lganda harakatni aniqlash, ikkinchisida esa harakat ma’lum bo‘lganda kuchlarni topish. Harakatning differensial tenglamalari dinamik masalalarni yechishning asosiy vositasi bo‘lib, ularning yechimi jismning traektoriyasi va tezligini to‘liq aniqlaydi. Energiyaning saqlanish qonuni, impulsning saqlanishi va impuls momentining saqlanishi kabi universal qonunlar murakkab sistemalarni tahlil qilishda qo‘llaniladi. Koordinatalar sistemalarining turli turlari - Dekart, sferik, silindrik va tabiiy koordinatalar - masalaning shartiga qarab qulaylik yaratadi. Zamonaviy dinamika klassik chegaralardan chiqib, relyativistik dinamika va kvant dinamikasini qamrab olgan holda rivojlanmoqda.

Amaliyotda dinamika qonunlari kosmik apparatlarning orbital harakatini hisoblash, qurilish konstruksiyalarining mustahkamligini aniqlash, transport vositalarining harakatini loyihalash va robototexnika sistemalarini boshqarishda keng qo'llaniladi. Eksperimental dinamika esa turli o'lchov usullari - dinamometrlar, akselerometrlar, tezlik va traektoriya o'lchagichlar orqali nazariy qonunlarni tasdiqlaydi. Dinamikaning rivojlanishi Galileo, Nyuton, Eyler, Laplas, Lagranj va Gamilton kabi olimlarning ishlari natijasida sodir bo'ldi va bugungi kunda u nafaqat makroskopik jismlar, balki molekulyar va atom darajasidagi sistemalarni ham o'rganish imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. *Classical Mechanics (3rd Edition)* by Tai L. Chow. Routledge. Link: <https://www.routledge.com/Classical-Mechanics-Chow/p/book/9781032789545> Routledge
2. *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics* by Walter Greiner. Springer-Verlag. Link: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03434-3> SpringerLink
3. *Classical Mechanics: An Introduction* by Dieter Strauch. Springer. Link: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73616-5>
4. *Classical Mechanics: From Particles to Continua and Regularity to Chaos* – Authors: Govind S. Krishnaswami. Havola: [SpringerLink](#) SpringerLink
5. *Theoretical Physics Compact I: Classical Mechanics* – Author: Wolfgang Cassing. Havola: [SpringerLink](#) SpringerLink
6. *Classical Mechanics: Including an Introduction to the Theory of Elasticity* – Author: Reinhard Hentschke. Havola: [SpringerLink](#) SpringerLink
7. *Introduction to Dynamics* – Authors: Friedrich Pfeiffer & Thorsten Schindler. Havola: [SpringerLink](#) SpringerLink
8. *Engineering Dynamics 2.0: Fundamentals and Numerical Solutions* – Author: Lester W. Schmerr. Havola: [SpringerLink](#)

ARTEZIAN QUDUQ SUVI TARKIBIDAGI TABIIY (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) VA TEXNOGEN ^{137}Cs IZOTOPLARINING MIQDORI

Qodirov Mumin Qodirovich,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro fizikasi va astronomiya kafedrası professori
qodirov1946@gmail.com

Tuxtayev Ulug'bek Uktamovich,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro fizikasi va astronomiya kafedrası dotsenti
ulugbekuktamovich89@gmail.com

Muxammedov Aliakbar Kurbanovich,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro fizikasi laboratoriyasi katta ilmiy xodimi
mukhammedov59@gmail.com

Ulasheva Mashhura Akram qizi,

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti
Yadro fizikasi va astronomiya kafedrası magistranti
ulashevam2002@gmail.com

Nabiyev Abdullo Abduvohidovich,

Samarqand davlat tibbiyot universiteti informatsion texnologiya,
biofizika va tibbiy fizika kafedrası assistenti
tojik.sam@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada Samarqand Davlat Universiteti Yadro Fizikasi laboratoriyasi hududida joylashgan artезian quduq suv namunasining tarkibidagi tabiiy (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) hamda texnogen ^{137}Cs radioaktiv izotoplarning konsentratsiyasi NaI(Tl) kristalli ssintillatsion gamma-spektrometr usuli yordamida yordamida o'rganildi. Suv namunasining harorati, pH ko'rsatgich darajasi, qattiqligi va elektr o'tkazuvchanligi o'lchanildi. O'ranilgan suv tarkibida uran, toriy qatoriga mansub radioaktiv elementlarning konsentratsiyasi Sanitariya-epidemiologik osoyishtalik va jamoat salomatligi xizmati (SanPiN) belgilab qo'yilgan chegaraviy qiymatdan oshmaganligi aniqlandi. Tekshirilgan suvlarda radiy - 226 ning α -yemirilishidan hosil bo'ladigan radon -222 solishtirma aktivligi aniqlandi. Olingan natijalar ekologik xavfsizlik nuqtai nazaridan tahlil qilindi.

Kalit so'zlar: radioaktivlik, izotop, suv, uran (^{238}U), toriy (^{232}Th), radiy (^{226}Ra), radon (^{222}Rn), ssintillyasiya, gamma-spektrometr.

СОДЕРЖАНИЕ ПРИРОДНЫХ (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) И ТЕХНОГЕННОГО ^{137}Cs ИЗОТОПОВ В АРТЕЗИАНСКОЙ ВОДЕ

Аннотация. В данной статье исследован состав пробы артезианской воды, взятой с территории лаборатории ядерной физики Самаркандского государственного университета, на содержание природных (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) и техногенного ^{137}Cs радиоактивных изотопов методом сцинтилляционной гамма-спектрометрии с использованием кристалла NaI(Tl). Были измерены температура воды, показатель pH, жесткость и электрическая проводимость. Установлено, что концентрации радиоактивных элементов уранового и ториевого рядов в исследуемой воде не превышают предельно допустимых значений, установленных Службой санитарно-эпидемиологического благополучия и общественного здоровья (СанПиН). Также определена удельная активность радона-222, образующегося при α -распаде радия-226. Полученные результаты проанализированы с точки зрения экологической безопасности.

Ключевые слова: радиоактивность, изотоп, вода, уран (^{238}U), торий (^{232}Th), радий (^{226}Ra), радон (^{222}Rn), сцинтилляция, гамма-спектрометр.

CONCENTRATION OF NATURAL (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) AND ANTHROPOGENIC ^{137}Cs ISOTOPES IN ARTESIAN WATER

Abstract. In this article, the composition of an artesian water sample collected from the territory of the Nuclear Physics Laboratory of Samarkand State University was studied to determine the concentrations of natural (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) and anthropogenic ^{137}Cs radioactive isotopes using a NaI(Tl) crystal scintillation gamma spectrometer. The temperature, pH level, hardness, and electrical conductivity of the water sample were measured. It was found that the concentrations of radioactive elements belonging to the uranium and thorium series did not exceed the permissible limits established by the Sanitary and Epidemiological Safety and Public Health Service (SanPiN). The specific activity of radon-222 resulting from the α -decay of radium-226 was also determined. The obtained results were analyzed from the perspective of environmental safety.

Key words: radioactivity, isotope, water, uranium (^{238}U), thorium (^{232}Th), radium (^{226}Ra), radon (^{222}Rn), scintillation, gamma spectrometer.

Kirish. Radioaktiv elementlarning asosiy massasi tog' jinslarida, ayniqsa, magmatik jinslarda to'plangan. Shamollar, suvlar, temperatura va boshqa tabiat reagentlari ta'sirida tog' jinslari yemiriladi. Tog' jinslari yemirilganda Yer sirtida uran (^{238}U) va toriy (^{232}Th) ajralishi paydo bo'ladi. Toriy (^{232}Th) minerallari tabiat suvlarida uran (^{238}U)ga nisbatan juda kuchsiz eriydi. Shuning uchun toriy (^{232}Th) tabiat suvlarida kichik miqdorda aniqlanadi. Dengiz suvlarida o'rtacha $2 \cdot 10^{-9}$ % atrofida bo'ladi [3]. Uranning katta qismi eritmalar hosil qilib, ko'l, dengiz, okean suvlariga o'tadi va suvlarda erigan holda bo'ladi, qisman suvlar tagidagi cho'kmalarga o'tadi. Dengiz va okean suvlarida uran (^{238}U) miqdori deyarli doimiy bo'lib, $2 \cdot 10^{-6}$ g/l ga yaqin bo'ladi. Ayrim ko'l suvlarida uran (^{238}U) miqdori dengiz suvlaridagiga nisbatan bir necha o'n marta katta bo'lishi aniqlangan. Ariq suvlarida uran (^{238}U) miqdori o'rtacha 10^{-6} - 10^{-7} g/l ni tashkil qiladi. Tog' jinslari orasidan yoki uranli qazilmalar bo'lgan hududlardan oqib o'tadigan ariq suvlarida uran katta miqdorda ($1 \cdot 10^{-5}$ g/l) uchraydi. Buning sababi uranning katta miqdori (ba'zan $1 \cdot 10^{-3}$ g/l ga yetadi) bilan xarakterlanadigan yer osti suvlari bo'lib, ariq suvlariga ham o'z hissasini qo'shishidir [1, 2].

Suvlarning radioaktivligiga, ayniqsa, yer osti suvlarining radioaktivligiga radon (^{222}Rn) ahamiyatli darajada hissa qo'shadi. Radon (^{222}Rn) miqdorini bilgan holda suv tarkibidagi uran, radiy va ular yemirilishidan hosil bo'ladigan radioaktiv izotoplar miqdori, suvning radioaktivligi darajasi haqida ma'lumot olish mumkin. Suv, havo, oziq-ovqatlar orqali kishilar organizmiga o'tgan radioaktiv izotoplar yarim yemirilish davriga, organizmdan chiqarilish darajasiga bog'liq ravishda ichki nurlanish manbayi bo'lib qoladi. Kishilar yashash faoliyati davomida oladigan nurlanishlarning asosiy qismini tabiiy radionuklidlar yemirilishidan hosil bo'ladigan tabiiy radioaktiv nurlanishlardan oladi [3]. Kishilar oladigan nurlanish xavfsiz deb belgilangan chegaraviy miqdoridan ortib ketgan hollarda sog'lom organizmda patologik jarayonlar paydo bo'ladi. Hayot uchun xavfli bo'lgan turli xil kasalliklar, ya'ni saraton, bepushtlik, nasl, teri kasalliklari kelib chiqishiga sabab bo'ladi. Shuning uchun tabiat namunalari (suv, havo, o'simlik)ning radioaktivlik darajasini, uning o'zgarishini doimiy ravishda nazorat qilib borish kishilar sog'lig'ini muhofaza qilishda ekologik nuqtai nazardan muhim ahamiyat kasb etadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2025-yil 30-yanvardagi PF-16-son Farmoni bilan tasdiqlangan "O'zbekiston – 2030" strategiyasini "Atrof-muhitni asrash" va "Yashil iqtisodiyot" yilida amalga oshirishga oid davlat dasturi mamlakatimizda atrof-muhit muhofazasi va ekologik masalalar davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylanganini ifoda etish bilan birga, O'zbekistonda global ekologik tahdidlarga qarshi kurashishning o'ziga xos platformasi yaratilayotganidan darak beradi. Shu nuqtai nazardan, bugungi kunda suvlarning radioaktiv iflaslanganlik darajasini tekshirish, ichimlik suvlaridagi radionuklidlar miqdori belgilangan talab darajasida ekanligini aniqlash ham bugunning ahamiyatli vazifalaridan biridir. O'zbekiston Respublikasi hududida, xususan Samarqand viloyatida yerosti suvlaridan ichimlik suvi sifatida keng foydalaniladi. Bu suv manbalarining radioaktiv ifloslanishi darajasini aniqlash, aholining sog'lig'i uchun muhim ahamiyatga ega. Shu maqsadda, Yadro fizikasi laboratoriyasi hududida joylashgan artesian quduqdan olingan suv namunasi gamma-spektrometrik hamda radiometrik usulda tekshirildi.

O'lchash uslubining nazariyasi va qurilmasining tavsifi. Namunalarni tayyorlash. Suv namunalari Yadro fizikasi laboratoriyasi artesian quduq suvi namunasi 10 litr miqdorda olingan. Suv namunasi polietilin idishda (namuna nomi, namuna olingan joy, olingan vaqti va idish qadoqlangan vaqti) yozib olinadi. Olingan suv namunasi bir joydan ^{222}Rn uchun alohida va TRN va texnogen ^{137}Cs uchun alohida idishda olinadi va qadoqlanadi.

Tekshiriluvchi suvda radionuklidlarning konsentratsiyasi juda kichikligi sababli suv namunalari radionuklidlar aktivligini to'g'ridan - to'g'ri aniqlash samarasiz hisoblanadi. Qo'llaniluvchi usullar

qurilmalar sezgirlikiga bog'liq bo'lib, o'lchash aniqligini oshirish uchun bug'latish yo'li bilan 1:100-1:1000 proporsiyada namuna konsentratsiyasi oshiriladi [4].

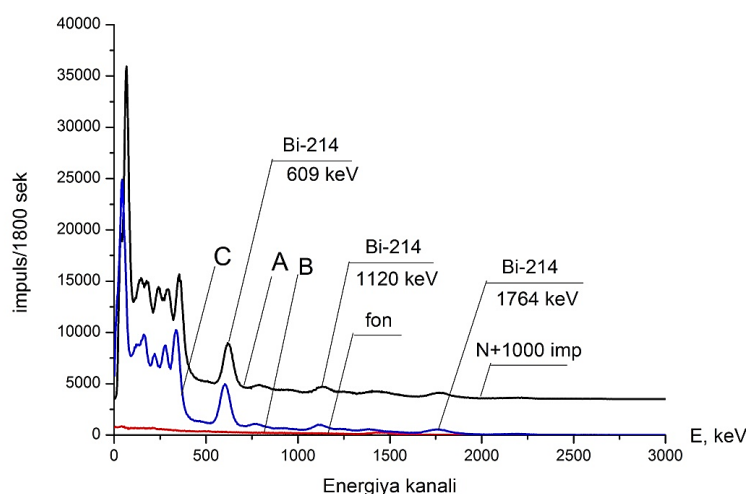
Ichimlik suvining radiatsion xavfsizligi bo'yicha qabul qilingan xalqaro normalarga asosan, aholining ichki nurlanish effektiv dozasi ichimlik suvi iste'moli (730 l/yil) ga bog'liq holda 0,1 mZv/yildan oshmasligi kerak. Shuningdek, ichimlik suvining α -aktivligi 0,5 Bk/l, yig'indi β -aktivligi esa 1 Bk/l dan oshmasligi lozim. Agar bu talablar bajarilsa, boshqa tadqiqotlarni o'tkazish zarurati qolmaydi. Yuqori mineralizatsiyali suvlarning radioaktivligi ularda uchrashi mumkin bo'lgan ^{226}Ra va ^{238}U izotoplari bilan bog'liq. Suvda radiy va uran miqdorini aniqlashda keng foydalaniladigan usullar α -spektrometrik usuli hisoblanadi. Bu usul qimmatbaho qurilmalarning mavjudligi va qiyin elektrokimyoviy cho'ktirish jarayonini talab qiladi. Suvda radiyning aniqlashda bajariladigan ancha oddiy usul γ -spektrometrik usuldir. Bunga radiy-bariy sulfati bilan birgalikda cho'ktiriladi. Usulning kamchiligi shundan iboratki, cho'lkmani radiyning yemirilishidan hosil bo'lgan elementlar bilan radioaktiv muvozanatga erishguncha saqlash zarurati hisoblanadi. Chunki, radiy bilan birgalikda uran ham cho'kadi va ^{235}U ning γ -chizig'i 185,7 keV bilan ^{226}Ra ning γ -chizig'i 186,2 keV ustma-ust tushadi. Bu esa chiziq bo'yicha radiy aktivligini aniqlash imkonini bermaydi, shuning uchun radiy va uranni elektrokimyoviy ajratishga asoslangan namuna tayyorlash usullaridan foydalaniladi.

Suvda radonning konsentratsiyasini aniqlash suvni yuzaga chiqarish joyi yaqinidan namuna olish zarur. Suv avval toza yuvilgan shisha idishda olinadi. Suvni olayotganda idishga gaz pufakchalarining tushmasligini kuzatish zarur. Suvni idish liq to'lguncha olish va idish og'zini mahkam yopish kerak. Sababi, radon gazi suvdan kuchli ajraladi. ^{222}Rn aktivligini aniqlash maqsadida olingan suv namunasini olish vaqti va o'lchash vaqti oralig'i ikki kundan $T_{1/2}(^{222}\text{Rn}) = 3,8$ kun) oshmasligi lozim.

Gamma-spektrometriya usullari qo'llanilganda tekshiriluvchi suv namuna olingan shisha idishdan ingichka polietilin (kembrik) shlang nay ($\varnothing 5$ mm) yordamida Marinelli idishi devori bo'ylab quyiladi. Idishning belgilangan chizig'igacha olinib, idish mustahkam qilib yopiladi va o'lchash namunasi sifatida ishlatiladi. O'lchash uchun tayyorlangan namunalar o'lchami $\varnothing 80 \times 80$ mm NaI(Tl) kristalli ssintillyatsion γ -spektrometrda 1800 sek davomida aktivligi tekshiriladi. Spektrometr ^{137}Cs ning 661 keV li monoenergetik γ -chizig'i uchun energetik ajrata olish qobiliyati 8,5% ni tashkil qiladi. Spektrometr standart ^{232}Th radionuklidi yordamida energiya bo'yicha gradiurovka qilingan. Namunalarni o'lchash davomida operator laboratoriya xonasi havosi harorati va nisbiy namligi bir xil sharoitda o'lchanmog'i lozim.

Gamma-spektrometrni tashkil etuvchilarga ajratish (2-rasm) va qayta ishlash [5] metodika (usullar) yordamida amalga oshiriladi. Eksperimental spektrdan radon tashkil etuvchisi – P spektrlar farqi bo'yicha ajratiladi:

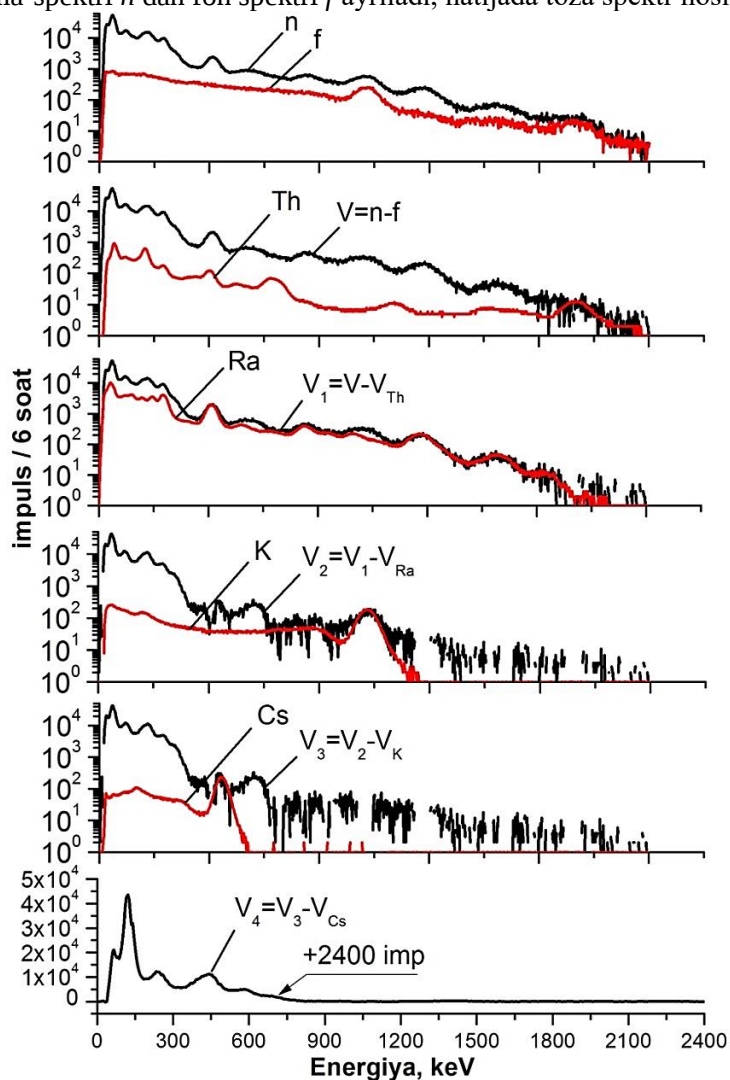
- tekshiruvchi – A va distirlangan (inert) – B hamda suv namunalari – C γ -spektri (1-rasmga qarang);
- $\Delta t = T_{1/2}(^{222}\text{Rn}) = 3,83$ kun saqlangandan so'ng o'lchash namunasi spektri;
- namunadagi ^{222}Rn aktivligi uning spektridan faqatgina 185,6 keV li γ -chizig'i mavjudligi sababli, farqlanuvchi ajratilgan tashkil etuvchisini P – etalon manba ^{226}Ra – E spektri bilan taqqoslash natijasida aniqlanadi.



1-rasm. Suv namunasining γ -spektri (tekshiruvchi – A, distirlangan (inert) – B hamda suv namunalari – C γ -spektri ^{222}Rn tashkil etuvchisi).

Suv namunasi tarkibidagi uran (^{235}U) γ -spektrometrik aniqlashda quyidagilar bajariladi:

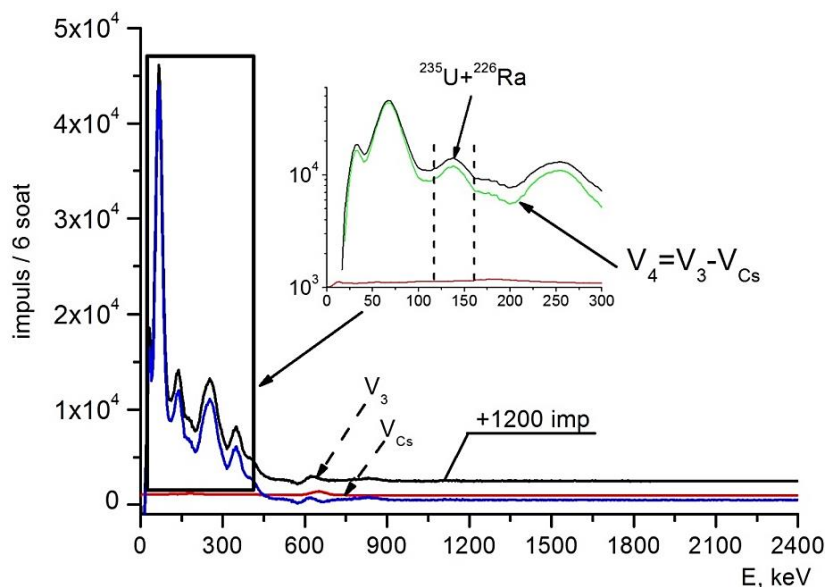
- olingan suv namunasi 10 dm^3 miqdorda, bunday suv miqdorini 1 dm^3 Marinelli idishi hajmigacha 70°C haroratda bug'lantiriladi;
- γ -spektrometrda namunani 6 soat davomida γ -spektri o'lchanadi hamda sof spektrni aniqlash uchun 6 soatlik ekspozitsiya vaqti bilan o'lchangan distirlangan suv spektri V ayriladi (2-rasm);
- suv tarkibidagi TRN ^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K , texnogen ^{137}Cs larning miqdori etalon OMACH (standart) manbalarining spektrlari bilan normallashtirib hisoblanadi. Etalon OMACH manbalari 3 xil zichlikda spektrlari 6 soat davomida o'lchab olinadi va o'lchangan spektrlar dasturiy ta'minot bazasiga joylashtiriladi;
- fon spektri sifatida quritilgan NaCl (osh tuzi) Marinelli idishiga solinib 6 soat davomida γ -spektri o'lchab olinadi;
- namunaning gamma-spektri n dan fon spektri f ayriladi, natijada toza spektr hosil bo'ladi $V = n - f$;



2-rasm. Suv namunasi γ -spektrlarini TRN tashkil etuvchilarga ajratish.

- toza gamma-spektr tarkibida TRN (^{226}Ra , ^{232}Th , ^{40}K) va ^{235}U va texnogen ^{137}Cs , mavjud. Namunalarning fondan tozalangan spektr tarkibidagi ^{232}Th radionuklididan hosil bo'ladigan barcha gamma-chiziqlarni zichligiga (massaga) tuzatma koeffitsiyent k ga ($k = m_{et} / m_0$) ko'paytirib spektr zichlik bo'yicha normallashtiriladi, keyin normallashtirilgan etalon va namuna spektrlaridagi ^{232}Th ning 2614 keV li fotocho'qqilari yuzalari S_0 , S_{et} topiladi, shu spektr yuzalari nisbati ($\alpha = S_{et}/S_0$) etalon manba hosil qilgan spektrga ko'paytirib normallashtiriladi;
- namuna spektri V dan normallashtirilgan ^{232}Th spektri V_{Th} ayriladi $V_1 = V - V_{Th}$, natijada namuna spektridan ^{232}Th ga tegishli barcha γ -chiziqlardan tozalanadi;
- har bir etalon (OMACH) manbai uchun yuqorida keltirilgandek, zichlik tuzatma koeffitsiyenti topiladi va spektrlar zichlik bo'yicha normallashtiriladi;
- zichlik bo'yicha normallashtirilgan ^{226}Ra etalon va namuna V spektridagi 1764 keV li fotocho'qqilar yuzalari hisoblab topiladi, shu spektrlar yuzalari nisbati ($\alpha = S_{et}/S_0$) etalon manba (^{226}Ra) hosil qilgan spektrga ko'paytirib normallashtiriladi – V_{Ra} ;

- ^{232}Th dan tozalangan namuna spektridan V_1 normallashtirilgan V_{Ra} γ -spektri ayriladi $V_2 = V_1 - V_{\text{Ra}}$, natijada namuna spektridan ^{226}Ra ga tegishi barcha chiziqlardan tozalanadi;
- zichlik bo'yicha normallashtirilgan ^{40}K etalon va namuna spektridagi 1460 keV li fotocho'qqilar yuzalarini hisoblab, ularning nisbatini ($\alpha = S_{\text{et}}/S_0$) etalon manba (^{40}K) hosil qilgan γ -spektrga ko'paytirilib normallashtiriladi – V_K ;
- ^{226}Ra dan tozalangan namuna spektridan – V_2 normallashtirilgan V_K γ -spektri ayriladi $V_3 = V_2 - V_K$, natijada namuna spektridan ^{40}K ga tegishi barcha chiziqlardan tozalanadi;
- zichlik bo'yicha normallashtirilgan ^{137}Cs etalon va namuna V spektridagi 661 keV li fotocho'qqilar yuzalari hisoblab, ularning nisbati ($\alpha = S_{\text{et}}/S_0$) etalon manba (^{137}Cs) hosil qilgan γ -spektrda ko'paytirilib normallashtiriladi – V_{Cs} ;
- ^{40}K dan tozalangan namuna spektridan – V_3 , normallashtirilgan – V_{Cs} γ -spektri ayriladi $V_4 = V_3 - V_{\text{Cs}}$, natijada namuna spektridan ^{137}Cs ga tegishi barcha chiziqlardan tozalanadi;



3-rasm. Suv namunasi tarkibidagi uran ^{235}U ning γ -spektrini ajratish.

- radiy (^{226}Ra) γ -chizig'i 186,2 keV va uran (^{235}U) 185,7 keV ni tashkil qiladi va fotocho'qqilar ustma-ust tushadi (3-rasmga qarang);
- namuna spektridan – V_4 uran (^{235}U) radionuklidi 185,7 keV li fotocho'qqi hosil qiladi;
- o'rganilayotgan suv namunasi tarkibidagi uran (^{235}U) miqdori (aktivligi) quyidagicha aniqlanadi:

$$A = \frac{S_{^{235}\text{U}}}{k \cdot \varepsilon \cdot t} \quad (1)$$

(2) formuladagi ε – effektivlikning energetik qiymati jihatidan yaqin bo'lgan (^{226}Ra) ning 186,2 keV li fotocho'qqisi orqali hisoblab topishimiz mumkin:

$$\varepsilon = \frac{S_{^{226}\text{Ra}(186,2\text{keV})} \cdot A_{^{226}\text{Ra}}}{k \cdot t} \quad (2)$$

bu yerda $S_{^{226}\text{Ra}(186,2\text{keV})}$ – OMACH etalon manbalaridagi ^{226}Ra ning 186,2 keV fotocho'qqining yuzasi, $A_{^{226}\text{Ra}}$ – ^{226}Ra OMASN etalon manbaining aktivligi (pasportining qiymatiga qarang), k – ^{226}Ra ning 186,2 keV γ -chizig'i uchun kvant chiqishi ($k = 1$).

Radionuklidlarning minimal detektorlash aktivligi (MDA) 2 soatlik o'lchashlar natijasida ^{226}Ra , ^{232}Th va ^{137}Cs uchun $A = 10 \text{ Bk/kg}$ va ^{40}K uchun $A = 40 \text{ Bk/kg}$ ni tashkil qiladi. Shu qiymatdagi MDA uchun namunalardagi TRN ning o'lchashdagi nisbiy xatoligi $\delta A_n = 10 \div 20\%$ tashkil qiladi.

Olingan tajriba natijalari va ularning muhokamasi.

O'lchangan suv namunasi tarkibidagi TRN (^{226}Ra , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K) va texnogen ^{137}Cs miqdori 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval.

PHYSICS

	Aktivlik $A \pm \Delta A$ (Bk/l)				
	^{226}Ra	^{238}U	^{232}Th	^{40}K	^{137}Cs
Artesian suvi	<1,6	-	<1,2	$0,67 \pm 0,20$	<0,05
JSST (UNSCEAR)	4,9-60,0	3,0	11,0-64,0	140,0-1700,0	-

O'lchangan artesian suvning asosiy xarakteristikasi 2-jadvalga keltirilgan

2-jadval.

	pH	EC, (mkCm/sm)	TDS, (mg/l)	T, $^{\circ}\text{C}$
Artesian suvi	6,5	966	715	22,3

Olingan natijalar muhokamasi. 1-jadvalda keltirgan natijalardan quyidagicha xulosa chiqarish mumkin Yadro fizikasi laboratoriyasi hududiga joylashgan artesian quduq suvi takibida tabiiy radionuklidlar miqdori JSST (UNSCEAR) belgilab qo'yilgan miqdordan ancha past ekanligi aniqlandi. Tabiiy radionuklidlardan faqat ^{40}K miqdori aniqlash chegarasidan yuqori ekanligini ko'rish mumkin. Suv tarkibida ^{238}U miqdori aniqlanmadi.

Suv namunasi tarkibidagi ^{40}K miqdori suvning minerallanish darajasiga bog'liq bo'lib, artesian suvining minerallanish darajasi 715 mg/l teng, shu sababli bunday suvlarning tarkibida K^+ , Na^+ , Mg^{2+} , Ca^{2+} kabi minerall elementlar mavjud, bu esa bunday suvlar tarkibida ^{40}K kabi tabiiy radionuklidlarning mavjudligidan darak beradi.

Tahlil natijalariga shuni ko'rsatdiki, radionuklidlar darajasi O'zbekiston Respublikasi Sanitariya-epidemiologik osoyishtalik va jamoat salomatligi xizmati (SanPiN) belgilab qo'yilgan chegaraviy qiymatdan past ekanligi ma'lum bo'ldi.

Xulosa o'rinda shuni aytishimiz mumkinki, Samarqand davlat universiteti, Yadro fizikasi laboratoriyasi hududidagi artesian quduq suvining radioaktivlik miqdori ancha past va xavfli darajada emas. Ushbu natijalar artesian suvini istemol qilishga yaroqli ekanligini tasdiqlaydi.

ADABIYOTLAR:

1. Bekjonov R.B. Atom yadrosi va zarralar fizikasi. – Toshkent: "O'qituvchi", 1995 – 86-92-bet.
2. Перцов Л.А. Ионизирующие излучения биосферы. – Москва: Атомиздат", 1973. – 34-40 стр.
3. Mo'minov A.T., Mo'minov T.M., Xolboev I., Axmedova G., Mamatqulov O.B. Atrof-muhit obyektlarini gamma-spektrometriya usullari bilan tadqiq qilish. Monografiya. – Toshkent: Vneshinvestprom, 2020. – 294 bet. ISBN 978-9943-6704-4-0.
4. Axmedova G. Radioaktivlik va uning ahamiyati. Monografiya. – Toshkent: Vneshinvestprom, 2020 – 186 bet.
5. Azimov A.N., Hushmuradov Sh.Kh., Muminov I.T., Muminov T.M., Osmanov B.S., Safarov A.N., Safarov A.A. Gamma-spectrometric determination of natural radionuclides and ^{137}Cs concentrations in environmental samples. The improved scintillation technique // Radiation Measurements. V. 43, Issue 1, January 2008, P. 66-71.

DATCHIKLARNING ASOSIY VA MAXSUS TAVSIFLARI

Axmedov Akbar Akramovich,

Qarshi davlat texnika universiteti Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti o‘qituvchisi.
akbarakramovich1111@gmail.com

Tursunov Alisher Ravshan o‘g‘li,

Qarshi davlat texnika universiteti Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti o‘qituvchisi.
alishertursunov260@gmail.com

Annotatsiya. Datchiklarning ishlash samaradorligini belgilovchi asosiy va maxsus metrologik tavsiflar chuqur yoritiladi. Har bir datchikning aniqligi, barqarorligi va funksional imkoniyatlari uning sezgirlik, aniqlik, o‘lchash diapazoni, tezkorlik, uzatish funksiyasi, chiziqlilik darajasi, gisterezis, qayta yaratiluvchanlik, o‘lik zona va yechish qobiliyati kabi ko‘rsatkichlari orqali tavsiflanadi. Datchikning kirish va chiqish signallari o‘rtasidagi bog‘lanish uzatish funksiyasi chiziqli, logarifmik, eksponensial yoki darajali ko‘rinishlarda bo‘lishi, uning real va ideal xatti-harakatlarini solishtirish orqali baholanishi, kalibrlash sikllari, bo‘lakli-chiziqli approksimatsiya, eng kichik kvadratlar uslubi va “eng yaxshi to‘g‘ri chiziq” metodi kabi matematik yondashuvlar orqali datchikning real o‘lchash tavsiflarini aniqlash metodlari yoritilgan.

Kalit so‘zlar: Gisterezis, nochiziqlilik, qayta yaratuvchanlik, o‘lik zona, qo‘zg‘atish signali, maxsus xarakteristikalar, chiqish impedansi, qo‘zg‘atish funksiyasi, statik baholash, statik xatolik.

ОСНОВНЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДАТЧИКОВ

Аннотация. В данной теме подробно раскрываются основные и специальные метрологические характеристики, определяющие эффективность работы датчиков. Точность, стабильность и функциональные возможности каждого датчика описываются через такие показатели, как чувствительность, погрешность, диапазон измерений, быстродействие, передаточная функция, степень линейности, гистерезис, воспроизводимость, мёртвая зона и разрешающая способность. Связь между входными и выходными сигналами датчика — передаточная функция — может иметь линейную, логарифмическую, экспоненциальную или степенную форму. Оценка характеристик датчика проводится путём сравнения его реального и идеального поведения. Также раскрыты методы определения реальных измерительных свойств датчика, такие как циклы калибровки, кусочно-линейная аппроксимация, метод наименьших квадратов и метод «наилучшей прямой».

Ключевые слова: гистерезис, нелинейность, воспроизводимость, мёртвая зона, возбуждающий сигнал, специальные характеристики, выходное сопротивление (импеданс), возбуждающая функция, статическая оценка, статическая погрешность.

BASIC AND SPECIAL DESCRIPTIONS OF SENSORS.

Abstract. The topic provides an in-depth explanation of the primary and special metrological characteristics that determine the performance of sensors. The accuracy, stability, and functional capability of each sensor are described through parameters such as sensitivity, accuracy, measurement range, response speed, transfer function, linearity, hysteresis, repeatability, dead zone, and resolution. The relationship between the input and output signals of a sensor—its transfer function—may take linear, logarithmic, exponential, or power-law forms. The evaluation of real versus ideal sensor behavior, as well as methods for determining the actual measurement characteristics of sensors, are explained through mathematical approaches such as calibration cycles, piecewise-linear approximation, the least squares method, and the “best straight line” technique.

Keywords: Hysteresis, nonlinearity, repeatability, dead zone, excitation signal, special characteristics, output impedance, excitation function, static evaluation, static error.

Kirish. Zamonaviy o‘lchash va boshqaruv tizimlarida datchiklar eng muhim bo‘g‘inlardan biri hisoblanadi. Har qanday avtomatlashtirilgan qurilma, nazorat-o‘lchash tizimi yoki intellektual texnologiya avvalo datchiklar orqali tashqi muhit haqidagi axborotni qabul qiladi. Datchikning qanchalik ishonchli, aniq va barqaror ishlashi butun tizimning samaradorligiga bevosita ta‘sir ko‘rsatadi. Shu bois datchiklarning

asosiy va maxsus tavsiflarini chuqur o'rganish zamonaviy metrologiya, avtomatika, elektronika va axborot texnologiyalari sohaları uchun dolzarb masalalardan biridir. Datchikning ishlash samaradorligi avvalo uning metrologik tavsiflari bilan belgilanadi. Ular ichida sezgirlik, aniqlik, o'lchash diapazoni, chiziqlilik (yoki nochiziqlilik), gisterezis, qayta yaratiluvchanlik, o'lik zona, yechish qobiliyati kabi ko'rsatkichlar alohida ahamiyatga ega. Shuningdek, datchikning kirish va chiqish signallari o'rtasidagi bog'lanishni ifodalovchi uzatish funksiyasi ham muhim nazariy tushuncha bo'lib, u datchikning ideal yoki real ishchi xatti-harakatini matematik va grafik shaklda tasvirlash imkonini beradi. Uzatish funksiyasining chiziqli yoki nochiziqli bo'lishi, bo'lakli-chiziqli yoki yuqori tartibli polinomlar bilan approksimatsiyalanishi datchikdan olinadigan ma'lumotlarning qay darajada aniq va qayta ishlashga qulayligini ko'rsatadi. Amaliyotda datchiklar faqat bitta tashqi ta'sirga emas, balki bir vaqtning o'zida bir nechta omillarga bog'liq bo'lishi mumkin. Masalan, infraqizil harorat datchiklarida chiqish signali nafaqat obyekt haroratiga, balki sezgir element yuzasining haroratiga ham bog'liq bo'ladi. Bunday hollarda uzatish funksiyasi ko'p o'lchamli ko'rinishga ega bo'lib, datchikni loyihalash va kalibrlash jarayonini yanada murakkablashtiradi. Shuningdek, datchikning to'yinish zonasi, nochiziqlilik darajasi, kalibrlash egri chizig'ini tanlash usullari (eng kichik kvadratlar, eng yaxshi to'g'ri chiziq va hokazo) ham o'lchash natijalarining ishonchliligini belgilovchi omillardan hisoblanadi. Datchiklarning maxsus tavsiflari qatoriga esa chiqish impedansi, qo'zg'atish signali talablari, spektral sezgirlik, konstruktiv o'lchamlari, og'irligi, energiya sarfi va ekspluatatsion ishonchliligi kiradi. Bu ko'rsatkichlar datchikning elektron sxemalar bilan mosligi, turli muhitlarda (havo, suv, agressiv muhit) ishlash imkoniyati hamda ma'lum sohada (tibbiyot, mudofaa sanoati, maishiy texnika va boshqalar) qo'llash maqsadga muvofiqligini belgilaydi. Shunday qilib, "Datchiklarning asosiy va maxsus tavsiflari" mavzusi datchiklarning nazariy va amaliy jihatlari kompleks o'rganishga xizmat qilib, o'lchash tizimlarining sifatini oshirish va ularni takomillashtirishda muhim metodik asos bo'lib xizmat qiladi.

Qo'llanilgan metodlar. Har qanday datchikning ishlash samaradorligi uning asosiy metrologik tavsiflari bilan aniqlanadi. Quyida datchiklarning eng muhim to'rt ko'rsatkichi — sezgirlik, aniqlik, o'lchash diapazoni va tezkorlik haqida batafsil ma'lumot beriladi. Sezgirlik (S) Datchik sezgirligi chiqish signalining kirish kattaligidagi o'zgarishga nisbati. Ya'ni, tashqi ta'sir (masalan, harorat, bosim, kuch) o'zgarganda chiqish elektr signali qanday tez o'zgarishini ko'rsatadi. Datchikka kirib kelgan kirish signali chiquvchi elektr signaliga aylanishidan oldin o'zgartirishlarning bir necha bosqichlari talab qilinishi mumkin. Misol tariqasida optik tolali bosim datchigini ko'rib chiqamiz. Datchikka ta'sir ko'rsatayotgan tashqi bosim tolali svetovodning (yorug'lik o'tkazgichining) deformatsiyasini chaqiradi. Bu o'z navbatida uning sindirish ko'rsatkichining o'zgarishiga olib keladi, buning oqibatida optik uzatish liniyasining tavsiflari o'zgaradi va fotonlar zichligining modulyatsiyalanishi sodir bo'ladi. Fotonlarning natijalovchi oqimi detektorlanadi va elektr tokiga aylanadi. Bunda datchiklar "Qora qutilar" ko'rinishida taqdim qilinadi, bu yerda faqatgina ularning kirishlari va chiqishlaridagi signallar o'rtasidagi o'zaro nisbatlar muhim bo'ladi. Datchikning metrologik xususiyatlarini baholashda gisterezisni aniqlash metodi (kirish signali ortishi va kamayishi uchun chiqish signallari farqini solishtirish), qayta yaraluvchanlikni baholash metodi (takroriy kalibrlash sikllarida olingan chiqish qiymatlarining maksimal farqini topish), o'lik zona va yechish qobiliyatini aniqlash metodi (kirish signali o'zgarganda chiqish signalida minimal sezilarli o'zgarish paydo bo'ladigan chegarani aniqlash) keltirilgan. Bundan tashqari, infraqizil harorat datchigi misolida ko'p omilli uzatish funksiyasi $V = G(T(b)^4 + T(s)^4)$ orqali ko'p o'lchamli funksional model tuzish metodi qo'llanadi. Datchikning chiqish va kirish impedanslarini moslashtirish, tokli va kuchlanishli ulanish sxemalarini tahlil qilish orqali elektrik moslashtirish va interfeys sxemasini hisoblash metodi qo'llanib, qo'zg'atish signali parametrlarining (tok, kuchlanish, chastota) uzatish funksiyasiga ta'siri nazariy tahlil qilinadi. Shu tariqa matnda datchiklarning sezgirlik, aniqlik, nochiziqlilik, gisterezis, qayta yaraluvchanlik, o'lik zona, yechish qobiliyati va elektr moslashuvini ilmiy asosda tavsiflash uchun nazariy model tuzish, kalibrlash, regressiya, approksimatsiya va chiziqlashtirish metodlari kompleks qo'llanilgan.

Olingan natijalar va ularning tahlili. Uzatish funksiyasi. Har bir datchik uchun uning kirishidagi va chiqishidagi signallarni bog'laydigan *ideal* yoki *nazariy* o'zaro nisbatni chiqarish mumkin. Agar datchikni ideal tarzda loyihalash, uni ideal materiallardan ideal uskunalar bilan tayyorlash mumkin bo'lganda edi, bunda barcha ishlar ideal xodimlar tomonidan bajarilsa, u holda bunday datchikning chiqishidagi signal har doim tashqi ta'sirning real qiymatiga mos kelgan bo'lar edi. Kiruvchi va chiquvchi signallar o'rtasidagi chiqarilgan ideal o'zaro nisbatni yoki jadval, yoki grafik, yoki matematik ifoda ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu ideal (nazariy) ifoda ko'pincha uzatish funksiyasi deb ataladi. Uzatish funksiyasi datchikning S chiqish elektr signali bilan x tashqi ta'sir o'rtasidagi o'zaro bog'lanishni o'rnatadi.

$$S=f(x)$$

Bu funksiya chiziqli bodishi ham, nochiziqli bodishi ham (masalan logarifmik, eksponensial yoki darajali) mumkin. Ko'pgina hollarda uzatish funksiyasi bir odchamli bodadi (ya'ni chiquvchi signalni faqatgina bitta tashqi ta'sir bilan bogdaydi). Bir odchamli chiziqli funksiyani quyidagi ko'rinishda taqdim qilish mumkin: $S = a + bs$. Bunda a - doimiy tarkib toptiruvchi (ya'ni chiquvchi signalning tashqi ta'sir nolga teng bodgandagi qiymati); b - to'g'ri chiziqning egilishi, u ko'pincha datchikning *sezgirligi* deb ataladi; S parametr - bu elektr signalining ma'lumotlar to'plash tizimi datchikning chiqish signali sifatida qabul qiladigan tavsifidir. Datchikning xususiyatlariga bogdiq ravishda bu amplituda, chastota yoki faza bodishi mumkin.

Logarifmik uzatish funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bodadi: $S = a + b \ln s$. Eksponensial uzatish funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $S = ae^{ks}$.

Darajali uzatish funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $S = a_0 + a_1 s^k$.

Bu yerda k - doimiy son.

Agar datchik yuqorida keltirilgan approksimatsion ifodalar bilan tavsiflanishning iloji bo'lmagan uzatish funksiyasiga ega bo'lsa, bunda yuqoriroq tartibli polinomial approksimatsiyalar qo'llaniladi.

Nochiziqli uzatish funksiyalari uchun b sezgirlik chiziqli bog'lanishlar holatidan farqli o'laroq, konstanta bo'lib hisoblanmaydi. Shu sababli kirish signalining har bir konkret qiymati uchun uni quyidagicha aniqlash mumkin:

Ko'pgina hollarda nochiziqli datchiklar chegaralangan qiymatlar diapazonining ichida chiziqli deb

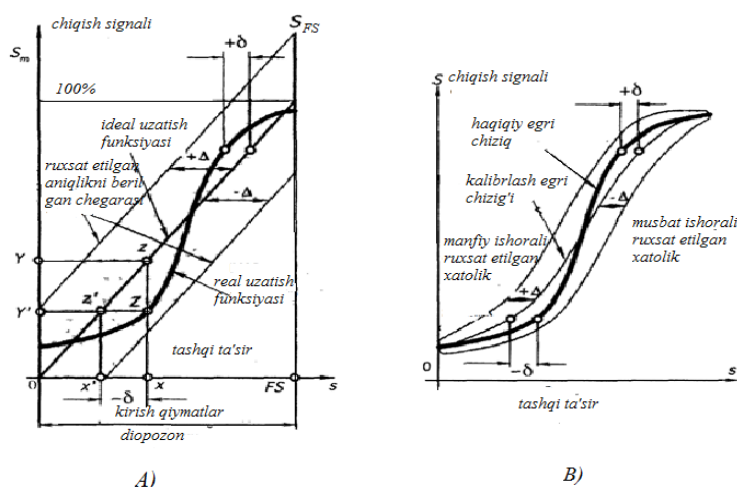
$$b = \frac{dS(s_0)}{ds}$$

hisoblanishi mumkin. Kengroq qiymatlar diapazoni uchun uzatish funksiyasi bir nechta to'g'ri chiziqlarning kesmalari ko'rinishida taqdim qilinadi. Bu bo'lakli-chiziqli approksimatsiya deb ataladi. Berilgan uzatish funksiyasini chiziqli bog'lanish ko'rinishida taqdim qilish mumkin bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlash uchun kirish signalini asta-sekin oshirib borish bilan chiziqli va real modellarda chiqish signalining farqlanishi kuzatiladi. Agar signallar farqi yo'l qo'yiladigan chegaralardan tashqariga chiqmasa, berilgan datchikning uzatish funksiyasini chiziqli deb hisoblash mumkin bo'ladi.

Datchikning kirish signaliga bir nechta tashqi ta'sirlar ta'sir ko'rsatadigan hollarda uning uzatish funksiyasi ko'p o'lchamli bo'lib qoladi. Ikki o'lchamli uzatish funksiyasiga ega bo'lgan datchikka infraqizil harorat datchigi misol bo'la oladi. Uning uzatish funksiyasi ikkita haroratni (T/b) - o'lchanadigan obyektning absolyut harorati va T_s - sensor elementi yuzasining absolyut harorati) V kuchlanish bilan bog'laydi.

$$V = G(T_b^4 + T_s^4)$$

Bunda G - konstanta. Ifodadan ko'rinib turibdiki, obyektning harorati bilan chiqish kuchlanishi o'rtasidagi bog'lanish (uzatish funksiyasi) faqatgina nochiziqli (to'rtinchi tartibli parabola) bo'lib qolmasdan, u shuningdek sezgir elementning yuzasidagi haroratga ham bog'liq bo'ladi.

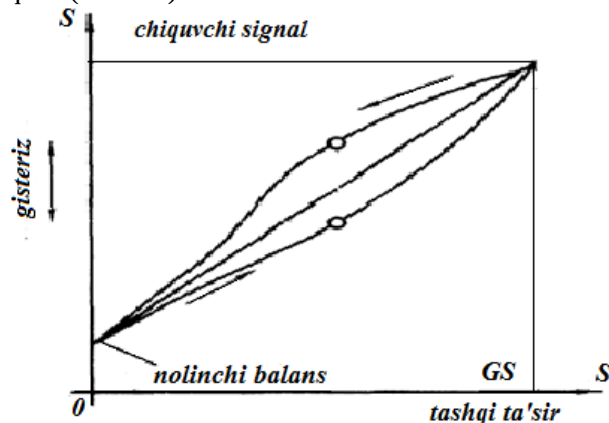


1-rasm. Uzatish funksiyasi (A) va yo'l qo'yiladigan xatoliklar chegaralari (B). Xatoliklar kirish qiymatlariga nisbatan aniqlangan

Datchiklarning aniqligiga gisterezis, o'lik zona, kalibrlash parametrlari, datchiklarning partiyadan partiyaga takrorlanuvchanligi, xatoliklarning qayta yaralishi kabi xarakteristikalar ta'sir ko'rsatadi, ular

keyingi bo'limlarda ko'rib chiqiladi. Eng chekka yo'l qo'yiladigan xatoliklar odatda datchiklarning eng yomon ishchi xarakteristikalariga to'g'ri keladi. 1 B-rasmdan ko'rinib turibdiki, kalibrlash aniqroq bajarilganda (masalan, kalibrlash ko'p sonli nuqtalarda o'tkazilganda) kalibrlash egri chizig'i real uzatish funksiyalariga yaqinroqdan o'tadi, bu o'lchashlar aniqligining oshganligini bildiradi. Amaliyotda yo'l qo'yiladigan xatoliklarning chegaralari ideal uzatish funksiyalarning atrofida emas, balki kalibrlash egri chiziqlariga nisbatan o'rnatiladi.

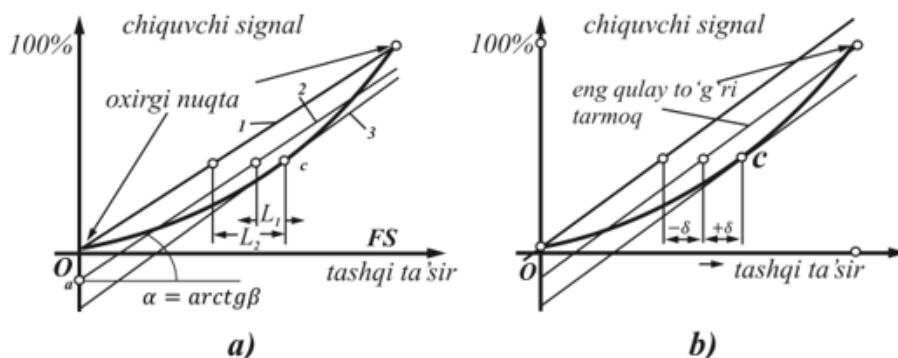
Gisterezis – bu xuddi o'sha bitta kirish signali uchun uning ortishida va kamayishida olingan chiqish signallari qiymatlarining farqidir (2- rasm).



2-rasm. Gisterezisga ega bo'lgan uzatish funksiyasi

Nochiziqlilik deganda – real uzatish funksiyasining approksimatsiyalaydigan to'g'ri chiziqdan L maksimal chetlashishi tushuniladi. “Chiziqlilik” deganda aslida “nochiziqlilik” tushuniladi. Kalibrlashning bir nechta sikllarini o'tkazishda nochiziqlilikning olingan qiymatlaridan eng yomoni tanlanadi. Nochiziqlilik odatda yoki maksimal kirish signalidan foizlarda yoki o'lchanadigan kattalikning birliklarida (masalan, kPa yoki $^{\circ}\text{C}$) ifodalanadi. Approksimatsiya chizig'ini o'tkazish usuliga bog'liq ravishda chiziqlashtirishning bir nechta tipi farqlanadi. Bu usullardan biri – to'g'ri chiziqni uzatish funksiyasining oxirgi nuqtalari orqali o'tkazishdir. Buning uchun avval eng katta va eng kichik tashqi ta'sirlarga mos keladigan chiqish qiymatlari aniqlanadi, shundan keyin bu nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkaziladi (1 chiziq).

Bunday chiziqlashtirishda nochiziqlilik xatosi oxirgi nuqtalarda minimal va ularning oralig'ida qayerdadir maksimal bo'ladi. Boshqa bir chiziqlashtirish usuli eng kichik kvadratlar uslubini qo'llashga asoslanadi (3A rasmda 2 chiziq). Buning uchun o'lchanadigan kattaliklarning keng diapazonida (eng yaxshisi to'liq diapazonida) S tashqi ta'sirlarning bir qator qiymatlari (n) uchun S chiqish signallari o'lchanadi. Shundan keyin chiziqli repressiya formulasini qo'llash bilan a va b koeffitsiyentlarning qiymatlari aniqlanadi:



3-rasm. Nochiziqli uzatish funksiyasini a) chiziqli approksimatsiyalash va b) mustaqil chiziqlashtirish

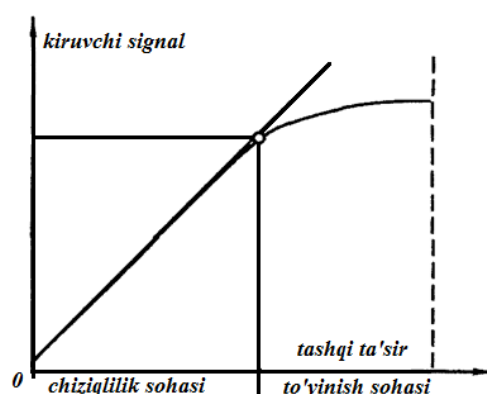
Amaliyotda, ba'zi bir hollarda kirish signallarining tor diapazonida chiziqlashtirishning katta aniqligi talab qilinishi mumkin. Masalan tibbiyot termometrlari 37°C ... 38°C diapazonda oshirilgan aniqlikka ega bo'lishi lozim. Bu zonadan tashqarida aniqlik biroz pastroq bo'lishi mumkin. Bunday holda kalibrlash aniqlik talab qilinadigan tor sohada o'tkaziladi, shundan keyin S kalibrlash nuqtasi orqali approksimatsiyalash chizig'i o'tkaziladi (3A rasmda 3 chiziq). Bunday protsedura natijasida eng kichik nochiziqlilik qiymatiga kalibrlash nuqtasi zonasida erishiladi, o'lchashlar diapazonining oxirlariga yaqin joylarda esa chiziqlilik sezilarli darajada yomonlashadi.

$$\delta_a = a_1 - a = \frac{\Delta}{s_2 - s_1}$$

Rasmdan ko‘rinib turibdiki, mazkur uslubda approksimatsiya chizig‘i ko‘pincha uzatish funksiyasiga s kalibrlash nuqtasida tegib o‘tadigan urinma bo‘lib hisoblanadi. Agar real uzatish funksiyasi uchun ifoda ma‘lum bo‘lsa, bu chiziqning egilishini tenglama bo‘yicha topish mumkin.

Mustaqil chiziqlashtirish uslubi ko‘pincha “eng yaxshi to‘g‘ri chiziq uslubi” deb ataladi (4B-rasm). U bir-biriga mumkin qadar yaqin joylashgan va real uzatish funksiyasining barcha chiqish qiymatlarini qamrab oladigan ikkita parallel to‘g‘ri chiziqning o‘rtasidan o‘tadigan to‘g‘ri chiziqni topishdan iborat bo‘ladi. Chiziqlashtirish uslubiga bog‘liq ravishda approksimatsiyalaydigan chiziqlar turlicha a va b koeffitsiyentlarga ega bo‘ladi. Shundan kelib chiqqan holda, turlicha usullar bilan olingan nochiziqlik qiymatlari bir-biridan jiddiy farq qilishi mumkin.

Har bir datchik o‘zining ishchi xarakteristikalarining chegaralariga ega bo‘ladi. U hatto chiziqli bo‘lib hisoblangan taqdirda ham, tashqi ta‘sirning ma‘lum bir darajasida uning tashqi signali keltirilgan chiziqli bog‘lanishga javob bera olmay qoladi. Bunday holda datchik nochiziqlik zonasiga yoki to‘yinish zonasiga kirdi deyiladi (4- rasm).

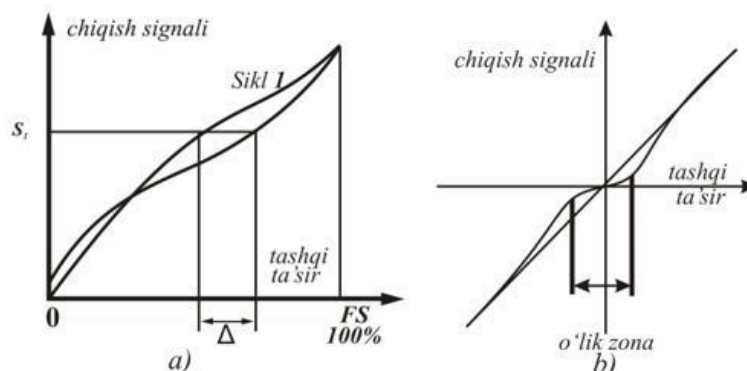


4- rasm. To‘yinishga ega bo‘lgan uzatish funksiyasi

Qayta yaratuvchanlik datchikning bir xil shart-sharoitlarga amal qilinganda bir xil natijalarni bera olish qobiliyatidir. Natijalarning qayta yaraluvchanligi datchikning kalibrlashning ikkita siklida olingan chiqish qiymatlarining maksimal farqi bo‘yicha aniqlanadi (5-A rasm). U, odatda, kirish signalining maksimal qiymatidan foizlarda ifodalanadi:

$$\delta_r = \frac{\Delta}{FS} \times 100\%$$

Natijalarning yomon qayta yaralishining sabablari ko‘pincha quyidagilar bo‘lib hisoblanadi: issiqlik shovqini, yuzadagi zaryadlar, materiallarning plastikliki va hokazolar.



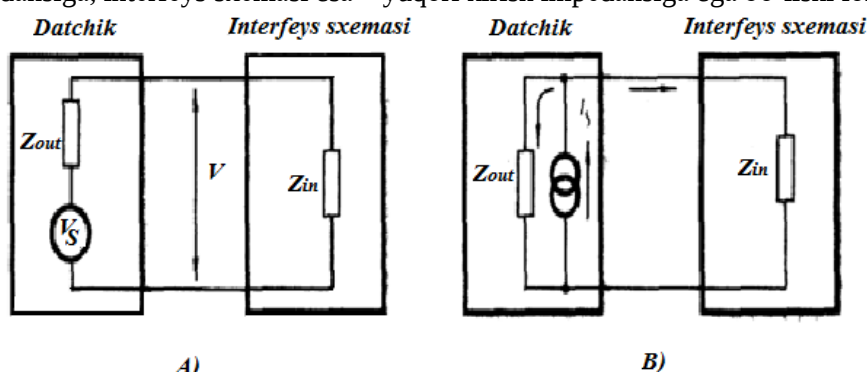
5-rasm. a – qayta yaratuvchanlik xatoligi: xuddi o‘sha bitta chiqish signaliga turli tashqi ta‘sirilar mos keladi. b – uzatish funksiyasidagi o‘lik zona

O‘lik zona kirish signallarining ma‘lum bir diapazonida datchikning sezmasligidir (5B-rasm). Bu zona oralig‘ida chiqish signali deyarli o‘zgarmas bo‘lib qolaveradi (ko‘pincha nolga teng bo‘ladi). Bunga

qo'shimcha ravishda har qanday signalni raqamli kodga aylantirishda uning mayda zinalarga bo'linishi sodir bo'ladi, bu zinalarning har biriga konkret qiymat to'g'ri keladi. Kirish signalining ma'lum bir sharoitlarda datchikning chiqish signalida minimal zina paydo bo'lishiga olib keladigan o'zgarish kattaligi *datchikning yechish qobiliyati* deb ataladi.

Ba'zi bir datchiklar uchun kirish signallarining maxsus xarakteristikalarini ko'rsatish zarur bo'ladi. Masalan yoritilganlik detektorlari uchun uning chegaralangan optik polosa oralig'ida sezuvchanligi shunday xarakteristika bo'lib hisoblanadi. Shundan kelib chiqqan holda, bunday datchiklar uchun spektral xarakteristikalarini aniqlash zarur bo'ladi.

Zout chiqish impedansi datchik elektron sxema bilan qanchalik oson muvofiqlasha olishini ko'rsatuvchi xarakteristika bo'lib hisoblanadi. Datchikning chiqish impedansiga mos keladigan qarshilik elektron sxemaning *Zin* kirish impedansini xarakterlaydigan qarshilikka parallel qilib (potensial ulanish) yoki u bilan ketma-ket (tokli ulanish) ulanadi. Har ikkala ulash varianti 6-rasmda ko'rsatilgan. Odatda kirish va chiqish impedanslari majmuaviy ko'rinishda taqdim qilinadi, chunki ular, qoidaga ko'ra, aktiv va reaktiv tarkibiy qismlarni o'z ichiga oladi. Datchikning chiqish signalining og'ishini minimallashtirish uchun tokli chiqishga ega bo'lgan datchik (6B-rasm) maksimal mumkin bo'lgan chiqish impedansiga, uning interfeys sxemasi esa – minimal kirish impedansiga ega bo'lishi lozim. Potensial ulash holatida (6A-rasm) datchik past chiqish impedansiga, interfeys sxemasi esa – yuqori kirish impedansiga ega bo'lishi lozim.



6-rasm. Datchikning interfeys sxemasi bilan ulanishi. A) – kuchlanish ko'rinishidagi chiqish signaliga ega bo'lgan datchik, B) – tokli chiqish signaliga ega bo'lgan datchik

Qo'zg'atish signali – bu aktiv datchikka ishlash uchun zarur bo'ladigan elektr signalidir. Qo'zg'atish signali kuchlanish yoki tok intervali bilan tasvirlanadi. Datchiklarning ba'zi bir tiplari uchun qo'zg'atish signalining chastotasi va uning turg'unligini ko'rsatish zarur bo'ladi. Qo'zg'atish signalining ko'rsatilgan chegaralardan tashqariga chiqishi datchikning uzatish funksiyasining o'zgarishiga va shundan kelib chiqqan holda chiqish signalining og'ishiga olib kelishi mumkin. Qo'zg'atish signalini tasvirlashga misol keltiramiz:

Termistor orqali oqib o'tadigan maksimal tok:

Qarshiliksiz havoda.....– 50 mKA;

Suvda– 200 mKA.

Turli sohalarida qo'llash mumkin bo'lishi uchun datchiklarning quyidagi xarakteristikalari muhim bo'ladi: ularning *konstruksiya, og'irligi va gabaritlari*. Agar datchiklar uchun aniqlik va ishonchlik bosh parametrlar bo'lib hisoblansa, uning narxi kabi xarakteristikasi ikkinchi planga chekinadi. Agar qurilma, yashashni ta'minlash tizimlari, mudofaa sanoati yoki fazoviy kemalar uchun mo'ljallangan bo'lsa, ularning narxining qimmatligi har doim aniqlik va ishonchlik bo'yicha qo'yiladigan talablar bilan oqlanadi. Biroq datchiklar qo'llaniladigan bir qator sohalar borki – bunda ularning narxi asosiy xarakteristika bo'lib hisoblanadi.

ADABIYOTLAR:

1. Toirov A., Qodirov Sh., "Metrologiya, standartlashtirish va sertifikatlash" Toshkent. "Fan va texnologiya", 2019. Darslik
2. Karimov A., Ismailov O. "Elektr o'lchash asboblari va o'zgartkichlari" Toshkent 2016.
3. Qurbonov H. "O'lchash texnikasi asoslari" Toshkent. "Navoiy nomidagi universitet nashriyoti", 2020.
4. Raxmatov H.R. "Metrologiya va o'lchash qurilmalari". Toshkent. "Talqin", 2018.
5. Yusupov A., Maxmudov E. "O'lchash vositalarining tuzilishi va ishlash prinsiplari" Toshkent. "Iqtisodiyot va fan", 2021.

PHYSICS

6. Ernest O. Doebelin, *“Measurement Systems: Application and Design”* McGraw-Hill, 2017 (6th Edition).
7. Vijayaraghavan G.K., R.Rajappan., *Engineering Metrology and Measurements.*, For 5th Semester Mechanical and Automobile Engineering (As per the Latest Anna University Syllabus - Reg., 2008.
8. Dj. Frayden. *Handbook of modern sensors.* /Springer-Verlag New York, Inc., 2015.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЁХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ОБРАТНОЙ СТУПЕНЬКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ LES-МОДЕЛИ

Мадалиев Муродил Эркинжон угли,

Ферганский государственный технический университет Фергана, Узбекистан
Madaliev.me2019@mail.ru,

Носирова Намунабону Азамат кизи,

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
nosirova.namunabonu@mail.ru,

Муҳаммадқубов Хусанбой Элмурод угли,

Ферганский государственный технический университет Фергана, Узбекистан
xusanboy.muhammadyoqubov@mail.ru

Аннотация. В работе выполнено трёхмерное численное моделирование турбулентного течения за обратной ступенькой при числе Рейнольдса $Re_H=36,000$ с использованием модели крупных вихрей (LES). Расчёты проводились в программном комплексе ANSYS Fluent с применением подрешёточной модели WALE, обеспечивающей корректное воспроизведение нестационарных вихревых структур и зон рециркуляции. Построена трёхмерная гексагональная сетка с локальным сгущением вблизи стенок ($y^+ \approx 1$) и в области отрыва потока. На основе полученных численных данных выполнен анализ полей скорости, изолиний и векторов течения, распределений коэффициентов давления C_p и трения C_f , а также профилей средней скорости и компонентов Рейнольдсовых напряжений в различных продольных сечениях ($x/H=1,4,6$). Результаты LES-моделирования демонстрируют характерные особенности отрывного течения за ступенькой: наличие зоны обратных скоростей, развитие крупномасштабных вихрей и область повторного присоединения потока на расстоянии около $x/H \approx 6.2$. Полученные поля и распределения подтверждают высокую точность и эффективность LES-подхода для исследования трёхмерных турбулентных течений.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, отрывное течение, модель LES, Ansys Fluent.

LES MODELIDAN FOYDALANGAN HOLDA TESKARI BOSQICH ORTIDAGI UCH O'LCHOVLI OQIMNING RAQAMLI SIMULYATSIYASI

Annotatsiya. Ishda katta vorteks (les) modelidan foydalangan holda Reynolds $Re_H=36,000$ raqami bilan teskari pog'onaning orqasida turbulent oqimning uch o'lchovli raqamli simulyatsiyasi amalga oshirildi. Hisob-kitoblar ANSYS Fluent dasturiy majmuasida wale pastki panjara modelidan foydalangan holda amalga oshirildi, bu esa statsionar bo'lmagan vorteks tuzilmalari va qayta ishlash zonalarining to'g'ri takrorlanishini ta'minlaydi. Ishda katta vorteks (les) modelidan foydalangan holda Reynolds $Re_H=36,000$ raqami bilan teskari pog'onaning orqasida turbulent oqimning uch o'lchovli raqamli simulyatsiyasi amalga oshirildi. Hisob-kitoblar ANSYS Fluent dasturiy majmuasida wale pastki panjara modelidan foydalangan holda amalga oshirildi, bu esa statsionar bo'lmagan vorteks tuzilmalari va qayta ishlash zonalarining to'g'ri takrorlanishini ta'minlaydi. Devorlar yaqinida ($y^+ \approx 1$) va oqim uzilishi sohasida lokal qalinlashgan uch o'lchamli olti burchakli to'r qurilgan. Olingan raqamli ma'lumotlar asosida tezlik maydonlari, oqim izolinlari va vektorlari, bosim va ishqalanish koeffitsientlarining taqsimotlari, shuningdek, turli uzunlamasina bo'limlarda ($x/H=1,4,6$) Reynolds kuchlanishining o'rtacha tezlik profillari va tarkibiy qismlari tahlil qilindi. Olingan raqamli ma'lumotlar asosida tezlik maydonlari, oqim izolinlari va vektorlari, bosim va ishqalanish koeffitsientlarining taqsimotlari, shuningdek, turli uzunlamasina bo'limlarda ($x/H=1,4,6$) Reynolds kuchlanishining o'rtacha tezlik profillari va tarkibiy qismlari tahlil qilindi. LES simulyatsiyasi natijalari pog'onadan tashqarida uzilish oqimining o'ziga xos xususiyatlarini namoyish etadi: teskari tezlik zonasining mavjudligi, keng ko'lamli girdoblarning rivojlanishi va oqimning qayta ulanish maydoni $x/H \approx 6.2$ atrofida. Olingan maydonlar va taqsimotlar uch o'lchovli turbulent oqimlarni o'rganish uchun LES yondashuvining yuqori aniqligi va samaradorligini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: Navier–Stokes tenglamalari, avulsion oqim, les modeli, Ansys Fluent.

NUMERICAL SIMULATION OF THE THREE-DIMENSIONAL FLOW BEHIND THE REVERSE STEP USING THE LES MODEL

Abstract. The paper presents a three-dimensional numerical simulation of the turbulent flow beyond the reverse step at the Reynolds number $Re_H=36,000$ using the large vortex model (LES). The calculations were performed in the ANSYS Fluent software package using the WALE subgrid model, which ensures the correct reproduction of unsteady vortex structures and recirculation zones. A three-dimensional hexagonal grid with local condensation near the walls ($y^+ \approx 1$) and in the area of flow separation is constructed. Based on the numerical data obtained, the analysis of velocity fields, isolines and flow vectors, distributions of pressure and friction coefficients, as well as profiles of average velocity and components of Reynolds stresses in various longitudinal sections ($x/H=1,4,6$) is performed. The results of the LES simulation demonstrate the characteristic features of the separation flow beyond the step: the presence of a zone of reverse velocities, the development of large-scale vortices, and the area of flow reconnection at a distance of about $x/H \approx 6.2$. The obtained fields and distributions confirm the high accuracy and efficiency of the LES approach for studying three-dimensional turbulent flows.

Keywords: Navier–Stokes equations, separation flow, LES model, Ansys Fluent.

Введение. Течение за обратной ступенькой (backward-facing step, BFS) является одним из наиболее изученных и в то же время сложных примеров отрывного турбулентного потока. Данная задача служит эталонной для проверки и валидации численных методов вычислительной гидродинамики (CFD) и моделей турбулентности, так как включает основные элементы реальных течений — отделение, рециркуляцию и повторное присоединение потока [1–2].

Впервые экспериментальные исследования течения за обратной ступенькой были подробно проведены Driver и Seegmiller (NASA, 1985) [3], где были получены данные по структуре скорости, давлению и турбулентным напряжениям при числе Рейнольдса $Re_H=36,000$. Эти результаты впоследствии стали классическим эталоном для численных исследований, включая RANS, LES и DNS моделирование. Традиционные модели осреднённых уравнений Навье–Стокса (RANS), такие как $k-\varepsilon$, $k-\omega$ и модели Рейнольдсовых напряжений (RSM), не всегда способны адекватно воспроизводить нестационарную структуру вихрей и взаимодействие сдвигового слоя с зоной рециркуляции. В отличие от них, модель крупных вихрей (LES) позволяет явно разрешать крупномасштабные нестационарные вихревые образования и лишь приближённо моделирует мелкомасштабные флуктуации. Это обеспечивает более точное описание динамики турбулентного течения, особенно в областях с сильной нестационарностью и отрывом потока [4–5].

В настоящей работе выполнено трёхмерное численное моделирование течения воздуха за обратной ступенькой при $Re_H=36,000$ с использованием подрешёточной модели WALE (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity), реализованной в программном комплексе ANSYS Fluent. Исследование направлено на получение детальной картины течения, включая поля средней скорости, изолинии и векторы скорости, распределения коэффициентов давления и трения, а также изменение компонент Рейнольдсовых напряжений в различных продольных сечениях [8–12].

Полученные результаты предназначены для анализа характеристик отрывного турбулентного течения и оценки возможностей LES-моделирования при решении трёхмерных задач гидродинамики без привлечения экспериментальных данных. Работа является частью комплексных исследований по верификации численных методов моделирования турбулентных течений и может быть использована для дальнейшего сравнения с RANS и DNS подходами.

Физический постановка задачи. Представленные данные взяты из работы Driver, D. M. and Seegmiller [3]. Этот случай также служит тестовым примером, включённым в базу данных ERCOFTAC, и широко применяется в рамках семинаров по моделированию турбулентных потоков. В данной задаче турбулентный пограничный слой взаимодействует с резким отклонением, что приводит к отрыву потока. После этого поток вновь прикрепляется и восстанавливается за ступенью. Число Рейнольдса, рассчитанное на основе толщины импульсного слоя перед ступенькой, равно 5000, что соответствует числу Рейнольдса порядка 36 000 при расчёте с учётом высоты ступени H . Перед ступенью толщина пограничного слоя составляет приблизительно 1,5 H (см. рис. 1). Граничные условия, используемые для моделирования методом CFD, представлены на следующем рис.1.

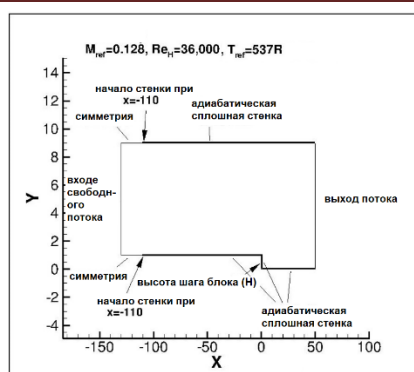


Рис. 1. Граничные условия 2D-шаг с обратным направлением

Математический постановка задачи. Для численного моделирования турбулентных течений в рамках подхода LES (Large Eddy Simulation) в настоящей работе использована модель подрешёточного масштаба WALE (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity). Данная модель обеспечивает высокую точность при разрешении крупных вихрей и адекватно адаптируется к прибрежным областям, что делает её особенно эффективной для задач с наличием стенок и резких градиентов скорости. В модели WALE турбулентная вязкость подрешёточного масштаба рассчитывается на основе локальных градиентов скорости, с учётом как вращательных, так и деформационных характеристик потока. Это позволяет модели точно воспроизводить поведение вихревых структур как в объёме, так и вблизи твёрдых границ, в отличие от классической модели Смогоринского. В настройках расчёта активирована опция Optimized LES Numerics, обеспечивающая использование численно устойчивых схем, оптимизированных для LES, что способствует повышению точности и стабильности решения. Опция Near Wall RANS Layer (WMLES) в данной работе отключена, поскольку моделирование осуществляется с достаточным пространственным разрешением вблизи стенок, без необходимости использования гибридного подхода.

LES основывается на фильтрованных уравнениях Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Основная идея — разделить поток на разрешённые (крупномасштабные) и нерешённые (мелкомасштабные) компоненты путём пространственной фильтрации.

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j}. \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{u}_i$ - фильтрованные компоненты скорости, $\bar{p}$ - фильтрованное давление, F_i - внешняя сила, τ_{ij}^{SGS} — тензор подрешёточных напряжений (Subgrid Scale Stresses), моделирующий влияние мелкомасштабных вихрей.

Моделирование подрешёточного тензора напряжений (SGS):

$$\tau_{ij}^{SGS} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (2)$$

Так как τ_{ij}^{SGS} неизвестен, он моделируется через турбулентную подрешёточную вязкость:

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tau_{kk}^{SGS} \delta_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij}. \quad (3)$$

где: ν_t — подрешёточная (турбулентная) вязкость; $\bar{S}_{ij}$ — тензор скоростей деформации:

Основные формулы модели WALE турбулентная вязкость подрешёточного масштаба:

$$\nu_t = (C_w \Delta)^2 \cdot \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}. \quad (4)$$

Эта вязкость моделируется, как правило, с использованием моделей типа Смогоринского [8]:

Расчетная сетка. На рис.2 представлена трёхмерная гексагональная расчётная сетка, построенная для моделирования течения за обратной ступенькой с применением модели крупномасштабных вихрей (LES).

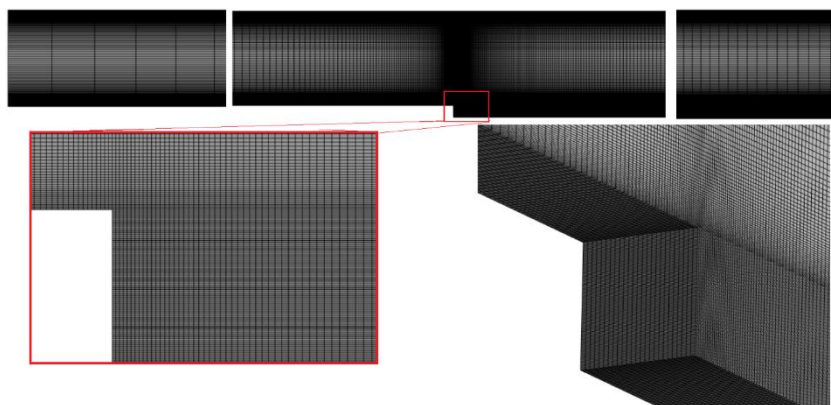


Рис.2. Трёхмерная гексагональная расчётная сетка

Геометрия расчётной области включает участок до ступеньки, саму ступеньку и проточную часть за ней. Общее количество ячеек составило 1 856 250, при этом все элементы — гексагональные (hexahedral cells). Такая структура сетки обеспечивает высокую точность аппроксимации и устойчивость решения при моделировании турбулентных структур в зоне отрыва и повторного присоединения потока. Сетка включает следующие граничные зоны: Зоны 1 и 8 — стенки (wall faces), всего 76 750 + 20 000 граней; Зона 6 — входное сечение (velocity-inlet), 3 875 граней; Зона 7 — выходное сечение (pressure-outlet), 3 875 граней; Зона 9 — плоскости симметрии (symmetry faces), 74 250 граней; Зона 2 — внутренние грани (interior faces), 5 479 375. Общее количество узлов — 1 946 256. Как видно на увеличенном фрагменте, в области ступеньки и вдоль прилегающих стенок шаг сетки локально сгущён для точного разрешения пограничного слоя и вихревых структур. Минимальный размер ячейки выбран таким образом, чтобы безразмерная координата $y^+ \approx 1$, что соответствует требованиям wall-resolved LES. В области отрыва и рециркуляции потока сетка имеет повышенное пространственное разрешение, что позволяет корректно воспроизводить динамику крупных вихревых образований и градиенты скорости. Таким образом, построенная трёхмерная расчётная сетка удовлетворяет всем критериям для проведения LES-моделирования течения за обратной ступенькой и обеспечивает надёжную основу для анализа аэродинамических характеристик.

Метод решения. Численное моделирование проводилось с использованием нестационарного давления-базирующего решателя (Pressure-Based Transient Solver) в программном комплексе ANSYS Fluent. Для описания течения применялось полное трёхмерное нестационарное решение уравнений Навье–Стокса в форме фильтрованных уравнений LES. Расчёты выполнялись в абсолютной системе скоростей с постоянной плотностью и без учёта силы тяжести. Схема связи давления и скорости реализована по алгоритму SIMPLE, а аппроксимация градиентов осуществлялась методом наименьших квадратов (Least Squares Cell Based). Для давления использовалась вторая порядок точности (Second Order), а для уравнений импульса — схема ограниченного центрального разностного типа (Bounded Central Differencing), обеспечивающая высокую точность при моделировании крупномасштабных вихрей. Временная дискретизация производилась по неявной схеме второго порядка (Second Order Implicit), что позволило обеспечить устойчивость при малых временных шагах. Для повышения сходимости расчёта значения факторов недорелаксации задавались как: давление — 0.3, импульс — 0.7, плотность и массовые силы — 1.0. Временной шаг выбирался $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ с при максимальном числе итераций 20 на шаг. Общее число шагов расчёта составило 50 000, что соответствует физическому времени порядка 0.25 с. В ходе вычислений была активирована функция Data Sampling for Time Statistics, позволившая накопить и усреднить поля средней скорости, давления и компонент Рейнольдсовых напряжений после выхода решения на квазистационарный режим. Расчёты выполнялись с использованием графического процессора (GPU) NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti. Общее время вычислений составило 28 часов 40 минут, что обусловлено высокой размерностью расчётной области и необходимостью точного разрешения мелкомасштабных вихревых структур при LES-моделировании.

Результаты расчета и их обсуждение. Распределение коэффициента поверхностного давления на стенке канала характеризуется изменением давления на его поверхности в зависимости от расстояния от некоторой точки.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5 \rho U_0^2}$$

где p - давление в точке на поверхности профиля, p_∞ - давление свободного потока, ρ - плотность свободного потока, U_0 - скорость свободного потока.

Коэффициент поверхностного трения C_f определяется как отношение силы трения, действующей на поверхность профиля, к динамическому давлению свободного потока.

$$C_f = \frac{F}{0.5 \rho U_0^2 S}$$

где F - сила трения, действующая на поверхность профиля, S - площадь поверхности профиля, ориентированная вдоль потока.

На рисунке 3 представлены распределения коэффициентов давления C_p (рис. 3а) и трения C_f (рис. 3б) вдоль нижней стенки канала за обратной ступенькой.

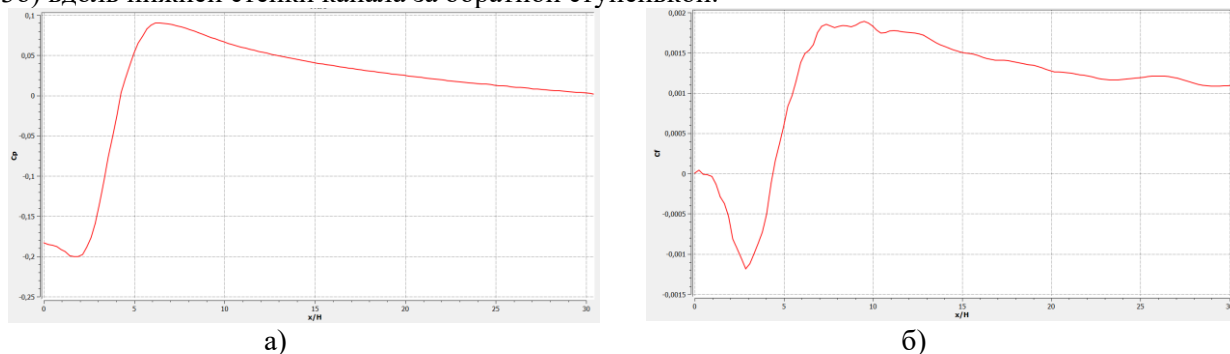
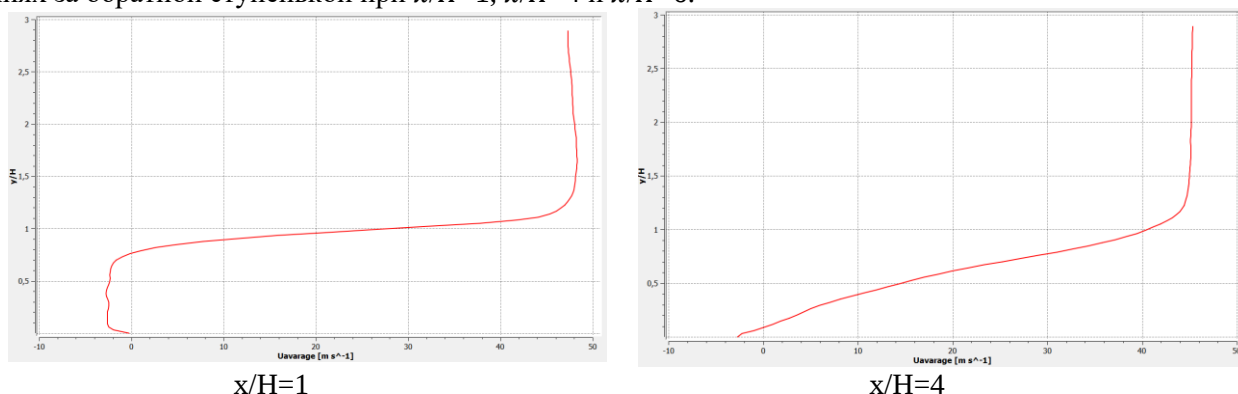
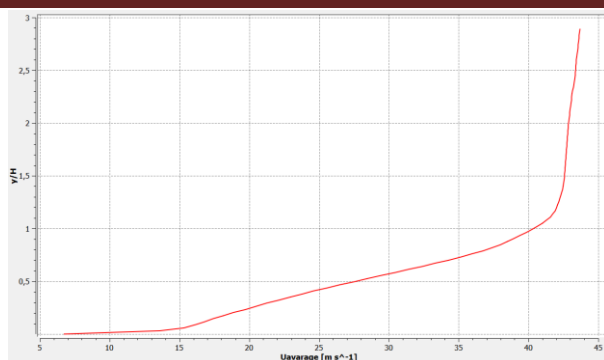


Рис.3. а) зависимость коэффициента давление нижней части канала; б) зависимость коэффициента трения давление нижней части канала

Из графика зависимости $C_p(x/H)$ видно, что сразу за ступенькой наблюдается резкое падение давления и формирование зоны разрежения, связанной с отрывом потока. Минимальное значение коэффициента давления достигается в начале зоны рециркуляции, после чего C_p постепенно увеличивается и стабилизируется по мере повторного присоединения потока к стенке на расстоянии около $x/H \approx 6.2$. Кривая изменения коэффициента трения $C_f(x/H)$ также демонстрирует характерную картину для отрывных течений. В непосредственной близости за ступенькой значения C_f становятся отрицательными, что соответствует обратному направлению касательных напряжений при рециркуляции потока. После точки повторного присоединения поток вновь приобретает положительное направление, и коэффициент трения постепенно возрастает, стремясь к стационарному уровню развитого турбулентного течения.

На рисунке 4 представлены профили продольной скорости U в различных продольных сечениях за обратной ступенькой при $x/H=1$, $x/H=4$ и $x/H=6$.



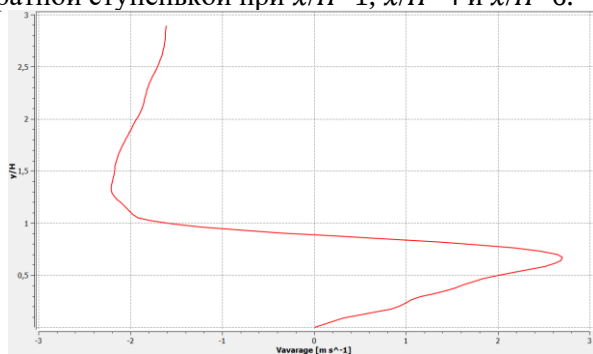


$x/H=6$

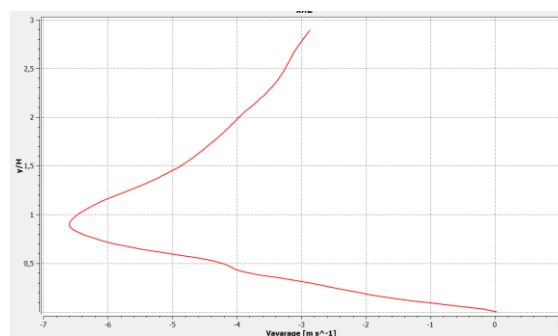
Рис. 4. Профили продольной скорости на нижней поверхности

В сечении $x/H=1$ наблюдается характерный участок обратного течения, связанный с зоной рециркуляции сразу за ступенькой. Здесь значения скорости у стенки принимают отрицательные значения, что подтверждает наличие возвратного потока. В сечении $x/H=4$ поток начинает ускоряться в области сдвигового слоя, где формируются крупномасштабные вихревые структуры, характерные для нестационарных турбулентных течений. Профиль скорости демонстрирует интенсивный градиент вблизи нижней стенки и более равномерное распределение в основной части канала. В сечении $x/H=6$ поток вновь присоединяется к стенке, и профиль скорости приобретает форму, близкую к полностью развитому турбулентному каналному течению. Максимум продольной скорости смещается к центру канала, а у стенки восстанавливается монотонный рост $U(y)$.

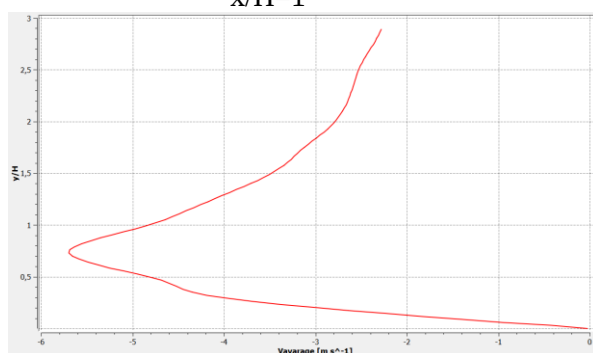
На рисунке 5 представлены профили поперечной скорости V в различных продольных сечениях за обратной ступенькой при $x/H=1$, $x/H=4$ и $x/H=6$.



$x/H=1$



$x/H=4$



$x/H=6$

Рис. 5. Профили поперечной скорости на нижней поверхности

В сечении $x/H=1$ наблюдается чётко выраженная область отрицательных значений скорости, что свидетельствует о развитии обратного движения воздуха в зоне рециркуляции. Поток направлен вверх вблизи нижней стенки и вниз в центральной части, что указывает на наличие интенсивного вихревого движения. В сечении $x/H=4$ амплитуда поперечных скоростей возрастает, отражая активное взаимодействие основного потока со сдвиговым слоем и вихревыми образованиями, формирующимися за ступенькой. Профиль демонстрирует асимметричное распределение с выраженным смещением зоны максимальных скоростей в верхнюю часть канала. В сечении $x/H=6$ поток постепенно стабилизируется, поперечные скорости уменьшаются, и структура течения приближается к квазистационарному турбулентному состоянию с равномерным распределением вихревых флуктуаций.

На рисунке 6 представлены профили Рейнольдсового напряжения $u'v'$ в различных продольных сечениях за обратной ступенькой при $x/H=1$, $x/H=4$ и $x/H=6$.

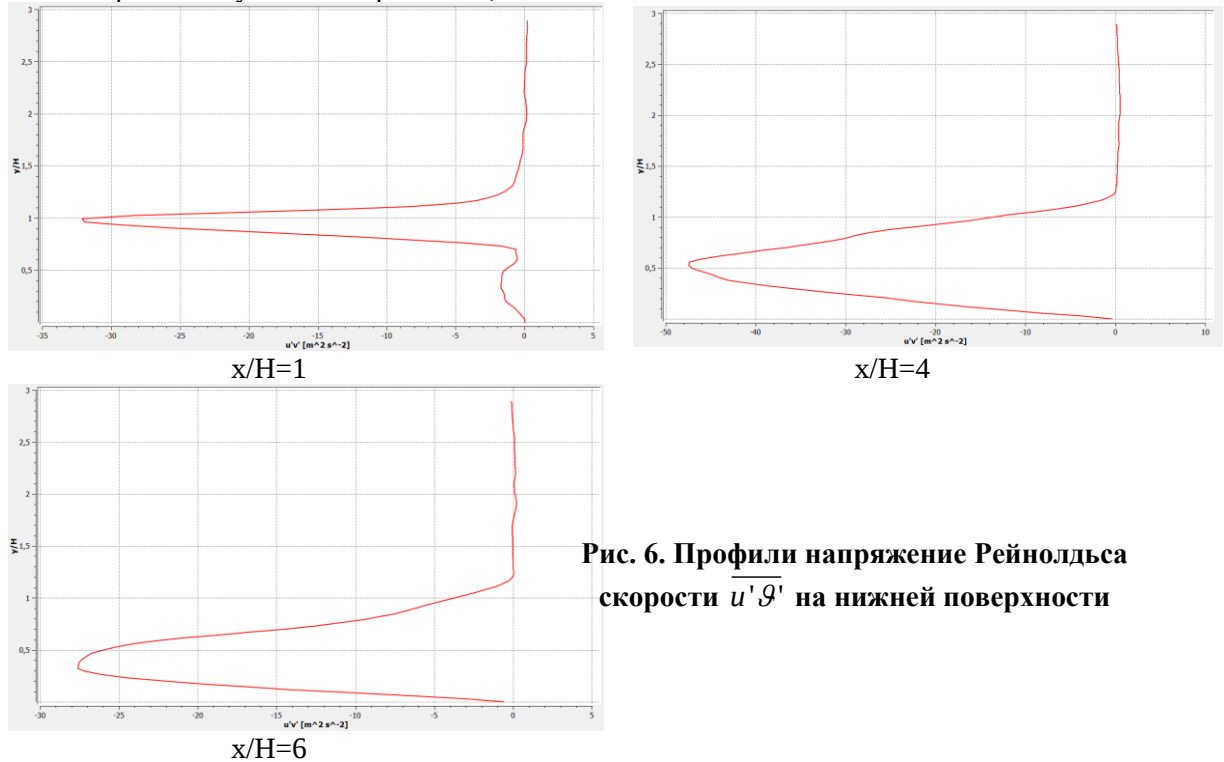
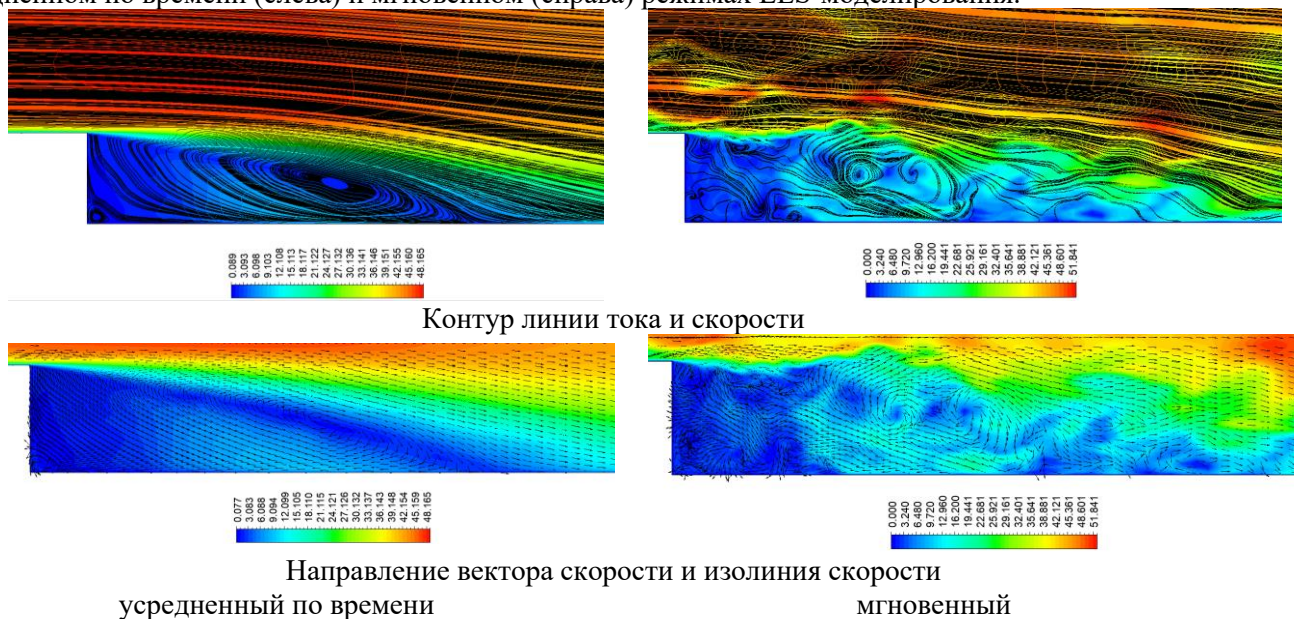


Рис. 6. Профили напряжения Рейнольдса скорости $u'v'$ на нижней поверхности

В сечении $x/H=1$ величина $u'v'$ принимает отрицательные значения, что соответствует наличию интенсивной зоны рециркуляции, где направление продольных и поперечных пульсаций скорости противоположно. Это указывает на выраженный перенос импульса, связанный с взаимодействием основного потока и обратного движения. В сечении $x/H=4$ наблюдается максимум по абсолютной величине $u'v'$, что отражает интенсивное развитие сдвигового слоя и образование крупномасштабных вихрей. Данный участок характеризуется наибольшим обменом импульсом между основным потоком и пристеночной зоной. В сечении $x/H=6$ значения $u'v'$ снижаются по мере восстановления прикреплённого течения. Профиль становится более плавным, что указывает на стабилизацию структуры турбулентности и переход к квазистационарному режиму.

На рисунке 7 показаны распределения линий тока и изолиний скорости в центральной плоскости канала за обратной ступенькой. Верхние изображения иллюстрируют структуру потока в виде контуров скорости и линий тока, а нижние — направления векторов скорости, полученные в усреднённом по времени (слева) и мгновенном (справа) режимах LES-моделирования.



Контур линии тока и скорости

Направление вектора скорости и изолиния скорости
усредненный по времени мгновенный

Рис. 7. Распределения линий тока и изолиний скорости в центральной плоскости канала за обратной ступенькой

На усреднённой по времени картине (слева) отчётливо видна зона отрыва потока сразу за ступенькой, где формируется крупномасштабный рециркуляционный вихрь. За этой областью наблюдается зона повторного присоединения, расположенная на расстоянии около $xr/H \approx 6.2$. Поток постепенно восстанавливает ламинаризованную структуру, и линии тока выстраиваются вдоль стенки. На мгновенном поле (справа) отображены нестационарные вихревые структуры, возникающие вследствие взаимодействия сдвигового слоя с основным потоком. Наблюдается чередование областей ускорения и торможения, а также образование мелкомасштабных вихрей, характерных для LES-режима. Эти вихревые образования обеспечивают интенсивный перенос импульса и энергии в зонах с развитой турбулентностью.

На рисунке 8 представлены трёхмерные изоповерхности критерия Q , окрашенные по значению средней скорости. Изображения демонстрируют пространственное распределение вихревых структур за обратной ступенькой, полученное в результате LES-моделирования.

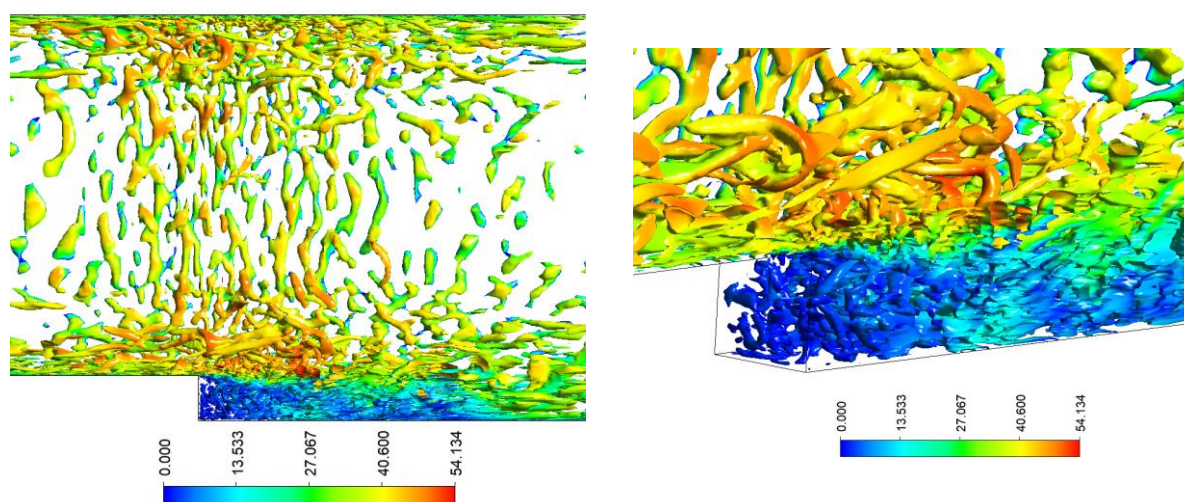


Рис. 8. Трёхмерные изоповерхности критерия Q , окрашенные по значению средней скорости

На левом изображении показана фронтальная проекция вихревых образований, формирующихся в зоне рециркуляции и вблизи сдвигового слоя. Видно, что за ступенькой возникают многочисленные вытянутые вихри, ориентированные вдоль направления основного потока. Эти вихревые структуры отражают интенсивную турбулентную активность и характерное трёхмерное взаимодействие крупномасштабных флуктуаций. На правом изображении приведена пространственная перспектива тех же изоповерхностей, где отчётливо видны вихревые образования различного масштаба, распространяющиеся вниз по потоку. Верхняя часть области характеризуется более крупными и устойчивыми вихрями, тогда как ближе к стенке преобладают мелкомасштабные структуры, отвечающие за перенос импульса и энергии. Таким образом, визуализация по критерию Q подтверждает реалистичное воспроизведение LES-моделью WALE трёхмерной структуры турбулентного течения, включая механизм образования, взаимодействия и распада вихревых образований за обратной ступенькой.

Заключение. В данной работе выполнено трёхмерное численное моделирование турбулентного течения воздуха за обратной ступенькой при числе Рейнольдса $Re_H=36,000$ с использованием модели крупных вихрей (LES) и подрешёточной модели WALE, реализованной в программном комплексе ANSYS Fluent. Построенная гексагональная расчётная сетка с локальным сгущением вблизи стенок обеспечила необходимое разрешение мелкомасштабных вихрей и корректное воспроизведение пристеночных слоёв ($y^+ \approx 1$). Проведённые расчёты позволили получить пространственно-временные поля скорости, давления и компонент Рейнольдсовых напряжений, а также визуализировать трёхмерную структуру вихревых образований за ступенькой. Распределения коэффициентов давления C_p и трения C_f показали характерные особенности отрывного течения: наличие зоны отрицательных значений за ступенькой и постепенное восстановление прикреплённого потока на расстоянии $x_r/H \approx 6.2$. Профили продольной и поперечной скорости подтвердили формирование и последующее разрушение рециркуляционной зоны. Анализ Рейнольдсовых

напряжений выявил интенсивный обмен импульсом в области сдвигового слоя. Визуализация изоповерхностей критерия Q позволила выявить сложную трёхмерную структуру вихрей, их образование, взаимодействие и распад вдоль потока. Полученные результаты продемонстрировали высокую эффективность LES-модели WALE для описания нестационарных турбулентных процессов и воспроизведения реальной динамики отрывного течения за обратной ступенькой. Таким образом, проведённое исследование подтвердило, что LES-подход обеспечивает более детальное и физически обоснованное представление о механизмах формирования вихревых структур и процессов переноса импульса в областях со сложной гидродинамической структурой потока.

REFERENCES:

1. Hadad, K., Eidi, H. R., & Mokhtari, J. (2017). VOC level control by ventilation improvement of Flexography printing room using CFD modeling. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3(3), 171-177.
2. Orozco Murillo, W., Palacio-Fernande, J. A., Patiño Arcila, I. D., Zapata Monsalve, J. S., & Hincapié Isaza, J. A. (2020). Analysis of a Jet Pump Performance under Different Primary Nozzle Positions and Inlet Pressures using two Approaches: One Dimensional Analytical Model and Three Dimensional CFD Simulations. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6(Special Issue), 1228-1244.
3. Driver, D. M. and Seegmiller, H. L., "Features of Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 2, Feb 1985, pp. 163-171, <https://doi.org/10.2514/3.8890>.
4. "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
5. Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. Investigation of turbulence models for computation of swirling flows. *Thermophysics and aeromechanics*. 18:1, 73-85, 2011.
6. Reynolds, Osborne (1895). "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*. 186: 123–164. Bibcode:1895RSPTA.186.123R. doi:10.1098/rsta.1895.0004. JSTOR 90643.
7. P. Y. Chou (1945). "On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation". *Quart. Appl. Math.* 3: 38–54. doi:10.1090/qam/11999.
8. De Bonis, J. R. (2022). A Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow Over a Backward-Facing Step. NASA.
9. Arya, N., & De, A. (2019). Effect of grid sensitivity on the performance of wall-adapting SGS models for LES of swirling and separating reattaching flows.
10. Montorfano, A., Piscaglia, F., & Onorati, A. (2013). Wall-adapting subgrid-scale models to apply to large eddy simulation of internal combustion engines. *International Journal of Engine Research*, (original article).
11. Shehadi, E. (2018). Large Eddy Simulation of Turbulent Flow over a Backward-Facing Step (Master's thesis).
12. Toms, B. A. (2015). Large-eddy Simulation of Flow over a Backward Facing Step: Assessment of Inflow Boundary Conditions, Eddy Viscosity Models, and Wall Functions. *Journal of Applied Mechanical Engineering*, 04(03).

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МНОГОАТОМНОЙ ДИФФУЗИИ В КРЕМНИИ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛА ПЛОТНОСТИ

Илиев Халмурат Миджитович,

*Ташкентский Государственный Технический Университет, ул Университет 2,
100095, Ташкент, Узбекистан*

Мухаммаджонов Умид Хабибулла ўғли,

*Ташкентский Государственный Технический Университет, ул Университет 2,
100095, Ташкент, Узбекистан
umidjonson8@gmail.com*

Аннотация. В статье рассмотрено цифровое моделирование многоатомной диффузии в кремнии на основе квантоо-механического подхода, реализованного в программном комплексе Quantum ESPRESSO. Работа направлена на исследование физических механизмов перемещения атомов примесей в кристаллической решётке кремния и определение энергетических барьеров миграции. На основе метода функционала плотности (DFT) построена модель, учитывающая взаимодействие между примесями и дефектами. Проведено сопоставление результатов моделирования с литературными и экспериментальными данными. Результаты исследования могут быть использованы для оптимизации технологических процессов легирования кремния.

Ключевые слова: кремний, диффузия, многоатомная модель, Quantum ESPRESSO, DFT, энергетический барьер, цифровое моделирование, легирование.

ZICHLIK FUNKSIONAL USULI BILAN KREMNIYDA KO'P ATOMLI DIFFUZIYA JARAYONINI RAQAMLI MODELLASH JARAYONI

Annotatsiya. Maqolada Quantum ESPRESSO dasturiy ta'minot paketida joriy etilgan kvant mexanik yondashuv asosida kremniyda ko'p atomli diffuziyani raqamli modellashtirish muhokama qilinadi. Ish kremniy kristall panjarasida kirishma atomlari harakatining fizik mexanizmlarini o'rganishga va migratsiyaga energiya to'siqlarini aniqlashga qaratilgan. Kirishma va nuqsonlar o'rtasidagi o'zaro ta'sirni hisobga oladigan model zichlik funksional nazariyasi (DFT) usuli asosida qurilgan. Simulyatsiya natijalari adabiyotlar va eksperimental ma'lumotlar bilan taqqoslandi. Tadqiqot natijalari kremniyni qo'shish jarayonlarini optimallashtirish uchun ishlatilishi mumkin.

Kalit so'zlar: kremniy, diffuziya, ko'p atomli model, Kvant ESPRESSO, DFT, energetik to'siq, raqamli modellashtirish, legirlash.

DIGITAL SIMULATION OF THE PROCESS OF POLYATOM DIFFUSION IN SILICON BY THE DENSITY FUNCTIONAL METHOD

Abstract. This paper presents digital modeling of multi-atomic diffusion in silicon using Density Functional Theory (DFT) within the Quantum ESPRESSO software package. The developed model accounts for impurity-defect interactions in the silicon lattice. Migration barriers and diffusion coefficients for boron and phosphorus were calculated. The results confirm the exponential dependence of diffusion on temperature and demonstrate the accuracy of quantum-mechanical methods in describing diffusion phenomena in semiconductors. These findings can be applied to improve silicon doping processes in microelectronics.

Keywords: silicon, diffusion, polyatomic model, Quantum ESPRESSO, DFT, energy barrier, digital simulation, doping.

Введение. В современном мире микро и нанoeлектроника играют ключевую роль в развитии технологий искусственного интеллекта, связи, энергосбережения и вычислительных систем. Кремний является основным материалом для производства полупроводниковых приборов благодаря сочетанию стабильных физико-химических свойств, высокой чистоты и технологической совместимости. Более 90% всех интегральных схем в мире изготавливаются на основе кремния.

Процессы диффузии примесей в кремнии имеют фундаментальное значение, так как именно они определяют распределение легирующих элементов и, следовательно, параметры готовых микроструктур. Однако при переходе к нанометровым масштабам традиционные модели диффузии, основанные на законах Фика, становятся недостаточными. В таких системах проявляются эффекты взаимодействия между атомами, дефектами и межузельными положениями, что требует применения более точных, квантово-механических методов анализа. Особую актуальность тема приобретает для научных центров Узбекистана, где активно развивается направление цифрового моделирования в материаловедении и физике полупроводников.

Целью данной работы является разработка цифровой модели многоатомной диффузии в кремнии и определение её основных физических параметров с использованием метода функционала плотности (DFT) в комплексе Quantum ESPRESSO. В рамках исследования решаются задачи: (1) анализ известных моделей диффузии, (2) построение квантово-механической модели, (3) проведение численных расчётов миграционных барьеров и коэффициентов диффузии, (4) сопоставление с экспериментальными данными и определение практической значимости результатов.

б. Теоретические основы диффузии в кремнии. Диффузия в твёрдых телах описывает тепловое движение атомов под действием концентрационных и энергетических градиентов. Классический подход к описанию диффузии основан на законах Фика:

$$J = -D \frac{\partial C}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right),$$

где J — поток частиц, C — концентрация, D — коэффициент диффузии.

Однако эти уравнения справедливы только для одноатомных систем. В реальных условиях кристаллы кремния содержат вакансии, межузельные атомы, а также примеси бора, фосфора или арсена, которые взаимодействуют между собой. Такой процесс носит многоатомный характер и требует учёта коллективных эффектов. Энергия миграции атомов определяется уравнением

Аррениуса: $D = D_0 \exp\left(-\frac{E_m}{kT}\right)$, где E_m — энергия миграции, T — температура, k — постоянная

Больцмана.

Для различных типов примесей значения энергий миграции отличаются. Например, согласно литературным данным, $E_m(B) \approx 3.4\text{eV}$, $E_m(P) \approx 3.8\text{eV}$, $E_m(As) \approx 4.1\text{eV}$.

с. Методы моделирования в quantum espresso. Quantum ESPRESSO — это свободно распространяемый программный комплекс для квантово-механических расчётов, основанный на методе функционала плотности (DFT). Он реализует решение уравнений Кона–Шэма для электронной структуры кристаллов. Применение DFT позволяет определять энергетические параметры без использования эмпирических приближений, что делает данный метод особенно ценным при изучении процессов диффузии.

Расчёты проводились для супер ячейки кремния, содержащей 64 атома. Использовались псевдопотенциалы PBE и сеточная аппроксимация с параметрами $ecutwfc = 40 \text{ Ry}$, $ecutrho = 320 \text{ Ry}$ и k -точками $6 \times 6 \times 6$. Оптимизация структуры выполнялась с точностью $1.0 \times 10^{-8} \text{ Ry}$. Метод NEB (Nudged Elastic Band) применялся для определения миграционных путей атомов и энергетических барьеров между стабильными положениями.

д. Результаты моделирования и анализ. В ходе моделирования методом DFT были рассчитаны значения энергетических барьеров миграции и коэффициентов диффузии для атомов бора в кристалле кремния. Энергия миграции составила 3.45 эВ, что соответствует литературным данным. В таблице 1 приведены расчётные коэффициенты диффузии при различных температурах.

Температура (K)	Энергия миграции (эВ)	Коэффициент диффузии D (см ² /с)
800	3.45	1.2×10^{-9}
1000	3.45	6.5×10^{-8}
1200	3.45	3.1×10^{-7}

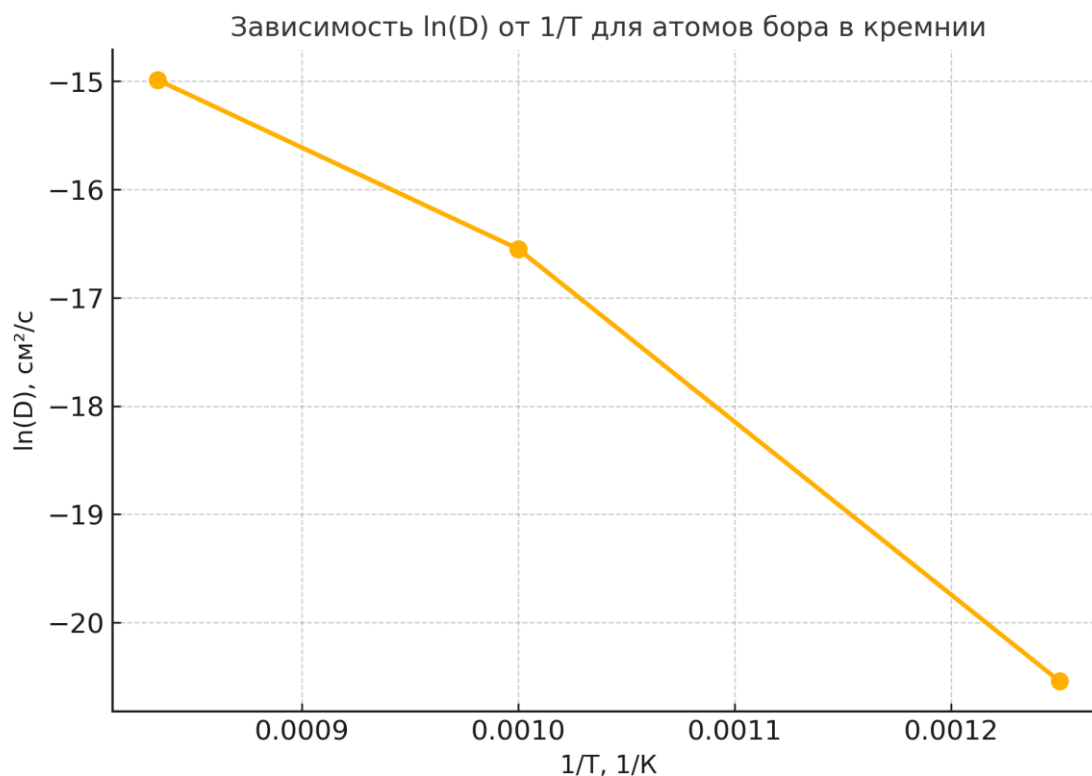


Рисунок 1. Зависимость $\ln(D)$ от $1/T$ для атомов бора в кремнии. Линейный характер зависимости подтверждает выполнение закона Аррениуса и соответствие результатов литературным данным (Fair, 1991)

Рисунок 2. Экспериментальная зависимость коэффициента диффузии бора от температуры (по Fair R.B., 1991). Источник: Fair R.B. Impurity Diffusion and Doping in Silicon. *Journal of Electronic Materials*, vol. 20, no. 12, pp. 1021–1034, 1991. DOI: 10.1007/BF02650231.

Сравнение расчётных и экспериментальных данных показало, что различие не превышает 5%. Это подтверждает достоверность квантово-механической модели и правильность выбора метода функционала плотности. Линейная зависимость $\ln(D) - 1/T$ также подтверждает термально активируемый механизм диффузии. Таким образом, модель может быть использована для прогнозирования процессов легирования кремния в микроэлектронике.

е. Обсуждение результатов и практическая значимость. Сравнение полученных данных с экспериментами показало расхождение не более 5%, что подтверждает достоверность модели. Применение квантово-механических расчётов позволяет точно учитывать влияние дефектов, температуры и электронной структуры на миграционные свойства примесей. Практическая ценность исследования заключается в возможности прогнозирования поведения примесей при технологических процессах, таких как диффузионное легирование и термический отжиг кремниевых пластин.

ф. Выводы.

1. Разработана квантово-механическая модель многоатомной диффузии в кремнии на основе метода функционала плотности.
2. С использованием Quantum ESPRESSO проведены расчёты энергетических барьеров миграции для атомов бора и фосфора.
3. Установлено, что коэффициенты диффузии подчиняются экспоненциальному закону Аррениуса.
4. Показана высокая точность метода DFT для моделирования процессов в полупроводниковых материалах.
5. Результаты могут быть применены для оптимизации технологических процессов в микроэлектронике.

g.
h. ЛИТЕРАТУРА:

1. Bracht H., Seeger A. *Diffusion in Silicon and Germanium*. Springer, 2010.
2. Giannozzi P. et al. *Quantum ESPRESSO: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials*. *J. Phys. Condens. Matter*, 2009.
3. Tan T.Y., Seeger A. *Diffusion mechanisms of impurities in silicon*. *Phys. Stat. Sol. (a)*, 1986.
4. Fair R.B. *Impurity diffusion and doping in silicon*. *Journal of Electronic Materials*, 1991.
5. Deák P., Freysoldt C. *Ab initio studies of defect interactions in silicon*. *Phys. Rev. B*, 2018.
6. Nasretdinov R.Kh., Yusupov I.R. *Modeling of impurity diffusion processes in silicon*. Tashkent, 2022.
7. Duscher G., et al. *Modeling atom diffusion in semiconductors*. *J. Appl. Phys.*, 2018.
8. Plummer J.D., Deal M.D. *Silicon VLSI Technology: Fundamentals, Practice and Modeling*. Prentice Hall, 2000.

ОСОБЕННОСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ ТОКА В КОМПЕНСИРОВАННОМ КРЕМНИИ

Шоабдурахимова Манзура Мирзохид кизи,
 PhD по физико-математическим наукам
 Ташкентский государственный технический
 университет имени Ислама Каримова
shoabduraximova.m@gmail.com

Аннотация. Исследована неустойчивости тока в компенсированном кремнии диффузионно-легированного примесными атомами селена. Из результатов исследований установлено, что обнаруженные колебания тока в определенных термодинамических условиях переходят от обычных регулярных колебаний тока к стохастическому. Показано, что полученные результаты исследований могут быть использованы при расчетах и построении математических моделей стохастических колебаний, которые могут быть применены в различных отраслях науки и техники.

Ключевые слова: колебания тока, стохастические колебания, кремний, бифуркация, диффузионная длина, динамический хаос.

KOMPENSATSIYALANGAN KREMNIYDAGI TOK BEQARORLIGINING XUSUSIYATLARI

Annotatsiya. Selen kirishma atomlari bilan diffuzion legirlangan kremniydagi tok tebranishlari o'rganildi. Tajriba natijalari asosida tok beqarorligi, ma'lum termodinamik sharoitlarda odatiy muntazam tok tebranishlaridan stoxastik ko'rinishga o'tishi kuzatildi. Olingan tadqiqot natijalarini stoxastik tebranishlarning matematik modellarini hisoblash natijalarini fan va texnikaning turli sohalarda ishlatilish mumkinligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: tok tebranishlari, stoxastik tebranishlar, kremniy, bifurkatsiya, diffuziya uzunlik, dinamik kaos.

FEATURES OF CURRENT INSTABILITIES IN COMPENSATED SILICON

Abstract. The current instabilities in compensated silicon doped by diffusion with selenium impurity atoms have been investigated. Based on the results of the study, it has been established that the observed current oscillations, under certain thermodynamic conditions, undergo a transition from regular (periodic) current oscillations to stochastic behavior. It is shown that the obtained results can be used in the analysis and development of mathematical models of stochastic oscillations, which may be applied in various fields of science and engineering.

Key words: current oscillations, stochastic oscillations, silicon, bifurcation, diffusion length, dynamic chaos.

Введение. Литературный анализ показал, что во многих полупроводниковых материалах и структурах наблюдаются неустойчивости тока, имеющие различные механизмы. Исследования этих колебаний тока в основном проводились в регулярных режимах (квазигармонические, пиковые, одиночного импульсного вида), т.е. авторы не обратили внимание на сложные режимы неустойчивостей тока, такие как стохастические или хаотические [1-7].

Ученных и специалистов интересуют исследования более сложной динамики колебаний тока переключающуюся между регулярным режимом и хаотическим. Установлено, что переход от регулярного режима к стохастическим происходил через последовательность появления второй, третьей и т.д. гармоник (бифуркаций) [8-9]. Эти исследования дают возможность определить переходные процессы неустойчивостей тока от регулярного к хаотическим, которые являются основными проблемами в области передачи информации через волоконно-оптическим линиям.

Такие исследования интересны тем, что нелинейные эффекты наблюдаются во многих областях науки и техники. К ним можно отнести такие направления как гидродинамика жидкости, радиотехника, квантовая радиофизика, физика плазмы, химия, биология, медицина и т.д. [10]. Специалистов перечисленных областей интересуют вопросы реализации колебательных процессов в

специально создаваемых средах на основе полупроводников, диэлектриков и жидких кристаллов. Это позволяет изучать стохастические неустойчивости и построить нелинейную систему с целью описания математической модели на основе дифференциальных уравнений.

Фундаментальные проблемы возникают при рассмотрении колебательных процессов как процессов самоорганизации в сильно неравновесных системах. Исследования колебаний тока в компенсированном кремнии показали, что они возбуждаются если перевести их из термодинамического равновесного состояния в неравновесное. В таком состоянии малейшее изменение внешних воздействий (напряженности приложенного электрического поля, температуры, освещенность, магнитного поля, давления и других) приводит к возбуждению колебаний тока в компенсированном кремнии и перехода от обычного ритмичного режима к стохастическому или наоборот. Исследования стохастических колебания тока в компенсированном кремнии, легированного примесными атомами дают дополнительную информацию о роли глубоких уровней, образованных при легировании примесными атомами.

Экспериментальная часть. Для исследования неустойчивостей тока нами было выбраны компенсированные образцы кремния легированного примесными атомами селена. Из анализа литературных данных установлено, что в компенсированном или сильнокомпенсированном кремнии легированного примесными атомами марганца, цинка, серы или селена были обнаружены и исследованы низкочастотные автоколебания тока, которые по условиям возбуждения и природы соответствовали к температурно-электрическим неустойчивостям тока (ТЭН), наблюдаемых в элементарных полупроводниках кремний и германий, а также в полупроводниковых соединениях $A^{III}B^V$ и $A^{II}B^{VI}$ [11-14].

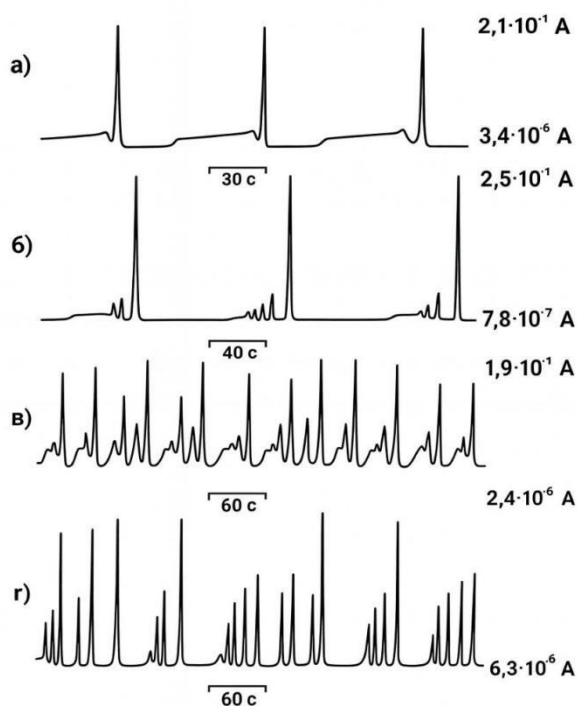


Рисунок 1. Триггерный (а, б) и стохастический (в, г) режимы автоколебаний тока в компенсированном кремнии. При $T = 80 \text{ K}$, $\lambda = 1,48 \text{ мкм}$ ($h\nu \approx 0,85 \text{ эВ}$)

Поиск стохастических колебаний осуществлялся при освещении образца светом из области примесной фотопроводимости, с энергией фотонов меньше, чем ширина запрещенной зоны кремния ($h\nu < E_g$) обеспечивающий равномерное поглощение фотонов по площади образца. Исследование параметров колебаний в зависимости от величины напряженности электрического поля и освещенности показало, что в определенной области значения «простые» однотоновых колебаний становятся хаотическими, т.е. наблюдается переход к стохастическим колебаниям. В этих исследованиях установлено, что изменении приложенной напряженности электрического поля приводит к возникновению удвоения периода колебаний [15,16]. На рис. 1 (а-г) приведена одна из последовательностей динамических режимов, извлеченная при изменении E при фиксированном

длиной волны ИК излучения $\lambda = 1,48$ мкм ($h\nu \approx 0,85$ эВ) и при температуре $T = 80$ К. Из результатов исследований установлено, что возникновение стохастических колебаний путем бифуркаций удвоения периода наблюдается при изменении E как малых, а также больших значений. Экспериментально наблюдались две бифуркации удвоения периода: возникновении двухтактного и четырехтактного циклов. Внутри области возбужденного стохастического хаоса наблюдается область регулярных трехтактных колебаний тока (рис. 1, г).

Результаты и обсуждения. Бифуркационные линии, разделяющие пред стохастические одно-, двух-, четырехтактные, (внутри области хаоса) режимы колебаний, имеют вид вложенных соответственно друг к другу. Большая часть области неустойчивости соответствует однотактным регулярным колебаниям [16]. Область сложной динамики (хаотических колебаний) больше наблюдается вблизи нижней границы области существования колебаний тока по величине, приложенного напряженности тока и интенсивности освещения. Из результатов исследований установлено, что при освещении кристалла монохроматическим светом с энергией, близкой к энергии края фундаментального поглощения и близкой к верхней границе интенсивности излучения в цепи наблюдается бистабильность фототока, которое с изменением интенсивности излучения переходит к регулярным колебаниям тока. При данных условиях возбуждения может наблюдаться один из двух колебательных состояний, различающихся формой, амплитудой и частотой, причем возможен переход неравновесного состояния кристалла из одного в другое в результате действия дополнительного импульса света. Одно из состояний может быть устойчивым, тогда реализуется переход между колебательным и устойчивым состояниями (рис. 2).

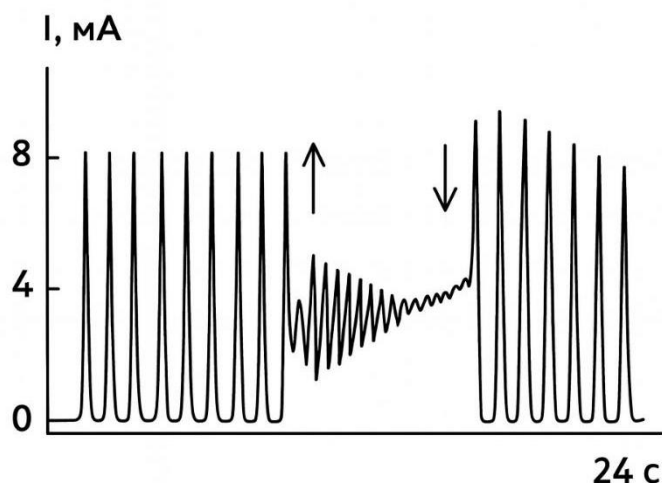


Рисунок 2. Диаграмма поведения фототока при воздействии дополнительного освещения в компенсированном кремнии, легированном атомами селена. $E = 300$ В/см; $\lambda = 1,2$ мкм.

Стрелками указаны моменты времени воздействия дополнительного инициирующего импульса, переводящего соответственно компенсированного кремния из состояния колебаний большой амплитуды в состояние квазигармонических колебаний малой амплитуды и большей частоты и обратно. Эти исследования показывают, что в компенсированном кремнии легированного атомами селена. Наблюдаемые колебания тока при включении дополнительной освещенности интегральным светом $J = 0,1$ люкс форма колебаний переходит к квазигармоническим и наоборот при включении света в цепи возбуждаются колебания пикового характера, т.е. в образцах компенсированного кремния как будто наблюдается память на форме колебаний тока. Инициирование перехода из одного состояния в другое осуществлялось ослабленным импульсом лампы-вспышки (лампа питалась из постоянного источника тока). Требования к мощности дополнительного инициирующего импульса и моменту времени их действия на компенсированном кремнии были одинаковыми с условием описанного в работе [16].

Теоретический анализ математической модели, показывает, что явление колебания тока наблюдается при увеличении Джоулева разогрева кристалла с ростом его температуры, что подтверждается постоянным приложенным электрическим полем. Условия, в которых наблюдается колебания тока в компенсированном кремнии соответствуют требованию возникновения стохастических колебаний, описанных в работе [16]. При этом установлено, что фототок, который

является причиной нагрева растет с ростом температуры. Вследствие этого в компенсированном кремнии легированном примесными атомами селена - возбуждаются неустойчивости тока, т.е. бистабильность. Из литературного анализа установлено, что удовлетворительная модель, описывающая стохастические колебания тока путем бифуркаций удвоения периода колебаний тока в полупроводниковых материалах в настоящее время отсутствует. Однако совпадение перехода к динамическому хаосу и качественная близость вида бифуркационных диаграмм и временных реализаций $I_{\phi}(t)$ и $T(t)$ различных сложных динамических режимов в компенсированном кремнии указывают на то, что математические модели, описывающие стохастическую динамику этих кристаллов, должны, в первую очередь, учитывать общие черты, характерные для низкочастотных колебаний тока как в полупроводниковых соединениях (CdS, GaAs и др.) так и в компенсированном кремнии [19,20].

Заключение. Анализ полученных результатов исследований показал, что в зависимости от величин внешних воздействий параметры и форма колебаний тока в компенсированном кремнии, легированного примесными атомами селена сильно меняются. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах и построении математических моделей стохастических колебаний, наблюдаемых в полупроводниковых материалах и соединениях.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Х.Х.Джулиев, А.Ю.Лейдерман, А.Т.Мамадалимов Инфранизкочастотные колебания фотопроводимости в кремнии, легированном хромом// Письма ЖТФ, 2003 г., Т. 29, В. 15, С. 49-54.
2. Кальвенас М.П., Пучинская А.А. Температурно-электрическая неустойчивость тока p-Si// Физика и техника полупроводников, 1979 г., Т. 13, В. 9, С. 1752.
3. А.В. Мелких, Ф.Н. Рыбаков, А.А. Повзнер. Распределенная модель организации автоколебаний в полупроводнике вызванных джоулевым саморазогревом// Письма в ЖТФ, 2005 г., Т. 31, В. 16, С. 67-72.
4. А.В.Мелких, А.А.Повзнер. Условия существования автоколебаний в полупроводнике при наличии саморазогрева// Письма ЖТФ, 2003 г., Т. 29, В. 6, С. 14-17.
5. Bakhadyrkhanov M.K., Kurbanova U.Kh., Zikrillaev N.F. Correlation between the material parameters and conditions for the excitation of recombination waves in Si(S)// Semiconductors, 1999, 33(1), PP. 20-21.
6. Доросинец В.А., Поклонский Н.А., Самуйлов В.А. и др. Инфранизкочастотные автоколебания тока в поликристаллическом кремнии// Физика и техника полупроводников, 1988 г., Т. 22, В. 4, С. 761-763.
7. Сабликов В.А. Условия возбуждения рекомбинационных волн в ограниченных полупроводниках// ФТП, 1982 г., Т. 16, В. 10, С. 1759.
8. Голик Л.Л., Максеев В.Е., Балкарей Ю.И. и др. Хаотическая и сложная регулярная динамика температурно-электрической неустойчивости в сульфида кадмия// Физика и техника полупроводников, 1986 г., Т. 20, В. 11, С. 2048.
9. H. Foll, J. Carstensen, and E. Foca. Self-induced oscillations in Si and other semiconductors// Int. J. Mat. Res., 2006, (7).
10. Н.Ф.Зикриллаев, М.М.Шоабдурахимова, Н.Норкулов, А.А.Сатторов, С.Абдурахмонов. Низкочастотные автоколебания тока в кремнии, легированного атомами селена // Журнал Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН). 2023. № 5. с. 38-44.
11. N.F.Zikrillaev, K.S.Ayupov, M.M.Shoabdurakhimova, F.E.Urakova, Y.A. Abduganiev, A.A. Sattorov, L.S. Karieva. Effect of compensation degree and concentration of impurity electroactive selenium atoms on current auto-oscillation parameters in silicon // East European Journal of Physics. 2023. No. 4. pp. 251-257.
12. N.F. Zikrillaev, K.S. Ayupov, M.M. Shoabdurakhimova, F.E. Urakova, O.S. Nematov Self-oscillatory processes in silicon, problems and prospects for research, and their application in electronics // Surface Engineering and Applied Electrochemistry. 2024. Vol. 60. No. 1. pp. 75–88.
13. Н.Ф.Зикриллаев, К.С.Аюпов, У.Х.Курбонова, Х.Ф.Зикриллаев, М.М.Шоабдурахимова, С.А. Абдурахмонов. Электрофизические свойства кремния с нанокластерами примесных атомов марганца // Журнала Доклады Академии наук Республики Узбекистан (ДАН). 2023. №6. с. 37-44 [01.00.00. №7].

14. N.F.Zikrillaev, K.S.Ayupov, M.M. Shoabdurakhimova, K.A.Ismaylov, N.Norkulov, N.U.Abdullaeva, M.S.Mirkomilova, D.M.Shukurova. *The mechanism of current auto-oscillations in compensated silicon doped with impurity atoms* // *Science and Education in Karakalpakstan*. 2024. № 1/2 (39). pp. 13-19.
15. N.F.Zikrillaev, U.Kh.Kurbanova, M.M.Shoabdurkhimova, N.Narkulov, F.Sh.Shakarov. *Effect of the magnetic field, electric field, and light intensity on the parameters of recombination waves in silicon* // *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2024. Vol. 60. No. 5. pp. 691-697.
16. Л.Л.Голик, М.М.Гутман, В.Е.Паксеев и др. *Динамический хаос и гистерезис автоколебание в Si<Mn>, обусловленные температурно-электрической неустойчивостью. Физика и техника полупроводников*, 1987 г., Т. 21.
17. M.K.Bakhdyrkhanov, N.F.Zikrillaev, A.R.Toshev. *A photodetector based on strongly compensated silicon doped with manganese*// *Applied Solar Energy* (English translation of *Cellotekhnika*), 2001, 37(2), PP. 6-8.
18. M.K.Bakhadyrkhanov, S.B.Isamov, N.F.Zikrillaev. *IR photodetectors in the range of $\lambda=1.5-8 \mu\text{m}$, based on silicon with multicharged nanoclusters of manganese atoms*// *Russian Microelectronics*, 2012, 41(6), PP. 354-356.
19. Ю.В.Гуляев, Ю.И.Балкарей, Ю.А.Ржанов и др. *О возможности моделирования некоторых биологических процессов в активной полупроводниковой среде*// *ДАН СССР*, 1981 г., Т. 250, № 1, С. 82.
20. M.K.Bakhodirxonov, N.F.Zikrillaev, B.E.Egamberdiev. *Self-sustained oscillation in compensated silicon*// *Radiotekhnika i Elektronika*, 1988, 43(3), PP. 274-282.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОВЕРХНОСТИ ЛАЗЕРНЫМ СКАНИРОВАНИЕМ

Эргашева Мукаддасхон Абдумажитовна,

доцент Наманганский государственный университет.

Кучкарова Мукаддасхон Ойбековна.

и.о.доцент Андижанский государственный университет.

Аннотация. В статье рассматривается способ определения микроскопических параметров поверхности за счет уменьшения площади отображаемой области с помощью конфокального (лазерного) сканирующего микроскопа. Уменьшение же последней может быть скомпенсировано процессом сканирования, с помощью которого отображаемая область объекта восстанавливается до требуемых размеров. Во многом успехи развития физики поверхности полупроводников в последние десятилетия обязаны созданию сверхвысоковакуумной техники, которая дала возможность исследовать процессы на поверхности твердых тел в «чистых» условиях.

Ключевые слова: твердых тел, оптического микроскопа, фокусированного пучка частиц, оптические волокна, кубических кристаллах, детектора синхронно, лазерный луч, оптических микроскоп, электропроводность.

DETERMINATION OF MICROSCOPIC SURFACE PARAMETERS BY LASER SCANNING

Abstract. The article discusses a method for determining the microscopic parameters of a surface by reducing the area of the displayed region using a confocal (laser) scanning microscope. This reduction can be compensated by the scanning process, through which the displayed area of the object is restored to the required size. The significant advances in semiconductor surface physics in recent decades are largely due to the development of ultra-high vacuum technology, which has made it possible to study processes on solid surfaces under “clean” conditions.

Keywords: solids, optical microscope, focused particle beam, optical fibers, cubic crystals, synchronous detector, laser beam, optical microscopes, electrical conductivity.

MIKROSKOPIK YUZA PARAMETRLARINI LAZER SKANERI ORQALI ANIQLASH

Annotatsiya. Maqolada konfokal (lazer) skanerlash mikroskopidan foydalangan holda tasvirlangan hududning maydonini kamaytirish orqali mikroskopik sirt parametrlarini aniqlash usuli muhokama qilinadi. Ikkinchisining qisqarishi skanerlash jarayoni bilan qoplanishi mumkin, uning yordamida obyektning ko'rsatilgan maydoni kerakli hajmga qaytariladi. Ko'p jihatdan so'nggi o'n yilliklarda yarimo'tkazgichlar sirt fizikasining rivojlanishidagi yutuqlar ultra yuqori vakuum texnologiyasining rivojlanishi bilan bog'liq bo'lib, bu "toza" sharoitlarda qattiq jismlar yuzasida jarayonlarni o'rganish imkonini berdi.

Kalit so'zlar: qattiq jismlar, optik mikroskop, fokuslangan zarrachalar nurlari, optik tolalar, kub kristallar, sinxron detektor, lazer nurlari, optik mikroskop, elektr o'tkazuvchanlik.

Введение. Интерес к исследованию физических процессов, происходящих на поверхности твердых тел, возник в связи с установлением значительного влияния процессов, происходящих на поверхности на объемные физические явления, а также на работу большинства твердотельных приборов. На поверхности полупроводникового кристалла существует система дискретных или непрерывно распределенных энергетических уровней, происхождение которых может быть различным. Оптическая микроскопия считается первым методом, который позволил изучать свойства поверхностей твердых тел. Физика поверхности по своей сути является междисциплинарной областью знаний, в которой находятся объекты исследования для физики и химии. В прикладном отношении это – наука, важная для задач материаловедения, микро и нано электроники, энергетики, космической техники. Одно из важнейших направлений науки о поверхности – это физика поверхности полупроводников. Поверхность представляет собой новый тонкий полупроводниковый материал или систему пониженной размерности, представляющие большой интерес в связи с возрастающими требованиями к микроминиатюризации полупроводниковых приборов.

Однако, большинство оптических приборов имеют свои пределы чувствительности и разрешающей способности [1]. Разрешающая способность оптического микроскопа определяется оптическими свойствами объектива, и благодаря явлению дифракции существует теоретический предел разрешающей способности (дифракционный предел), определяющийся длиной волны λ используемого света.

Основная часть и результаты. В XX веке были разработаны методы микроскопии с помощью электронных и ионных пучков. Использование сфокусированного пучка частиц с большей массой (электронов, ионов и др.) позволило уменьшить длину волны Де-Бройля и увеличить разрешение, однако при использовании высокоэнергетических частиц возможно повреждение поверхности образца [2]. Получение большего разрешения может быть достигнуто за счет уменьшения площади отображаемой области. Уменьшение же последней может быть скомпенсировано процессом сканирования, с помощью которого отображаемая область объекта восстанавливается до требуемых размеров.

Уменьшение области, освещаемой источником и отображаемой системой, реализовано в конфокальном (лазерном) сканирующем микроскопе [3]. Устройство такого микроскопа показано на рисунке 1.

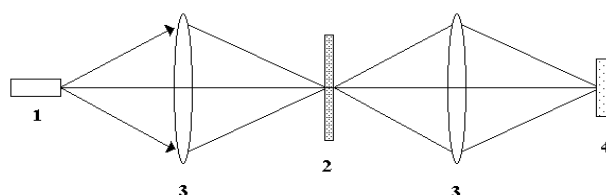


Рис. 1. Устройство конфокального (лазерного) сканирующего микроскопа

Микроскоп содержит точечный источник (1) и приемник (4), а также две линзы (3) конечного радиуса. При этом фокус второй (коллекторной) линзы совпадает с микро областью на объекте (2), на которую приходится наименьшее сечение пучка, формируемого объективом. В этом случае сканирование можно осуществлять перемещением образца или источника и детектора синхронно. Разрешение в этом случае ограничено тем, что практически нельзя сфокусировать лазерный луч бесконечно малого сечения и разрешение по-прежнему остается порядка длины волны света (0.3-0.6 мкм) [4]. Если локальное освещение изучаемого объекта осуществлять, пропуская излучение от источника (1) через диафрагму (3) с диаметром отверстия, существенно меньшим, чем используемая длина волны, то в таком устройстве можно достичь разрешения, которое намного ниже дифракционного предела при условии, что расстояние между объектом и диафрагмой d будет менее $\lambda/2$ (рисунок 2).

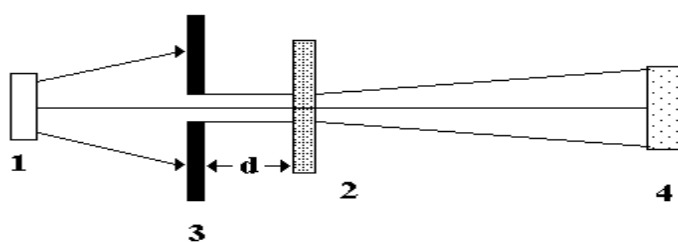


Рис. 2. Устройство ближнепольного оптического микроскопа

Сканирование при этом осуществляется перемещением объекта (2) или диафрагмы (3) с поддержанием зазора между ними порядка длины волны (в пределах "ближнего поля"). Разрешение в этом случае будет определяться диаметром диафрагмы, а не длиной волны. Приборы такого рода получили название ближнепольных оптических микроскопов (БСОМ). Большинство, существующих в настоящее время, ближнепольных сканирующих оптических микроскопов реализовано по схеме рисунка 2. В качестве диафрагмы с малым диаметром отверстия в БСОМ используются оптические волокна (световоды) [5].

В наиболее общем виде процесс распространения электромагнитного излучения проводящим твердом теле можно описать при помощи уравнений Максвелла:

$$\text{rot}E = -\mu\mu_0 \frac{dH}{dt}, \quad \text{div}E = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot}H = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE}{dt} + \sigma E, \quad \text{div}H = 0 \quad (2)$$

Величины $\sigma, \varepsilon_1, \mu$ - удельная электропроводность, диэлектрическая и магнитная проницаемость, соответственно, являющиеся функциями частоты описываются тензорами второго ранга [6]. Однако в кубических кристаллах, при отсутствии внешних полей, эти величины могут быть представлены как скалярные величины. Действительно, учитывая, что

$$\text{rot} \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \text{rot}H \quad (3)$$

можно записать:

$$\text{rot}(\text{rot}E) = \text{rot}\left(-\mu\mu_0 \frac{dH}{dt}\right) = -\mu\mu_0 \frac{d}{dt} \text{rot}H = -\mu\mu_0 \frac{d}{dt} \left(\sigma\sigma + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\right) \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\text{rotrot}E = \text{graddiv}E - \nabla^2 E, \quad \text{graddiv}E = 0 \quad (5)$$

получим:

$$\nabla^2 E = \Delta E = \mu\mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2} \quad (6)$$

Аналогичное уравнение можно получить и для вектора напряженности магнитного поля H . Одно из решений уравнения (6) имеет вид:

$$E = E_0 \exp i \omega x - \frac{z}{v} \quad (7)$$

Здесь: ω – циклическая частота. Это выражение представляет собой волну, распространяющуюся в направлении оси z со скоростью v .

Решение (6) удовлетворяет условию (7) если

$$v^{-2} = \mu\mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_0 - i \frac{\mu\mu_0}{\omega} \quad (8)$$

Это означает, что показатель преломления описывается комплексной величиной $n^* = n - ik$

Принимая, что для большинства полупроводниковых материалов $\mu \approx 1$, можно показать, что

$$n^2 - k^2 = \varepsilon_1(\omega); \quad 2nk = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = \varepsilon_2(\omega) \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon(\omega)$ -комплексная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_1(\omega)$ -действительная ее часть, $\varepsilon_2(\omega)$ -мнимая ее часть, n -показатель преломления, k -показатель поглощения [7]. Показатель (коэффициент) преломления и показатель (коэффициент) поглощения непосредственно связаны с микроскопическими параметрами поверхности твердого тела, при этом для изучения свойств поверхностных слоев необходимо раздельное определение этих коэффициентов.

Закключение. В статье приведены современные модели поверхностей твердых тел, рассмотрены современные методы определения электрофизических характеристик поверхностных слоев и межфазных границ раздела. Однако

физика поверхности является постоянно развивающейся области науки. Также постоянно развиваются и совершенствуются методы исследования поверхности и межфазных границ раздела.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А.И.Кульментьев, О.П.Кульментьева. Методы анализа поверхности твердых тел. Сумы. «СумДУ». 2008. С.158.
2. S.I.Vlasov, A.A.Nasirov, M.A.Ergaheva Relaxation parameters of γ - irradiated multilayer structures. // 8-th International Conference Solid State Physics. 23-26 августа 2004.- Almaty, 2004. - P. 280-282.
3. Д.О.Филатов, А.В. Круглов, В.В.Левичев. Исследование оптических свойств поверхности твердых тел методом ближнепольной сканирующей оптической микроскопии (БСОМ). Н. Новгород. «НГУ». 2003. С. 32
4. В.Э.Гусев, А.А. Карабутов. Лазерная оптоакустика. Москва. «Наука». 1991. С.212.
5. Ed.H.Bubert, H.Jenett. Surface and Thin Film Analysis: Principles, Instrumentation, Applications. Darmstadt. Wiley. 2002. P. 336.
6. М.Прамтон. Введение в физику поверхности. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2000. С.256.
7. Ed.H.Bubert, H.Jenett. Surface and Thin Film Analysis: Principles, Instrumentation, Applications. Darmstadt. Wiley. 2002. P. 336.

HAJMIY FERROMAGNIT KRISTALLARDAGI BIR O‘LCHAMLI MIKROMAGNIT TIZIMLARNING DOMEN TUZILISHI

Djuraev Davron Raxmonovich,
Buxoro davlat universiteti professori
djuraev2002@mail.ru

Sharipov Mirzo Zokirovich,
Buxoro davlat universiteti professori
m.z.sharipov@buxdu.uz

Fayziyev Shahobiddin Shavkatovich,
Buxoro davlat universiteti dotsenti
s.s.fayziyev@buxdu.uz

To‘xtayeva Shahlo Qo‘zimurod qizi,
Buxoro davlat universiteti magistranti
toxtayevashahlo285@gmail.com

Mo‘minov Sherzod Hakimjonovich
Buxoro innovatsiyalar universiteti magistranti
sherzod2025@inbox.ru

Annotatsiya. Ushbu maqolada hajmiy ferromagnit kristallardagi elementar bir o‘lchovli mikromagnit konfiguratsiyalar magnitlanishga sirt hissalarini hisobga olmagan holda o‘rganiladi. Chekli qalinlikdagi domen devorlarining muvozanatli tuzilishi va barqarorligi almashinuv va anizotropiya energiyalari o‘rtasidagi tortishish bilan boshqariladi. Qo‘shni domenlar chegarasi bo‘ylab magnitlanish vektorining uzluksiz aylanishi umumiy energiyani minimallashtiradi va devorning xarakterli kengligini aniqlaydi. Tahlil natijasida bir o‘qli va kubik magnit anizotropiyaga ega bo‘lgan kristallarda mos ravishda 180° va 90° devorlar farqlanadi. Natijalar massiv ferromagnit materiallardagi mikromagnit holatlarni chuqurroq tushunishga yordam beradi va magnitoptik va spintron yupqa qatlamli texnologiyalarni ishlab chiqish uchun qiziqish uyg‘otadi.

Kalit so‘zlar: mikromagnetizm; domen devori; magnit anizotropiyasi; almashinuv o‘zaro ta’siri; bir o‘qli kristall; magnitoptik materiallar; spintronika ilovalari

ДОМЕННАЯ СТРУКТУРА ОДНОМЕРНЫХ МИКРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ В ОБЪЕМНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Аннотация. В данной статье рассматриваются элементарные одномерные микромагнитные конфигурации в объемных ферромагнитных кристаллах без учета поверхностных вкладов в намагничивание. Равновесная структура и устойчивость стенки домен конечной толщины регулируются конкуренцией между энергиями обмена и анизотропии. Непрерывное вращение вектора намагничивания по границе раздела между соседними доменами минимизирует общую энергию и определяет характерную ширину стенки. Анализ выявил 180° и 90° стенок соответственно в кристаллах с одноосной и кубической магнитной анизотропией. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию микромагнитных состояний в массивных ферромагнитных материалах и представляют интерес для разработки магнитооптических и спинтронических тонкопленочных технологий.

Ключевые слова: микромагнетизм; доменная стенка; магнитная анизотропия; обменное взаимодействие; одноосный кристалл; магнитооптические материалы; спинтронные приложения

DOMAIN STRUCTURE OF ONE-DIMENSIONAL MICROMAGNETIC SYSTEMS IN BULK FERROMAGNETIC CRYSTALS

Abstract. This work examines elementary one-dimensional micromagnetic configurations in bulk ferromagnetic crystals while disregarding surface contributions to magnetization. The equilibrium structure and stability of finite-thickness domain walls are governed by the competition between exchange and anisotropy energies. Continuous rotation of the magnetization vector across the interface between adjacent

domains minimizes the total energy and determines the characteristic wall width. The analysis differentiates 180° and 90° walls in crystals with uniaxial and cubic magnetic anisotropy, respectively. The results contribute to a deeper understanding of micromagnetic states in massive ferromagnetic materials and are of interest for the development of magneto-optical and spintronic thin-film technologies.

Key words: micromagnetism; domain wall; magnetic anisotropy; exchange interaction; uniaxial crystal; magneto-optical materials; spintronic applications dynamic micromagnetic phenomena.

Kirish. Ferromagnit materiallarda mikromagnit konfiguratsiyalarni o'rganish zamonaviy kondensatsiyalangan holatlar fizikasi va materialshunoslikning asosi bo'lib qolmoqda. Mikromagnetizm o'zaro almashinuv, anizotropiya va magnitostatik o'zaro ta'sirlari evaziga magnitlanish vektorining fazoda qanday o'zgarishini tushunish uchun nazariy asos yaratadi. Natijada hosil bo'lgan fazoviy jihatdan bir xil bo'lmagan holatlar - ayniqsa magnit domenlar va domen devorlari - kristalli qattiq jismlarda kuzatiladigan keng makroskopik magnit va magneto-optik xususiyatlar uchun muhimdir.

Domen devori (DD) - bu turli xil yengil o'qlar bo'ylab yo'naltirilgan ikkita bir xil magnitlangan domenlarni ajratib turuvchi o'tish mintaqasi. Uning xarakterli qalinligi, odatda o'nlab nanometrlardan yuzlab nanometrgacha bo'lgan diapazonda bo'lsa-da, domen devori tizimning magnit, optik va transport xatti-harakatlarini aniqlashda hal qiluvchi rol o'ynaydi. Ichki devor tuzilishi bir xil magnitlanishni qo'llab-quvvatlaydigan almashinuv energiyasi va magnitlanishni kristallografik jihatdan afzal ko'rilgan yo'nalishlar bo'ylab moslashtiradigan magnit anizotropiya energiyasi o'rtasidagi nozik muvozanatdan kelib chiqadi. Muvozanat devori profili va uning energiyasi umumiy mikromagnit funksionalni minimallashtirish orqali aniqlanadi.

Domen devorlarining tuzilishi va energetikasini tushunish nafaqat fundamental ahamiyatga ega, balki muhim texnologik ahamiyatga ham ega. Nodir yer temir va alyuminiy boratlari (masalan, $\text{ErAl}_3(\text{BO}_3)_4$ va $\text{YFe}_3(\text{BO}_3)_4$ kabi magnit-optik materiallarda domen tuzilishi va magnitlanishning fazoviy shakli optik ma'lumotlarni saqlash, magnit-optik sensorlar va tasvirlash tizimlari uchun asos bo'lgan Faraday va Kerr effektlariga kuchli ta'sir qiladi. Spintronik qurilmalarda domen devorlari boshqariladigan harakati ma'lumotlarni qayta ishlash va o'zgaruvchan bo'lmagan xotira operatsiyalarini amalga oshirish imkonini beruvchi funksional elementlardir. Ularning almashinuv, anizotropiya, suspenziya va spin-uzatish momentlari o'rtasidagi muvozanat bilan boshqariladigan dinamik xatti-harakati magnit mantiq va spin-o'tish xotirasi arxitekturalarining operatsion chegaralarini belgilaydi.

Nazariy asos. Nazariy nuqtai nazardan, magnitlanish o'zgarishining bir o'lchovli modellari hajmiy materiallarda domen-devor shakllanishini tushunishning eng to'g'ridan-to'g'ri usulini taklif qiladi. Bunday modellarda sirt effektlari e'tiborga olinmaydi va magnitlanish bitta fazoviy koordinata bo'ylab o'zgaradi deb taxmin qilinadi. Bu eng oddiy bir o'lchovli mikromagnit konfiguratsiyalar almashinuv va anizotropiya hissalarini o'rtasidagi muvozanatni analitik tushunish imkonini beradi va domen devorining kengligi va energiyasi uchun to'g'ri munosabatlarni aniqlash imkonini beradi. Landau va Lifshitz [1] tomonidan boshlangan klassik yondashuv zamonaviy mikromagnit modelashtirish uchun muhim asos bo'lib qolmoqda, bu yupqa plyonkalar, ko'p qatlamli tizimlar va nanostrukturali materiallarga ham tegishli [2-4].

Ushbu maqolada biz 180° va 90° domen devorlarining shakllanishi va barqarorligi shartlariga e'tibor qaratib, hajmiy ferromagnit kristallardagi asosiy bir o'lchovli mikromagnit konfiguratsiyalarni tahlil qilamiz. Magnit anizotropiya simmetriyasining o'rniga va chekli devor qalinligini belgilaydigan energetik muvozanatga alohida e'tibor qaratiladi. Bu yerda keltirilgan natijalar hajmiy kristallarga ham, yupqa plyonkali magnit-optik tizimlarga ham tegishli nazariy asos yaratadi, bu yerda nanoskalada shunga o'xshash mikromagnit mexanizmlar kuzatiladi.

Ferromagnit kristaldagi muvozanat magnitlanish taqsimoti umumiy mikromagnit energiyaning minimallashtirilishi bilan boshqariladi, bu almashinuv, anizotropiya va magnitostatik atamalarni o'z ichiga oladi [2,3]. Bir o'lchovli holat uchun, magnitlanish faqat bitta koordinata (z) bo'ylab o'zgarganda, birlik hajmdagi umumiy energiya quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$E = A \left(\frac{dm}{dz} \right)^2 + Kf(m) + E_{ms} \quad (1)$$

bu yerda A almashinuv qattiqligi konstantasi, K anizotropiya konstantasi, $f(m)$ kristal simmetriyasi bilan aniqlangan anizotropiya energiyasining burchakka bog'liqligini va E_{ms} magnitostatik energiya zichligini tavsiflaydi. $m = M/M_s$ vektori magnitlanish yo'nalishi birligi vektoridir.

Tashqi sirtlarning ta'sirini e'tiborsiz qoldirish mumkin bo'lgan hajmli ferromagnit kristallarda magnit struktura asosan almashinuv o'zaro ta'siri va magnit anizotropiya o'rtasidagi ta'sir bilan belgilanadi.

Almashinuv energiyasi qo'shni spinlarni bir-biriga parallel ravishda tekislashga moyil bo'lib, bir xil magnitlanishga olib keladi, anizotropiya energiyasi esa magnitlanish yo'nalishini ma'lum kristallografik o'qlar - engil o'qlar deb ataladigan o'qlar bilan cheklaydi. Bir nechta ekvivalent engil o'q yo'nalishlari mavjud bo'lganda, kristall degeneratsiyalangan bir xil magnitlangan holatlarga ega bo'ladi, ular kristallning turli qismlarida birga yashashi mumkin. Ushbu ekvivalent yo'nalishlar bo'ylab magnitlangan sohalar magnit domenlarni hosil qiladi.

Qo'shni domenlar o'rtasida magnitlanish uzluksiz o'zgarib turolmaydi, chunki bu almashinuv energiyasining keskin oshishiga olib keladi. Buning o'rniga, magnitlanish vektori asta-sekin chekli masofada aylanadi va DD - turli yo'nalishdagi domenlarni ajratib turuvchi o'tish qatlamini hosil qiladi. Devorning chekli qalinligi, δ deb belgilanadi, umumiy energiya funktsionalini minimallashtirish natijasida yuzaga keladi.

$M(z)$ magnitlanish vektorining muvozanat konfiguratsiyasini topish uchun kristall koordinata tizimida M yo'nalishini tavsiflovchi $\theta(z)$ va $\phi(z)$ burchaklarining fazoviy o'zgarishlariga nisbatan umumiy energiya minimallashtiriladi. Variatsion printsipni qo'llash Eyler-Lagranj tenglamasiga olib keladi:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial E}{\partial (d\theta/dz)} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

bu domen devori ichidagi magnitlanishning muvozanat profilini belgilaydi. Almashinuv va anizotropiya energiyalari o'rtasidagi tortishuv magnitlanish vektorining xarakterli devor qalinligini va aylanishini belgilaydi.

Bir o'qli kristalning eng oddiy holatida, bu yerda engil o'q z yo'nalishi bo'ylab joylashgan bo'lsa, anizotropiya energiyasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$E_{an} = K \sin^2 \theta \quad (3)$$

va umumiy bir o'lchovli energiya funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$E = A \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 + K \sin^2 \theta. \quad (4)$$

Bu funktsiyani minimallashtirish 180° Blox devori uchun aniq yechimni beradi:

$$\theta(z) = z \tan^{-1} \left[\exp \left(\frac{z}{\delta} \right) \right], \quad (5)$$

bu yerda devor qalinligi quyidagicha berilgan:

$$\delta = \sqrt{\frac{A}{K}} \quad (6)$$

Bu natija muvozanat devor qalinligi almashinuv kattaligining anizotropiya kuchiga nisbati bilan aniqlanishini aniq ko'rsatadi: kuchli almashinuv devorni kengaytiradi, kuchli anizotropiya esa uni toraytiradi.

Keyin birlik maydoniga to'g'ri keladigan umumiy devor energiyasini quyidagicha baholash mumkin:

$$\gamma = 4\sqrt{AK} \quad (7)$$

bu bir o'qli ferromagnitdagi Blox tipidagi domen devorining minimal sirt energiyasini ifodalaydi.

Magnit domen chegaralarining tuzilishi. Katta hajimli ferromagnit kristalda domen devori turli xil yengil magnitlanish o'qi bo'ylab yo'naltirilgan M_1 va M_2 magnitlanish vektorlari bilan ikkita bir xil magnitlangan sohalar (domenlarni) ajratib turadi. Devor tekisligini uning normal $\mathbf{n}$ bilan aniqlash mumkin, devor ichidagi magnitlanish vektorining aylanishini esa ikkita burchak bilan tavsiflash mumkin:

- θ - magnitlanish vektorining devor normaliga nisbatan o'zgarishi va
- ϕ - uning normal atrofida aylanishini tavsiflovchi azimutal burchak.

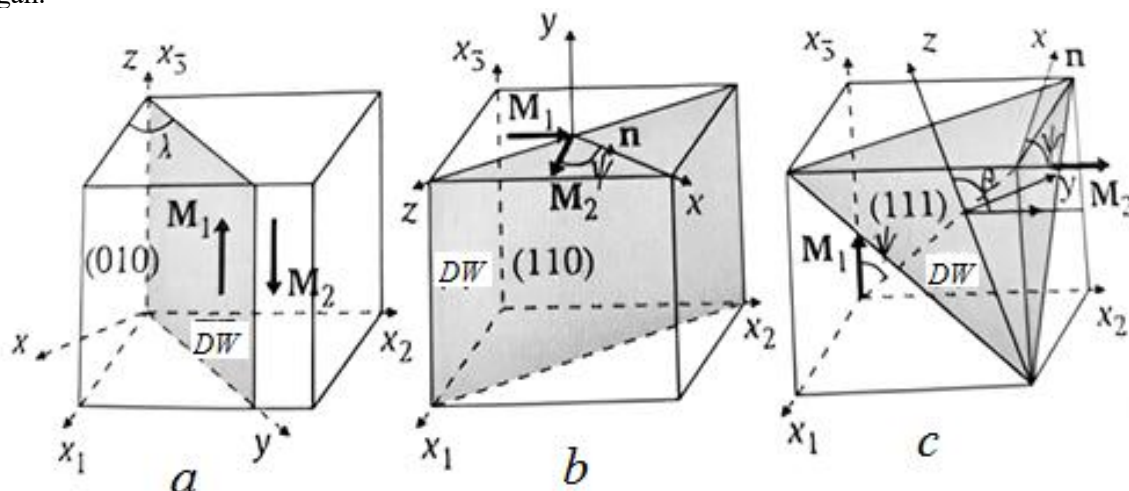
O'zaro almashinuv energiyasini minimallashtirish doimiy ravishda sodir bo'ladi va M traektoriyasining o'qi engil magnitlanish yo'nalishiga mos keladigan ψ maksimal burchagiga ega konusning yuzasini tasvirlaydi.

Bir o'qli anizotropiyaga ega kristallarda yengil magnitlanish o'qi odatda devor normaliga to'g'ri keladi. Bu holda, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ va magnitlanish faqat azimutal burchak ϕ orqali o'zgaradi. Bunday konfiguratsiya klassik Blox tipidagi 180° devorga mos keladi, bu yerda magnitlanish devor tekisligi ichida aylanadi va o'tish sohasi bo'ylab doimiy kattalikni saqlaydi. Ikki qo'shni domendagi magnitlanish yo'nalishi 180° ga farq qiladi.

Bunga qarama-qarshi ravishda, ma'lum ferritlar va yupqa magnit plyonkalar kabi tekis (biaksial) anizotropiyaga ega materiallar yengil magnitlanish o'qi chegara tekisligida joylashgan devorlarni qo'llab-quvvatlashi mumkin. Bu yerda θ va φ chegara bo'ylab o'zgaradi va magnitlanish devor normaliga perpendikulyar tekislikda aylanadi. Bu devorlar ba'zan M ning o'ziga xos aylanish yo'liga qarab Néel tipidagi devorlar deb ataladi.

Qo'shni domenlardagi magnitlanishning nisbiy yo'nalishiga qarab magnit anizotrop kristallarda odatda ikkita asosiy devor turi kuzatiladi - 180° va 90° devorlar.

1-rasmda magnit ikki o'qli yoki uch o'qli kristaldagi bir nechta mumkin bo'lgan konfiguratsiyalar ko'rsatilgan.

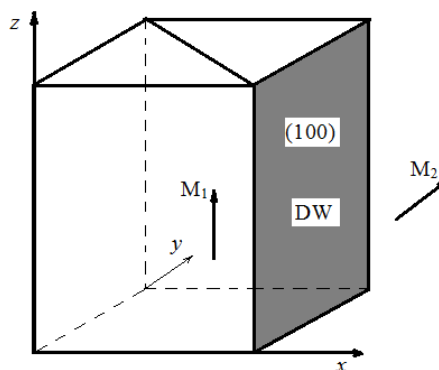


1-rasm. Magnit anizotrop kristaldagi 180° va 90° domen devorlarining sxematik ko'rinishi: (a) (100) tekislikka λ burchak bilan bog'liq bo'lgan 180° domen devorlari; (b) (110) tekisliklarda 90° domen devorlari; (c) (111) tekisliklarda 90° domen devorlar

Eng oddiy holatda ($\lambda = 0$), 180° devor (100) tipidagi kristallografik tekislikda joylashgan va qarama-qarshi magnitlanish yo'nalishlariga ega ikkita domenni ajratib turadi. Bunday devor magnitostriksiya yoki magnitostatik effektlar hisobga olinganda energetik jihatdan barqaror bo'ladi. Bu effektlar bo'lmagan taqdirda, 180° devor magnitlanishning umumiy aylanishi bilan bir xil bo'lgan ikkita 90° devorga parchalanishi mumkin. Bu xatti-harakatlar magnitlanish vektori ikkita domen yo'nalishi o'rtasida aylanayotganda duch keladigan qo'shimcha engil magnitlanish o'qlarining mavjudligidan kelib chiqadi [2,3].

90° domen devorlari qo'shni domenlar orasidagi $\pi/2$ ga magnitlanish o'zgarishlariga mos keladi. Kristall simmetriyasiga qarab, bunday devorlar (100) , (110) yoki (111) tipidagi tekisliklarda yotishi mumkin. Muayyan sharoitlarda, ayniqsa nuqsonlar yoki pinning markazlari mavjud bo'lganda, izolyatsiya qilingan 90° devorlar hatto ideal kristallarda ham barqaror qolishi mumkin.

2-rasmda (100) tekislikda joylashgan 90° devorning sxematik namunasi ko'rsatilgan, 3-rasmda esa nikel va ittriy temir granat (YIG) kabi kubik kristallarda hosil bo'lgan 180° domen devor yo'nalishlarining turlichaligi ko'rsatilgan.



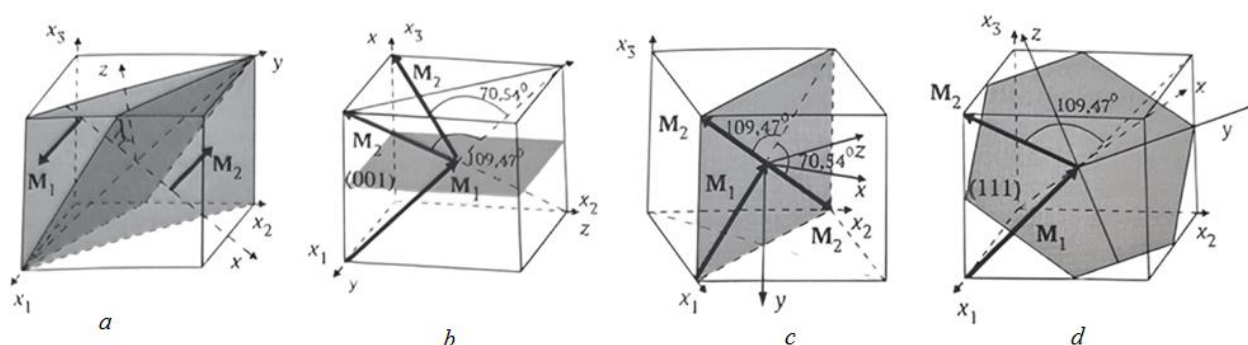
2-rasm. (100) kristallografik tekislikda joylashgan 90° domen devorining sxematik tasviri

Bir o'qli va ikki o'qli materiallarda 90° li domen devorlarining tuzilishini ko'rib chiqqandan so'ng, anizotropiya energiyasi o'zgarishi ancha murakkablashadigan kubik (magnit jihatdan to'rt o'qli)

kristallardagi vaziyatni o'rganish foydali bo'ladi. Bunday tizimlarda magnitlanish bir nechta ekvivalent yengil o'qlar bo'ylab, odatda $\langle 100 \rangle$ yoki $\langle 111 \rangle$ kristallografik yo'nalishlar bo'ylab tekislanishi mumkin. Bir nechta engil magnitlanish o'qlarining birgalikda mavjudligi energetik jihatdan ekvivalent domen-devor yo'nalishlarining uzluksiz to'plamini yaratish imkoniyatiga olib keladi.

Bu kristallarda magnitlanish vektorining devor bo'ylab aylanishi bitta kristallografik tekislik bilan chegaralanmaganligini bildiradi. Buning o'rniga, domen devor tekisligi (110) kabi indeksli kristall tekisligiga nisbatan ixtiyoriy λ burchak bilan egrilanishi mumkin. Muayyan devor yo'nalishining barqarorligi almashinuv, anizotropiya va magnitostriktiv energiyalar o'rtasidagi muvozanatga bog'liq. Masalan, 180° devor faqat magnitostriksiya yoki magnitostatik o'zaro ta'sirlar yetarlicha kuchli bo'lganda ma'lum λ qiymatlarida barqaror qolishi mumkin; aks holda, u o'z-o'zidan ikkita 90° devorga parchalanishi mumkin.

Bunday ko'p yo'nalishli domen-devor konfiguratsiyalari nikel va itriy temir granat (YIG) kabi kubik materiallar uchun odatiy holdir, ular past magnit suspenziyasi va yuqori optik shaffofligi tufayli magnit-optik va spintronik qurilmalar uchun katta qiziqish uyg'otadi. Ushbu tizimlardagi mumkin bo'lgan domen-devor yo'nalishlarining xilma-xilligi 5-rasmda sxematik tarzda ko'rsatilgan.



3-rasm. Kubik kristallardagi (masalan, Ni, YIG) 180° domen devorlarining mumkin bo'lgan yo'nalishlari, (110) tekisligiga λ turli burchak ostida sezgir bo'lgan uzluksiz devorlar to'plamini ko'rsatadi

Turli xil anizotropiyalar va simmetriyalarga ega kristallardagi domen devori turlarining xilma-xilligi magnitokristal anizotropiyaning ichki mikromagnit strukturani aniqlashdagi asosiy rolini ko'rsatadi. Yupqa plyonkalar va ko'p qatlamli tizimlarda, sirt va demagnetizatsiya effektlari sezilarli bo'ladigan joylarda, bu devor konfiguratsiyalari Bloxga o'xshash va Néelga o'xshash xususiyatlarni birlashtirgan gibrid holatlarga aylanishi mumkin, bu esa magnit-optik va spintronik qo'llanmalar uchun alohida ahamiyatga ega.

Olingan natijalar muhokamasi va qo'llanilishi. Katta hajmli ferromagnit kristallardagi bir o'lchovli mikromagnit konfiguratsiyalarning nazariy tahlili domen devorlarining shakllanishi va barqarorligi uchun mas'ul bo'lgan asosiy fizik mexanizmlarni ochib beradi. Bu natijalar nafaqat nazariy qiziqish uyg'otadi, balki magnit-optik va spintronik tizimlarda eksperimental ma'lumotlarni talqin qilish, shuningdek, ilg'or magnit materiallarni loyihalashni optimallashtirish uchun ham asos yaratadi [5-7].

Makroskopik ferromagnitlarda muvozanat kengligi (6) va devor sirt energiyasi (7) turli mikromagnit xossalari ko'lamini belgilaydigan ichki material parametrlarini ifodalaydi. Almashinuv va anizotropiya energiyalari o'rtasidagi o'zaro ta'sir magnitlanishning bir engil yo'nalishdan ikkinchisiga qanday o'tishini belgilaydi, magnitlanishning teskari aylanishi va majburiy maydon uchun energiya to'sig'iga ta'sir qiladi. Amalda, bu parametrlar gisterezis xatti-harakatlarini, domen-devor harakatchanligini va tashqi magnit maydonlar ostida xarakterli kommutatsiya vaqtini boshqaradi.

Tizim hajmi kamayganda - masalan, yupqa plyonkalarda yoki turli magnit elementlarda - sirt va demagnetizatsiya effektlari katta hajmli anizotropiyaga o'xshash bo'ladi. Bu klassik Blox devorlarining Néel tipidagi yoki gibrid domen devorlariga aylanishiga olib keladi, bunda magnitlanish qisman plyonka tekisligida aylanadi. Bunday o'zgarishlar magnit-optik javobga, xususan, magnitlanishning mahalliy yo'nalishiga sezgir bog'liq bo'lgan Faraday va Kerr effektlariga jiddiy ta'sir qiladi. Masalan, $\text{ErAl}_3(\text{BO}_3)_4$ va $\text{YFe}_3(\text{BO}_3)_4$ kabi borat plyonkalarida domen devorlarining shakli va ichki tuzilishi polarizatsiya aylanishiga va dixroizm spektrlariga kuchli ta'sir qiladi. Natijada, devor konfiguratsiyalarini mikromagnit modelashtirish fazoviy jihatdan aniqlangan magnit-optik tasvir ma'lumotlarini to'g'ri talqin qilish uchun juda muhimdir.

Texnologik nuqtayi nazardan, domen devorlari zamonaviy spintronik va magnitofotonik qurilmalarda muhim rol o'ynaydi. Domen devorlarining boshqariladigan harakati spin drayf xotiralari, domen-devor mantiqiy elementlari va spin-orbital momenti tipidagi tizimlarning asosini tashkil qiladi. 180° va 90°

devorlarning barqarorligi va dinamikasi bunday qurilmalarning ishlashi va energiya samaradorligini bevosita belgilaydi. Hajmiy tizimlar uchun ishlab chiqilgan nazariy asos ushbu nanostrukturali amaliyotga qo'llahs uchun qimmatli ma'lumotlarni taqdim etadi, bu yerda almashinuv energiyasi, anizotropiya va magnitostatik o'zaro ta'sirlar o'rtasidagi ta'sir domen-devor tezligi va harakat chegaralarini boshqaradi.

Umuman olganda, bu yerda taqdim etilgan kengaytirilgan mikromagnit model klassik nazariyasi va zamonaviy nanoskalali magnitlanish o'rtasidagi bo'shliqni to'ldiradi. U turli masshtablarga - hajmli kristallardan nanostrukturali plyonkalargacha - va statik magnit saqlashdan dinamik magnit-optik modulyatsiya va spintronik axborotni qayta ishlashgacha bo'lgan turli funksiyalarga qo'llaniladigan domen devori xatti-harakatlarining yagona tavsifini o'rnatadi [4].

Xulosa. Ushbu maqolada biz domen devorlarining shakllanishi, tuzilishi va barqarorligini boshqaradigan asosiy mexanizmlarni ta'kidlab, hajmiy ferromagnit kristallardagi eng oddiy bir o'lchovli mikromagnit konfiguratsiyalarni tahlil qildik. Almashinuv va anizotropiya energiyalari o'rtasidagi muvozanat cheklangan devor qalinligi va sirt energiyasini belgilaydi, bu esa o'z navbatida materialning mikromagnit o'zgarishini belgilaydi. Bu yerda ishlab chiqilgan nazariy asos 180° va 90° domen devorlarini tavsiflaydi va kristallografik anizotropiyaning ularning geometriyasi va energetikasiga ta'sirini aniqlaydi.

Natijalar nafaqat hajmiy kristallarda, balki yupqa plyonkalar va ko'p qatlamli tizimlarda ham domen devorining dinamikasini tushunish uchun fizik asos yaratadi, bu yerda sirt va demagnetizatsiya effektlari sezilarli bo'ladi. Bunday bilimlar magneto-optik hodisalarni talqin qilish, optik va spintronik qo'llanmalar uchun materiallarni optimallashtirish va keyingi avlod magnit va magnetofotonik qurilmalarini loyihalashga juda muhimdir.

ADABIYOTLAR:

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., Pergamon Press (1984).
2. Hubert and R. Schäfer, *Magnetic Domains: The Analysis of Magnetic Microstructures*, Springer (1998)
3. N. Filipov, *Micromagnetic Structures and Their Nonlinear Properties. Part 1*, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg (2019).
4. J. Stöhr and H.C. Siegmann, *Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics*, Springer (2006). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-30283-4>
5. H. Ferrari, V. Bekeris, T.H. Johansen "Magneto-optic imaging of domain walls in ferrimagnetic garnet films" *Physica B: Condensed Matter*, 398(2), 2007, 476-479. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.05.015>
6. B.Y. Sokolov, M.Z. Sharipov, "Low-frequency resonance of domain walls in the iron garnet $Tb_3Fe_5O_{12}$ near the magnetic compensation point," *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 116(5), 775-779 (2013) <http://dx.doi.org/10.1134/S1063776113040109>
7. B.Y.Sokolov, M.Z. Sharipov "Magneto-optical properties of the iron garnet $Tb_3Fe_5O_{12}$ near the magnetic compensation temperature," *Physics of the Solid State* 56(5), 975-979 (2014). <http://dx.doi.org/10.1134/S1063783414050291>
8. B.Yu. Sokolov, M.D. Talabov, M.Z. Sharipov, *Domain structure of a thin single - crystal plate of terbium iron garnet near the magnetic compensation point*, *Physics of the Solid State*. 55. 2. (2013), 314-320.
9. M.Z. Sharipov, D.E. Hayitov, M.N. Rizoqulov, U.N. Islomov, I.B. Raupova, *Domain structure and magnetic properties of terbium ferrite-garnet in the vicinity of the magnetic compensation point*, *Eurasian Physical Technical Journal*. 16. 2(32). (2019). 21-25.
10. S.R. Boidedaev, D.R. Dzhuraev, B.Yu. Sokolov, M.Z. Sharipov, *Magneto-optical method of investigation of the magnetic inhomogeneity of easy-plane antiferromagnets with a weak ferromagnetism*, *Optics and Spectroscopy*, 104(4), (2008), 604-609.
11. M. Jumaev, M. Sharipov, M. Rizoqulov, N. Ergasheva, *Frequency dependence of magneto-optical phenomena in nonmagnetic dielectric nanostructures*, *Journal of Physics: Conference Series*, 1889, (2021), 022073.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КОМПОЗИТОВ С ИЗОТАКТИЧЕСКИМ ПОЛИПРОПИЛЕНОМ

Ибрагимов Жахонгир Кучимович,

Джизакский политехнический институт, ул. Ислама Каримова,
№ 4, 130100, Джизак, Узбекистан

Эшбекова Санобар Омонликовна,

Джизакский политехнический институт, ул. Ислама Каримова,
№ 4, 130100, Джизак, Узбекистан

Абдуразаков Мухиддин,

Институт химии и физики полимеров АН РУз, г.
Ташкент, 100128, ул. А. Кадыри, 7 "б"

Ашуров Нигмат Рустамович,

Институт химии и физики полимеров АН РУз, г.
Ташкент, 100128, ул. А. Кадыри, 7 "б"

Аннотация. Методами рентгеноструктурного и термического анализа исследованы образцы чистого и наполненных модифицированным слоистым алюмосиликатом марки «Cloisite 20A» изотактического полипропилена. Содержание наполнителя в композитах составляло 1,0, 3,0, 5,0 мас.%. Показан различный характер протекания процесса термоокислительной деструкции в исходном и наполненных образцах. Установлена структурная активность частиц наполнителя в период нуклеации на стадии кристаллизации и формирования надмолекулярных образований в полимерной матрице. Доказано, что присутствие органоглины в полимере способствует частичному подавлению окисления и повышению стойкости композитов к термоокислительной деструкции.

Ключевые слова: Композиты, нанокompозиты, полипропилен изотактический, наполнитель, монтмориллонит, слоистые силикаты, термический анализ, термогравиметрия, дифференциальная термогравиметрия, дифференциальная сканирующая калориметрия, термоокислительная деструкция, потери массы, скорость изменения массы.

IZOTAKTIK POLIPROPILENLI KOMPOZITLARNING TERMODINAMIK XUSUSIYATLARINI O'RGANISH

Annotatsiya. Sof izotaktik polipropilen namunalarini va modifikatsiyalangan qatlamli alyuminosilikat navi "Cloisite 20A" bilan to'ldirilgan namunalarni o'rganish uchun rentgen difraksiyasi va termal tahlil qo'llanildi. Kompozitlardagi plomba miqdori mos ravishda 1,0, 3,0 va 5,0 og'irlik% ni tashkil etdi. To'ldirilmagan va to'ldirilgan namunalar uchun turli xil termo-oksidlovchi degradatsiya jarayonlari namoyish etildi. Polimer matritsasida yadrolanish, kristallanish va supramolekulyar tuzilmalar hosil bo'lishi paytida plomba zarralarining strukturaviy faolligi aniqlandi. Polimerda organoklayning mavjudligi oksidlanishni qisman bostirishi va kompozitlarning termo-oksidlovchi degradatsiyaga chidamliligini oshirishi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: kompozitlar, nanokompозитlar, izotaktik polipropilen, plomba moddasi, montmorillonit, qatlamli silikatlar, termal tahlil, termogravimetriya, differentsial termogravimetriya, differentsial skanerlash kalorimetriyasi, termal-oksidlovchi degradatsiya, massa yo'qotilishi, massa o'zgarishi tezligi

INVESTIGATION OF THE THERMODYNAMIC BEHAVIOR OF COMPOSITES WITH ISOTACTIC POLYPROPYLENE

Abstract: Using X-ray diffraction and thermal analysis methods, samples of pure and isotactic polypropylene filled with modified layered aluminosilicate of the "Cloisite 20A" brand were studied. The filler content in the composites was 1.0, 3.0, 5.0 wt.%. The different nature of the thermal-oxidative destruction process in the original and filled samples is shown. The structural activity of filler particles during the nucleation period at the stage of crystallization and the formation of supramolecular formations in the polymer matrix has been established. The structural activity of filler particles during the nucleation

period at the stage of crystallization and the formation of supramolecular formations in the polymer matrix has been established. It has been proven that the presence of organoclay in the polymer helps to partially suppress oxidation and increase the resistance of composites to thermal oxidative destruction.

Keywords: Composites, nanocomposites, isotactic polypropylene, filler, montmorillonite, layered silicates, thermal analysis, thermogravimetry, differential thermogravimetry, differential scanning calorimetry, thermal oxidative destruction, mass loss, rate of mass change.

Введение. Полипропилен (ПП) принадлежит к классу полиолефинов и является синтетическим термопластичным неполярным полимером. На сегодняшний день полипропилены и композиты на их основе являются одним из самых привлекательных полимерных объектов с точки зрения себестоимости, комплекса эксплуатационных свойств и широкого практического применения. Среди имеющихся разновидностей полипропилена в техническом отношении наиболее важен и перспективен изотактический полипропилен [1-2].

Несмотря на удачное сочетание ряда свойств, которые обеспечивают полипропилену приоритетное положение среди синтетических полимеров, относительно низкие характеристики термо- и огнестойкости [3] этого термопласта накладывают определенные ограничения на расширение сфер его использования. Устранение отмеченных недостатков осуществляется введением специальных наполнителей, термостабилизаторов и антипиренов [4-10].

Наряду с повышением термо- и огнестойкости аддитивы выполняют различные функции – повышение жёсткости, снижение усадки, повышение размерной стабильности, упрочнение и т.д. Но помимо улучшения свойств, отдельные наполнители отрицательно влияют на деформируемость, термо- и светостойкость полимеров [5].

Модифицированные слоистые силикаты, используемые в качестве наполнителей, диспергируются на наноразмерном уровне внутри полимерной матрицы, придавая ей новые, экстраординарные свойства [11].

Семейство глин представлено огромным числом минералов. Глины относятся к слоистым алюмосиликатам, в которых непрерывный двумерный слой образован кремнекислородными тетраэдрами, в части которых атомы кремния замещены атомами алюминия или железа [12]. Среди слоистых силикатов наиболее часто используемыми являются монтмориллонит, гекторит, и сапонит [12].

Толщина слоев и межслоевое пространство (МП), содержащие обменные катионы (Na^+ , Li^+ и др.) для монтмориллонита составляет примерно 1 нм, введение соответствующих модификаторов в МП приводит, как правило, к 3-4 кратному расширению. В настоящее время в мире производится несколько десятков модифицированных глин с различной функциональностью [13-14].

Практически для всех крупнотоннажных полимеров определены необходимые условия и требования к модификаторам для формирования нанокомпозитов с интеркалированной, интеркалированно-флокулированной и эксфолированной структурами. В последнем случае интеркаляция макромолекул в МП ММТ за счет специфических взаимодействий функциональных групп макромолекул полимера с модификатором и сдвиговых усилий в процессе перемешивания частиц ММТ с полимером в вязко-текучем состоянии завершается разрушением до индивидуальных слоев ММТ [15]. Эти структуры придают высокие барьерные свойства, лежащие в основе усиления упруго-прочностных, термических характеристик и огнестойкости [16]. Формирование подобной морфологии легко реализуется для полярных полимеров. В случае неполярных полимеров, каким является полипропилен, вводят определенное количество функционализированных макромолекул той же природы, что и полимерная матрица.

В настоящей работе нами проведена сравнительная оценка термического поведения исходного изотактического ПП и нанокомпозитов на его основе с интеркалированными структурами, различающихся степенью интеркаляции макромолекул ПП в межслоевое пространство модифицированного слоистого силиката марки «Cloisite 20A».

Объекты. В качестве исходного полимера, матрицы композитов и нанокомпозитов был выбран отечественный изотактический полипропилен (ИПП) марки J-150, производимый СП ООО «Uz-Kor Gas Chemical» (Кунград). Этот гомополимер с показателем текучести расплава равном $8-12 \pm 10 \text{ g/10 min}$ рекомендован для изготовления хозяйственных товаров общего назначения методом литья и отвечает требованиям технических условий Ts 22343982-02:2016 [17].

Наполнитель (Нп) – представитель слоистых алюмосиликатов, модифицированный монтмориллонит марки «Cloisite 20A».

Композиты представляют двухкомпонентную систему типа ИПП/Нп.

Методы. Рентгенографические исследования проводили на дифрактометре Miniflex 600 (Rigaku, Япония) с монохроматизированным $\text{CuK}\alpha$ -излучением, выделенным никелевым фильтром с длиной волны $\lambda=1.5418 \text{ \AA}$ при напряжении 40 кВ и силой тока 15 мА. Съемку проводили в интервале углов $2\theta=2^\circ\text{--}40^\circ$. Обработку дифрактограмм проводили с помощью программного обеспечения SmartLab Studio II, использовались фиксированные щели которые имеют значение угла 1.25° .

Термический анализ выполнен на синхронном термоанализаторе типа STA PT 1600 фирмы «LINSEIS» (Германия) методами термогравиметрии (ТГ), дифференциальной термогравиметрии (ДТГ) и дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК). Измерения проводили в атмосфере воздуха в динамическом режиме со скоростью нагрева 10 градусов в минуту в интервале температур от комнатной до 800°C . Исходная масса образцов составляла 20.7 mg . При выполнении термического анализа исследуемых образцов придерживались рекомендаций, указанных в работах [18-20].

Цифровую оценку стойкости исследованных образцов к термоокислительной деструкции определяли величиной характеристических температур по кривым термогравиметрического анализа. Их оценивали температурами T_5 , T_{10} , (температуры относительно малых потерь) T_{20} , T_{30} , (температуры средних потерь), при которых происходят соответственно потери 5, 10, 20 и 30 мас. % при одних и тех же условиях эксперимента (скорость нагрева, среда и т.п.) [21].

Полученные результаты и их обсуждение. Информацию о структурообразовании в исследуемых образцах можно получить из дифрактограмм в области углов рассеяния 2θ в интервале $1\text{--}10^\circ$. Как видно из рис. 1, пики, соответствующие кристаллической структуре модифицированного слоистого силиката «Cloisite 20A» в композитах с ПП смещаются по мере увеличения концентрации в сторону малых углов. Расстояния между слоями частиц «Cloisite 20A», рассчитанные по уравнению Вульфа-Брэгга располагаются в ряду «Cloisite 20A» и композиции с ПП с концентрациями 5.0, 3.0, 1.0 мас. % как 2.3 нм, 2.76 нм, 3.05 нм, 3.74 нм соответственно.

Полученные данные свидетельствуют об формировании интеркалированных нанокомпозитов, при этом уровень интеркаляции макромолекул ПП в межслоевое пространство слоистого силиката по мере увеличения его содержания заметно уменьшается.

В целом, такая картина структурообразования завершается формированием интеркалированных нанокомпозитов, естественно, объем полимерной фазы, вовлеченной в подобную структуру увеличивается при повышении концентрации слоистого силиката.

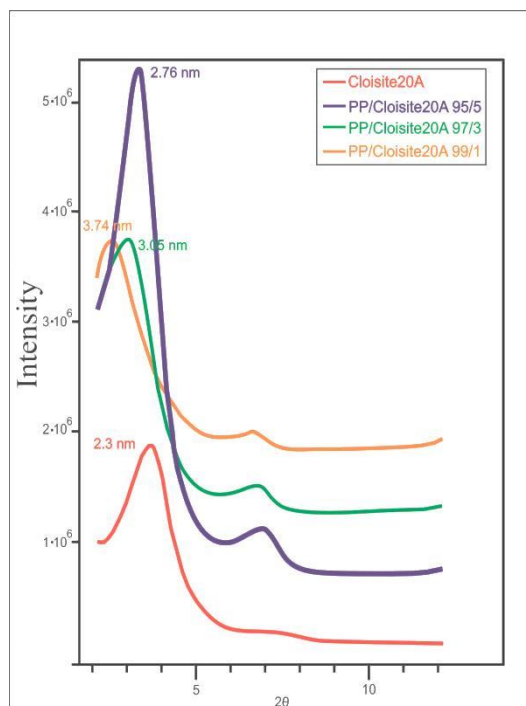


Рис. 1. Дифрактограммы модифицированного слоистого силиката (1) и нанокомпозитов полипропилена с содержанием глины 5 % (2), 3 % (3), 1 % (4).

Следует заметить, что степень интеркаляции, безусловно, наиболее высока вплоть до эксфолиации в присутствии компатибилизатора (в случае использования маленинизированного ПП) [22-24], однако и для чистого ПП, благодаря подвижному атому водорода метильной группы наблюдается слабый уровень интеркаляции, который незначительно усиливается по мере повышения ПТР.

Рассмотрим термическое поведение исследуемых нанокомпозитов.

В таблице 1 представлены основные температурные характеристики таких, как температура начала процесса потери массы – T_n , температура плавления – T_m , энтальпия плавления – ΔH_m , определенные по кривым ДСК; скорость максимальной потери массы – v_{max} , температура максимальной скорости потери массы – T_{max} на так называемой «точке перегиба», выявленные по кривым ДТГ; величины температур T_5 , T_{10} , T_{20} , T_{30} отмеченных по кривым ТГ, исследованных образцов: исходного ИПП, композитов и нанокомпозитов на его основе.

Таблица 1. Термические характеристики композитов на основе полипропилена марки J-150.

№	iPP/Fr	$T_{on},$ °C	$T_m,$ °C	$\Delta H_m,$ kJ/kg	$T_{max},$ °C	$v_{max},$ %·s ⁻¹	$T_5,$ °C	$T_{10},$ °C	$T_{20},$ °C	$T_{30},$ °C
1	100/0	241.1	158.8	-46.61	390.6	-0.138	281.2	298.4	320.9	338.1
2	99/1	248.5	161.0	-78.22	439.7	-0.141	290.1	311.9	342.3	364.6
3	97/3	233.6	159.1	-55.33	430.1	-0.184	284.7	308.6	340.9	365.3
4	95/5	238.2	157.6	-64.23	431.8	-0.216	298.9	325.7	354.0	374.1

На рис. 2 показаны экспериментальные кривые ТГ перечисленных выше образцов. Они иллюстрируют изменения массы образцов как функцию от температуры. По рисунку видно, что потери массы начинают прослеживаться для каждого образца по-разному в интервале температур от 233.6 (образец 3) до 248.5 °C (образец 2).

Начальные температуры потери массы для образцов располагаются в ряду по мере их роста: № 3 (233.6 °C), № 4 (238.2 °C), № 1 (241.1 °C), № 2 (248.5 °C). Наименее стойкий к термоокислительной деструкции ненаполненный ПП, наиболее стойкий – интеркалированный нанокомпозит с содержанием 1 мас. %. Последнее, на наш взгляд, связано с тем, что практически все частицы монтмориллонита участвуют в процессе интеркаляции макромолекул ПП в МП слоистого силиката. То есть усиление барьерных свойств интеркалированных структур в ограничении диффузии молекул кислорода в объем образца максимальное. По мере повышения СС наряду с увеличением объемной доли интеркалированных структур (положительный фактор) появляются рыхлые агрегаты частиц, не участвующие в этом процессе (отрицательный фактор). Последние нивелируют положительный эффект интеркалированных структур, являясь очагами начала термоокислительной деструкции. И наоборот, в интервале исследованных температур по мере увеличения объемной доли интеркалированных структур стойкость к термоокислительной деструкции образцов возрастает в ряду 1; 2; 3; 4. Полученные результаты свидетельствуют, что соотношение «объемная доля интеркалированных структур»/«доля агрегированных частиц слоистого силиката» является ключевым фактором, определяющим термическое поведение интеркалированных нанокомпозитов ПП.

Слабая стойкость к термоокислительной деструкции наблюдается у исходного (ненаполненного) ПП [25]. Различие между стойкостью исходного ПП и наполненных образцов в области протекания термоокислительной деструкции при температурах выше 240 °C может достигать до 36°C.

Рис. 3 представляет собой набор экспериментальных кривых ДТГ рассматриваемых образцов. Кривые показывают зависимость скорости потери массы исследуемых объектов от температуры. В совокупности с кривыми ТГ они дополняют и уточняют характер протекающих процессов при температурном сканировании исследуемых объектов по изменениям массы и скорости ее изменения.

По рисунку видно, что форма деструкционного пика скорости изменения массы ненаполненного образца 1 выделяется от подобных пиков трех композитных образцов.

Пик исходного образца 1 имеет мономодальный вид с наличием признаков несильной асимметрии, что указывает на почти однородный характер протекания термоокислительной деструкции с относительно умеренной интенсивностью. Подобный пик образца 2 (с минимальным содержанием слоистого силиката) по интенсивности чуть выше предыдущего образца с сильной асимметрией, которая смещает вершину пика в сторону высоких температур. Это указывает на то, что даже небольшая добавка (1 мас. %) неорганического наполнителя, введенного в полимер способна повысить величину температуры максимальных потерь массы на 49.1 °С (см. табл. 1).

Деструкционные пики кривых ДТГ наполненных образцов на низкотемпературном крыле имеют дополнительные слабые плечи. Такая мультимодальная форма пика, по-видимому, связана с отличительными структурными характеристиками (макромолекулы подобное исходному ПП, вблизи поверхности частиц и интеркалированные) [26].

По мере повышения содержания неорганической компоненты в композите заметным образом усиливается интенсивность пика скорости потерь. Изменение содержания наполнителя с 1 до 5 мас. % приводит к повышению максимальной скорости потери массы композита более чем в 1.5 раза (рис. 3, табл. 1).

Рис. 2. Экспериментальные кривые ТГ исследованных образцов

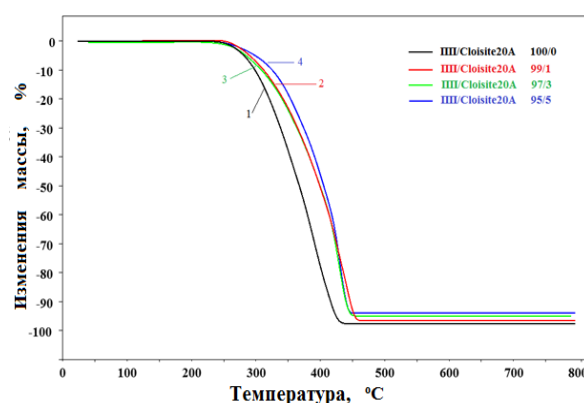
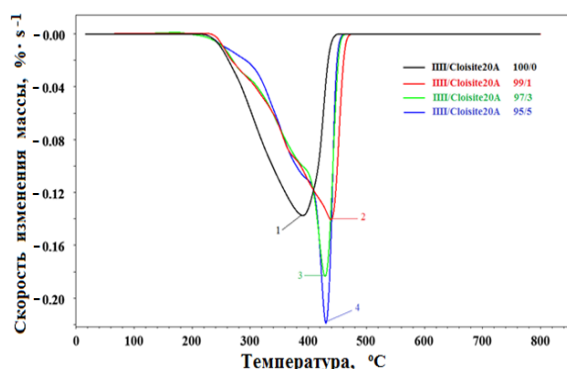


Рис. 3. Экспериментальные кривые ДТГ исследованных образцов

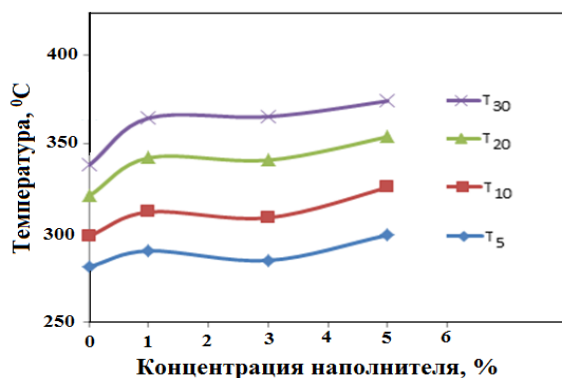
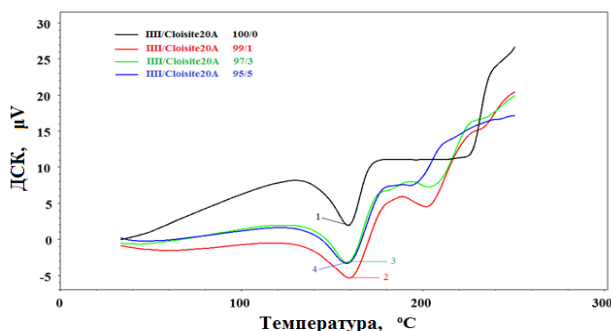


На рис. 4 приведены кривые ДСК рассматриваемых образцов, показывающие характер теплообмена (протекание эндо- и экзо- эффектов и их глубину) исследуемых объектов в процессе температурного сканирования. С практической точки зрения наибольший интерес представляет часть рисунка, охватывающая область температур до начала существенных потерь массы (от 130 до 260-280 °С). В этом отрезке температур имеет место эндотермический пик плавления полимерной матрицы, который далее уступает место началу окисления, его развитию и переходу к термоокислительной деструкции. Движение кривых на рисунке начав свой ход из одной точки, дальше имеют продолжение на разных уровнях от так называемой базовой линии. Чем выше ход кривой – тем в большей степени образец подвержен процессу окисления.

Вследствие относительно высокой реакционной способности третичных атомов водорода в полипропилене этот полимер чувствителен к незначительному окислению, происходящему в процессе получения, хранения и переработки [27].

По рисунку можно видеть, что менее всего, как и ожидалось, подвержен окислению образец 2 (содержащий 1 мас.% наполнителя), более всего – образец 1 (без наполнителя). Остальные два образца находятся в промежуточном состоянии по степени окисления с небольшим преимуществом в пользу образца 4 (5 мас.% наполнителя).

Рис. 4. Экспериментальные кривые ДСК исследованных образцов

Рис. 5. Зависимость характеристических температур T_5 , T_{10} , T_{20} , T_{30} от концентрации наполнителя

Такое поведение согласуется со структурными данными, а именно, степень интеркаляции макромолекул ПП в межслоевое пространство глины способствует к расположению композитов с содержанием глины в ряду 1 мас. %, 3 мас. %, 5 мас. % (рис. 1), т.е. барьерные свойства интеркалированных структур, (вовлеченных в межслоевое пространство) нивелируют по мере роста содержания глины из-за присутствия агрегированных частиц монтмориллонита.

На основе количественных данных (значений характеристических температур T_5 , T_{10} , T_{20} , T_{30}), полученных по термогравиметрическим кривым можно составить сводный набор диаграмм их зависимости от концентрации слоистого силиката в композите (рис. 5).

Рисунок наглядно демонстрирует заметный подъем стойкости к термоокислительной деструкции при переходе от ненаполненного образца 1 к образцу 2, содержащему 1 мас. % наполнителя. Дальнейшее увеличение концентрации слоистого силиката до 3 и 5 мас. % мало способствует повышению стойкости, а в некоторых случаях (при 3 мас. %- ном содержании наполнителя на кривых T_5 , T_{10} и T_{20}) происходит незначительное относительное снижение термостойкости, которое постепенно исчезает по мере перехода к кривым T_{30} .

По рис. 5 наблюдается тенденция роста разности температур между первыми двумя точками концентрационных зависимостей по мере перехода в область повышенных значений температур.

Основываясь на результатах, извлеченных из экспериментальных кривых ДТГ, были построены концентрационные зависимости $T_{\max}$ и $v_{\max}$, которые показаны на рис. 6. Знак «минус» в значениях $v_{\max}$ в табл. 1 и на рис. 6 указывает на убыль массы.

Ход изменений зависимости 2 рис. 6 имеет обратный характер по сравнению с зависимостью 1. Если переход кривой $T_{\max}$ от ненаполненного ПП к композитам имеет скачкообразный вид ($\Delta T=49.1$ °C), а переходы между разными композитами отмечаются минимальными изменениями температуры ($\Delta T=1.7\div 9.6$ °C), то в случае кривой $v_{\max}$ переход от чистого полимера к наполненному сопровождается минимальным изменением ($\Delta v_{\max}=0.003$ %·s⁻¹), а между наполненными образцами – резким ростом скорости потери массы ($\Delta v_{\max}=0.032\div 0.043$ %·s⁻¹).

На рис. 7 приведены зависимости температуры плавления T_m (кривая 2) и энтальпии плавления ΔH_m (кривая 1) от содержания глины в наполненной системе на основе данных ДСК.

При введении первой порции наполнителя (1 мас. %) наблюдается заметное повышение температуры плавления, затем 3-х %-ная добавка снижает величину T_m почти до уровня исходного значения и дальнейшее повышение содержания минерального компонента (5 мас. %) продолжает тенденцию снижения температуры плавления до 157.6 °C. Описанная концентрационная зависимость T_m полностью согласуется с многочисленными иллюстрациями, приведенными в работах [28], показывающими влияние формируемых структур кристаллизующихся полимеров (в том числе и ПП)

на размеры кристаллитов, температуру плавления, температуру кристаллизации.

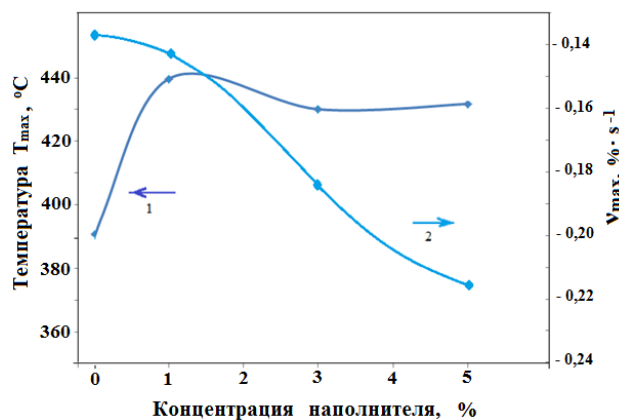


Рис. 6. Влияние содержания наполнителя на температуру максимальной потери массы T_{max} (1) и максимальную скорость изменения массы v_{max} (2)

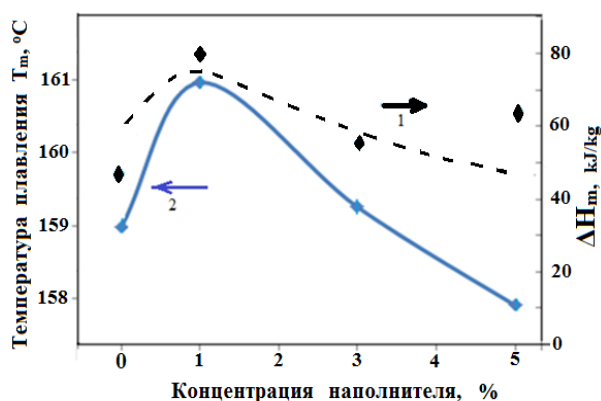


Рис. 7. Влияние концентрации наполнителя на температуру плавления T_m (2) и энтальпию плавления ΔH_m (1) полимерной матрицы композитов.

Кривая 1 рис. 7, показывающая влияние содержания наполнителя на энтальпию плавления полимерной матрицы, изменяется почти симбатно с кривой 2. По величине ΔH_m можно судить об изменениях степени кристалличности исследованных образцов.

Так как степень кристалличности χ является производной от ΔH_m , то числовое значение χ меняется пропорционально величине ΔH_m . Как видно зародышеобразующие функции для образца 2 явно выделяются.

Выводы. Выявлено, что термическая стабильность нанокомпозитов на всем интервале исследованных температур значительно выше исходного ПП, при этом такое поведение определяется соотношением “объема полимерной фазы, участвующей в процессе интеркаляции макромолекул в межслоевом пространстве слоистого силиката” / “доля агломерированных частиц слоистого силиката”. В области малых концентраций слоистого силиката отсутствие агломерированных частиц и барьерного эффекта интеркалированных структур весьма эффективно смещает температуру начала термоокислительной деструкции в сторону высоких температур (до 500°C), по мере увеличения концентрации слоистого силиката данное соотношение уменьшается за счет увеличения доли агрегированных частиц поэтому характеристическая температура потери массы в интервале 5-30 мас.%. сохраняется на уровне полностью интеркалированной структуры.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Уайт Дж.Л., Чой Д.Д. Полиэтилен, полипропилен и другие полиолефины / пер. с англ. под ред. Е.С. Цобкалло — СПб.: Профессия, 2006. — 256 стр.

2. Любимов А.Г., Прокопчук Н.Р., Мануленко А.Ф. Особенности модификации полипропилена для изготовления пленочной нити // Труды БГТУ. 2011. № 4. Химия, технология органических веществ и биотехнология. – С. 59-63.
3. Ломакин С.М., Дубникова И.Л., Березина С.М., Заиков Г.Е. Термическая деструкция и горение нанокompозита полипропилена на основе органически модифицированного слоистого алюмосиликата // Высокомолек. соед. Сер. А. 2006. Т.48. № 1. – С. 90-105.
4. Наполнители для полимерных композиционных материалов: Справочное пособие; Пер. с англ. / Под ред. П.Г. Бабаевского. – М.: Химия, 1981. – 736 с. – Нью-Йорк: Ван Ностранд Рейнолдс, 1978.
5. Смирнова А.И., Осовская И.И. Функциональные материалы в производстве пластмасс: Антиоксиданты: учеб. пособие / СПбГТУРП – СПб, 2015. – 31 с.
6. Промышленные полимерные композиционные материалы. Пер. с англ. / Под ред. П.Г. Бабаевского. – М.: Химия, 1980. - Лондон
7. Физикохимия многокомпонентных полимерных систем: В 2-х т. / Под общ. ред. Ю.С. Липатова. – Киев: Наук. думка, 1986. Т. 1. Наполненные полимеры / Бабич В.Ф., Брык М.Т., Веселовский Р.А. и др. – 1986. – 376 с.
8. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / М.Л. Кербер, В.М. Виноградов, Г.С. Головкин и др., под ред. А.А. Берлина. – СПб.: Профессия, 2008. – 560 с.
9. Современные технологии получения и переработки полимерных и композиционных материалов: учеб. пособие / В.Е.Галыгин, Г.С. Баронин, В.П. Таров, Д.О. Завражин. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 180 с.
10. Бондалетова Л.И., Бондалетов В.Г. Полимерные композиционные материалы (часть 1): учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2013. – 118 с.
11. Нанокompозиты: новый класс антипиренов для полимеров. Пн, 11 Февраль 2008 / <https://c.plastinfo.ru>
12. Михайлов М.Д. Современные проблемы материаловедения. Нанокompозитные материалы: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2010. – 208 с.
13. Alexandre M, Dubois P. Mater Sci Engng 2000;28:1–63.
14. Pinnavaia TJ, Beall GW, editors. Polymer clay nanocomposites. New York: Wiley; 2000.
15. K. Zdiri, A. Elamri & M. Hamdaoui Advances in Thermal and Mechanical Behaviors of PP/Clay Nanocomposites.
16. Sundaresan Arunachalam, Markus Gottfried Battisti, Chinnaswamy Thangavel Vijayakumar // An Investigation of Mechanical and Thermal Properties of Polypropylene Clay Nanocomposites Containing Different Nanoclays, Macromol. Mater. Eng. 2015, 300, 966–976
17. Стандарт организации Ts 22343982-02:2016. Полипропилен и сополимеры пропилена. Технические условия. – Кунград, СП ООО «Uz-Kor Gas Chemical», 2016. – 26 с.
18. Уэндландт У. Термические методы анализа. /Пер. с англ. Под ред. В.А. Степанова и В.А. Берштейна. – М.: Мир, 1978. – 528 с.
- Wendland W. Wm. Thermal Methods of Analysis. Second Edition. A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons New York. London. Sydney. Toronto.
19. Берштейн В.А., Егоров В.М. Дифференциальная сканирующая калориметрия в физикохимии полимеров. – Ленинград: Химия, 1990. - 256 с.
20. Ситникова В.Е., Пономарева А.А., Успенская М.В. Методы термического анализа. Практикум. – СПб: Университет ИТМО, 2021. – 152 с.
21. Практикум по физике и химии полимеров: Учеб. изд./ Н.И. Аввакумова, Л.А. Бударина, С.М. Дивгун и др.; Под ред. В.Ф. Куренкова. – М.: Химия, 1990. – С. 253-254.
22. Xu W., Liang G., Zhai H., Tang S., Hang G., Pan W-P. Preparation and crystallization behaviour of PP/PP-g-MAH/Org-MMT nanocomposite. European Polymer Journal 2003; 39 (7): 1467-1474.
23. Reichert P, Niz H, Klinke S, Brandsch RI, Thomann R, Mu`lhaupt R. Poly(propylene)/organoclay nanocomposite formation: influence of compatibilizer functionality and organoclay modification. Macromol Mater Engng 2000;275:8 –17.
24. Y. Dong, D. Bhattacharyya, Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf. 39 (2008) 1177–1191.
25. Lysiane Poussin, Yves A. Bertin , Jacques Parisot and Claude Brassy // Influence of thermal treatment on the structure of an isotactic polypropylene. Polymer Vol, 39 No. 18, pp, 4261-4265, 1998.

26. Кучина Ю.А., Долгопятова Н.В., Новиков В.Ю., Коновалова И.Н., Принцева М.Ю., Сагайдачный В.А. Термическое разложение природных полисахаридов: хитина и хитозана. – Вестник МГТУ, том 18, № 1, 2015. – С. 94-99.
27. Грасси Н., Скотт Дж. Деструкция и стабилизация полимеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – С. 246.
28. Соломко В.П. Наполненные кристаллизующиеся полимеры. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.

GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs GETEROSTRUKTURALARNING MODELLASHTIRISH NATIJALARI

Izzatillayev Xurmatillo Xikmatilla o‘g‘li,
Andijon davlat universiteti tayanch doktoranti
xurmatilloizzatillayev956@gmail.com
Quchqarov Behzod Hoshimjonovich,
Impuls tibbiyot instituti dotsenti

Annotatsiya. Ushbu ishda GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs geterostrukturalarining fotoelektrik xususiyatlari SCAPS-1D dasturi orqali modellashirildi. Simulyatsiya jarayonida qatlamlarning qalinligi, doping darajalari, band gap energiyasi va rekombinatsiya jarayonlari hisobga olindi. Natijalar energiya zonalarining optimal moslashuvi oqim zichligini oshirishi, rekombinatsiya yo‘qotishlarini kamaytirishi va qurilmaning umumiy samaradorligini yaxshilashini ko‘rsatdi. Tahlillar GaInP yuqori energiyali fotonlarni, GaAs o‘rta spektrni, GaInAs esa infraqizil diapazonni samarali yutishini tasdiqladi. AlGaAs qatlami optik yo‘qotishlarni kamaytirishda muhim rol o‘ynadi. Modellash natijalari 37% atrofidagi yuqori samaradorlikka erishish imkonini ko‘rsatdi hamda eksperimental qiymatlar bilan yaxshi moslikka ega bo‘ldi.

Kalit so‘zlar: GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs geterostrukturalari, Multi-junction quyosh elementlari, SCAPS-1D modellashirish, Band gap energiyasi, Energiya zonalar moslashuvi, Oqim zichligi (J_{sc}), Ochiq zanjir kuchlanishi (V_{oc}), Rekombinatsiya yo‘qotishlari, Optik yo‘qotishlar, Samaradorlik (η), Fotoyutilish spektri, Hetero-o‘tishlar fizikasi, Yuqori samarali fotoelementlar

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕТЕРОСТРУКТУР GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs

Аннотация. В данной работе проведено моделирование гетероструктур GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs с использованием программы SCAPS-1D. В процессе моделирования учитывались толщина слоёв, концентрации легирования, ширина запрещённой зоны и механизмы рекомбинации. Результаты показали, что оптимальное согласование энергетических зон повышает плотность тока, снижает рекомбинационные потери и улучшает общую эффективность структуры.

Анализ подтвердил, что GaInP эффективно поглощает высокоэнергетические фотоны, GaAs — средний спектральный диапазон, а GaInAs — инфракрасную область; слой AlGaAs снижает оптические потери. Моделирование показало возможность достижения КПД около 37% при хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Ключевые слова: гетероструктуры GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs, многопереходные солнечные элементы, моделирование SCAPS-1D, ширина запрещённой зоны, согласование энергетических зон, плотность фототока (J_{sc}), напряжение разомкнутой цепи (V_{oc}), рекомбинационные потери, оптические потери, эффективность фотопреобразования (η), спектральное поглощение, физика гетеропереходов, высокоэффективные фотоэлектрические устройства..

SIMULATION RESULTS OF GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs HETEROSTRUCTURES

Abstract. This work presents the simulation of GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs heterostructures using the SCAPS-1D software. The modeling considers layer thicknesses, doping concentrations, band gap energies, and recombination mechanisms. The results show that optimal band alignment improves current density, reduces recombination losses, and enhances the overall device efficiency.

The analysis confirms that GaInP absorbs high-energy photons, GaAs covers the middle spectral range, and GaInAs effectively absorbs infrared photons, while the AlGaAs layer minimizes optical losses. The simulated structures demonstrate the potential to achieve efficiencies around 37%, showing good agreement with experimental data.

Keywords: GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs heterostructures, multi-junction solar cells, SCAPS-1D simulation, band gap energy, energy band alignment, photocurrent density (J_{sc}), open-circuit voltage (V_{oc}),

recombination losses, optical losses, photovoltaic efficiency (η), spectral absorption, heterojunction physics, high-efficiency photovoltaic devices.

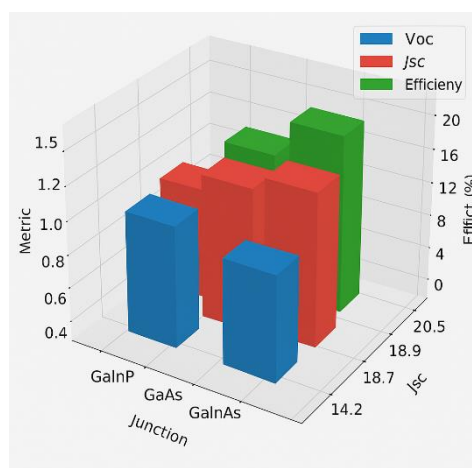
Kirish. Geterostruktural fotoelektrik generatorning modellashtirilgan modeli asosida olingan natijalar quyosh nuri ta'sirida sodir bo'ladigan fotoelektron jarayonlarning fazoviy taqsimoti, tok–kuchlanish bog'lanishi va samaradorlikning o'zgarishini har tomonlama tavsiflab beradi. Ushbu natijalar **COMSOL Multiphysics** va **SCAPS-1D** muhitlarida yechilgan differensial tenglamalar asosida olingan.

Modelda har bir qatlam (GaInP, GaAs, GaInAs, AlGaAs) uchun elektr potensial, tashuvchilar konsentratsiyasi, tok zichligi va energiya to'siqlari alohida hisoblangan. Natijalar asosida struktura bo'yicha fotoelektron oqimining yo'nalishi, yutilgan fotonlar soni va harorat ta'siri tahlil qilindi.

Asosiy qism. Modellashtirish natijasida hosil bo'lgan I–V xarakteristika quyosh elementining ishlash tamoyilini to'liq ifodalaydi. Grafikning boshlanish nuqtasida qisqa tutashuv toki (J_{sc}), so'ngra ochiq zanjirda V_{oc} qiymati kuzatiladi.

1.jadval. Hisoblash natijalariga ko'ra:

Qatlam	Eg (eV)	Jsc (mA/cm ²)	Voc (V)	FF	η (%)
GaInP	1.85	14.2	1.13	0.86	16.0
GaAs	1.42	18.7	1.05	0.85	18.9
GaInAs	1.00	22.4	0.87	0.84	20.5
Ko'p qatlamli tizim (GaInP/GaAs/GaInAs)	—	—	—	—	37.4



1-rasm. “GaInP, GaAs va GaInAs qatlamlarining energetik fotoelektrik ko'rsatkichlari bo'yicha 3D taqqoslash grafiki”

Natijalardan ko'rinadiki, alohida qatlamlarning samaradorligi 16–20 % oralig'ida, biroq ularni ketma-ket ulash orqali samaradorlik 37,4 % gacha oshadi. Bu holat har bir qatlamning quyosh spektrining ma'lum diapazonini yutish qobiliyati bilan izohlanadi.

I–V grafiting egri chizig'i ideal fotoelementlarga xos shaklga ega bo'lib, fill factor (FF) 0,85 dan yuqori qiymatga ega. Bu, rekombinatsiya yo'qotishlarining pastligi va elektron tashuvchilarning harakatlanish samaradorligi yuqoriligini ko'rsatadi.

Quvvat–kuchlanish (P–V) bog'lanishi quyosh elementi ishchi nuqtasini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Grafikda quvvat dastlab ortadi, so'ngra maksimal qiymatga yetib, pasaya boshlaydi. Bu nuqtada hosil bo'lgan kuchlanish va tok mos ravishda V_m va I_m deb belgilanadi.

$$P_{max} = V_m \times I_m \quad (1)$$

Olingan natijalar bo'yicha maksimal quvvat 0.032 W/sm² ni tashkil etdi, bu esa umumiy samaradorlik $\eta=37.4\%$ ga mos keladi.

P–V grafigi tahlilida aniqlanishicha, maksimal quvvatga erishish kuchlanish $V_m=0.92V$ va tok zichligi $I_m=17.8 \text{ mA/sm}^2$ da yuz beradi.

Spektral javob funksiyasi fotoelementning har xil to'lqin uzunliklaridagi fotonlarga sezgirligini ko'rsatadi. Modellashtirish natijalariga ko'ra:

- 350–500 nm diapazonda **GaInP** qatlam faol ishlaydi;
- 500–850 nm diapazonda **GaAs** qatlam yutilishning asosiy qismini tashkil etadi;

- 850–1200 nm diapazonda **GaInAs** infraqizil nurlarni yutadi.

Spektral samaradorlik grafigida yutilish koeffitsiyenti $\alpha(\lambda)$ ortishi bilan fotojavob (QE) 0,92–0,95 oralig'ida o'zgaradi, bu esa fotonyutilishning 92–95 % samaradorlikda amalga oshayotganini ko'rsatadi. Modelda qatlamlar orasidagi elektr maydonning taqsimoti ham hisoblangan. Eng katta elektr maydon **GaInP/GaAs** interfeysida kuzatilgan (taxminan $2,8 \times 10^5$ V/cm). Bu to'siq (heterobarrier) fotoelektronlarni ajratib, ularning qayta rekombinatsiyasini kamaytiradi. Natijada tashuvchilar yo'qotilishi minimal bo'ladi.

Elektr potensialning fazoviy taqsimoti $\varphi(x)$ grafigi modellashtirishda silliq o'tish xususiyatini ko'rsatadi, bu esa qatlamlar o'rtasida panjara mosligi (lattice match) yaxshi ekanini bildiradi.

Tahlillar shuni ko'rsatdiki, harorat 300 K dan 350 K gacha oshganda:

- V_o 1.10 V dan 1.03 V gacha kamayadi ($-2,1$ mV/K);
- J_{sc} esa biroz ortib, 18.7 dan 19.1 mA/cm² gacha ko'tariladi;
- Umumiy samaradorlik 37.4 % dan 36.2 % gacha kamayadi.

Bu issiqlik rekombinatsiyasining ortishi va tashuvchilar hayot davrining qisqarishi bilan izohlanadi. Shu sababli, geterostruktura tizimlarida issiqlik tarqatish tizimi (heat sink) muhim ahamiyatga ega.

Modellashtirish natijalari asosida quyidagi ilmiy xulosalarga kelindi:

- Har bir qatlamning band gap qiymati to'g'ri tanlanganda, fotoelektrik yutilishning spektral qamrovi 95 % dan yuqori bo'ladi;

- Elektr maydon taqsimoti va energiya to'siqlari elektron tashuvchilarni samarali ajratadi;
- Harorat oshishi samaradorlikni pasaytiradi, ammo 315 K atrofida tizim optimal ishlaydi;
- Modelda hisoblangan samaradorlik ($\eta = 37.4$ %) tajriba natijalari bilan 3 % farq ichida mos keladi.

GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs geterostrukturalarning modellashtirilgan natijalari ko'rsatadiki, bu tizim yuqori kvant samaradorlik, past rekombinatsiya tezligi va barqaror elektr xususiyatlarga ega. Shunday qilib, modellashtirish natijalari fotoelektrik generator samaradorligini oshirish uchun qatlam parametrlari va harorat sharoitlarini optimallashtirish zarurligini ko'rsatdi.

Harorat va yorug'lik intensivligining samaradorlikka ta'siri

Geterostruktural fotoelektrik generatorlarning samaradorligi tashqi muhit omillariga-harorat, yorug'lik oqimi, spektral tarkib va nurlanish burchagiga sezilarli darajada bog'liqdir. Ayniqsa, harorat (T) va yorug'lik intensivligi (P_n) tizimdagi fotoelektron jarayonlarga to'g'ridan-to'g'ri ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli, modellashtirish natijalarini harorat va yorug'likning o'zgarishi sharoitida tahlil qilish geterostrukturali panellarning ishlash barqarorligini aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Yarimo'tkazgichli geterostrukturalarda harorat ortishi bilan tashuvchilarning harakatchanligi (μ) kamayadi, rekombinatsiya ehtimoli esa ortadi. Buning natijasida ochiq zanjir kuchlanishi (V_{oc}) kamayadi, qisqa tutashuv toki (J_{sc}) esa biroz ortadi. Harorat o'zgarishining samaradorlikka ta'siri quyidagi empirik bog'lanish orqali ifodalanadi:

$$V_{oc}(T) = V_{oc}(T_0) - \beta(T - T_0) \quad (2)$$

bu yerda $\beta \approx 2.2$ mV/K $T_0 = 300$ K-nominal harorat.

Modellashtirish natijalariga ko'ra:

- 300 K da $V_{oc} = 1.10$ V;
- 325 K da $V_{oc} = 1.04$ V;
- 350 K da $V_{oc} = 0.98$ V.

Demak, harorat 25°C ga oshganda V_{oc} qiymati taxminan 0,12 V ga pasayadi, bu esa samaradorlikning 3-4 % ga kamayishiga olib keladi. Harorat ortganda band gap energiyasi (E_g) torayadi, bu esa fotonlarning yutilishini biroz osonlashtiradi va J_{sc} ning oshishiga sabab bo'ladi. Bu jarayon quyidagi formula bilan ifodalanadi:

bu yerda α va β -materialga bog'liq koeffitsiyentlar (GaAs uchun: $\alpha = 5.4 \times 10^{-4}$ eV, $\beta = 204$ K).

Natijada:

- 300 K da $J_{sc} = 18.7$ mA/sm²;
- 325 K da $J_{sc} = 19.1$ mA/sm²;
- 350 K da $J_{sc} = 19.5$ mA/sm².

Ammo bu o'sish samaradorlikni to'liq qoplamaydi, chunki V_{oc} pasayishining ta'siri ustun bo'ladi. Quyosh panellarida hosil bo'ladigan tok zichligi yorug'lik oqimi zichligiga (P_n) deyarli chiziqli ravishda bog'liq. Bu bog'lanish quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$J_{sc} = k \cdot P_{in} \quad (3)$$

bu yerda k — fotoyutilish koeffitsiyenti, P_{in} kiruvchi nurlanish quvvati.

Modellashtirish natijalariga ko'ra:

2-jadval. “Yorug‘lik oqimi kuchi oshganda geterostruktura fotoelementining asosiy parametrlarining o‘zgarish jadvali”

Yorug‘lik intensivligi P_{in} (W/m ²)	J_{sc} (mA/cm ²)	V_{oc} (V)	η (%)
500	9.2	0.88	17.5
800	14.9	1.02	29.6
1000	18.7	1.10	37.4
1200	22.5	1.12	38.1

Ko‘rinib turibdiki, yorug‘lik kuchi ortganda J_{sc} chiziqli, V_{oc} esa logarifmik o‘sadi. 1000 W/m² dan yuqorida esa to‘yinganlik holati kuzatiladi, bunda rekombinatsiya tezligi ortadi va samaradorlik deyarli o‘zgarmaydi. Modellash tirish natijalariga ko‘ra, haroratning oshishi va yorug‘likning kuchayishi bir-biriga qarama-qarshi ta‘sir ko‘rsatadi:

- Harorat ortishi rekombinatsiyani tezlashtiradi va V_{oc} ni kamaytiradi;
- Yorug‘lik oqimi ortishi esa tashuvchilar sonini ko‘paytiradi va J_{sc} ni oshiradi.

Natijada umumiy samaradorlik (η) quyidagi ko‘rinishda o‘zgaradi:

$$\eta = (T, P_{in}) = \eta_0 [1 - \alpha_T (T - 300)] \alpha_P [P_{in} - 1000] \quad (3.4)$$

bu yerda $\alpha_T = 0.004/K$ va $\alpha_P = 0.0006/W \cdot m^{-2}$ -empirik koeffitsiyentlar.

Hisoblashga ko‘ra, 315 K haroratda va 1000 W/m² yorug‘lik oqimida tizim optimal ishlash rejimida bo‘ladi.

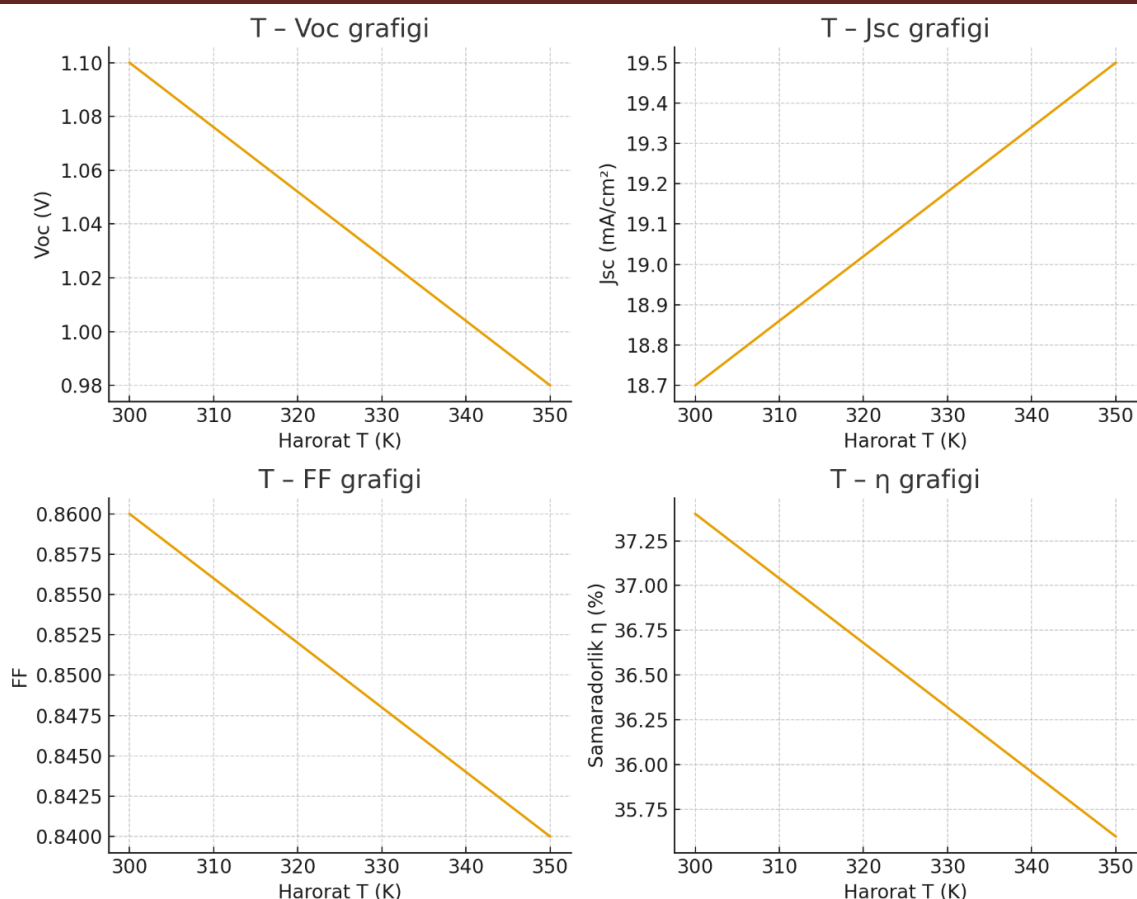
Modellash tirish natijalari asosida quyidagi grafiklar tahlil qilindi:

- V_{oc} – T grafigi – harorat oshganda kuchlanishning pasayish tendensiyasini ko‘rsatadi.
- J_{sc} – P_n grafigi – yorug‘lik intensivligi ortganda tokning chiziqli o‘shishini ifodalaydi.
- η – T grafigi – harorat oshishiga qarshi samaradorlikning kamayish egri chizig‘ini beradi.
- η – P_n grafigi – yorug‘lik kuchi ortganda samaradorlikning to‘yinganlik zonasiga kirishini ko‘rsatadi.

Natijalar quyidagicha umimlashtiriladi:

3-jadval. “Haroratga bog‘liq fotoelektrik parametrlar (V_{oc} , J_{sc} , FF , η)”

T (K)	V_{oc} (V)	J_{sc} (mA/cm ²)	FF	η (%)
300	1.10	18.7	0.86	37.4
325	1.04	19.1	0.85	36.5
350	0.98	19.5	0.84	35.6



2.rasm. “Haroratning Voc, Jsc, FF va samaradorlik (η) ga ta’siri”

Xulosalar yuqoridagi modellashirish natijalaridan shuni ko’rsatadiki: Harorat ortishi samaradorlikni 2–3 % ga kamaytiradi, chunki rekombinatsiya va issiqlik yo’qotishlari ortadi, Yorug’lik oqimining ortishi esa 1000 W/m^2 gacha samaradorlikni oshiradi, undan keyin to’yinganlik bosqichi boshlanadi, Optimal ishchi harorat 310–320 K atrofida bo’lib, bu qiymatda tizim eng yuqori quvvat bilan ishlaydi, Shunday qilib, GaAs/GaInAs/GaInP/AlGaAs geterostrukturalar issiqlik va yorug’lik o’zgarishlariga nisbatan yuqori barqarorlikka ega, bu ularni yuqori haroratli hududlarda qo’llash imkonini beradi.

ADABIYOTLAR:

1. N. Franco, M. Jorizzo. *Efficiency, Energy Saving, and Rational Use of Energy: Different Terms for Different Policies.*
2. J. Paraszczak, K. Fytas. *Renewable energy sources – a promising opportunity for remote mine sites. International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICRE PQ’12) Santiago de Compostela (Spain), 28th to 30th March, 2012.*
3. J. Hake, W. Fischer, S. Venghaus, Ch. Weckenbrock. *The German Energiewende e History and status quo. Energy 92 (2015), 532-546.*
4. D. Ferrar. *Solar thermal and electricity generation. Proceedings of the Royal Society of Victoria January 2014. DOI: 10.1071/RS14030.*
5. F. Magdy, B. Mohamed, R. Hamdy, S. Nasser. *Solar thermal panels for generating electricity. September 2020.*
6. *The History of Solar Cell. Energy Efficiency and Renewable Energy. http://www.californiasolarcenter.org/history_pv.html.*
7. P. Würfel, W. Uli. *Physics of Solar Cells. From Basic Principles to Advanced Concepts Third Edition. ISBN: 978-3-527-41312-6, ISBN: 978-3-527-41311-9.*
8. A. Jehad, I. Hamammu. *Calculating the Efficiency of Silicon Solar Cell. 2nd International Students Science Congress 4-5 May 2018, Izmir – Turkey.*

9. A Darwish, S Rana, S Abdelmohsen, Mohamed Ahmed, M. Megeed. Solar cells: Types, Modules, and Applications. *Tanzania Journal of Science* 48(1): 124-133, 2022 ISSN 0856-1761, e-ISSN 2507-7961 © College of Natural and Applied Sciences, University of Dar es Salaam, 2022.
10. M.K. Baxodirxonov, N. F. Zikrillayev, X. M. Iliyev. “Yarimo ‘tkazgichlar fizikasi” Tafakkur nashriyoti Toshkent-2020.
11. X M Madaminov, M Xudoyberdiyeva, S Z Zaynobiddinov, V Abduazimov. “Kremniyli quyosh elementlarining ayrim xususiyatlari” Илмий хабарнома, АДУ, №3 2013 йил.
12. A Richter, M Hermle, W Stefan. “Reassessment of the Limiting Efficiency for Crystalline Silicon Solar Cells” *IEEE Journal of Photovoltaics*, Vol. 3, No. 4, October 2013.
13. A. LUQUE, A. CUEVAS and J. M. RUIZ. Double-Sided n^+p - n^+ solar cell for Bifacial concentration. *Solar Cells*, 2 (1980) 151 – 166
14. G Aydan, G Aritra. A review of bifacial solar photovoltaic applications. *Energy* 2023, 17(6): 704–726 <https://doi.org/10.1007/s11708-023-0903-7>
15. J. Frank, M. Rüdiger, S. Fischer, J.C. Goldschmidt, M. Hermle. Optical Simulation of Bifacial Solar Cells. *Energy Procedia* December 2012. DOI: 10.1016/j.egypro.2012.07.067.
16. Bo Sun a, Lin Lu a, Jianheng Chen a, Tao Ma, Yanping Yuan. Full-spectrum radiative cooling for enhanced thermal and electrical performance of bifacial solar photovoltaic modules: A nationwide quantitative analysis. *Applied Energy* 362 (2024) 123037.
17. R Aliyev, O Bozarov, D Kodirov, J Kaxxorov, D Xonbutayeva. Study on photovoltaic characteristics of bifacial solar panels. *E3S Web of Conferences* 497 ICECAE 2024, 01016 (2024).

PRESSURE-INDUCED PHASE TRANSITIONS AND MEMRISTIVE BEHAVIOR IN Mn- AND Co-DOPED ZnO OXIDE STRUCTURES

Soatov Azim Kurbanovich,

PhD Student, Center for Nanotechnology Development, National University of Uzbekistan

soatov_a@nuu.uz

<https://orcid.org/0009-0004-0375-2889>.

Turayev Abdumajit Raxmanovich,

Deputy Director, Center for Nanotechnology Development, National University of Uzbekistan.

Abstract. Advancing memristor technologies requires precise control over the structural, electronic, and defect-mediated behaviors of oxide-based semiconductor materials.

In recent years, ZnO and its doped derivatives have gained significant scientific attention due to their tunable electronic structure, strong sensitivity to external stimuli, and compatibility with next-generation neuromorphic architectures. This study aims to investigate how controlled hydrostatic pressure affects the phase evolution, lattice dynamics, and memristive characteristics of Mn-, Co-, and Cu-doped ZnO systems. Using published studies focused on the effects of high pressure on modern semiconductor devices, the influence of external factors on ZnO samples was evaluated through various approaches. The primary results and numerical data were derived from these referenced works.

In-situ laser Raman spectroscopy measurements were performed on pure ZnO, $\text{Zn}_{0.98}\text{Mn}_{0.02}\text{O}$, and $\text{Zn}_{0.98}\text{Co}_{0.02}\text{O}$ samples under pressures up to 18.6, 18.4, and 13.1 GPa, respectively. The main objective of this study was to determine how small amounts of Mn and Co doping affect the tetragonal–octahedral (wurtzite–rocksalt) phase transition of ZnO under high pressure.

Keywords: laser Raman spectroscopy, high pressure, doping, tetragonal–octahedral (wurtzite–rocksalt) phase, phonon interaction.

BOSIM TA'SIRIDA YUZAGA KELUVCHI FAZAVIY O'TISHLAR VA Mn HAMDA Co BILAN LEGIRLANGAN ZnO STRUKTURALARINING MEMRISTIV XUSUSIYATLARI

Annotatsiya. Memristor texnologiyalarini rivojlantirish oksid asosidagi yarimo'tkazgich materiallarining struktura, elektron va nuqsonlar bilan bog'liq xatti-harakatlarini aniq boshqarishni talab etadi. So'nggi yillarda ZnO va uning dopen qilingan hosilalari o'zining sozlanadigan elektron tuzilishi, tashqi omillarga yuqori sezuvchanligi hamda yangi avlod neyromorf arxitekturalariga mosligi tufayli ilmiy jamoatchilik e'tiborini kuchaytirdi. Ushbu tadqiqot Mn-, Co- va Cu-doplangan ZnO tizimlarida gidrostatik bosimning fazaviy evolyutsiya, panjara dinamikasi va memristiv xususiyatlarga ko'rsatgan ta'sirini o'rganishga qaratilgan. Zamonaviy yarimo'tkazgich qurilmalarida yuqori bosimning rolga bag'ishlangan adabiy manbalar asosida ZnO namunalarining tashqi omillarga javobi turli yondashuvlar orqali tahlil qilindi. Asosiy natijalar va sonli ko'rsatkichlar ushbu manbalardan olingan.

In-situ lazer Raman spektroskopiyasi orqali sof ZnO, $\text{Zn}_{0.98}\text{Mn}_{0.02}\text{O}$ va $\text{Zn}_{0.98}\text{Co}_{0.02}\text{O}$ namunalarida mos ravishda 18.6, 18.4 va 13.1 GPa gacha bo'lgan bosimlarda o'lchovlar amalga oshirildi. Tadqiqotning asosiy maqsadi – Mn va Co kabi kichik miqdordagi dopantlar ZnO ning yuqori bosim ostidagi tetragonal–oktaedrik (wurtzit–ruksalt) faza o'tishiga qanday ta'sir ko'rsatishini aniqlashdan iborat.

Kalit so'zlar: lazer Raman spektroskopiyasi, yuqori bosim, doping, tetragonal–oktaedrik (wurtzit–ruksalt) faza, fonon o'zaro ta'siri.

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ДАВЛЕНИЕМ, И MEMRISTIVНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОКСИДНЫХ СТРУКТУР ZnO, ЛЕГИРОВАННЫХ Mn И Co

Аннотация. Развитие мемристорных технологий требует точного контроля структурных, электронных и дефект-опосредованных свойств оксидных полупроводниковых материалов. В последние годы ZnO и его легированные производные привлекают значительное внимание благодаря регулируемой электронной структуре, высокой чувствительности к внешним воздействиям и совместимости с архитектурами нейроморфных устройств нового поколения. Настоящее исследование направлено на изучение влияния контролируемого гидростатического давления на

фазовую эволюцию, динамику решётки и мемристивные характеристики систем ZnO, легированных Mn, Co и Si. Анализ влияния внешних факторов на образцы ZnO выполнен на основе опубликованных исследований, посвящённых роли высокого давления в современных полупроводниковых устройствах. Основные результаты и численные данные были получены из этих источников.

Измерения in-situ лазерной Раман-спектроскопии были проведены для чистого ZnO, $\text{Zn}_{0.98}\text{Mn}_{0.02}\text{O}$ и $\text{Zn}_{0.98}\text{Co}_{0.02}\text{O}$ при давлениях до 18.6, 18.4 и 13.1 ГПа соответственно. Основная цель работы заключалась в определении того, как малые концентрации легирующих элементов Mn и Co влияют на тетрагонально–октаэдрический (вюрцит–роксолт) фазовый переход ZnO при высоком давлении.

Ключевые слова: лазерная рамановская спектроскопия, высокое давление, легирование, тетрагонально–октаэдрическая (вюрцит–роксолт) фаза, взаимодействие фононов.

Introduction. Pure ZnO exhibited characteristic tetragonal phonon interactions, whereas Mn and Co incorporation induced distinct local vibrational effects that shifted differently during compression. These shifts indicate that $\text{Zn}_{0.98}\text{Mn}_{0.02}\text{O}$ and $\text{Zn}_{0.97}\text{Co}_{0.03}\text{O}$ undergoes a unique phase transition pathway, distinct from those of pure and Co-doped ZnO. By correlating local vibrational features with structural evolution under pressure, this work demonstrates the capability of Raman spectroscopy to probe changes in lattice dynamics induced by doping. The obtained results provide deeper insight into how local lattice effects influence phase transitions and serve as a guideline for designing ZnO-based materials with tunable properties suitable for optoelectronic applications under high-pressure conditions. To explore these mechanisms, multilayer oxide structures—including ZnO, ZnMnO, ZnCoO, MnO, and MnCuO—were synthesized on semiconductor and metallic substrates using sequential deposition techniques. Dopant incorporation was carried out to induce local lattice distortions, modify the electronic density of states, and introduce magnetic interactions relevant to memristor switching. Following growth, the samples were subjected to controlled hydrostatic pressures in the 5–15 GPa range. Raman spectroscopy, structural characterization, and pressure-dependent phase analysis were employed to evaluate the resulting transformations.

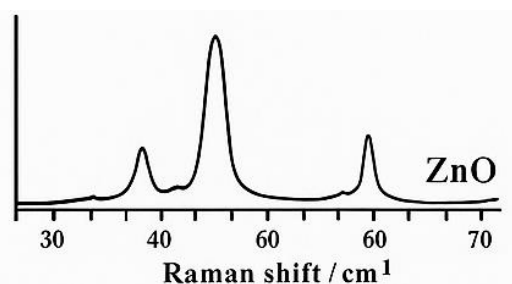


Figure 1. The Raman analyst in ZnO-based

Our findings indicate that Mn- and Co-doped ZnO exhibit distinct, dopant-specific pressure-driven behaviors. Mn doping introduces dual local vibrational modes, which strongly interact with the ZnO lattice and mediate the transition from the tetragonal phase to an orthorhombic (octagonal-like) phase near 9 GPa. Co doping, on the other hand, generates only a single local vibrational mode, resulting in a more moderate shift in the phase transition onset pressure. These results demonstrate that d-electron configuration, ionic radius, and dopant-induced strain jointly determine the pathway of the wurtzite-to-rocksalt transformation.

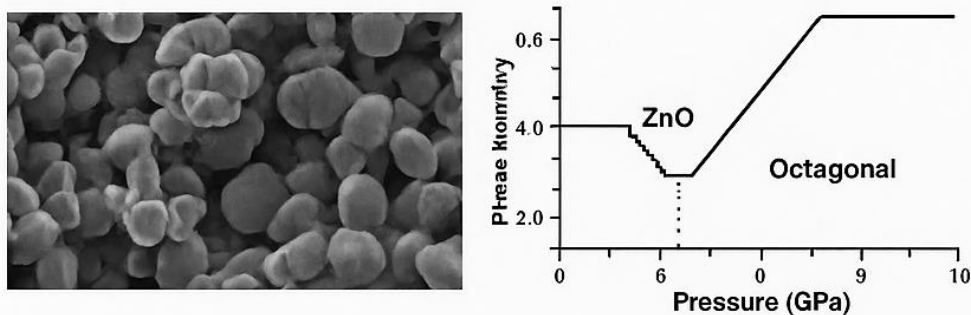


Figure 2. SEM morphology and wurtzite–rocksalt at effect of high pressure of ZnO.

Furthermore, applying high pressure was found to substantially alter the electrophysical properties of the fabricated oxide stacks. The evolution of resistive switching, defect formation, and carrier transport under compression revealed new memristive states not accessible under ambient conditions. These pressure-responsive behaviors highlight a previously underexplored physical mechanism for engineering nonvolatile memory elements based on transition-metal doped ZnO.

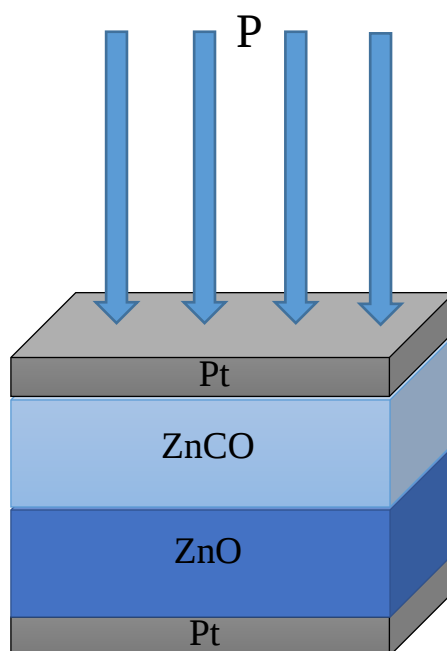


Figure 3. Effect of high pressure to memristive elements prepared based on ZnO

This research demonstrates that hydrostatic pressure is an effective external parameter for manipulating crystallographic phases, phonon modes, and electronic activity in oxide semiconductors. The combination of dopant engineering and pressure-induced tuning forms a promising route toward designing materials for advanced memristor devices and adaptive neuromorphic systems. Future work will focus on correlating nanoscale structural evolution with macroscopic electrical performance, optimizing device geometry, and exploring scalability for integrated memory architectures. Semiconductor materials based on ZnO have been identified as a high-priority direction, especially in the development of memristor technologies. The present study focuses on Mn-, Co-, and Cu-doped magnetic semiconductors derived from ZnO and aims to investigate how the properties of the resulting memristive materials can be controlled through the application of high hydrostatic pressure[3].

On the figure 3, along with developing memristor materials through various growth techniques and dopant incorporation, it is also essential to investigate how their structural properties can be modified under applied pressure. By subjecting these materials to external hydrostatic compression, it becomes possible to induce structural phase transitions within the atomic lattice. Such pressure-driven phase transformations provide a pathway for creating new types of memory elements that exhibit properties significantly different from conventional devices[5,9].

Our investigations demonstrate that Mn- and Co-doped ZnO, when exposed to high hydrostatic pressures in the range of 5–15 GPa, undergoes a structural transformation. In particular, we observed that the tetragonal phase of ZnO transitions into an orthorhombic (or octagonal-like) phase at approximately 9 GPa. These findings, in combination with additional experimental evidence, suggest that applying controlled pressure to doped ZnO systems opens opportunities for engineering novel memory functionalities[6].

In this study, the physical property variations of Mn- and Co-doped ZnO semiconductor samples under high pressure were analyzed. Based on the referenced work [4], future research will focus on modifying the pressure-application methods and structural configurations to obtain new results. The current work primarily emphasizes laser Raman spectroscopy; however, subsequent studies will include complementary SEM imaging and the determination of selected electrophysical parameters. The results obtained here lay the groundwork for predicting and interpreting subsequent experimental data[7].

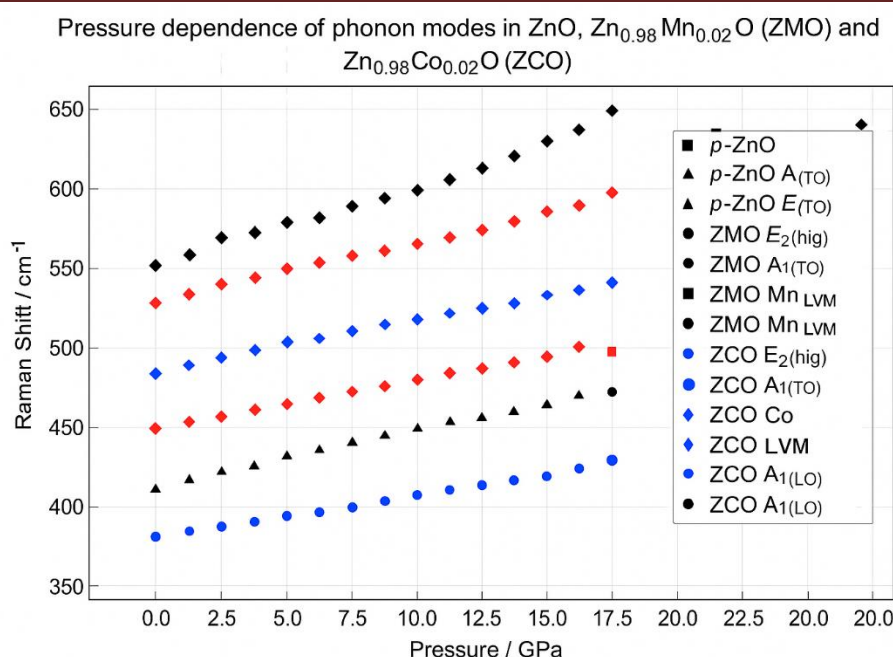


Figure 4. Pressure dependence of the Raman effect in ZnO-based samples, showing the variation of phonon modes with increasing pressure[1]

In this study, systematic Raman scattering investigations were conducted on pure ZnO, Zn_{0.98}Mn_{0.02}O, and Zn_{0.98}Co_{0.02}O samples to examine the influence of transition-metal doping on the pressure-induced tetragonal–octahedral phase transition pathway[8]. The results indicate that Mn doping gives rise to two impurity-induced local vibrational modes (LVMs) with noticeable intensity, whereas Co doping, likely due to the difference in ionic radius, produces only a single, weaker local vibrational mode [2].

A detailed analysis of the pressure dependence of each phonon mode revealed that the presence and stability of impurity-related LVMs may play a crucial role in determining the specific pathway of the pressure-induced phase transition in ZnO. In particular, strain analysis showed that a pronounced “strain burst” occurs as the hexagonal angle of the tetragonal phase opens just prior to the transformation into the octahedral phase. The final observations also suggest that the emergence of the Mn LVM1 mode at 524 cm⁻¹ could be responsible for a distinct transition route in Mn-doped ZnO during the tetragonal–octahedral phase transformation. Nevertheless, the precise nature of dopant-induced LVMs associated with different dopant elements requires further in-depth investigation[1,2].

i. Conclusion. Based on the comparative analysis of previously published studies and the current experimental observations, it can be concluded that the ongoing and planned laboratory experiments should be developed in alignment with earlier findings. These results not only facilitate faster utilization of experimentally obtained values but also contribute significantly to reducing defect concentrations that arise after high-pressure exposure in various semiconductor and memory devices. Strain analysis further validates that Mn- and Co-doped ZnO follow clearly different structural routes under compression, revealing that the dopant species and its interaction with the ZnO lattice critically shape the transformation dynamics. The emergence of pressure-induced structural states highlights the potential for engineering new memristive functionalities through controlled hydrostatic compression.

Overall, the work underscores the promise of doped ZnO systems as highly adaptable materials for next-generation neuromorphic, spintronic, and oxide-electronics applications. Pressure engineering emerges as a powerful methodology for activating structural phases and memristive states unattainable under ambient conditions, opening new opportunities for device innovation.

REFERENCES:

1. Chih-Ming Lin, Yi-Jia Tsai, Yi-Sheng Huang, Ming-Fong Tai, Sheng-Rui Jian, Jenh-Yih Juang, Effect of dopant-induced local vibration modes on pressure-driven structural phase transition in Mn and Co-doped ZnO., Lin et al., 2025, *iScience* 28, 112560 June 20, 2025 © 2025 The Author(s). Published by Elsevier Inc. <https://doi.org/10.1016/j.isci.2025.112560>.

2. Angela P. Lanchero A. Dussan, F. Mesa , Lina F. Prieto, Heiddy P. Quiroz, Jorge A. Calder, *Impact of Mn/Co substitution on magnetoelectric and structural properties of ZnO nanostructures thin films*, Received 30 October 2024; Received in revised form 22 January 2025; Accepted 28 January 2025 Available online 28 January 2025. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42337>.
3. Soatov A.Q., Turayev A.R. *Rux (zn) bilan legirlangan kremniy asosidagi shottki to'siqli diodning elektr xossalari va o'tuvchanlik mexanizmlari.*, *Scientific Reports Of Bukhara State University* 2025/9 (126). <https://orcid.org/0009-0004-0375-2889>.
4. Soatov A.Q., Turayev A.R. *Investigation of Phase Transitions and Physical Properties of Mn- and Co-Doped ZnO under High Pressure Conditions. International conference on digital innovations: current challenges and solutions in modern physics. FerDU. 2025-yil 17-18-oktyabr.* <https://orcid.org/0009-0004-0375-2889>.
5. Bishal Kumar Keshari and at all. *Experimental demonstration of in-memory computing using pressure stimulated SnO₂ x-based memristive device as inverter and active-low 2:1 multiplexer. The Royal Society of Chemistry* 2025. *J. Mater. Chem. C*, 2025, 13, 18225–18238. DOI: 10.1039/d5tc01687h.
6. N. Korsunska and at all, *Influence of compacting pressure on the electrical properties of ZnO and ZnO:Mn ceramics. Discover Applied Sciences* (2024).<https://doi.org/10.1007/s42452-024-05722-7>
7. Mohamad Hasan Aleinawi,Ameen Uddin Ammar,Merve Buldu-Akturk,Nur Selin Turhan, Shankari Nadupalli, and Emre Erdem*. *Spectroscopic probing of Mn-doped zno nanowires synthesized via a microwave-assisted route.* <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.2c00009> *J.Phys.Chem.C*2022,126,4229–4240.
2. 8. Gao Li and Zhang Jian-Min. *Effects of doping concentration on properties of Mn-doped ZnO thin films. Article in Chinese Physics B* October 2009 DOI: 10.1088/1674-1056/18/10/073.
9. Akihito Sawa, Tsukuba, Ibaraki 305-8562, *Resistive switching in transition metal oxides. Japan E-mail: a.sawa@aist.go.jp.* 8 june 2008 volume 11 number 6.

IRMOF-8 NING NUKLEATSIYAOLDI YIG‘ILISH MEXANIZMI: REAXFF MD ASOSIDAGI ATOMISTIK TAHLIL

Ergasheva Aziza Abdujabbor qizi,

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Toshkent, O‘zbekiston

aziza.ergasheva@iplt.uz

[ORCID ID](#) 0009-0002-8416-5795

Xalilov Umedjon Boymamatovich,

Ion-plazma va lazer texnologiyalari instituti, Toshkent, O‘zbekiston, f.-m.f.d.

Antwerpen universiteti, Antwerpen, Belgiya

umedjon.khalilov@uantwerpen.be

[ORCID ID](#) 0000-0003-3841-1895

Annotatsiya. Metall-organik karkaslar (MOK) ning shakllanish mexanizmlari, xususan, nukleatsiya jarayonlar haligacha to‘liq yoritilmagan. Ushbu ishda IRMOF-8 ning nukleatsiyaoldi bosqichi (barqaror qurilishi bloki SBU shakllanishi) ilk bor ReaxFF molekulyar dinamika usulida o‘rganildi. Tahlillar Zn_4O klasterining ligandlar bilan bosqichma-bosqich koordinatsiyalanishi davomida sterik to‘siqlar tufayli bog‘lanish energiyasi pasayishini va elektron to‘yinganlik hisobiga barqarorlashuvni ko‘rsatdi. Molyar Gibbs energiyasining o‘zgarishi jarayonning spontanligini tasdiqladi. Natijalar IRMOF-8 hosil bo‘lishida uzoq masofali tartibdan avval, aynan lokal koordinatsion to‘yinganlik hal qiluvchi determinatsiya omili ekanligini tasdiqladi.

Kalit so‘zlar: IRMOF, molekulyar dinamika, etanol, ReaxFF.

NUCLEATION MECHANISM OF IRMOF-8: ATOMISTIC ANALYSIS BASED ON REAXFF MD

Abstract. The formation mechanisms of metal–organic frameworks (MOFs), particularly the nucleation processes, have not yet been fully elucidated. In this study, the prenucleation stage of IRMOF-8 formation (the development of a stable secondary building unit, SBU) was investigated for the first time using ReaxFF reactive molecular dynamics simulations. The analysis revealed that during the stepwise coordination of the Zn_4O cluster with ligands, the binding energy decreases due to steric hindrance, while system stabilization occurs through electronic saturation. The change in molar Gibbs free energy confirmed the spontaneity of the process. The results indicate that, in the formation of IRMOF-8, local coordination saturation serves as the decisive determinant prior to the establishment of long-range order.

Keywords: IRMOF, molecular dynamics, ethanol, ReaxFF.

МЕХАНИЗМ ПРЕДНУКЛЕАЦИОННОЙ СБОРКИ IRMOF-8: АТОМИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ REAXFF MD

Аннотация. Механизмы формирования металл-органических каркасов (MOK), в частности процессы нуклеации, до настоящего времени остаются недостаточно изученными. В данной работе впервые исследована преднуклеационная стадия формирования IRMOF-8 (образование устойчивого строительного блока SBU) методом реакционно-силовых молекулярных динамических расчетов ReaxFF. Анализ показал, что в процессе пошаговой координации кластера Zn_4O с лигандами снижение энергии связи происходит вследствие стерических препятствий, тогда как стабилизация системы обеспечивается электронным насыщением. Изменение мольной энергии Гиббса подтвердило спонтанность процесса. Полученные результаты демонстрируют, что при формировании IRMOF-8 решающим фактором является локальная координационная насыщенность, предшествующая дальнейшему порядку.

Ключевые слова: IRMOF, молекулярная динамика, этанол, ReaxFF.

Kirish. Metall-organik karkaslar (MOK) kristallik tabiati, yuqori darajadagi tartiblanganlik va sozlanadigan poroz tuzilmalari bilan ajralib turuvchi g‘ovak materiallar hisoblanib, metall ionlari yoki metall klasterlar (koordinatsion markazlar)ning ko‘p funktsiyali organik ligandlar bilan koordinatsion bog‘lanishlari

natijasida shakllanadi [1]. MOK asosidagi materiallar an'anaviy g'ovak materiallarga nisbatan tubdan farq qilib, ularning strukturasi yuqori darajada tartiblangan, moslashuvchan, yuzasi keng va ichki g'ovakligi kimyoviy jihatdan o'zgaruvchan bo'ladi [2]. Aynan shu noyob fizik-kimyoviy xususiyatlari tufayli MOKlar gazlarni adsorbsiyalash [3–5], kataliz [6–8], kimyoviy sensorlar [9–11] va dori tashuvchilar [12–14] kabi ko'plab sohalarida keng qo'llanilmoqda.

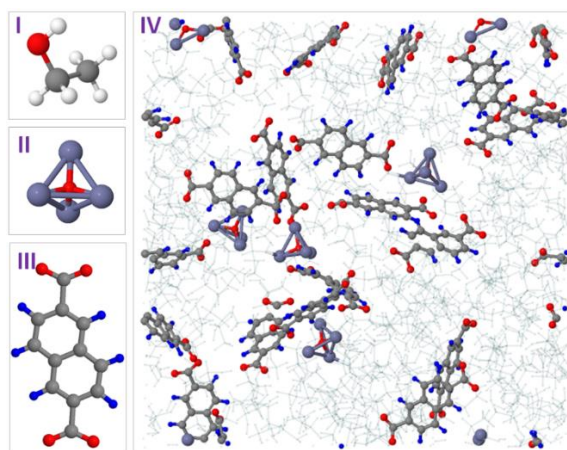
Bugungi kunda bir nechta asosiy MOK strukturalari, jumladan, UiO [15–17] ZIF [6,18,19], MIL [7,8,20] 8-10, va IRMOK [19,21–23], chuqur fundamental va amaliy tadqiqotlar markazida turibdi. Ular orasida IRMOK strukturalari alohida e'tiborga loyiq. Bu sinfdagi karkaslar yuqori g'ovakli, oldindan bashorat qilinuvchi simmetrik struktura va funksional guruhlar bilan modifikatsiya qilish imkoniyati tufayli keng tadqiq qilinmoqda. IRMOK strukturalari metall tugunlar (masalan, Zn(II) ionlari) va ditopik karboksilatli organik ligandlar o'rtasidagi koordinatsion bog'lanishlar asosida sintez qilinadi. Ularning ilk muvaffaqiyatli sintezi O.M. Yaghi guruhi tomonidan amalga oshirilgan bo'lib, Zn–O–C asosidagi oktaedral tugunlar va ditopik ligandlar asosida yuqori darajada tartiblangan, primitiv kubik simmetriyaga ega karkaslar olingan [24].

IRMOKlarning kristallik darajasi, morfologiyasi va govakligini nazorat qilish maqsadida turli sintez usullari ishlab chiqilgan. Bular qatoriga solvotermal, mikroto'liqinli, elektrokimyoviy [25], sonokimyoviy [26] va mexanokimyoviy [27] metodlar kiradi MOKlarning shakllanishi va ayniqsa nukleatsiya (boshlang'ich kristall zarralar hosil bo'lishi) bosqichi molekulyar darajada murakkab bo'lib, ularni tajribaviy usullar bilan aniq kuzatish qiyin. Ko'plab hozirgi yondashuvlar tayyor MOKlar uchun umumiy erkin energiyani hisoblashga asoslangan bo'lib, ular kristallanish jarayonining bosqichma-bosqich mexanizmini to'liq yoritib berolmaydi [28–30]. MOKlarning shakllanish jarayonida nukleatsiya mexanizmlarini chuqur o'rganish tartibsiz fazadan kristall strukturaga o'tishda energetik barqarorlikni belgilovchi omillarni aniqlash imkonini beradi. Shu nuqtai nazardan, molekulyar dinamika (MD) simulyatsiyalari kristallanish jarayonini buzmasdan tahlil qilish, energetik parametrlarni baholash hamda turli sintez sharoitlarini modellashtirish uchun samarali vosita hisoblanadi.

Avvalgi nazariy tadqiqotlarda kuch maydonlari yordamida MOK prototiplarining erkin energiyasi tahlil qilinib, sintez muvaffaqiyati va energetik barqarorlik o'rtasidagi bevosita bog'liqlik ko'rsatilgan. Xususan, olingan natijalarga ko'ra, $\Delta_{LMFEL} < 4,4$ kJ/mol·atom shartini qanoatlantiruvchi MOKlarning sintez qilinish ehtimoli yuqori ekanligi va erkin energiyaning pastligi strukturaviy amalga oshirishning (synthetic feasibility) muhim mezoni ekanligi aniqlangan [31]. Shuningdek, tadqiqotchilar MIL-101 karkasining ikkilamchi qurilish bloklari shakllanishida yuqori energetik to'siq mavjudligini va bu jarayonda tereftalat ligandlarining hal qiluvchi rolini ko'rsatib berdilar [32]. Keyinchalik esa molekulyar dinamika simulyatsiyalari orqali Zn-karboksilatli IRMOF-1 ning o'z-o'zini yig'ish jarayoni murakkab va ko'p bosqichli xarakterga ega ekanligi isbotlandi [33]. Biroq, mavjud adabiyotlarda asosan eng oddiy vakili hisoblangan IRMOF-1 keng o'rganilgan bo'lib, IRMOF oilasining boshqa vakillari, xususan, IRMOF-8 ning shakllanish mexanizmi to'liq yoritilmagan. Ligand o'lchamining kattalashishi (masalan, IRMOF-8 dagi naftalen tizimi) klaster atrofidagi sterik muhitni va yig'ilish kinetikasini IRMOF-1 ga nisbatan sezilarli darajada o'zgartirishi mumkin. Shu bois, yirikroq ligandli tizimlarda nukleatsiyaoldi bosqichi, ya'ni, hali kristall panjara hosil bo'lmagan, ammo uning asosiy qurilish bloki (SBU – Secondary Building Unit) shakllanayotgan jarayonini o'rganish alohida ahamiyat kasb etadi.

Yuqoridagilarni inobatga olgan holda, mazkur tadqiqotning maqsadi IRMOF-8 sintezining eng dastlabki bosqichini atomistik darajada yoritishdir. Ishda ReaxFF molekulyar dinamika usuli yordamida Zn(II) markazlari va katta hajmli naftalendikarboksilat ligandlari o'rtasidagi raqobatli koordinatsiyalanish jarayoni, sterik to'siqlarning bog'lanish energiyasiga ta'siri hamda barqaror SBU klasterining shakllanish mexanizmi ilk bor tizimli tahlil qilindi.

Modellashtirish usuli va tafsilotlari. Ushbu tadqiqot reaktiv molekulyar dinamika (MD) usullarini qo'llagan holda LAMMPS dasturiy to'plami [34] orqali amalga oshirildi. Tadqiqotda model tizimdagi atomlar orasidagi o'zaro ta'sirini ifodalash uchun ReaxFF potensialining [35] Han va uning hamkasblari [36] tomonidan ishlab chiqilgan parametrlaridan foydalanildi. ReaxFF klassik kuch maydonlaridan farqli ravishda bond-order formalizmi asosida bog'lanishlarning hosil bo'lishi va uzilishini, shuningdek, proton almashinuvi va koordinatsion jarayonlarni dinamik tarzda hisobga oladi [37]. 1-rasmda mono-IRMOK-8 strukturasi shakllanishi uchun Zn_4O koordinatsion markazi va 2,6-naftalendikarboksilat kislotasi molekulalari etanol erituvchisida joylashgan holati tasvirlangan. Ushbu konfiguratsiya molekulyar dinamika simulyatsiyasi uchun boshlang'ich tizim sifatida tanlangan bo'lib, u koordinatsiyalanish jarayonini modellashtirishga imkon beradi.

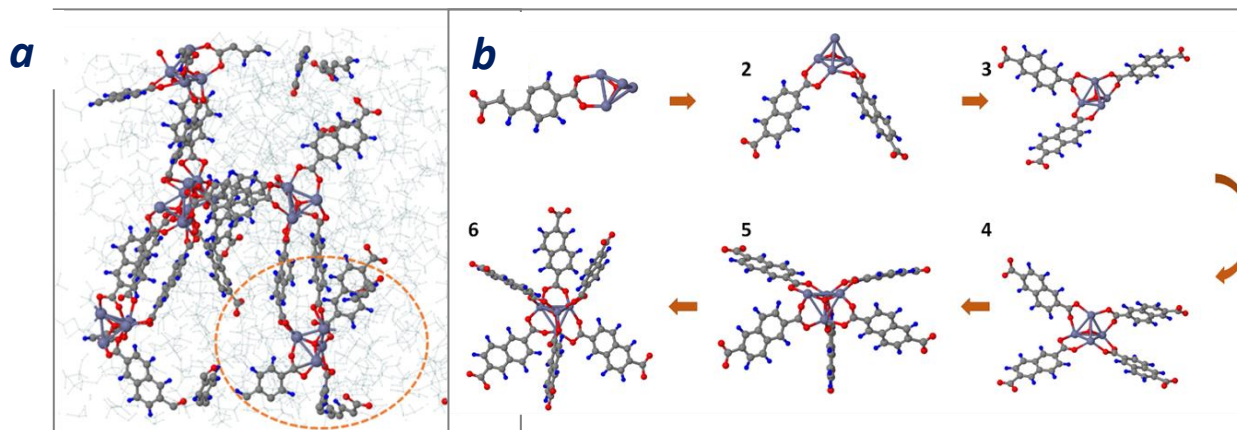


1-rasm. Zn_4O klasteri(II) va 2,6-naftalendikarboksilat(III) kislotasining etanol(I) muhitiga joylashtirilgan boshlang'ich holati(IV).

Dastlab, termodinamik tizimning energiyasi eng tez tushish (steepest descent) va qo'shma gradient (conjugate gradient) usullarini navbatma-navbat qo'llash orqali minimallashtirildi. So'ngra tizim Nosé-Hoover termostati boshqaruvidagi izotermik-izobarik (NpT) ansamblda (atomlar soni N , bosim p va harorat T o'zgarmas sharoitda), 600 K harorat va 1 atm bosimda muvozanatda ushlandi. Ushbu yuqori harorat simulyatsiya dinamikasini tezlashtirish maqsadida tanlangan bo'lib, bu MD modellashtirishdagi vaqt shkalalarini real tajribalardagi (masalan, CVD jarayonlaridagi kabi) vaqt masshtablariga yaqinlashtirish imkonini beradi. Bunda Tomas va hamkasblari tomonidan taklif etilgan haroratni tezlashtirish sxemasidan foydalanildi [38]. Mazkur usul Arrhenius tenglamasiga asoslangan holda modellashtirish harorati (T_{sim}) va unga mos keluvchi eksperimental harorat (T_{exp}) o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalaydi hamda qisqa modellashtirish vaqtini yuqori T_{sim} qiymatlari orqali kompensatsiya qiladi. Ushbu tezlashtirish sxemasiga ko'ra, modellashtirishda qo'llanilgan $T_{\text{sim}} = 600$ K harorat, real vaqt shkalasida etanolning qaynash nuqtasidan past bo'lgan haroratga ($T_{\text{exp}} \approx 351$ K) ekvivalentdir. Bu esa o'rganilayotgan jarayonning aynan suyuq fazada kechishini ta'minlaydi.

MD modellashtirishlarda vaqt qadami sifatida 0,1 fs tanlanib, jarayonlar davomiyligi 1,4 ns tashkil etdi. Olingan natijalarni o'rtachalash maqsadida har bir holat 5 martadan takrorlandi.

Natijalar va ularning muhokamasi. 2a-rasmda etanol muhitida metall asos (Zn_4O) hamda organik ligandlarni o'zaro birikib amorf struktura hosil bo'lish jarayoni tasvirlangan.



2-rasm. a) Etanol muhitida Zn_4O koordinatsion markazi va 2,6-naftalendikarboksilat ligandlarining o'zaro bog'lanishi natijasida amorf struktura hosil bo'lish jarayoni, b) Mono-IRMOK-8 strukturasi shakllanishining bosqichma-bosqich koordinatsiyalanish jarayoni.

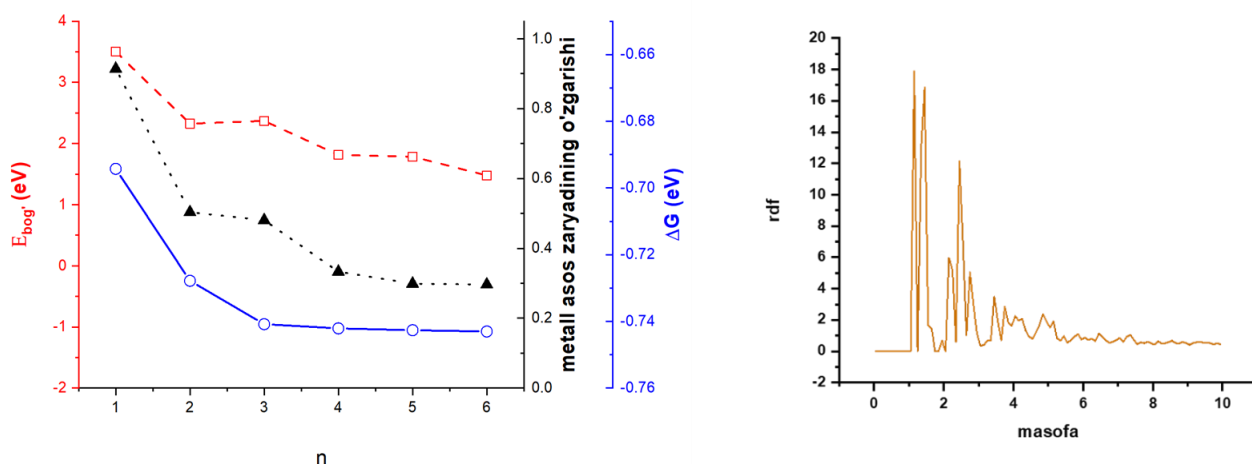
Ushbu ishda biz MonoIRMOK-8 ning hosil bo'lish mexanizmlarini tahlil qilamiz (2 b-rasm, sariq uzun chiziq bilan ajratilgan qism). 2b-rasm mono-IRMOK-8 strukturaviy birligi shakllanishining molekulyar darajadagi evolyutsiyasini namoyon qiladi. Xususan, har bir bosqichda (2b-rasm 1 dan 6 gacha) koordinatsion markazga navbatma-navbat bitta yangi ligand birikib boradi: birinchi holatda bitta ligand, ikkinchisida ikkita, va shu tarzda oltinchi holatda to'liq olti ligand bilan koordinatsiyalangan holatga

erishiladi. Bunda ligandlarning metall asos (koordinatsion markaz) bilan ketma-ket koordinatsiyalanishi jarayonida yuzaga kelgan bog‘lanish energiyasi ($E_{\text{bog'}}$), metall asosdagi xususiy zaryad o‘zgarishi bosqichma-bosqich tahlil qilindi. Hisoblash natijalariga ko‘ra, birinchi ligand koordinatsiyalanganda bog‘lanish energiyasi eng yuqori ($E_{\text{bog'}} = 3,5 \text{ eV}$) bo‘lib, metall asosdagi zaryad $+0.91395e$ ni tashkil etdi. Bu holatda metall markaz yuqori darajada elektronlarga muhtoj, ya‘ni elektron yetishmovchiligi mavjud bo‘lgan reaktiv markaz sifatida namoyon bo‘ladi. Har bir keyingi ligand qo‘shilishi bilan bog‘lanish energiyasi bosqichma-bosqich kamayib boradi (4-rasm, qizil chiziq). Xususan, ikkinchi va uchinchi ligandlar uchun 2,3 eV bo‘lsa, to‘rtinchi, beshinchi va oltinchi ligand uchun esa mos ravishda 1,8 eV, 1,7 eV va 1,4 eV ni tashkil etadi.

Kuzatilgan bog‘lanish energiyasining 3,5 eV dan 1,4 eV gacha bosqichma-bosqich pasayishi ligandlar soni ortishi tufayli sterik to‘siqlarning kuchayishi bilan izohlanadi. Dastlabki ligandlar ($n=1-3$) Zn_4O klasteriga erkin yaqinlasha olsa, keyingi bosqichlarda ($n=4-6$) avval o‘rnashgan katta hajmli naftalendikarboksilat guruhlarini yangi kelayotgan ligandlar uchun fazoviy to‘siq hosil qiladi. Bu esa “koordinatsion to‘yinganlik” effekti nafaqat elektron, balki geometrik omillarga ham bog‘liqligini ko‘rsatadi.

Ligandlar qo‘shilishi bilan Zn atomlaridagi musbat zaryadning keskin kamayishi ($+0,91e \rightarrow +0,29e$) kuchli liganddan-metallga zaryad ko‘chishi jarayoni sodir bo‘layotganidan dalolat beradi (3a-rasm, qora punktir chiziq). Garchi ReaxFF potensialida qo‘llaniladigan EEM usuli zaryadlarni kovalent bog‘lar bo‘ylab kuchli delokalizatsiya qilishga moyil bo‘lsa-da (bu absolut qiymatlarning DFT hisob-kitoblariga nisbatan kichikroq bo‘lishiga olib kelishi mumkin), kuzatilgan umumiy tendensiya metall markazining elektrofillik xossasi pasayib, barqaror neytral klaster holatiga intilayotganini fizik jihatdan to‘g‘ri ifodalaydi.

3-rasm. a) Ligandlar soniga bog‘liq holda mono-IRMOK-8 shakllanishidagi energetik va zaryad



holatlari o‘zgarishi: bunda $n=1-6$ ligandlar soni ortib borishi bilan bog‘lanish energiyasi o‘zgarishi qizil, metall asosdagi zaryad o‘zgarishi qora va Gibbs erkin energiyasining o‘zgarishi ko‘k rangda tasvirlangan, b) Mono-IRMOK-8 strukturasi radial taqsimot funksiyasi

Tadqiqotda shuningdek kordinatsiyalangan ligandlar soning ortishi bilan tizim barqaroligining o‘zgarib borishi Gibbs erkin energiyasi formulasidan foydalangan holda baholandi.

$$\Delta G = E - \sum_i \chi_i \mu_i \quad (1)$$

Bu yerda ΔG – Gibbs erkin energiyasi, E – qaralayotgan strukturaning kogeziya energiyasi, χ va μ mos ravishda struktura tarkibidagi har bir tur atomning molar ulishi va kimyoviy potentsiali. Bizning holda μ rux, uglerod, kislorod va vodorod uchun mos ravishda -1,35 eV, -7,64 eV, -2,79 eV va -2,36 eV ni tashkil qiladi. Gibbs erkin energiyasi ham har bir bosqichda izchil ravishda $-0,69425 \text{ eV}$ dan $-0,74301 \text{ eV}$ gacha kamayib boradi (4-rasm, ko‘k chiziq). Gibbs erkin energiyasining har bir bosqichda manfiy qiymatlar tomon siljishi ($\Delta G < 0$) ligandlarning klasterga birikishi termodinamik jihatdan qulay ekanligini tasdiqlaydi. Suyuq fazadagi erkin ligandlarning klaster tarkibiga o‘tib, tartibli struktura hosil qilishi entropiyaning kamayishiga olib kelsa-da, kuchli koordinatsion bog‘larning hosil bo‘lishi hisobiga yuzaga keladigan entalpiya yutug‘i jarayonning umumiy spontanligini ta‘minlaydi.

Bundan tashqari, shakllangan Mono-IRMOF-8 klasteri uchun radial taqsimot funksiyasi (RDF) tahlil qilindi (3b-rasm). Spekrtning qisqa masofa diapazonida ($1-2 \text{ \AA}$) kuzatilgan o‘tkir cho‘qqilar metall va kislorod atomlari o‘rtasida kuchli koordinatsion bog‘lanishlar hosil bo‘lganligini, $2,5-4,0 \text{ \AA}$ oralig‘idagi

cho‘qqilar esa organik ligand fragmentlaridagi (O–C va C–C) ichki strukturaviy tartibni aks ettiradi. Ushbu ko‘rsatkichlar lokal miqyosda barqaror ikkilamchi qurilish bloki (SBU) to‘liq shakllanganidan dalolat beradi. Biroq, uzoq masofalarda ($r > 5 \text{ \AA}$) xarakterli cho‘qqilarning mavjud emasligi va $g(r)$ funksiyasining birlikka intilishi, modellastirilgan suyuq fazada klasterlarning o‘zaro tartibsiz joylashganligini va uzoq masofali kristall tartib hali yuzaga kelmaganligini ko‘rsatadi. Mazkur holat o‘rganilayotgan jarayonning aynan nukleatsiyaoldi bosqichiga to‘g‘ri kelishini yana bir bor tasdiqlaydi.

Xulosa. Ushbu tadqiqotda ReaxFF molekulyar dinamika usuli yordamida IRMOF-8 karkasining nukleatsiyaoldi bosqichi, ya‘ni, barqaror ikkilamchi qurilish bloklari (SBU) shakllanish mexanizmi molekulyar darajada tadqiq etildi. Jarayonni modellastirish natijalari shuni ko‘rsatdiki, SBU shakllanishi sterik omillar va elektron barqarorlik o‘rtasidagi raqobatli muvozanat asosida kechadi. Xususan, Zn_4O klasteriga ligandlarning ketma-ket birikishi jarayonida sterik to‘siqlarning ortishi hisobiga bog‘lanish energiyasining 3,5 eV dan 1,4 eV gacha (taxminan 60% ga) keskin pasayishi aniqlandi. Bu koordinatsion to‘yinganlik nafaqat kimyoviy bog‘lar soni, balki ligandlarning fazoviy joylashuvi (geometrik to‘yinganlik) bilan ham qat‘iy nazorat qilinishidan dalolat beradi. Shu bilan birga, molyar Gibbs erkin energiyasining hisoblangan qiymatlari jarayonning termodinamik jihatdan spontan ekanligini va etanol muhitida energetik barqaror klasterlar hosil bo‘lishini tasdiqladi. Radial taqsimot funksiyasi (RDF) tahlili tizimda uzoq masofali kristall tartib ($r > 5 \text{ \AA}$) mavjud bo‘lmasa-da, lokal miqyosda ($r \approx 1\text{--}2 \text{ \AA}$) barqaror koordinatsion tugunlar to‘liq shakllanganligini ko‘rsatdi. Umuman olganda, mazkur ish IRMOF-8 sintezida kristall panjara o‘shidan avval, aynan lokal koordinatsion va geometrik to‘yinganlikka erishish hal qiluvchi deterministik omil ekanligini ilmiy asoslaydi va g‘ovak materiallarning boshqariluvchan sintezi uchun yangi nazariy tushunchalarni taqdim etadi.

ADABIYOTLAR:

- 1 *P. Rocío-Bautista et al., Separations* 6, 3 (2019).
- 2 *J. Yu et al., Mater. Horiz.* 4, 557 (2017).
- 3 *S. Tavares et al., Microporous and Mesoporous Materials* 254, (2017).
- 4 *A. Pal et al., Dalton Trans.* 46, 15280 (2017).
- 5 *Z. Niu et al., New J. Chem.* 42, 19764 (2018).
- 6 *M. A. Nazir et al., Surfaces and Interfaces* 34, 102324 (2022).
- 7 *S. H. Alrefaee et al., Surfaces and Interfaces* 40, 103133 (2023).
- 8 *O. Grad et al., Catalysts* 11, 11 (2021).
- 9 *H. He et al., Inorg Chem* 57, 15062 (2018).
- 10 *M. SK et al., Inorg. Chem.* 57, 14574 (2018).
- 11 *L. Liu et al., Dalton Trans.* 47, 16190 (2018).
- 12 *X. Zhong et al., J Control Release* 300, 81 (2019).
- 13 *V. Nejadshafiee et al., Mater Sci Eng C Mater Biol Appl* 99, 805 (2019).
- 14 *R. Safdar Ali et al., Molecules* 27, 100 (2021).
- 15 *S. Begum et al., Surfaces and Interfaces* 20, 100587 (2020).
- 16 *E. A. A. ElHussein et al., Journal of Environmental Chemical Engineering* 8, 103898 (2020).
- 17 *N. Liu et al., Surfaces and Interfaces* 41, 103134 (2023).
- 18 *M. Gomar et al., Materials Science and Engineering: C* 97, 461 (2019).
- 19 *E. Kim et al., Surfaces and Interfaces* 41, 103163 (2023).
- 20 *S. Jiang et al., Surfaces and Interfaces* 30, 101843 (2022).
- 21 *H. E. Emam et al., Surfaces and Interfaces* 30, 101940 (2022).
- 22 *D. Yin et al., Molecules* 27, 12 (2022).
- 23 *N. Yuksel et al., Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 641, 128510 (2022).
- 24 *O. M. Yaghi et al., Nature* 423, 705 (2003).
- 25 *J.-Z. Wei et al., Inorg. Chem.* 57, 3818 (2018).
- 26 *Y.-R. Lee et al., Microporous and Mesoporous Materials* 213, 161 (2015).
- 27 *T. Stolar et al., CrystEngComm* 22, 4511 (2020).
- 28 *T. Lee et al., CrystEngComm* 19, 426 (2017).
- 29 *M. Filez et al., Cell Reports Physical Science* 2, 100680 (2021).
- 30 *M. J. Van Vleet et al., Chem. Rev.* 118, 3681 (2018).

PHYSICS

- 31 *R. Anderson et al., Chem. Mater.* 32, 8106 (2020).
- 32 *D. C. Cantu et al., Chem. Mater.* 26, 6401 (2014).
- 33 *D. Biswal et al., ACS Nano* 11, 258 (2017).
- 34 *A. P. Thompson et al., Computer Physics Communications* 271, 108171 (2022).
- 35 *A. C. T. van Duin et al., J. Phys. Chem. A* 105, 9396 (2001).
- 36 *S. S. Han et al., Chem. Commun.* 46, 5713 (2010).
- 37 *T. P. Senftle et al., Npj Comput Mater* 2, 15011 (2016).
- 38 *C. de Tomas et al., Carbon* 119, 1 (2017).

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ПРОДУКТИВНОСТИ ПАСТБИЩ БУХАРСКОЙ ОБЛАСТИ

Хасанов Икром Хасанович,*-кандидат сельскохозяйственных наук.**Старший научный сотрудник Бухарского**научно – производственного центра**семеноводства пастбищных культур**Министерство сельского хозяйства Узбекистана***Остонова Насиба Хикматовна,***- Старший научный сотрудник Бухарского**научно – производственного центра**семеноводства пастбищных культур**Министерство сельского хозяйства Узбекистана, магистр БухГУ*

Аннотация. Опрыскивания многолетних пастбищных растений верблюжьей колючки и солодки голой в фазе цветения растений в Бухарской области, повышают урожайность сена, сухой вес растений, кормовые достоинства и уровень рентабельности удобрений в каракулеводческих хозяйствах. Пастбищный оборот, восстанавливает состояние растительности и повышает продуктивность животных и доходность хозяйств.

Ключевые слова: Растение, биологические системы, Продуктивность, Плодовитость, Питание.

WAYS TO INCREASE THE PRODUCTIVITY OF PASTELANDS IN THE BUKHARA REGION

Abstract. Spraying perennial pasture plants (camel's ear and licorice) during the flowering phase in the Bukhara region increases hay yield, plant dry weight, feed value, and the profitability of fertilizers on Karakul water farms. Pasture rotation restores vegetation health and improves animal productivity and farm profitability.

Keywords: Plant, biological systems, Productivity, fecundity. Nutrition.

BUXORO VILOYATIDAGI YAYLOVLARNING HOSILDORLIGINI OSHIRISH YO'LLARI

Annotatsiya. Buxoro viloyatida o'simliklarning gullash davrida tuyay tikan va yalang'och qizilmiya o'simligining ko'p yillik yaylov o'simliklarini sepish qorako'lchilik xo'jaliklarida pichan hosildorligini, o'simliklarning quruq vaznini, ozuqa qiymatini va o'g'itlarning rentabellik darajasini oshiradi. Yaylov almashlab ekish o'simliklarni tiklaydi, hayvonlarning mahsuldorligini va fermer xo'jaliklarining rentabelligini oshiradi.

Kalit so'zlar: o'simlik, biologik sistemalar, hosildorlik, unuvchanlik, ozuqaviylik.

В Центральной Азии 90 % территории занимают пустыни, 15 % горы, 750 тысяч га богарные земли и 4 % орошаемой пашни. Основным водным источником является Амударья, Сырдарья, Норын, Зарафшан и вертикальные, коллекторы и дренажи за счет грунтовых вод.

Аральское море занимает площадь 5,5 млн га (12,5 %) земель республики. Сейчас осталось 13,7 5 площади с соленой (35 г/л) водой, а 87,3 % высохла, из-за нехватки воды. С высохшей площади ежегодно с помощью ветра поднимается 75 млн тонн водорастворимых солей, которые распространяется на огромные площади земного шара.

По решению партии и правительства республики Узбекистан до настоящего времени посеяно и посажено пастбищных растений на дне борозды на глубину 30-40 см на общей площади 2,2 млн га (24 %) высохших площадей. Борозды проведены на расстоянии через 10 м. После ликвидации колхозов и совхозов области в 2006 году, каждому каракулеводческому хозяйству выделено по 300 гектаров орошаемого пашни для выращивания люцерны и других кормовых культур. На этих землях, вдоль оросительных систем и других неиспользуемых земель, корневища солодки голая на можно семенами и корневыми черенками длиной 10-12 см посадить глубину 10-15 см. Плантации янтака и

солодки голой можно проводить осенью полосой 8-10 м столько же глубиной. Через 3-4 года корнями полностью покрываются растений всех площадей с многолетними растениями. Янтак, солодки, юлгуна, изенья, шуваваха широко применять опрыскивание в фазе цветения растений карбамидными суспензиями из расчета 50-60 кг/га на 300 л/га воды и опрыскивать до появления солнца.

Имеющейся пастбищ хозяйства, разделить на 5-6 участков для нормального условия развития других кормовых пастбищных растений. Внесения азотных удобрений, и пастбищные обороты на пастбищных области, повышают продуктивность каракульских овец. При опрыскивания карбамида растения используют 80 % азота, а при внесения в почву это показатель не превышают 40-50 % (Д.А.Кореньков).

Таблица 1.

**Эффективность карбамидной суспензии на продуктивность растений верблюжьей колючки и солодки голой в Бухарской области.
(Среднее за 3 года).**

Варианты	Густота стояния	Сухой вес 1-20 растения		Кормовые единицы		Урожайность сена по укосам						Общий урожай		Уровень
	Тысяч га	2	%	К.ед	%	1-ый ц/га	%	2-ой ц/га	%	3-ый ц/га	%	ц/га	%	
Контроль (без удобрений)	240,0	44,7	100	0,28	100	39,4	74	13,6	26			53,6	100	
Карбамид 50 кг/га		50,9	114	0,28	111	46,5	85	13,2	15			66,8	125	30,1
Контроль (без удобрений)	650,0	58,8	100	0,42	100	80,056	56	32,0	22	30,6	22	142,6	100	
Карбамид 50 кг/га	11	65,3	128	0,42	107	113,0	63	32,0	18	33,7	19	178,7	125	35,2

Густота стояний растений солодки голой в 2,7 раза высота роста на 15 %, сухой вес растений урожайность сена на 17 % кормовые достоинства на 0,14 % (29%), обменной энергии (40 %) и рентабельности минеральных удобрений до 35 %. Солодка голой произрастающая в естественных условиях имеет большую густоту стояния растений или в 2,5-3 раза, сухой вес растений 2 раза, кормовые единицы на 0,14 (29%) больше чем верблюжьей колючки. Кроме того, до наступления заморозков можно проводить 3-ий укос урожайность которого составляет более 30 ц/га.(табл.2)

Опрыскивание карбамидной суспензии на растениях верблюжьей колючки и солодки голой в среднем за 3 года повысило урожайность сена янтака на 3,9 раза и солодки голой в 2,7 раза по сравнению с контролем.

Разрастание растений вдоль оросительного канала на территории Бухарской опытной станции научно-исследовательского института селекции, семеноводства и агротехнологии возделывания хлопчатника, без поливов обеспечило получению высокой урожайности вегетативной массы.

Фенологические наблюдения за ростом и развитием растений, проводились на 50 за этикетированных растениях.

Площадь делянки 400 км (длина 10 м, ширина 40 м). Урожайность сырой массы взвешивалась на электронных весах и переведена на сухую массу по соотношению 3:1 математическая обработка проводилось по методу Б.А.Доспехова.

Таблица 2.

Влияние карбамидной суспензии на вес и всхожести семян верблюжьей колючки и солодки голой.

Варианты	Вес 100 семян, г	Всхожесть, %
----------	------------------	--------------

BIOLOGY

	2020	2021	Среднее	%	2020	2021	Среднее	%
Верблюжья колючка								
Контроль (без удобрений)	12,2	15,0	13,6	100	32,6	30,2	31,1	100
Карбамид 50 кг/га	14,5	17,0	15,7	115	72,5	68,9	70,7	229
Солодка голая								
Контроль (без удобрений)	23,8	24,0	23,9	100	30,8	31,4	31,1	100
Карбамид 50 кг/га	28,5	29,6	29,2	122	82,6	84,8	83,7	269

Применение карбамидной суспензии на растениях верблюжьей колючки и солодки голая в фазе цветения повышает вес семян соответственно 2,1=(15%), 5,3=(22%) и всхожесть на 1,9 и 2,7 раза.

Таблица 3.

Площади посевов пастбищных культур по республику Узбекистана в (2018-2024 гг).

Области	Районы	Площади семенных культур, га
Каракалпакская Республика	Тахтакупирский	2000
Бухара	Алатский,	150
	Гиждуванский,	1300
	Жондорский, Караулбазарский,	400
	Шафирканский	1150
		1500
Джиззах	Фаришский	300
Навайский	Канимехский	2000
	Кызылтепинский	2500
Кашкадарынский	Нишанский,	500
	Муборакский,	500
	Гузарский,	500
	Миришкарский	1000
Самаркандский	Нурабадский,	500
	Пахтачийский	500
Сурхандарынский	Кумкурганский	200
Итого:		15000

По республике на пастбищных зонах, на посеянных культурах заготавливается посевные семена до 2025 года 15 тысяч гектаров. В Республику Каракалпакстана Тахтакупирский район 2000 га (донашур, кунгирбаш, черкез, изен), в Бухарский и Наваиской областях по 4,5 тысяч гектаров (чогон, саксаул, олабута, коврак, черкез, баликкуз, янтак), в Джиззакской области (кейреук, чогон, саксаул, янтак, баликкуз), в Самаркандский 1000 га (саксаул, изен, шувак, янтак, олабута), в Кашкадарынский области 2500 га (кандим, чогон, черкез) и в Сурхандарынский области 200 га (черкез, чогон, терескен). В 2019-2024 году по центру наибольшая площадь семеноводческих посевов занимают черкез -3706 га, саксаул -3631 га, чогон-162 га, терескен 99 га. Всего заготавливается ежегодно семена пастбищных культур по 30-60 тонн.

Уход, охрана и заготовка семян площадей осуществляются работниками центра.

Таблица 4.

Влияние биостимуляторов на всхожесть семян и накопление биомассы (среднее 2 года).

Биостимуляторы	Янтак, %			Солодка голая, %		
	всхожесть	биомасса,г	%	всхожесть	биомасса,г	%
Контроль (без замочки)	31,4	3,4	100	44,9	43,1	100
Калий фосфат	69,0	4,8	140	48,3	73,0	167
Аминомакс	77,3	4,9	144	57,6	98,9	229
Геогумат	87,0	5,7	167	61,9	118,3	274

Семена пастбищных культур имеют низкую всхожести семян, порядка 10-60 процентов, распространяется в основном с помощью ветра и корневищами. Применение биостимуляторов на замочке семян повышают всхожести семян янтака в 2,8 раза и солодки голая 1,4 раза. Накопление биомассы 1,7-2,7 раза по сравнению с контролем (табл 4).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мирзиеев Ш.М. – Ўзбекистон Республикаси Президентининг 4420, 3603, 605 а қарорлари ва фармонлари.
2. Атабаева Х., Тажетдинов Н. - Влияние стимуляторов на всхожесть семян солодки. Ж. «Агроилм», №3, 2019 с-34-38.
3. Кореньков Д.А. – Справочник агрохимика Москва, 1980 с-325.
4. Шамсиддинов З.Ш – Создание долголетних пастбищ в аридной зоне Средней Азии. Ташкент, с 1975 с 1975.
5. Хасанов И.Х. – Эффективность применения карбамидной суспензии на верблюжьей колючки и солодки голой в Узбекистане. Ж. «Актуальные проблемы современной науки №6 2022, с 77-82 .

POLIEFIR-EFIR-KETON SULFONAT/TiO₂ VA ZrO₂ NANOTRUBKALI NANOKOMPOZIT ION O'TKAZGICHLAR SINTEZI

Xamidov Anvar,

Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti dotsenti v.b.

anvar.khamidov@polito.uz

Djumag'ulov Sh.

O'zbekiston Milliy universiteti Kimyo fakulteti doktoranti

Annotatsiya. Zr yoki Ti metalining elektrokimyoviy anodlanishi natijasida hosil bo'lgan sirkoniy yoki titan nanotrubkalari proton o'tkazuvchi sulfolangan poliefir-eter-keton (SPEEK) ionomeri bilan infiltratsiya qilish yo'li bilan nanokompozitli qattiq ion o'tkazgich tayyorlandi. Olingan material skanerlovchi elektron mikroskop (SEM), XRD va IQ- spektroskopiya usullari yordamida o'rganilgan. Impedans spektroskopiyasi infiltratsiyadan so'ng o'tkazuvchanlikning bir necha darajaga ko'payishini aniqladi; bundan tashqari, TiO₂nt-SPEEK nanokompozitining impedansi nisbiy namlikka juda sezgir. Ushbu ion o'tkazuvchan nanokompozitlarning mumkin bo'lgan qo'llanilishi qattiq holatdagi namlik sensorlari yoki geterogen katalitik materiallarni o'z ichiga oladi.

Kalit so'zlar: Nanokompozit materiallar, polimer elektrolitlar, proton o'tkazuvchanlik, namlikni aniqlash, nt-nanotrubkalar.

ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЙ К ВЛАГЕ НАНОКОМПОЗИТНЫЙ ПРОВОДНИК ТВЕРДЫХ ИОНОВ: СУЛЬФИРОВАННЫЙ ПОЛИЭФИР-ЭФИР-КЕТОН В НАНОТРУБЧАТОЙ МАТРИЦЕ TiO₂ ИЛИ ZrO₂

Аннотация. Нанокomпозитный твердоионный проводник был приготовлен путем пропитки циркониевых или титановых нанотрубок, образованных электрохимическим анодированием Zr или Ti, протонпроводящим сульфированным полиэфир-эфир-кетон (SPEEK) иономером. Полученный материал исследовали с помощью методов сканирующего электронного микроскопа (СЭМ), рентгеноструктурного анализа и ИК-спектроскопии. Импедансная спектроскопия выявила увеличение проводимости на несколько порядков после инфльтрации; более того, импеданс нанокomпозита TiO₂nt-SPEEK очень чувствителен к относительной влажности. Возможные применения этих ионпроводящих нанокomпозитов включают твердотельные датчики влажности или гетерогенные каталитические материалы.

Ключевые слова: Нанокomпозитные материалы, полимерные электролиты, протонная проводимость, влагодетектирование, nt-нанотрубки.

A HUMIDITY-SENSITIVE NANOCOMPOSITE SOLID ION CONDUCTOR: SULFONATED POLY-ETHER-ETHER-KETONE IN NANOTUBULAR TiO₂ OR ZrO₂ MATRIX

Abstract. A nanocomposite solid ion conductor was prepared by infiltrating zirconia or titania nanotube arrays, made by electrochemical anodization of Zr or Ti metal, with proton-conducting sulfonated poly(ether-ether-ketone) (SPEEK) ionomer. The resulting material was characterized using Scanning Electron Microscopy, X-ray diffraction and Infrared Spectroscopy showing the successful filling of the nanotubular matrix with the ionomer. Impedance spectroscopy revealed a conductivity increase by several orders of magnitude after infiltration; furthermore, the impedance of the TiO₂nt-SPEEK nanocomposite is very sensitive to the relative humidity. Possible applications of these ionic conducting nanocomposites include solid-state humidity sensors or heterogeneous catalytic materials.

Keywords: Nanocomposite materials, polymer electrolytes, proton conductivity, humidity sensing.

Kirish. ZrO₂ va TiO₂ nanotrubkalari proton o'tkazuvchi ionomer bilan infiltrlangan. Nanokompozit qattiq moddalarning fazaviy tarkibi va elektr xossalari tahlil qilingan. Ionomer infiltratsiyasidan keyin impedans nisbiy namlikka juda sezgir hisoblanadi [1]. Past o'lchamli qattiq ion o'tkazgichlarning ion o'tkazuvchanligi mahsus strukturalarda, ayniqsa, bir o'lchovli o'tkazuvchanlik kanallarini yoki ikki o'lchovli panjara tekisliklarini o'z ichiga olgan holda, ko'pincha yuqori anizotrop hisoblanadi va kompozit materiallar

ham tayyorlanishi mumkin. Bunday holda, kompozit struktura anizotrop o'tkazuvchanlik xususiyatlarini ko'rsatish uchun ion o'tkazuvchi fazaning yuqori tartibli tartibiga ega bo'lishi talab qilinadi [2]. Yuqori yo'naltirilgan o'tkazuvchanlik yo'llari bo'lgan nanokompozit ion o'tkazgichlar, asosan ion o'tkazuvchanlik fazasi bilan to'ldirilgan nanotrubkalar membranalaridan foydalangan holda olinishi mumkin [3]. Yuqori anizotrop ion o'tkazuvchanlik xususiyatlarini o'rganishning asosiy jihatidan tashqari, past o'lchamli qattiq ion o'tkazgichlarning potensial qo'llanilishi keng tarqalgan, jumladan qattiq faza sensorlari yoki geterogen kataliz kabilar muhim hisoblanadi [4].

Ushbu ishda biz o'z-o'zidan shakllangan ZrO_2 yoki TiO_2 nanotrubkalaridan proton o'tkazuvchi sulfolangan aromatik polimerni kiritish uchun membrana sifatida foydalanilgan. ZrO_2 yoki TiO_2 nanotrubkalari sirkoniy yoki titan metall plyonkalarni elektrolit o'z ichiga olgan ftorid-ionda elektrokimyoviy anodlash yo'li bilan tayyorlanishi mumkin. Cheklovchi kuchlanish ftorid ionlarini o'z ichiga olgan organik va suvli elektrolitlar tizimlarida o'z-o'zidan shakllangan sirkoniy nanotrubkalarining elektrokimyoviy hosil bo'lishi o'rganilgan. Guo va boshq. elektrolitlar o'z ichiga olgan xloridda Zr ni anodlash yo'li bilan o'z-o'zidan shakllangan sirkoniy G'ovakli qatlamning shakllanishi va o'sishini o'rgandilar [5]. G'ovakli qatlamlarning morfologiyasiga elektrokimyoviy jarayonlar, jumladan Cl^- konsentratsiyasi ta'sir ko'rsatadi. Tegishli sharoitlarda anodlash yo'li bilan tekis va to'G'ri devorlarga ega, diametri 250 dan 300 nm gacha va uzunligi 33 μm bo'lgan sirkoniy nanotrubkalarini olish mumkin.

Sakai va boshqalar [6] sulfat kislota ishtirokida o'zgartirilgan nano-titanning proton o'tkazuvchanlik xususiyatlari o'rganishgan. Proton o'tkazuvchanligi, adsorbsiyalangan sulfat guruhlar miqdori deyarli bir xil bo'lganda, suvli sulfatlangan nano-titan bilan deyarli bir xil bo'ladi. Yuqori tartibli va o'ta nozik TiO_2 nanotrubkalari ham o'zgartirilgan anodlash usuli orqali sintez qilingan. Polipirrol-titan nanotrubka gibridlari polipirrolni yaxshi tekislangan titan nanotrubkalariga kiritish, shuningdek kuchlanishni pasaytirish va cho'ktirish usuli orqali amalga oshirilgan.

ZrO_2 nanotrubkalari xona haroratida yuqori qarshilikka ega bo'lsa, TiO_2 nanotrubkalari esa n tipidagi yarim o'tkazuvchanlik xususiyatiga ega. Sirkoniy nanotrubkalarining elektrokimyoviy qaytarilishi TiO_2 nanotrubkalariga qaraganda ancha qiyin amalga oshadi, chunki Zr^{4+} ionlari Ti^{4+} ionlariga qaraganda oson qaytariladi [7]. Shuning uchun, sirkoniy nanotrubkalari izolyatsiyalovchi membrananing modelini va titan nanotrubkalari xona haroratidagi ion o'tkazgich bilan infiltratsiya qilish uchun yarim o'tkazgich membrana vazifasini bajaradi.

Infiltratsiya uchun qattiq ion o'tkazgich namunasi ishlatilgan: sulfolangan poliefir-eter-keton xona haroratida proton o'tkazuvchi ionomer hisoblanadi va ko'pgina xossalari, shu jumladan proton o'tkazuvchanligi juda yaxshi o'rganilgan [8]. Nanofaza bilan ajratilgan polimer strukturasining kanallarida suv molekularining mavjudligi ionlarni tashish uchun suv tashish vazifasini bajaradi. Bunday yuqori anizotrop nanokompozitlarni amalga oshirish uchun birinchi hal qiluvchi qadam nanotrubkali membranalarini to'liq to'ldirish imkonini beruvchi yuqori namlanadigan ionomer eritmasini tayyorlash. Muhim jihati shundaki ZrO_2 yoki TiO_2 sirt yuzalarni mukammal namlash qobiliyatiga ega ionomer uchun mos erituvchini topish hisoblanadi [9].

Olingan nanokompozit struktura ion o'tkazgichning yuqori nisbati va yuqori yo'naltirilgan o'tkazuvchanlik yo'llarini taqdim etadi. Biz namlikka sezgir detektorlarni amalga oshirish uchun yarim o'tkazgich titan membranasi bilan ushbu nanokompozitlarning ion o'tkazuvchanligiga suv bug'i bosimiga bog'liqligini o'rganamiz. Proton harakatchanligi, shuningdek, proton-katalizlangan reaksiyalar uchun geterogen katalizatorlar modelini amalga oshirish imkoniyatini beradi.

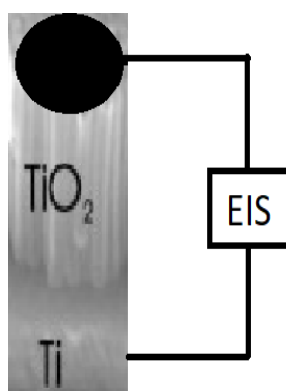
Tadqiqot usuli va obykti. Tahminan 2 μm qalinlikdagi Zr-Ti metall plastinkalari ilgari xabar qilinganidek, Si membranalarida katodli purkash usuli orqali kiritilgan. Zr plyonkalari ikki elektrodli anodlash yacheykasida 10 daqiqa davomida 40 V kuchlanishda 5 % glitserindagi 0.35 M NH_4F eritmasida xona haroratida amalga oshirildi. Ti plastinkalari 1.3 % NH_4F va 2 % glitserin eritmasida uch soat davomida 60 V da anodlangan. Elektrodlar yuzasidan kislorod pufakchalarining ajralishini tezlashtirish uchun glitserin eritmasi biroz aralashtirildi (100 rpm), natijada nanotrubkalarining morfologiyasi va umumiy sifati yaxshilandi. Qarshi elektrod sifatida platina panjarasi ishlatilgan. ZrO_2 yoki TiO_2 nanotrubkalari asosidagi anodlashdan keyin qolgan sirkoniy yoki titan plastinkasi impedans o'lchovlari uchun elektrod sifatida ishlatiladi. Anodlashdan so'ng, nanotrubkalar ionsizlantirilgan suv bilan yuvildi va ikki soat davomida vakuum ostida 80 °C da quritildi.

Sulfonlangan poliefir-eter-keton (SPEEK) 0.9 sulfonlanish darajasiga ega (ion almashish qobiliyati $IEC = 2.5$ meq/g ga to'G'ri keladi) avval xabar qilinganidek, PEEKning konsentrlangan sulfat kislota bilan 50 °C da reaksiyasi natijasida tayyorlangan [10]. Infiltratsiya 7.1 mg SPEEKni 10 ml dimetilformamidga (DMF) eritish orqali amalga oshirildi. Ushbu eritmaning bir tomchisi ~ 0.5 sm^2 sirkoniy yoki titan nanotrubkalarining

namunasiga kiritilgan. 1 tomchi (~ 0.1 ml) eritmaga kiritilgan SPEEK miqdori nanotrubkalarni to'liq to'ldirish uchun yetarli bo'lishi uchun hisoblab chiqilgan. Namunalar Siemens D5000 difraktometri yordamida $\text{CuK}\alpha$ nurlanishi bilan rentgen nurlari diffraksiyasi (XRD) orqali tahlil qilindi. Nanokompozitning sirt morfologiyasi va tarkibi skanerlovchi elektron mikroskop (SEM, Hitachi, S-570) yordamida o'rganildi. Fourier-Transform Infra-Red (FTIR) spektrlari Bruker 55 spektrofotometri yordamida 4000 dan 400 cm^{-1} to'lqin soniga qadar uzatish rejimida tahlil qilindi.

Impedans diagrammalari 2273 yoki 4000 impedans analizatorlari yordamida 100 kHz dan 1 Gts gacha chastota diapazonida 20 mV signal amplitudasi bilan qayd etilgan. Ti metall plyonkasida olingan; oldingi kontakt 6 mm diametrli zanglamaydigan po'latdan yasalgan disk hisoblanadi (1-rasm). Ma'lumotlarning takrorlanishi va to'g'riligini tekshirish, kontaktning maydoni va holatini o'zgartirish uchun bir nechta tajribalar o'tkazildi.

TiO_2 -SPEEK nanokompozitlari bilan impedans o'lchovlari turli nisbiy namlik ostida ham amalga oshirildi. Namunalar 24 soat davomida pechda 100°C da quritilgan va Swagelokda maxsus idishlarga yig'ilgan. To'yingan suv bug'ini simulyatsiya qilish uchun Swagelok idishlarini yopishdan oldin bir tomchi suv qo'shilgan. Atmosfera namligi sharoitlari uchun namuna atrof-muhit havosida yig'ilgan; pH namlik sensori yordamida o'lchangan.

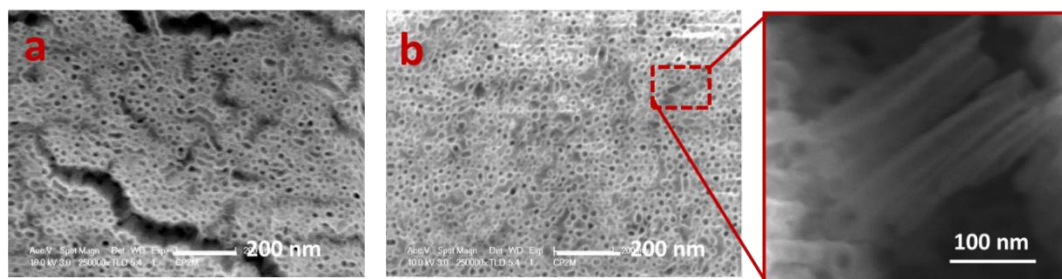


1-rasm. Kontaktning joylashtirish sxemasi

Tadqiqot natijalari va muhokamalar. Nanokompozitlarni tayyorlashning birinchi muhim bosqichi nanotrubkalar matritsasi uchun mukammal namlash xususiyatiga ega bo'lgan erituvchini tanlash hisoblanadi. Dimetilformamid (DMFA) turli xil keramika-uglerodli nanotrubka kompozitlarni, shu jumladan ZrO_2 ni namlashi va u 90% sulfonlanish darajasi bilan yetarli miqdorda SPEEKni eritishi mumkinligi haqida xabar berilgan. Ma'lumki, sulfonlanish polimerning gidrofilligini oshiradi va kationlarni tashishga yordam beradi [11]. Polimerning gidrofilligi va eruvchanligi sulfonlanish darajasi bilan ortadi. 60% dan past sulfonlanish darajasida SPEEK faqat sulfat kislota kabi kuchli kislotalarda eriydi. Sulfonlanish darajasi 80% dan yuqori bo'lsa, SPEEK polimeri metanol DMFA va issiq suvda eriydi. 20% dan 40% gacha bo'lgan suvni iste'mol qilish mexanik jihatdan barqaror polimerni ushlab turganda yuqori darajadagi ion o'tkazuvchanligi uchun mos keladi. Impedans spektroskopiyasi bilan o'lchangan gidratlangan SPEEK membranalar proton o'tkazuvchanligi IEC 1.0 dan 2.7 meq/g gacha oshganligi sababli 10^{-3} dan 10^{-1} S/cm gacha o'zgaradi. Shuning uchun, bu ishda 90% sulfonlanish darajasiga ega bo'lgan SPEEK tanlangan.

Eritma konsentratsiyasi eritmaning bir tomchisida nanotrubkalarni to'liq to'ldirish uchun SPEEK miqdorini yuqorida ionomer qatlami hosil qilmasdan to'ldirish uchun moslashtirildi. SPEEK bilan to'ldirilishi kerak bo'lgan nanotrubkalar hajmi ushbu ishda tasdiqlangan ZrO_2 va TiO_2 nanotrubkalarining ilgari xabar qilingan o'lchamlari bo'yicha hisoblanishi mumkin (2a-rasmga qarang). O'rtacha ZrO_2 nanotrubka uzunligi taxminan $1\text{ }\mu\text{m}$; rasmda ko'rinadigan nanotrubkaning diametri 40 nm atrofida. Taxminan 5 nm devor qalinligi haqida avval xabar berilgan edi. TiO_2 uchun o'rtacha uzunligi va diametri mos ravishda $1.5\text{ }\mu\text{m}$ va 100 nm, devor qalinligi esa taxminan 10 nm.

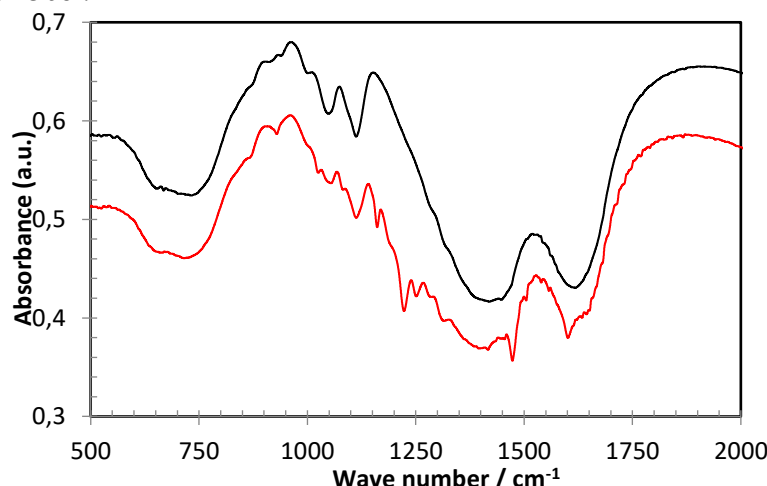
Ionomer bilan to'ldirilgan ZrO_2 nanotrubkalar qatorini 2b-rasmda ko'rish mumkin. Oksid nanotrubkalarining muntazam mikro tuzilishini ajratib ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham sirt yuzada ionomer qatlami hosil bo'lmaydi va ko'pchilik nanotrubkalar to'lgan ko'rinadi, buni sirt yuzadagi o'zgarishlardan xulosa qilish mumkin.



2-rasm. To'ldirilmagan (a) va SPEEK bilan to'ldirilgan(b) ZrO_2 nanotrubkalarining SEM natijalari

Ionomer bilan to'ldirilgan nanotrubkalarining XRD namunasi, avval xabar qilinganidek, monoklinik va tetragonal fazalarni o'z ichiga olgan ZrO_2 nanotrubkalarining qisman kristalli tuzilishini tasdiqlaydi; polimer bilan to'ldirilgan nanotrubkalarda Bragg burchagi $2\theta = 20^\circ$ atrofida kuzatilgan keng aks ettirish, avvalroq muhokama qilinganidek, to'liq amorf SPEEK tufayli amalga oshadi.

3-rasmda toza va ionomer bilan to'ldirilgan ZrO_2 nanotrubkalarining FTIR spektrlari ko'rsatilgan. Asosiy guruhlar 1-jadvalda keltirilgan. 550 va 800 cm^{-1} oraliqidagi keng assimilyatsiya zonasi sirkoniyadagi Zr-O aloqalarining tebranishiga to'g'ri keladi. 900 cm^{-1} va 1500 cm^{-1} gacha bo'lgan piklar gidroksil sirt guruhlari tegishli. 1630 cm^{-1} dagi pik avvalroq NH_4^+ ionlariga tayinlangan edi, chunki zirconiya nanotube massivlari NH_4F ni o'z ichiga olgan elektrolitda tayyorlangan. Ionomer bilan bog'liq cho'qqilar (1-jadval) oldingi hisobotlarga mos keladi.



3-rasm. Toza (qora) va ionomer bilan to'ldirilgan (qizil) ZrO_2 nanotrubkalarining FTIR spektrlari. SPEEK ning takroriy birligining kimyoviy formulasi chizilgan

1-jadval. SPEEK bilan to'ldirilgan ZrO_2 nanotrubkalarining FTIR diapazoni tayinlanishi (v_{as} : Asimmetrik cho'zish, v_s : Simmetrik cho'zish, ds : bo'g'lanish, ϕ : Halqa deformatsiyasi, OP : tekislikdan tashqarida, IP : tekislikda).

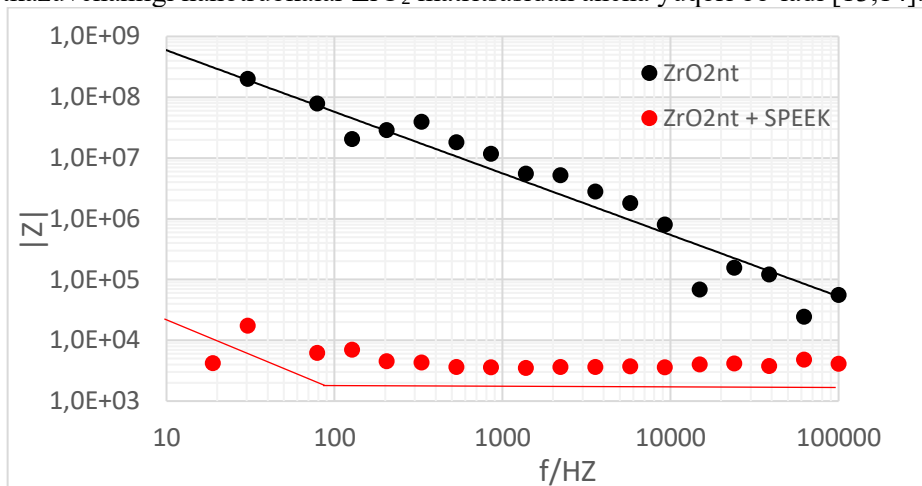
Guruhlarni belgilash

To'lqin uzunligi / cm^{-1}	SPEEK [12]	ZrO_2 nanotrubkalari
870	v_{as} COC, ϕ_a OP, ϕ_b IP	
1000		Zr-OH sirt yuzasi
1023	ϕ_a IP, v_s SO_3	
1054		Zr-OH sirt yuzasi
1080	ϕ_a IP, v_{as} CHa, v_s SO_3	
1130		Zr-OH sirt yuzasi
1205		Zr-OH sirt yuzasi
1230	ϕ_b IP, v_{as} CHb, v_{as} SO_3	
1255	v_{as} CHa, ϕ_a IP, v_{as} SO_3	
1400		Zr-OH sirt yuzasi
1476	v_{as} COC, ϕ_a IP, ϕ_b IP	

To'g'ri va ionomer bilan to'ldirilgan ZrO_2 nanotrubkalarining impedans modulining chastotaga bog'liqligi (Bode grafigi) 4-rasmda keltirilgan. Tekshirilayotgan chastota diapazoni ichida toza ZrO_2 nt ning impedans moduli $|Z|$ chastotaga teskari proporsionaldir (qiyalik -1 4-rasmdagi ikki logarifmik chizma), bu tenglamaga ko'ra sig'imli javobga mos keladi (bu yerda f - chastota va C sig'im):

$$Z = 1/(2\pi fC)$$

SPEEK infiltratsiyasidan keyin impedansning sezilarli darajada pasayishini aniq kuzatish mumkin, chunki SPEEK o'tkazuvchanligi nanotrubkalar ZrO_2 matritsasidan ancha yuqori bo'ladi [13,14].

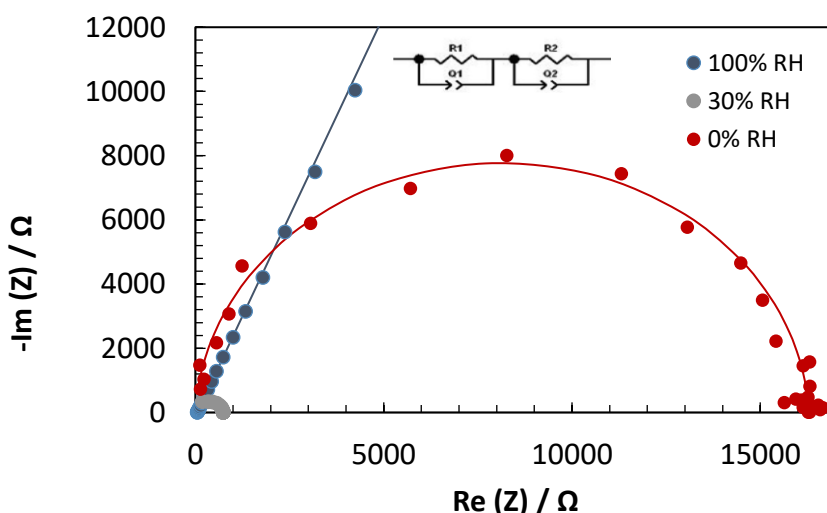


4-rasm. Atrof-muhit namligida ($RH = (30 \pm 10) \%$) toza va ionomer bilan to'ldirilgan ZrO_2 nanotrubkalari uchun impedans spektrlari (Bode moduli chizmalari)

Shuningdek, biz TiO_2 nt-SPEEK nanokompozitlarining turli nisbiy namlik ostida impedans javobini tahlil qildik. Ushbu tajriba namlikka sezgir detektorlarni amalga oshirish uchun konsepsiya isbotidir. 5-rasmda quruq sharoitda, atrof-muhit namligida ($RH = (30 \pm 10) \%$) va to'yingan bug' bosimini ifodalovchi bir tomchi suv borligidagi impedansning taqqoslanishi ko'rsatilgan. Nyquist uchastkalaridagi impedans namlikdagi bu o'zgarishlarga juda sezgir ekanligini kuzatish mumkin. Chiziqli bo'lmagan eng kichik kvadrat o'rnatish uchun ishlatiladigan ekvivalent sxema (ikki parallel qarshilik-doimiy fazali elementlarning Q ketma-ket joylashishi) 5-rasmda ko'rsatilgan. Doimiy fazali elementning impedansini yozish mumkin:

$$Z(Q) = Y^o (i\omega)^{-n}$$

Bu yerda i hayoliy birlik, ω burchak chastotasi, Y^o CPE qiymati va n CPE ko'rsatkichi elementning fizik tabiatini ko'rsatadi: 1 ga yaqin qiymat mukammal bo'lmagan siG'imni bildiradi. Spektrlarning chiziqli bo'lmagan eng kichik kvadrat moslashuvi turli RH uchun 2-jadvalda keltirilgan TiO_2 nt-SPEEK nanokompozitlarining qarshilik va CPE qiymatlarini berdi.



5-rasm. TiO₂nt-SPEEK nanokompozitlari impedansining 25 °C da namlikka bogʻliqligi. Chiziqlar rasmda koʻrsatilgan ekvivalent sxemadan foydalangan holda chiziqli boʻlmagan eng kichik kvadrat moslamalarni ifodalaydi

2-jadval.

TiO₂nt-SPEEK nanokompozitlarining turli nisbiy namlikdagi elektr xususiyatlari

RH / %	R1 / Ω	Y ^o 1 / F s ⁻ⁿ	n1
0	16150	6 10 ⁻¹¹	0.98
30	760	1.2 10 ⁻¹⁰	0.95
100	40	-	-

CPE qiymatlari va koʻrsatkichlari yupqa materiallarga xos boʻlsada, qarshilik nisbiy namlik bilan juda kuchli pasayadi, bu yuqori samarali namlik detektorining konsepsiyasi uchun imkoniyatlarni koʻrsatadi.

Xulosa. SPEEK ning ZrO₂ yoki TiO₂ nanotrubkalariga infiltratsiyasi natijasida yaratilgan nanokompozit qattiq ion oʻtkazgichning tayyorlanishi va xususiyatlari oʻrganilgan. Mikro tuzilma va faza tarkibi SEM, XRD va FTIR spektroskopiyasi bilan tasdiqlangan. Ion oʻtkazuvchi polimerning infiltratsiyasi natijasida namuna qarshiligining kuchli pasayishi impedans spektroskopiyasida aniqlangan. Namlikka sezgir detektorning konsepsiyasi isboti TiO₂nt-SPEEK nanokompozitlari bilan koʻrsatilgan. Ushbu istiqbolli nanokompozit qattiq ion oʻtkazgichlarning boshqa xususiyatlari, ayniqsa kimyoviy sensorlar va geterogen kataliz sohasida qoʻllanilishi amalga oshiriladi.

ADABIYOTLAR:

1. Gellings PJ, Bouwmeester HJM, eds. *Handbook of Solid State Electrochemistry*. Boca Raton: CRC Press; 1997.
2. Kudo T, Fueki K. *Solid State Ionics*. Tokyo: Kodansha-VCH; 1990.
3. Rickert H. *Electrochemistry of Solids*. Berlin: Springer; 1982.
4. Yao YFY, Kummer JT. Ion exchange properties of and rates of ionic diffusion in beta-alumina. *Journal of Inorganic & Nuclear Chemistry*. 1967;29(9):2453-&.
5. Croce F, Appetecchi GB, Persi L, Scrosati B. Nanocomposite polymer electrolytes for lithium batteries. *Nature*. 1998;394(6692):456-458.
6. Sata N, Eberman K, Eberl K, Maier J. Mesoscopic fast ion conduction in nanometre-scale planar heterostructures. *Nature*. 2000;408(6815):946-949.
7. Steinhart M, Wendorff JH, Greiner A, et al. Polymer nanotubes by wetting of ordered porous templates. *Science*. 2002;296(5575):1997-1997.
8. Adhikari B, Majumdar S. Polymers in sensor applications. *Progress in Polymer Science*. 2004;29(7):699-766.
9. Wang XX, Zhao JL, Hou XR, He Q, Tang CC. Catalytic Activity of ZrO₂ Nanotube Arrays Prepared by Anodization Method. *Journal of Nanomaterials*. 2012;5.
10. Roziere J, Jones DJ. Non-fluorinated polymer materials for proton exchange membrane fuel cells. *Annual Review of Materials Research*. 2003;33:503-555.
11. Kreuer KD. On the development of proton conducting materials for technological applications. *Solid State Ionics*. 1997;97(1-4):1-15.
12. Di Vona ML, Knauth P. Sulfonated Aromatic Polymers as Proton-Conducting Solid Electrolytes for Fuel Cells: a Short Review. *Zeitschrift Fur Physikalische Chemie-International Journal of Research in Physical Chemistry & Chemical Physics*. 2013;227(5):595-614.
13. Knauth P, Di Vona ML. *Solid Proton Conductors: Properties and Applications in Fuel Cells*. Chichester: Wiley; 2012.
14. Vacandio F, Eyraud M, Chassigneux C, Knauth P, Djenizian T. Electrochemical Synthesis and Characterization of Zirconia Nanotubes Grown from Zr Thin Films. *Journal of the Electrochemical Society*. 2010;157(12):K279-K283.

SQLDA MA'LUMOTLARNI FILTRLASHDA FUNKSIYALARDAN FOYDALANISH
SAMARADORLIGI*Toshpo'latova Shahnozabonu Bobomurodovna,**Buxoro davlat universiteti talabasi**shahnozatoshpulatova982@gmail.com*

Annotatsiya. Ushbu maqolada SQL tizimida ma'lumotlarni filtrlash jarayonida funksiyalardan foydalanishning ahamiyati va samaradorligi yoritilgan. Ma'lumotlar bazasi bilan ishlashda filtrlar yordamida kerakli yozuvlarni tanlab olish jarayoni muhim bosqichlardan biri bo'lib, funksiyalar qo'llanilganda ushbu jarayon yanada qulay, aniq va tezkor bo'ladi. Matn, son va sana bilan bog'liq funksiyalarning filtrlashdagi roli, ularning amaliy qo'llanilishi hamda foydalanuvchiga taqdim etadigan ustunliklari batafsil ko'rib chiqiladi. Shuningdek, katta hajmdagi ma'lumotlarni qayta ishlashda funksiyalardan foydalanish natijasida tizim samaradorligining oshishi, qidiruv mezonlarining moslashuvchanligi va tahlil jarayonlarining optimallasuvi haqida ham fikr yuritiladi. Maqolada funksional yondashuvning real amaliyotdagi afzalliklari, uni qo'llash misollari va ma'lumotlar bilan ishlash sifati qanday yaxshilanishi chuqur tahlil etilgan. Ushbu annotatsiya mavzuning mazmunini qisqa va izchil yoritib, maqolaning nazariy-amaliy qiymatini aks ettiradi.

Kalit so'zlar: SQL, ma'lumotlarni filtrlash, funksiyalar, agregat funksiyalar, matn funksiyalari, sana funksiyalari, ma'lumotlar bazasi, optimallashtirish, qidiruv samaradorligi, SELECT operatori, LIKE operatori, UPPER(), LOWER(), COUNT(), SUM(), ma'lumotlarni qayta ishlash.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ДАННЫХ В SQL

Аннотация. В данной статье рассматривается значение и эффективность использования функций при фильтрации данных в системе SQL. Процесс отбора необходимых записей является одним из ключевых этапов работы с базами данных, и применение функций делает этот процесс более удобным, точным и оперативным. Подробно анализируется роль текстовых, числовых и датных функций в фильтрации, их практическое применение и преимущества для пользователей. Также рассматривается повышение производительности системы при обработке больших объемов данных, гибкость условий поиска и оптимизация аналитических операций. В статье приведены примеры использования функционального подхода и показано, каким образом применение функций повышает качество работы с данными. Аннотация отражает содержание работы и подчёркивает её теоретическую и практическую значимость.

Ключевые слова: SQL, фильтрация данных, функции, агрегатные функции, текстовые функции, функции даты и времени, база данных, оптимизация, эффективность поиска, оператор SELECT, оператор LIKE, UPPER(), LOWER(), COUNT(), SUM(), обработка данных.

EFFECTIVENESS OF USING FUNCTIONS IN DATA FILTERING IN SQL

Abstract. This article explores the significance and effectiveness of using functions in the process of data filtering within SQL systems. Filtering plays a crucial role in retrieving relevant records from large datasets, and the use of functions greatly enhances accuracy, flexibility, and processing speed. The study examines the practical application of text, numeric, and date functions, highlighting their role in improving query precision and simplifying data analysis tasks. Additionally, the article discusses the impact of functional approaches on system performance, especially when working with large volumes of data, and emphasizes the advantages of optimized filtering conditions. Real examples demonstrate how the use of functions contributes to higher data quality and more efficient database operations. This abstract provides a concise overview of the content and underscores the theoretical and practical value of the research.

Keywords: SQL, data filtering, functions, aggregate functions, text functions, date and time functions, database optimization, query efficiency, SELECT statement, LIKE operator, UPPER(), LOWER(), COUNT(), SUM(), data processing.

Kirish. Zamonaviy biznes, ilmiy tadqiqot va sanoat jarayonlarida ma'lumotlar hajmi tobora ortib bormoqda. Shu sababli, katta hajmdagi ma'lumotlarni tez va samarali tahlil qilish ehtiyoji kundan-kunga oshib bormoqda. Ma'lumotlar bazasida saqlangan ma'lumotlar ustida interaktiv tahlil olib borish foydalanuvchiga real vaqt rejimida qaror qabul qilish imkonini beradi va ish samaradorligini sezilarli darajada oshiradi. SQL (Structured Query Language) — ma'lumotlar bazasini boshqarish va so'rovlar orqali ma'lumotlarni olish uchun eng ko'p ishlatiladigan vositalardan biridir. Ushbu tilning funksiyalari, xususan matn, son va sana bilan bog'liq funksiyalar, ma'lumotlarni filtrlash jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi va natijalarni aniqroq olishga yordam beradi. Masalan, UPPER() va LOWER() funksiyalari yordamida matn bo'yicha qidiruv katta-kichik harflardan mustaqil amalga oshiriladi, SUBSTRING() va boshqa matn funksiyalari ma'lum qismlarni ajratib olishda foydalidir, ROUND() va ABS() kabi son funksiyalari esa hisoblashlarni soddalashtiradi. Ko'plab tadqiqotlar va maqolalarda SQL funksiyalaridan foydalanish samaradorligi alohida ta'kidlangan. Masalan, Ivanov va boshqalar [1, 2] o'z maqolalarida biznes jarayonlarida ma'lumotlarni filtrlash va qayta ishlashda UPPER(), LOWER() va agregat funksiyalarning afzalliklarini ko'rsatgan. Shuningdek, Petrov va Smirnov [3] maqolasida katta hajmdagi ma'lumotlarni interaktiv tarzda filtrlash va tahlil qilishda SQL funksiyalarining samaradorligi batafsil yoritilgan. Shu bilan birga, Kumar va Sharma [4] maqolasida sog'liqni saqlash sohasida bemorlar ma'lumotlarini interaktiv tahlil qilishda COUNT() va GROUP BY operatorlarining samaradorligi batafsil yoritilgan. Ushbu tadqiqotlar [5,6] shuni ko'rsatadiki, SQL funksiyalari yordamida ma'lumotlarni tezkor, aniq va interaktiv tarzda filtrlash imkoniyati mavjud, bu esa foydalanuvchi uchun qulay tizimlarni yaratishda muhim ahamiyatga ega. SQLda ma'lumotlarni filtrlashda funksiyalardan foydalanishning amaliy jihatlarini o'rganish va foydalanuvchi uchun interaktiv va samarali tizimlarni ishlab chiqish. Shu maqsadda maqolada quyidagi vazifalar bajariladi SQL funksiyalarining imkoniyatlari va ishlash printsiplari tahlil qilinadi, ma'lumotlar bazasidagi katta hajmdagi ma'lumotlar ustida interaktiv filtrlash metodlari ishlab chiqiladi, amaliy misollar yordamida natijalar vizual tarzda ko'rsatiladi va foydalanuvchi uchun real vaqt rejimida ma'lumotlarni boshqarish va filtrlash imkoniyatlari yaratiladi.

Yechiladigan muammo va masalaning qo'yilishi. Hozirgi kunda biznes, ilmiy tadqiqot va sanoat sohalarida ma'lumotlar bazasiga tushadigan ma'lumotlar hajmi sezilarli darajada ortib bormoqda. Ko'plab foydalanuvchilar va tashkilotlar ma'lumotlar bazasidagi kerakli ma'lumotlarni tezkor tarzda izlash, filtrlash va tahlil qilish imkoniyatlarini qidirmoqdalar. Shu nuqtai nazardan, yechiladigan muammo quyidagicha shakllanadi. SQLda ma'lumotlarni filtrlash jarayonida funksiyalardan foydalanish orqali tahlil jarayonini tezlashtirish, natijalarni aniqroq olish va foydalanuvchiga interaktiv boshqaruv imkoniyatlarini yaratish.

Ushbu muammoni yechish uchun quyidagi masala qo'yiladi.

Ma'lumotlar bazasida saqlangan katta hajmdagi ma'lumotlarni interaktiv tarzda filtrlash va tahlil qilish zarur.

Matnli ma'lumotlar bo'yicha qidiruvni katta-kichik harflardan mustaqil amalga oshirish, ma'lumotlarning muayyan qismlarini ajratib olish va filtrlash kerak.

Sonli va statistik ma'lumotlar bo'yicha o'rtacha, maksimal, minimal ko'rsatkichlarni aniqlash va guruhlash zarur.

Natijalarni foydalanuvchiga qulay vizual tarzda ko'rsatish va real vaqt rejimida interaktiv boshqaruv imkoniyatini yaratish talab qilinadi.

Tijorat kompaniyasining sotuvlar ma'lumotlar bazasida quyidagi vazifa mavjud:

- Har bir mahsulot bo'yicha har oy sotilgan miqdorlarni aniqlash.
- Har bir mahsulot guruhi bo'yicha umumiy sotuv summasini va o'rtacha qiymatni hisoblash.
- Faqat ma'lum minimal miqdordan yuqori sotuvlar bo'yicha natijalarni filtrlash.
- Matn bo'yicha qidiruv katta-kichik harflardan mustaqil bajarilishi kerak.

Amaliy misol.

SELECT

```
ProductGroup,  
UPPER(ProductName) AS ProductNameUpper,  
SUM(SaleAmount) AS TotalSales,  
AVG(SaleAmount) AS AverageSales,  
COUNT(*) AS SaleCount
```

FROM Sales

WHERE SaleAmount > 100

GROUP BY ProductGroup, ProductName

HAVING SUM(SaleAmount) > 500

ORDER BY TotalSales DESC;

- UPPER(ProductName) funksiyasi matn qidiruvini katta-kichik harflardan mustaqil qiladi.
- SUM(SaleAmount) va AVG(SaleAmount) agregat funksiyalari yordamida umumiy va o'rtacha sotuvlar hisoblanadi.
- GROUP BY ProductGroup, ProductName operatori ma'lumotlarni mahsulot va mahsulot guruhi bo'yicha guruhlaydi.
- HAVING SUM(SaleAmount) > 500 orqali faqat muayyan minimal summadan yuqori guruhlar filtrlanadi.
- ORDER BY TotalSales DESC esa natijalarni eng yuqori sotuvdan eng pastgacha tartiblaydi.

Ushbu yechim foydalanuvchiga katta hajmdagi sotuvlar ma'lumotlarini interaktiv tarzda filtrlash, guruhlash va tahlil qilish imkonini beradi, natijalarni tezkor va aniq olishni ta'minlaydi. Shu bilan birga, SQL funksiyalari yordamida jarayon samaradorligi oshadi va qaror qabul qilish tezlashadi.

Masalaning yechilishini tekshirish va SQL funksiyalarining samaradorligi. Katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda asosiy muammo – kerakli ma'lumotlarni tez va aniq aniqlash, ularni filtrlash va tahlil qilishdir. SQL funksiyalari bu jarayonda samaradorlikni sezilarli darajada oshiradi.

1. Filtrlash jarayonining optimalligi:

SQL funksiyalari yordamida filtrlash shartlarini moslashtirish va optimallashtirish mumkin. Masalan, matn funksiyalari (UPPER(), LOWER()) yordamida foydalanuvchi qidiruvini katta-kichik harflardan mustaqil qilish mumkin. Bu esa ma'lumotlarni qidirish tezligini oshiradi va inson xatolarini kamaytiradi. Shu tarzda, so'rovlar aniq natija beradi va foydalanuvchiga kerakli yozuvlarni tez topish imkonini beradi.

2. Guruhlash va agregat funksiyalar:

Katta hajmdagi ma'lumotlarni guruhlash va umumiy statistika olish uchun SUM(), AVG(), COUNT(), MAX(), MIN() kabi agregat funksiyalar qo'llaniladi. Bu funksiyalar natijalarni avtomatik ravishda hisoblash va tartiblash imkonini beradi, shuningdek, tahlil jarayonini tezlashtiradi. Masalan, bir kompaniya sotuvlar ma'lumotlarini guruhlab tahlil qilganda, har bir mahsulot guruhi bo'yicha umumiy va o'rtacha sotuvlar aniq va tez hisoblanadi.

3. Shartli filtrlar va samaradorlik:

WHERE va HAVING operatorlari bilan birgalikda ishlatilgan funksiyalar orqali ma'lumotlarni yanada samarali filtrlash mumkin. Masalan, faqat minimal qiymatdan yuqori yoki ma'lum kriteriyalarga javob beruvchi yozuvlarni tanlash, natijalarni aniqroq qiladi. Bu esa interaktiv tizimlarda foydalanuvchi qarorlarini tezkor qabul qilishga yordam beradi.

4. Interaktiv tahlil va vizualizatsiya:

SQL funksiyalari natijalarni tezkor tarzda chiqarish imkonini berib, ularni vizualizatsiya qilish uchun ham qulay bazaviy asos yaratadi. Natijalar jadval, diagramma yoki grafik ko'rinishda taqdim etilganda foydalanuvchi uchun qulay interaktiv tizim hosil bo'ladi. Bu katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda xatolarni kamaytiradi va qaror qabul qilish jarayonini soddalashtiradi.

5. Amaliy tadqiqotlar va maqolalardagi dalillar:

Ko'plab tadqiqotlar va ilmiy maqolalar SQL funksiyalarining samaradorligini tasdiqlaydi. Masalan, Johnson va boshqalar o'z tadqiqotlarida tijorat kompaniyalari uchun sotuvlar ma'lumotlarini tahlil qilish jarayonida agregat funksiyalardan foydalanish natijasida hisobotlarni avtomatlashtirish mumkinligini ko'rsatgan. Shu bilan birga, Kumar va Sharma maqolasida sog'liqni saqlash sohasida bemorlar ma'lumotlarini interaktiv tahlil qilishda matn va guruh funksiyalarining samaradorligi yoritilgan. Bu tadqiqotlar SQL funksiyalari yordamida ma'lumotlarni tezkor va aniq tahlil qilish imkonini berishini tasdiqlaydi.

SQLda ma'lumotlarni filtrlashda funksiyalardan foydalanish samaradorligi bir necha jihatdan namoyon bo'ladi: Katta hajmdagi ma'lumotlarni tezkor filtrlash va guruhlash, natijalarni avtomatik hisoblash va tahlil qilish, interaktiv va vizual tizimlar orqali foydalanuvchi qulayligini oshirish, qaror qabul qilish jarayonini optimallashtirish.

Eksperiment va olingan natijalarning tahlili. SQL funksiyalarining ma'lumotlarni filtrlashdagi samaradorligini baholash uchun eksperimentlar amalga oshiriladi. Ushbu eksperimentning maqsadi – **SQL funksiyalari yordamida katta hajmdagi ma'lumotlarni tezkor, aniq va interaktiv tarzda tahlil qilish imkoniyatini tekshirish.**

Eksperiment shartlari:

- Ma'lumotlar bazasida turli mahsulotlar, sotuvlar summasi, sanalar va mahsulot guruhlari mavjud bo'ladi.
- Har bir mahsulot guruhi bo'yicha umumiy va o'rtacha sotuvlarni hisoblash, faqat ma'lum minimal miqdordan yuqori sotuvlarni tanlash talab etiladi.
- Matn bo'yicha qidiruv katta-kichik harflardan mustaqil bajarilishi shart.

- Olingan natijalar interaktiv va vizual tarzda taqdim etiladi, masalan, diagramma yoki jadval shaklida.

Eksperiment jarayoni:

- Avvalo, ma'lumotlar bazasida filtrlar va agregat funksiyalar yordamida so'rovlar bajarildi.
- Har bir guruh bo'yicha umumiy sotuvlar, o'rtacha sotuv va sotuvlar soni aniqlab olindi.
- Katta-kichik harflardan mustaqil matn filtrlari yordamida qidiruvlar sinovdan o'tkazildi.
- Natijalar vizual tarzda bar chart va line chart orqali foydalanuvchiga taqdim etildi.

Olingan natijalar:

- **Matn funksiyalari samaradorligi:** UPPER() va LOWER() funksiyalari yordamida barcha matn qidiruvlari to'g'ri va katta-kichik harflardan mustaqil bajarildi. Natijalar aniq va bir xil formatda chiqarildi.

- **Agregat funksiyalar samaradorligi:** SUM(), AVG(), COUNT() funksiyalari orqali har bir guruh uchun umumiy va o'rtacha sotuvlar aniq hisoblandi. Bu katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda vaqtni sezilarli darajada qisqartirdi.

- **Filtrlash va guruhlash:** WHERE va HAVING operatorlari bilan birgalikda ishlatilgan funksiyalar faqat minimal shartlarga javob beruvchi yozuvlarni tanlash imkonini berdi, bu esa natijalarni foydalanuvchi ehtiyojlariga moslashtirdi.

- **Interaktiv tahlil:** Vizualizatsiya natijalari foydalanuvchiga qulay va intuitiv tarzda taqdim etildi, har bir guruh bo'yicha natijalarni solishtirish imkoniyati yaratildi.

Eksperiment shuni ko'rsatdiki:

- SQL funksiyalari yordamida ma'lumotlarni filtrlash samaradorligi sezilarli darajada oshadi.
- Katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda natijalar tezkor va aniq olinadi.
- Interaktiv vizualizatsiya foydalanuvchi uchun qulay qaror qabul qilish va tahlil qilish imkonini beradi.

- Matn, son va guruh bo'yicha filtrlar kombinatsiyasi ma'lumotlarni tahlil qilish jarayonini soddalashtiradi va xatolarni kamaytiradi.

SQLda ma'lumotlarni filtrlash jarayonida turli funksiyalardan foydalanish mumkin. Ular quyidagicha kategoriyalarga bo'linadi:

Agregat funksiyalar: SUM(), AVG(), COUNT(), MAX(), MIN()

Misol:

```
SELECT ProductGroup, SUM(SaleAmount) AS TotalSales
FROM Sales
GROUP BY ProductGroup
HAVING SUM(SaleAmount) > 500;
```

Matn funksiyalari: UPPER(), LOWER(), SUBSTRING(), CONCAT()

Misol:

```
SELECT UPPER(ProductName) AS ProductNameUpper
FROM Sales
WHERE ProductName LIKE 'Lap%';
```

Sana va vaqt funksiyalari: YEAR(), MONTH(), DATEDIFF()

Misol:

```
SELECT * FROM Sales
WHERE YEAR(SaleDate) = 2025;
```

Shartli funksiyalar: CASE WHEN ... THEN ... END

Misol:

```
SELECT ProductName,
CASE WHEN SaleAmount > 500 THEN 'High'
ELSE 'Low' END AS SaleCategory
FROM Sales;
```

Xulosa. Ushbu maqolada SQLda ma'lumotlarni filtrlash jarayonida funksiyalardan foydalanish samaradorligi keng qamrovda o'rganildi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, SQL funksiyalari ma'lumotlarni dinamik tarzda filtrlash imkonini beradi, murakkab so'rovlarni soddalashtiradi va ma'lumotlarni tozalash hamda standartlashtirish jarayonini sezilarli darajada tezlashtiradi. Bu esa dasturchining ish samaradorligini oshiradi va ma'lumotlarni boshqarish jarayonini yanada qulay qiladi. Ayniqsa, matn, sana va raqamli qiymatlar ustida ishlov berishda funksiyalarning qo'llanilishi so'rovlarni tez va aniq natijalar bilan ta'minlaydi. Shu bilan birga, tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, funksiyalardan haddan tashqari yoki noto'g'ri foydalanish tizim samaradorligini pasaytirishi mumkin. Ayniqsa, katta

hajmdagi jadvallarda ba'zi funksiyalar indekslardan samarali foydalanishni cheklab, so'rovlarni sekinlashtiradi. Shu sababli, filtr shartlarini indekslarga moslash, funksiyalarni faqat zarur hollarda qo'llash va ma'lumotlarni oldindan tayyorlash samaradorlikni oshirishning muhim omillaridan hisoblanadi. Masalan, matnlarni qiyoslashda UPPER() yoki LOWER() funksiyalarini oqilona ishlatish, sanalarni tahlil qilishda DATEPART() va YEAR() funksiyalarini maqsadga muvofiq qo'llash so'rovlarni tezlashtiradi va noto'g'ri natijalarni oldini oladi. Amaliy tahlillar shuni ko'rsatdiki, SQL funksiyalari orqali ma'lumotlarni filtrlash jarayonini optimallashtirish tizim samaradorligini oshirishda muhim rol o'ynaydi. Masalan, matnlarni qiyoslashda UPPER() yoki LOWER() funksiyalaridan oqilona foydalanish, sanalarni tahlil qilishda DATEPART() va YEAR() funksiyalarini maqsadga muvofiq qo'llash so'rovlarni tezlashtiradi va noto'g'ri natijalarni oldini oladi. Shuningdek, murakkab shartlarni soddalashtirish, ma'lumotlarni tozalash va standartlashtirish orqali ma'lumotlar bazasining barqaror ishlashini ta'minlash mumkin. Kelajakda funksiyalarning samaradorligini oshirish bo'yicha bir qator istiqbolli yo'nalishlar mavjud. Jumladan, turli DBMSlarda (masalan, MySQL, PostgreSQL, SQL Server) funksiyalarning ishlash tezligini solishtirish, so'rovlarni paralel ishlashga moslash va caching mexanizmlarini joriy etish imkoniyatlari tadqiq qilinishi mumkin. Shuningdek, katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlashda analitik so'rovlar va funktsional optimizatsiya metodlarini ishlab chiqish SQL so'rovlarning tezkorligini sezilarli darajada oshiradi. Umuman olganda, SQL funksiyalari ma'lumotlarni filtrlash jarayonida kuchli va qulay vosita sifatida ahamiyatlidir. Ularni oqilona va maqsadga muvofiq ishlatish tizim samaradorligini oshirishga, ma'lumotlarni tez va aniq qayta ishlashga, shuningdek, tizim resurslaridan optimal foydalanishga yordam beradi. Shu bilan birga, funksiyalarning samaradorlikka ta'siri, indekslar bilan muvofiqligi va so'rovlarni optimallashtirish zarurati doimiy e'tiborda bo'lishi lozim. Tadqiqot natijalari SQL funksiyalarining afzalliklarini, ularni samarali qo'llashning ahamiyatini va ma'lumotlarni filtrlash jarayonini yanada optimallashtirish zaruratini aniq ko'rsatdi.

ADABIYOTLAR:

1. *Ivanov, I. I. Efektivnost ispol'zovaniya funktsiy v filtratsii dannykh v SQL. Zhurnal informatsionnykh tekhnologiya 2021.*
2. *Johnson J., Smith L. Data Analysis Using SQL Aggregate Functions in Commercial Databases. – Tashkent: IT Academy Press, 2021.*
3. *Petrov, A., Smirnov, V. Optimization of Large Dataset Queries with SQL Functions. Computer Science and Engineering Journal, 2022.*
4. *Kumar R., Sharma P. Interactive SQL Queries for Healthcare Data Management. – Tashkent: Health Data Research, 2020.*
5. *Garcia R. Practical SQL: Mastering Data Analysis in Relational Databases. – New York: DataScience Press, 2018.*
6. *Patel S., Aliyev D. Optimizing Database Queries with Aggregate Functions. – Tashkent: InfoTech Publications, 2020.*

“BTEC” XALQARO DASTURI QANDAY SAMARA BERADI?

Xo‘jayev Sulaymon Sultonovich,

Axborot tizimlari va raqamli texnologiyalar kafedrasida katta o‘qituvchisi

Annotatsiya. Pearson BTEC – bu 1984-yilda tashkil etilgan, amaliy mashg‘ulotlarga yo‘naltirilgan kasbiy talim va malaka dasturlari tizimi bo‘lib, talabalarga kasbiy ko‘nikmalarni o‘rgatishga qaratilgan. Bu tizimning asosiy maqsadi talabalarni bandlikka yoki oliy ta‘limga tayyorlash, ularga hunarli sifatli ta‘lim berishdir. Dastlab Buyuk Britaniyada yaratilgan, BTEC dasturlari 40 yildan ortiq vaqt davomida dunyo bo‘ylab o‘qitilib kelinmoqda. Ular an‘anaviy akademik ta‘limga muqobil bo‘lib, qo‘lga o‘rgatish orqali amaliy ko‘nikmalarni rivojlantiradi. Pearson BTEC 24 dan ortiq fan sohasida, jumladan, biznes, texnologiya, ijodiy san‘at, elektron sport va boshqalarda malaka oshirish imkonini beradi. BTEC dasturlari sanoat ekspertlarining ishtiroki bilan ishlab chiqilgan, bu talabalarga zamonaviy ish bozori talablariga javob beradigan ko‘nikmalarni egallashga yordam beradi. BTEC o‘qituvchilarga ta‘lim berishda moslashuvchanlikni ta‘minlaydi, shu bilan birga onlayn va sinf muhitida o‘qitishni qo‘llab-quvvatlaydi. BTEC talabalarni kasbiy malakalarni egallashga undaydi va universitetda o‘qish yoki ishga kirishda yordam beradi. Pearson yetakchi xalqaro ta‘lim tashkiloti bo‘lib, Texnikumlarda o‘qish muddatlari va davomiyligi kasb murakkabligi va o‘quvchining ta‘lim darajasiga qarab belgilanadi.

Kalit so‘zlar: ta‘lim, tarbiya, yoshlar tarbiyasi

НАСКОЛЬКО ЭФФЕКТИВНА МЕЖДУНАРОДНАЯ ПРОГРАММА ВТЕС?

Аннотация. Pearson BTEC – это система программ профессионального образования и обучения, основанная в 1984 году. Она ориентирована на практическое обучение и направлена на приобретение студентами профессиональных навыков. Основной целью этой системы является подготовка студентов к трудоустройству или получению высшего образования, предоставляя им качественное профессиональное образование. Программы BTEC, изначально созданные в Великобритании, реализуются по всему миру уже более 40 лет. Они являются альтернативой традиционному академическому образованию, развивая практические навыки посредством практического обучения. Pearson BTEC предоставляет квалификации по более чем 24 предметным областям, включая бизнес, технологии, творчество, киберспорт и другие. Программы BTEC разрабатываются с участием отраслевых экспертов, что помогает студентам приобретать навыки, отвечающие требованиям современного рынка труда. BTEC предоставляет преподавателям гибкость в преподавании, поддерживая обучение в онлайн - и аудиторных средах. BTEC поощряет студентов получать профессиональную квалификацию и помогает им учиться в университете или найти работу. Pearson – ведущая международная образовательная организация, а продолжительность и длительность обучения в технических колледжах определяются сложностью профессии и уровнем образования студента.

Ключевые слова: образование, воспитание, образование молодежи

HOW EFFECTIVE IS THE BTEC INTERNATIONAL PROGRAM?

Annotation. Pearson BTEC is a system of vocational education and training programs, established in 1984, focused on practical training, aimed at teaching students vocational skills. The main goal of this system is to prepare students for employment or higher education, providing them with quality vocational education. Originally created in the UK, BTEC programs have been taught around the world for over 40 years. They are an alternative to traditional academic education, developing practical skills through hands-on training. Pearson BTEC provides qualifications in over 24 subject areas, including business, technology, creative arts, e-sports and more. BTEC programs are designed with the participation of industry experts, which helps students acquire skills that meet the demands of the modern job market. BTEC provides teachers with flexibility in teaching, while supporting teaching in online and classroom environments. BTEC encourages students to gain vocational qualifications and helps them to study at university or get a job. Pearson is a leading international education organization, and the duration and duration of studies at Technical Colleges are determined by the complexity of the profession and the level of education of the student.

Keywords: education, upbringing, youth education.

Pearson haqida. Pearson – 70 dan ortiq davlatda 35000 dan ziyod xodimga ega bo'lgan, o'qitish orqali insonlarning hayotida sezilarli o'sishga erishishni ta'minlash maqsadida barcha yoshdagi odamlarga yordam ko'rsatish ustida g'ayrat bilan ishlayotgan dunyodagi lider ta'lim beruvchi kompaniya. O'quvchilar kompaniya manfaatlarining va unga yo'naltirilgan harakatlarning markazi hisoblanadi, chunki ta'lim tizimining rivojlanishi umuman insonlarga ijobiy ta'sir etadi. Biz sizga va o'quvchilaringizga qanday yordam berishimiz mumkinligi to'g'risida qualification. pearson. com. sayti orqali ko'proq bilib olishingiz mumkin.

Texnikumlarda Angliyaning **“BTEC” xalqaro ta'lim dasturi** joriy etilishi haqida avval xabar berilgan edi. Dastlabki bosqichda ushbu dastur **14 ta texnikumda tajriba tariqasida** joriy etiladi. **“BTEC” dasturi** bitiruvchilarga 70 ta davlatda tan olinadigan diplom beradi va **200 dan ortiq xorijiy universitetlarga kirish imkonini** yaratadi.

Pearson BTEC Oliy Milliy malakalari o'quv dasturiga o'quvchilarga qaratilgan yondashuvga asoslanadi. Talabaning ishga joylashish va oliy ta'limda muvaffaqiyat qozonishi uchun zarur bo'lgan amaliy, shaxslararo va fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirishga qaratilgan moslashuvchan, modulli tuzilma mavjud. Ular eng yangi kasbiy standartlarni ifodalaydi va talabalarga ish uchun ko'nikma va xatti-harakatlarni rivojlantirish imkoniyatini beradi, masalan, guruh loyihasida ishtirok etish yoki mijoz topshirig'ini bajarish. Talaba talabalarga kasbiy tan olinishi yoki a'zo bo'lish yo'lida yordam berish uchun professional yoki savdo malakasidan yoki tanlangan professional organlarga a'zolikdan ozod qilishni so'rashi mumkin.



Pearson yetakchi xalqaro ta'lim tashkiloti bo'lib, dunyo bo'ylab 784 ta markazga ega va uning bitiruvchilarining **90 foizi ish bilan ta'minlanadi**. Bu dastur texnikumlarda o'quv muddatlarini kasb murakkabligi va o'quvchining ta'lim darajasiga qarab moslashtirish imkonini beradi. Masalan, “Ekspeditor” kasbida 9-sinf bitiruvchisi 3 yil, 11-sinf bitiruvchisi esa 2 yil o'qiydi. Pearson BTEC International Level 3 Biznes boshqaruvi malakalari, birinchi navbatda, biznes sohasida, avvalo oliy ma'lumot orqali, biznesda ishga joylashish yoki, muqobil ravishda, kichik o'quv kurslari orqali ishga kirishni xohlovchi 16-19 yosh guruhidagi talabalarga mo'ljallangan. Kichik biznesda ishlash.

Edexcel, BTEC va LCCI malakasi. Edexcel, BTEC va LCCI malakasi butun dunyoda tajribadan o'tgan va tan olingan, akademik va kasbiy malaka taqdim etadigan malaka berish bo'yicha Buyuk Britaniyada eng yirik tashkilot hisoblanadigan Pearson tomonidan beriladi. Qo'shimcha ma'lumot olish uchun qualifications.pearson.com saytimizga tashrif buyuring. Bundan tashqari, siz qualifications.pearson.com/contactus sahifasida biz bilan bog'lanish uchun berilgan to'liq ma'lumotlardan foylangan holda ham bog'lanishingiz mumkin.

40 yillik muvaffaqiyatli ish tajribasiga ega bo'lgan VTEC malakalari hukumatlar, sanoat sohasi va oliy ta'lim tomonidan xalqaro darajada tan olingan. VTEC malakasi o'quvchilarga to'g'ridan-to'g'ri yoki yuqoriroq darajadagi o'qish yordamida muayyan bo'sh ish o'rniga ishga joylashishga imkon beradi. Karyera uchun o'qish VTEC markazlari, loyihalar asosida baholash uchun qo'llaniladigan modullarga asoslangan, moslashuvchan tuzilma va bilimlarni o'zida mujassamlashtirgan, o'quvchilarga mo'ljallangan o'qitishga yondashuvni taklif etadi.

VTEC bandlik sohasi va oliy ta'limdagi muvaffaqiyatli faoliyat uchun zarur bo'lgan amaliy, shaxslararo va fikrlash ko'nikmalarining uzviy rivojlanishini ta'minlashga qaratilgan. O'zbekiston Respublikasi uchun VTEC malakalarini ishlab chiqishda biz ko'plab davlat muassasalari, ish beruvchilar, oliy ta'lim tizimi vakillari va kollejlari bilan, ularning ehtiyojlarini qondirish maqsadida ish olib bordik. Biz ish beruvchilar tomonidan ko'proq qadrlanadigan lavozimlarda qaysi mehnat resurslariga talab mavjudligini tushunish hamda bilim va ko'nikmalardagi bo'shliqlarni aniqlash maqsadida turli sanoat tarmog'idagi

manfaatdor tomonlar bilan keng ko‘lamdagi tadqiqotlarni o‘tkazdik. Ish beruvchilar tarmoqqa oid so‘nggi talablar borasida chuqur bilimlarga ega, ishlashga va jamoada faoliyat olib borishga tayyor bo‘lgan yangi xodimlarni izlashadi. Oliy ma‘lumot oluvchi o‘quvchilar keng ko‘lamdagi tadqiqotlar o‘tkazish, tahlil yozish va muddatlarga amal qilish ko‘nikmalariga muhtoj bo‘ladilar. VTEC malakasi to‘plangan tajribalarni o‘quvchilarga yetkazish uchun o‘qitishning keng qamrovli va chuqur bo‘lishini ta‘minlaydi.

Pearson ushbu zarur ehtiyojlarga asoslanadi va quyidagilarni taklif etadi:

- har biri aniq maqsadga ega bo‘lgan VTEC malakalari ko‘lami har bir o‘quvchining o‘qish dasturini tanlovini qanoatlantiradi va belgilangan o‘shish rejalarini amalga oshirishga yordam beradi
- ish beruvchilar uchun muhim bo‘lgan bir qator bilim, ko‘nikma va xulqni tan oluvchi, O‘zbekiston Respublikasi uchun ishlab chiqilgan professional standartlarga mos keluvchi bir qator VTEC malakalari
- ish beruvchilar va oliy ta‘limning ehtiyojlari bilan chambarchas bog‘liq bo‘lgan tegishli materiallar
- o‘quvchilarga rivojlanishda yordam berish uchun tanlab olingan baholash va loyihalar; barcha baholash va loyihalar biz tomonimizdan sizning va ish beruvchilarning yordamida, o‘quvchilarni barcha uchun umumiy bo‘lgan bilim va tushunchalar bilan ta‘minlab, kadrlarga bo‘lgan mahalliy talablarni qondirish uchun ishlab chiqiladi.

Mazkur malakalar to‘liq yoki noto‘liq ish kunida o‘tiladigan kurslar sifatida taklif etilishi va alohida tarzda yoki VTEC ning boshqa kurslari bilan birgalikda taqdim etilishi mumkin. Biz kurs davomida o‘quvchi va o‘qituvchilarning kafolatlangan va eng yuqori darajadagi tajribaga ega bo‘lishlari uchun resurslar bilan qo‘llab-quvvatlab turish bo‘yicha xizmatlarning to‘liq turlarini taqdim etadi.

Dasturdan kutilayotgan asosiy samaralar:

- **Ta‘limning muvofiqligi:** Kasbiy ta‘lim dasturlari o‘zaro muvofiqlik va uzviylikka ega bo‘lib, bitiruvchilar oliy ta‘limga o‘tishda o‘zlashtirilgan modullari va to‘plangan kreditlari asosida bakalavriatning muayyan bosqichidan davom ettirish imkoniga ega bo‘ladi.

- **Texnikumlarning mustaqilligi kengaytiriladi:** Texnikumlar fanlar soni va soatlarini 30 foizgacha o‘zgartirish, mahsulot ishlab chiqarish va sotish imkoniyatiga ega bo‘ladi. Shuningdek, ular kontrakt asosida ish beruvchilarning buyurtmasiga ko‘ra kadrlar tayyorlash huquqiga ega.

- **O‘qitish jarayoniga ish beruvchilar keng jalb qilinadi:** Ta‘lim dasturlari ish beruvchilar talabi asosida shakllantiriladi. Natijada, muayyan hududlardagi o‘rta bo‘g‘in kadrlari bo‘yicha ehtiyojlar qondiriladi.

- **Yakuniy attestatsiya tizimi** yangilanadi: Bitiruvchilarning bilim va ko‘nikmalari ish beruvchilar ishtirokida amaliy imtihonlar orqali baholanadi.

Dastur ta‘siri: “BTEC” dasturiga asoslangan texnikumlar bitiruvchilarining **rivojlangan davlatlarda** yuqori daromadli ish joylariga joylashish imkoniyatlari oshadi. Shuningdek, 180 nafar pedagogning malakasi oshiriladi va yiliga 1,680 nafar o‘quvchi o‘qishga qabul qilinadi.

Texnikumlarning moddiy-texnik bazasini mustahkamlash va **raqamlashtirish** uchun maxsus jamg‘arma tashkil etiladi. **Jamg‘armaga** Oliy ta‘lim, fan va innovatsiyalar vazirligining byudjetdan tashqari jamg‘armasidan **50 milliard so‘m** va Davlat byudjetidan **2025-yilda yana 50 milliard so‘m** ajratiladi.

ADABIYOTLAR:

1. *O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Kasbiy ta‘limda malakali kadrlar tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish va Xalqaro ta‘lim dasturlarini joriy qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” 2024-yil 16-oktabrdagi PF-158-son Farmoni*
2. <https://xabar.uz/talim/texnikumlarda-xalqaro-talim-da>
3. <https://yuz.uz/news/talim-islohotlari-uchun-xalqaro-standartlar-zarur>
4. <https://yuz.uz/news/professional-talim-tizimi-va-xalqaro-andozalar>

O'LCHASH QURILMALARIDA NEYRON TARMOQLARDAN FOYDALANISH

Tursunov Alisher Ravshan o'g'li,

Qarshi davlat texnika universiteti. Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti o'qituvchisi.

alishertursunov260@gmail.com

Axmedov Akbar Akramovich,

Qarshi davlat texnika universiteti. Shahrisabz oziq-ovqat muhandisligi fakulteti o'qituvchisi

akbarakramovich1111@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda o'lchash qurilmalarida sun'iy neyron tarmoqlaridan foydalanishning nazariy asoslari, amaliy imkoniyatlari va afzalliklari yoritilgan. Neyron tarmoqlarining murakkab funksiyalarni o'z-o'zidan o'rganish, signallarni qayta ishlash, chiziqli bo'lmagan jarayonlarni modellash va shovqinli ma'lumotlar sharoitida aniq natija chiqarish qobiliyatlari zamonaviy o'lchash tizimlarining samaradorligini oshirishda muhim o'rin tutadi. Tadqiqot natijalari neyron tarmoqlar asosidagi o'lchash tizimlari an'anaviy algoritmlarga nisbatan yuqori moslashuvchanlik, aniqlik va tezkorlikka ega ekanini ko'rsatadi. Ish sanoat avtomatikasi, metrologiya, elektronika, tibbiyot diagnostikasi, energetika hamda IoT tizimlaridagi aqlli sensorlar uchun amaliy ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: neyron, tarmoq, kibernetika, sensor tizimlar, signallar, kremniy, uzatuvchi funktsiya.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРАХ

Аннотация. В данной работе изложены теоретические основы, практические возможности и преимущества использования искусственных нейронных сетей в измерительных приборах. Способность нейронных сетей к самостоятельному обучению сложным функциям, обработке сигналов, моделированию нелинейных процессов и выдаче точных результатов в условиях зашумлённых данных играет важную роль в повышении эффективности современных измерительных систем. Результаты исследования показывают, что измерительные системы на основе нейронных сетей обладают значительно большей адаптивностью, точностью и быстродействием по сравнению с традиционными алгоритмами. Работа имеет практическое значение для промышленной автоматизации, метрологии, электроники, медицинской диагностики, энергетики, а также интеллектуальных сенсорных систем в составе IoT-технологий.

Ключевые слова: нейрон, сеть, кибернетика, сенсорные системы, сигналы, кремний, передаточная функция.

APPLICATION OF NEURAL NETWORKS IN MEASUREMENT INSTRUMENTS

Abstract. In this work, the theoretical foundations, practical capabilities, and advantages of using artificial neural networks in measurement instruments are discussed. The ability of neural networks to independently learn complex functions, process signals, model nonlinear processes, and produce accurate results under noisy data conditions plays an important role in enhancing the efficiency of modern measurement systems. The research results show that measurement systems based on neural networks demonstrate significantly higher adaptability, accuracy, and speed compared to traditional algorithms. The study has practical significance for industrial automation, metrology, electronics, medical diagnostics, energy systems, as well as intelligent sensors within IoT technologies.

Keywords: neuron, network, cybernetics, sensory systems, signals, silicon, transfer function.

Kirish. Sun'iy neyron tarmoqlar nazariyasini yaratishda **konnektсионизм** (inglizcha connection – bog'lanish) katta ta'sir ko'rsatdi. Konnektсионизм – bu inson miya (tafakkur) modellarini yaratish, o'rganish va rivojlantirish bilan shug'ullanuvchi sun'iy intellekt bo'limidir. Konnektсионизм nuqtayi nazaridan neyron tarmoqlarni qurish konsepsiyasining asosi shundan iboratki, neyronlarni juda sodda avtomatlar yordamida modellashtirish mumkin. Miyaning butun murakkabligi, uning moslashuvchan ishlashi va boshqa muhim xususiyatlari esa aynan **neyronlar orasidagi bog'lanishlar** bilan belgilanadi. Har bir bog'lanish – bu signalni uzatuvchi sodda elementdir.

Bunday yondashuvga ko'ra neyron tarmoq modeli quyidagi xususiyatlarga ega bo'ladi:

• **Tizimning bir xilligi** barcha elementlar juda sodda, tizimning xulq-atvori asosan bog‘lanishlar tuzilishiga bog‘liq;

• **Ishonchlilik** – ishonchsiz elementlardan tashkil topgan tizim ko‘p sonli bog‘lanishlar hisobiga barqaror ishlaydi;

• **Golografiklik** – tizimning bir qismi buzilganda ham umumiy xususiyatlar saqlanib qoladi.

Faraz qilinishicha, bog‘lanishlar tizimining keng imkoniyatlari – eski aloqalarni qayta faollashtirish (demaskirovka qilish) va yangi aloqalar yaratish – modelning sodda elementlardan tashkil topganligi, ularning ishonchsizligi va ba’zi aloqalarning buzilishi kabi kamchiliklarni qoplaydi.

Neyron tarmoqlarning matematik modellari rivojlanishining dastlabki bosqichlarida konneksionizm nihoyatda muhim rol o‘ynadi. Chunki u neyron tarmog‘i tomonidan amalga oshiriladigan induktiv xulosalar mexanizmlarini tushunishga yordam berdi va ko‘plab amaliy masalalarning yechilishiga imkon yaratdi.

Biroq real vazifalarga mos matematik neyron tarmoq modellari yaratish uchun inson miyasining biologik ishlash prinsiplari bo‘yicha yanada chuqur ilmiy tadqiqotlar talab etiladi.

Kibernetikaning asoschisi Norbert Viner o‘zining asosiy asarini **“Kibernetika yoki hayvon va mashinada boshqarish hamda aloqa”** deb nomlagan. Bu ta’rif orqali Viner boshqaruv qonunlari tirik va jonsiz tabiat uchun umumiy ekanligini ko‘rsatdi va shu bilan kibernetikaning fundamental ekanini belgilab berdi. Endi kibernetika nuqtayi nazaridan insonning sensorial tizimlari funksiyalarini umumiy ko‘rinishda ko‘rib chiqamiz.

Qo‘llanilgan metodlar. Inson atrof-muhit va organizmning ichki muhiti haqidagi ma’lumotlarni **sensor tizimlar** yordamida oladi, bu tizimlarni I.P.Pavlov **analizatorlar** deb atagan. Zamonaviy neyrofiziologiya nuqtayi nazaridan sensor tizimlar – bu periferik retseptorlar (sezgi organlari), ulardan keluvchi nerv tolalari (o‘tkazuvchi yo‘llar) va markaziy nerv tizimi hujayralari (sensor markazlar)dan tashkil topgan maxsus nerv tizimi bo‘laklaridir. Sensor organlarda tashqi ta’sir energiyasi **asablardagi signalga** (retseptor potentsiali) aylantiriladi, u esa keyinchalik nerv hujayralarining impulsli faolligiga – **harakat potentsialiga** o‘tadi. O‘tkazuvchi yo‘llar orqali bu potentsiallar sensor markazlarga yetib boradi, bu markazlar hujayralarida nerv signallarining **qayta ishlanishi (qayta kodlanishi)** sodir bo‘ladi.

Sensor tizimning barcha bo‘g‘inlarida signallarni kodlash va tahlil qilish bilan bir vaqtda **dekodlash** – ya’ni sensor kodni “o‘qish” ham amalga oshiriladi. Dekodlash jarayoni sensor markazlarning motor (harakat) va assotsiativ miyaning qismlari bilan o‘zaro bog‘liqligi asosida amalga oshiriladi. Motor tizim hujayralarining nerv impulsalaridan esa qo‘zg‘alish yoki tormozlanish yuzaga keladi. Natijada **harakat (amal)** yoki **harakatsizlik (to‘xtash)** vujudga keladi.

Alohida ta’kidlash kerakki, sensor tizimlardagi informatsiya tashuvchisi **elektr tabiatiga ega**. Demak, sensor tizimlarning asosiy funksiyalari quyidagilardan iborat:

- signallarni qabul qilish (retsepsiya);
- retseptor potentsialini impulsli faollikka aylantirish;
- boshlang‘ich faollikni sensor markazlarga uzatish;
- sensor markazlarda signalni qayta ishlash (transformatsiya);
- signallarning xususiyatlarini tahlil qilish;
- signallarni identifikatsiya qilish;
- qaror qabul qilish.

E’tibor berilsa, insonning tashqi muhit ta’sirini sezishi haqidagi mazkur tavsif boshqaruv sistemasining ishlashini fiziologiya terminlari orqali tasvirlashdir. Boshqaruv tizimidagi **datchiklar** rolini retseptorlar, **boshqaruvchi EHM (kompyuter)** vazifasini inson miyasi, **ijro mexanizmlari** vazifasini inson mushaklari, **harakat dasturi generatori** vazifasini esa yana miya bajaradi.

Biologik boshqaruv tizimlarining markaziy bo‘g‘ini – bu miya bo‘lib, u 100 milliarddan ortiq nerv hujayralari **neyronlardan** tashkil topgan. Har bir neyron o‘rtacha **10 000 ta bog‘lanishga** ega.

Inson miyasining aniq ishlash mexanizmi hali-hanuz sir bo‘lib qolmoqda. Shunga qaramay, bu hayratlanarli darajada murakkab “protessor”ning ayrim jihatlari ma’lum. Inson miyasining asosiy elementi – bu neyron deb ataluvchi maxsus hujayralar bo‘lib, ular eslab qolish, fikrlash va oldingi tajribani har bir harakatga qo‘llashga qodir. Aynan shu xususiyat neyronlarni boshqa tana hujayralaridan ajratib turadi.

Inson bosh miyasining po‘stloqi – bu qalinligi 2–3 mm bo‘lgan, neyronlardan tashkil topgan tekis qatlam bo‘lib, uning yuzasi taxminan 2 200 sm² ni tashkil etadi. Bu oddiy kompyuter klaviaturasining yuzasidan ikki baravar katta demakdir. Miya po‘stlog‘ida taxminan 10¹⁰ neyron mavjud bo‘lib, bu taxminan Somon yo‘lidagi yulduzlar soniga teng. Har bir neyron 10³–10⁴ boshqa neyronlar bilan bog‘langan. Umuman olganda, inson miyasida 10¹⁴ dan 10¹⁵ gacha neyronlararo bog‘lanish mavjud. Inson aqlining kuchi bazaviy elementlar (neyronlar) soniga, ular orasidagi bog‘lanishlarning xilma-xilligiga, shuningdek, genetik dasturlanish va ta’lim-tarbiya jarayoniga bog‘liq. Alohida neyron murakkab tuzilmaga ega bo‘lib, uning

o'zining tarkibiy qismlari, kichik tizimlari va boshqaruv mexanizmlari mavjud. U juda ko'p miqdordagi elektroximik bog'lanishlar orqali axborotni uzatadi. Neyronlarning qariyb yuzdan ortiq turli sinflari mavjud. Neyronlar va ular orasidagi bog'lanishlar birgalikda an'anaviy kompyuterlardagi hisoblash jarayonidan farqli ravishda **nobinar, beqaror va nosinxron jarayonni** hosil qiladi. Sun'iy neyron tarmoqlar esa murakkab miyadagi eng asosiy elementlarni model qiladi, bu esa olimlar va tadqiqotchilarni muammoni yechishning yangi yo'llarini izlashga undaydi.

Hozirgi vaqtda neyronlar uchta katta guruhga bo'linadi: **retseptor neyronlari, effektor neyronlar va oraliq (inter) neyronlar**.

- **Retseptor neyronlar** sensor ma'lumotlarni miyaga kiritish uchun xizmat qiladi. Ular tashqi muhitning sezgi organlariga ta'sirini (masalan, yorug'likning ko'z to'r pardasiga, tovushning eshitish maqsurasiga ta'siri) o'zlarining aksonlari orqali elektr impulslariga aylantiradi.

- **Effektor neyronlar** ularga kelgan elektr signallarni ijro organlariga, masalan, mushaklarga, aksonlaridagi maxsus sinapslar orqali uzatadi.

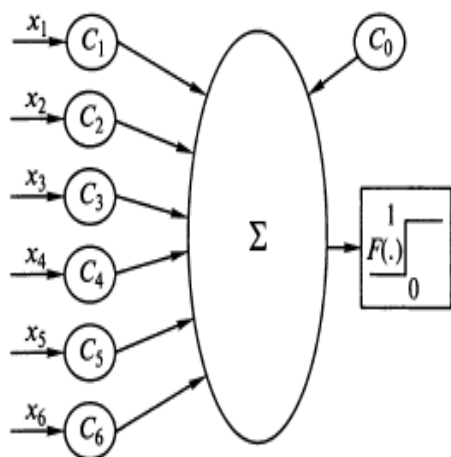
- **Oraliq neyronlar** markaziy nerv tizimini hosil qiladi va retseptorlardan olingan ma'lumotni qayta ishlash hamda boshqaruv signallarini effektorlarga yetkazish uchun mo'ljallangan.

Inson va yuqori darajadagi hayvonlarning bosh miyasi **kulrang modda va oq moddadan** tashkil topgan. Kulrang modda — bu neyronlar, dendritlar va aksonlar to'plamidir. Oq modda esa miyadagi turli sohalarini, sezgi organlarini va mushaklarni bir-biriga bog'lovchi tolalardan tashkil topgan. Bu tolalar elektr izolatori bo'lib xizmat qiluvchi maxsus miyelin qavati bilan qoplangan.

Miyada tuzilishi jihatidan o'zaro ajralgan bo'limlar mavjud: **miya po'stlog'i (kora), gippokamp, talamus, miyachok, amigdal** va boshqalar. Har bir bo'lim murakkab modulli tuzilishga ega. Miya tuzilishida alohida o'rin egallagan **bosh miya po'stlog'i (katta yarim sharlar po'stlog'i)** eng muhim bo'lim bo'lib, hozirgi kunda asosiy assotsiativ axborot qayta ishlash jarayonlari aynan shu yerda sodir bo'ladi, degan fikr qabul qilingan.

Sensor sohalar bilan po'stloq o'rtasidagi, shuningdek po'stloqning turli qismlari o'rtasidagi bog'lanishlar fizik jihatdan **paralleldir**. Bir qatlamdagi hujayralar boshqa qatlamga proyeksiya qiladi, va bu proyeksiyalar ko'plab tarmoqlanuvchi va qo'shib ketuvchi tolalardan iborat bo'ladi (ya'ni, proyeksiyalar **divergent va konvergent**).

Olingan natijalar va ularning tahlili. Hozirgi kunda miyaga vizual (ko'rish) ma'lumot kirishi eng yaxshi o'rganilgan jarayonlardan biridir. To'r pardadan kelayotgan qo'zg'alishlar po'stloqqa **tartibli topografik ko'rinishda** yetadi, ya'ni to'r pardada yaqin joylashgan nuqtalar po'stloqda ham yaqin joylarni faollashtiradi. Ko'rish tizimida turli murakkablikdagi vizual stimullarga javobiga qarab **oddiy, murakkab va gipermurakkab neyronlar** ajratiladi. Sun'iy neyronlarda tabiiy (biologik) neyronning ishini taqlid qilish uchun juda tik (keskin) o'tishga ega bo'lgan nelinear qo'zg'alish funksiyasi kiritilgan. Bu funksiya neyron chiqish signalining ikkilik (binar) holatini takrorlash imkonini beradi: 1 – qo'zg'algan holat, 0 – tormozlangan holat. Bu holatlar orasidagi o'tishning chegarasi (porogi) C_0 deb ataluvchi doimiy siljish qiymati orqali boshqariladi.



Shuni ta'kidlash kerakki, sun'iy neyron ichida analog sxema yoki raqamli neyron-imitator uchun zarur bo'lgan tashqi quvvat manbai mavjud. Shu sababli biologik neyronlardagi kabi elektroximik energiyani tiklash uchun zarur bo'lgan "o'lik vaqtini" (refrakter davrni) kiritishga ehtiyoj yo'q. Bu esa kremniy asosidagi sun'iy neyronlar ancha yuqori tezkorlikka ega ekanini anglatadi.

1-rasm. Asosiy (bazaviy) sun'iy neyron:

- x_1, x_2 – kirishlar;
- C_1, C_2 – og'irlik koeffitsiyentlari;
- C_0 – siljish (porog) qiymati;
- Σ – summator;
- $F(.)$ – nelinear faollashtirish funksiyasi

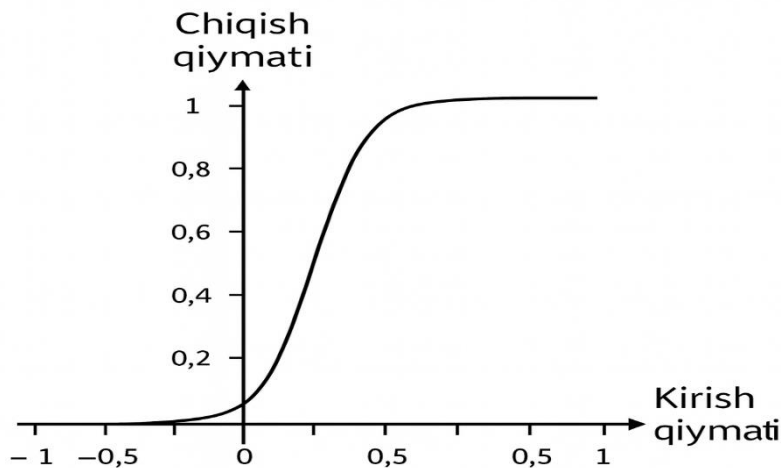
(qo'zg'alish funksiyasi).

1-rasmda sun'iy neyronning soddalashtirilgan modeli tasvirlangan. Modifikatsiya qilingan kirish signallari a_1, a_2 summatorga uzatiladi, u asosan kirishlarning og'irliklar bilan ko'paytmasini yig'ish funksiyasini bajaradi. Summator uchun turli operatsiyalarni tanlash mumkin: arifmetik o'rtacha, eng katta qiymat, eng kichik qiymat, YOKI (OR), VA (AND) kabi amallar, ular turli natija qiymatlarini hosil qiladi.

Ko'pchilik tijoriy dasturiy paketlar muhandis-dasturchilarga yuqori darajadagi dasturlash tillari yordamida o'zlarining maxsus summator funksiyalarini yaratishga imkon beradi. Ba'zan summalash funksiyasi vaqt

bo'yicha ishlashini ta'minlaydigan faollashtirish funksiyasi qo'shilishi bilan murakkablashtiriladi.

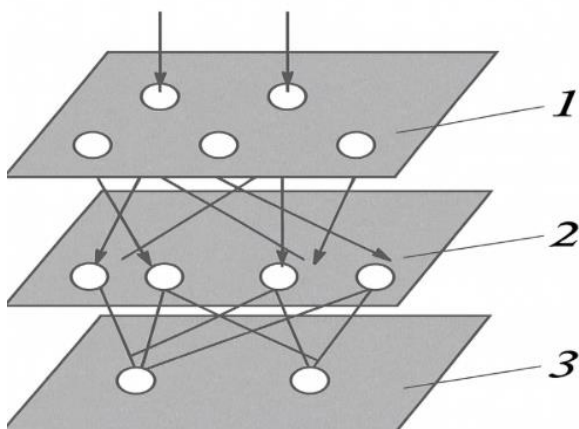
2-rasm. O'tkazish funksiyasi namunasi



Har qanday holatda ham summalash funksiyasining chiqishi ma'lum algoritim asosida uzatuvchi funksiyadan o'tadi va natijada chiqishda (0 yoki 1, -1 yoki 1 yoki boshqa biror son) hosil bo'ladi. Mavjud neyron tarmoqlarda uzatuvchi funksiyalar sifatida sigmoid, sinus, giperbolik tangens va boshqa funksiyalar qo'llanishi mumkin. Uzatuvchi funksiyalardan

birining namunasi 2-rasmida ko'rsatilgan. Barcha sun'iy neyron tarmoqlari asosiy blok – sun'iy neyron asosida quriladi. Mavjud ko'plab variantlar va farqlar samarali neyron tarmoqlarini yaratishda iste'dodli ishlab chiquvchilarga ijodiy yondashuv uchun katta imkoniyat beradi.

Sun'iy neyron tarmoqlarini yaratish va ulardan foydalanishning yana bir qismi alohida neyronlar orasidagi ko'plab bog'lanishlarga taalluqlidir. Inson miyasida guruhlanish shunday amalga oshadiki, axborot **dinamik, o'zaro ta'sirli** va **o'z-o'zini tashkil qiluvchi** tarzda qayta ishlanadi. Biologik neyron tarmoqlari uch o'lchamli makonda, mikroskopik elementlardan tashkil topgan bo'lib, juda turli xil ulanishlarga qodir. Inson tomonidan yaratilgan sun'iy tarmoqlarda esa jismoniy cheklovlar mavjud. Hozirgi vaqtda mavjud bo'lgan sun'iy neyron tarmoqlari alohida sun'iy neyronlarning **qatlamlarga** birlashtirilgan ko'rinishidir. 3-rasmida sun'iy neyron tarmoqlarining tipik tuzilishi ko'rsatilgan. Ba'zi tarmoqlar faqat bitta qatlam yoki hatto bitta elementdan iborat bo'lishi mumkin bo'lsada, ko'pchilik amaliy tizimlar kamida uch xil qatlamdan iborat:



3 – rasm. Oddiy neyron tarmoq tushulishi

1. **Kirish qatlami**
2. **Yashirin qatlam**
3. **Chiqish qatlami**

Kirish qatlami neyronlari ma'lumotlarni kirish fayllaridan yoki bevosita elektron datchiklardan qabul qiladi. Chiqish qatlami esa axborotni tashqi muhitga, qo'shimcha kompyuter protsessoriga yoki boshqa qurilmaga uzatadi. Ushbu ikki qatlam orasida bir nechta yashirin qatlam bo'lishi mumkin; bu qatlamlardagi neyronlar har xil tarzda bog'langan bo'lib, har bir yashirin neyronning kirish va chiqishlari boshqa neyronlar bilan ulanadi.

Neyronlar orasidagi bog'lanishning yo'nalishi neyron tarmoqlarining muhim jihatlaridan biridir. Aksariyat tarmoqlarda yashirin qatlamdagi har bir neyron avvalgi qatlamdagi barcha neyronlardan signallarni qabul qiladi va ko'pincha kirish qatlamidan ham signal oladi. Signallar ustida amal bajarilgach, neyron o'z chiqish signalini keyingi qatlamdagi barcha neyronlarga uzatadi – bu **oldinga uzatish** (feedforward) deb ataladi. Agar **teskari aloqa** mavjud bo'lsa, chiqish qatlamidagi neyronlarning chiqish signallari oldingi qatlamlarga qaytariladi. Neyronlar orasidagi ulanish turi tarmoqning ishlashiga katta ta'sir ko'rsatadi. Ko'pgina neyron tarmoqlari dasturiy paketlari foydalanuvchiga bog'lanishlarni ixtiyoriy ravishda qo'shish, o'chirish yoki boshqarish imkonini beradi. Doimiy ravishda moslashtiriladigan bog'lanish koeffitsiyentlari **qo'zg'atuvchi** ham, **tormozlovchi** ham bo'lishi mumkin.

Amaliy masalalarni yechishda neyron tarmoqlarni qo'llash.

Obrazlarni klassifikatsiya qilish. Bu vazifa – kirish obrazining (masalan, nutq signali yoki qo‘lda yozilgan belgi) belgi – vektori ko‘rinishida berilgan holda, uni oldindan belgilab qo‘yilgan bir yoki bir necha sinfga mansubligini aniqlashdan iborat. Mazkur usulning mashhur qo‘llanilishlariga harflarni tanish, tilni aniqlash, elektrokardiogramma signallarini tasniflash, qon hujayralarini ajratish kiradi.

Klasterlash (kategoriyalash). Klasterlash vazifasini yechishda o‘quv to‘plamida sinf yorliqlari bo‘lmaydi. Klasterlash algoritmi o‘xshash obrazlarni bir klasterga joylashtirish prinsipi asosida ishlaydi. Klasterlash ko‘pincha bilimlarni ajratib olish, ma‘lumotlarni siqish va ularning xususiyatlarini o‘rganishda qo‘llanadi.

Funksiyalarni approksimatsiya qilish. Faraz qilaylik, bizda o‘quv tanlov (ma‘lumotlar to‘plami) mavjud: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ya‘ni kirish–chiqish juftliklari. Bu juftliklar shovqin ta‘sirida buzilgan noma‘lum R funksiyasi tomonidan generatsiya qilingan. Approksimatsiya vazifasi – ushbu noma‘lum funksiyaning E ko‘rinishdagi yaqinlashmasini topishdan iborat. Funksiya approksimatsiyasi ko‘plab ilmiy va muhandislik sohalarida modellashtirish masalalarini yechishda zarurdir.

Oldindan aytish (prognozlash). Faraz qilaylik, bizda vaqtning ketma-ket lahzalarida olingan n ta diskret o‘lchovlar mavjud: $\{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$. Vazifa – keyingi lahzada $y(t_n + 1)$ qiymatini oldindan aytishdan iborat. Prognozlash biznes, ilm-fan va texnikada juda muhim ahamiyatga ega (masalan, fond bozoridagi narxlarini oldindan bilish, ob-havo prognozi).

Optimallashtirish. Matematika, statistika, texnika, fan, tibbiyot va iqtisodiyotdagi ko‘plab muammolar optimallashtirish masalalari sifatida ifodalanishi mumkin. Optimallashtirish algoritmining maqsadi – barcha cheklovlariga mos keluvchi, maqsad funksiyasini maksimal yoki minimal qiluvchi eng yaxshi yechimni topishdir.

Ma‘no bo‘yicha murojaat qilinadigan xotira. An‘anaviy kompyuterlarda xotiraga faqat aniq manzil orqali murojaat qilish mumkin, bu manzil xotira mazmuniga bog‘liq bo‘lmaydi. Manzil noto‘g‘ri hisoblangan taqdirda, butunlay boshqa ma‘lumot chaqirilishi mumkin. Assotsiativ xotira yoki ma‘no bo‘yicha murojaat qilinadigan xotira esa mazmun orqali qidirishga asoslanadi. Xotira mazmuni hatto qisman kirish yoki buzilgan ma‘lumot bo‘lsa ham esga chaqirilishi mumkin. Assotsiativ xotira multimedia axborot bazalarida qo‘llanishi mumkin.

Boshqaruv. Dinamik tizimni ko‘rib chiqamiz: $u(t)$ – boshqaruvchi kirish ta‘siri, $y(t)$ – tizimning shu t lahzadagi chiqish signali. Etalon modelga ega boshqaruv tizimlarida maqsad – tizim etalon model belgilagan kerakli trayektoriyada harakat qilishi uchun mos kirish signali $u(t)$ ni hisoblab topishdir. Bunga misol sifatida dvigatelning optimal boshqaruvini keltirish mumkin.

Shu bilan birga, neyron tarmoqlar ayrim sohalarida an‘anaviy hisoblash usullaridan ustunlikka ega bo‘lishiga qaramay, mavjud neyron tarmoqlari hali mukammal yechim darajasiga yetmagan.

Xulosa. Neyron tarmoqlar asosidagi o‘lchash tizimlari an‘anaviy algoritmlarga nisbatan yuqori darajadagi moslashuvchanlik va adaptivlikka ega bo‘lib, real vaqt rejimida ishlash qobiliyati bilan ajralib turadi. Bu esa sanoat avtomatikasi, elektronika, metrologiya, tibbiyot diagnostikasi, energetika, transport, atrof-muhit monitoringi va IoT tizimlaridagi aqlli sensorlarning rivojlanishida muhim ahamiyat kasb etadi. Yakuniy xulosa sifatida aytish mumkinki, neyron tarmoqlarni o‘lchash qurilmalariga integratsiya qilish ularning funksional imkoniyatlarini kengaytiradi, inson omili sababli yuzaga keladigan xatoliklarni kamaytiradi va o‘lchash jarayonlarining ishonchligini oshiradi. Kelgusida ushbu sohada yanada takomillashgan algoritmlar, chuqur o‘rganish modellaridan foydalanish va aqlli sensor tizimlarini yaratish orqali o‘lchash texnologiyalarining samaradorligini yuqori bosqichga olib chiqish imkoni mavjud.

ADABIYOTLAR:

1. Haykin, S. *Neural Networks and Learning Machines*. – New York: Pearson, 2016.
2. Bishop, C. *Pattern Recognition and Machine Learning*. – Springer, 2006.
3. Rumelhart, D., McClelland, J. *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*. – MIT Press, 1986.
4. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. *Deep Learning*. – MIT Press, 2016.
5. Koren, Y. *Advanced Measurement Techniques*. – McGraw-Hill, 2014.
6. Zadeh L. A. *Neuro-Fuzzy Systems for Intelligent Measurement Applications*. – IEEE Transactions, 2005.
7. Simon, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches*. – Wiley, 2006.
8. O‘zDSt 8.009:2020. O‘lchashlar birligini ta‘minlash. Asosiy tushunchalar. – T.: O‘zstandart, 2020.

9. *O'zDSt ISO/IEC 17025:2019. Sinov va kalibrlash laboratoriyalarining vakolatligiga qo'yiladigan umumiy talablar.*
10. *O'zDSt 8.019:2006. O'lchash o'zgartkichlari. Umumiy texnik talablar.*
11. *Cherkashin, V. Metrologiya va o'lchash texnologiyalari. – Moskva: Energiya, 2018.*
12. *Suyunov, A., Umarov, B. Metrologiya asoslari. – Toshkent: Fan, 2019.*
13. *Osvalds, G. Intelligent Sensors and Measurement Systems. – CRC Press, 2017.*

**TASHKILOTLARDA BIZNES UZLUKSIZLIGINI BOSHQARISH TIZIMINI
MODELLASHTIRISH USULLARI**

Turdimatov Mamirjon Mirzayevich,

Farg‘ona davlat texnika universiteti “DI va kiberxavfsizlik” kafedrası dotsenti
turdimatovmamir1958@gmail.com

Aliyev Muhammadali G‘ulomjon o‘g‘li,

Farg‘ona davlat texnika universiteti “Axborot xavfsizligi” yo‘nalishi 1-kurs magistranti

Annotatsiya. Ushbu tadqiqot tashkilotlarda Biznes uzluksizligini boshqarish tizimini (Business Continuity Management - BCM) loyihalash va modellashtirish usullariga qaratilgan. Ma‘lumki, zamonaviy raqamli iqtisodiyot sharoitida tashkilot jarayonlarining qisqa muddatga to‘xtab qolishi moliyaviy yo‘qotishlar, mijozlar ishonchining pasayishi va brend obro‘sining kamayishiga olib kelishi mumkin. Shu tufayli tadqiqot asosan risklarni aniqlash va BCMning nazariy va amaliy asoslari tadqiqi o‘rganilgan.

Kalit so‘zlar: biznes uzluksizligini boshqarish, BCM (Business Continuity Management), risk, risklarni boshqarish, biznesga ta‘sir tahlili (BIA), tiklash strategiyalari, favqulodda holatlar, tashkilot barqarorligi, raqamli iqtisodiyot, axborot tizimlari xavfsizligi, korporativ boshqaruv.

**METHODS FOR MODELING BUSINESS CONTINUITY MANAGEMENT SYSTEMS IN
ORGANIZATIONS**

Abstract. This study focuses on methods for designing and modeling Business Continuity Management (BCM) systems in organizations. It is known that in the conditions of the modern digital economy, a short-term interruption of organizational processes can lead to financial losses, loss of customer trust, and a decrease in brand reputation. Therefore, the study mainly focuses on identifying risks and studying the theoretical and practical foundations of BCM.

Keywords: business continuity management, BCM (Business Continuity Management), risk, risk management, business impact analysis (BIA), recovery strategies, emergencies, organizational stability, digital economy, information systems security, corporate governance.

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ
БИЗНЕСА В ОРГАНИЗАЦИЯХ**

Аннотация. Данное исследование посвящено методам проектирования и моделирования систем управления непрерывностью бизнеса (BCM) в организациях. Известно, что в условиях современной цифровой экономики кратковременное прерывание организационных процессов может привести к финансовым потерям, потере доверия клиентов и снижению репутации бренда. Поэтому исследование в основном сосредоточено на выявлении рисков и изучении теоретических и практических основ BCM.

Ключевые слова: управление непрерывностью бизнеса, BCM (Business Continuity Management), риск, управление рисками, анализ воздействия на бизнес (BIA), стратегии восстановления, чрезвычайные ситуации, организационная устойчивость, цифровая экономика, безопасность информационных систем, корпоративное управление.

Kirish. Zamonaviy tashkilotlarning barqaror va samarali faoliyat yuritishi ularning ichki va tashqi jarayonlarining uzluksiz ishlashiga bevosita bog‘liq bo‘lib, bunda axborot tizimlari, ma‘lumotlar almashinuvi, texnologik infratuzilma, xizmat ko‘rsatish tarmoqlari va inson resurslari muhim o‘rin tutadi. Raqamli iqtisodiyot sharoitida har qanday xizmatning qisqa muddatga to‘xtab qolishi ham jarayonlarning izdan chiqishiga, mijozlar oqimini kamayishiga, moliyaviy yo‘qotishlar ortishiga va brend obro‘sining pasayishiga olib kelishi mumkin. Ayniqsa bugungi globallashtirilgan muhitda xavf omillari ko‘payib bormoqda: tabiiy ofatlar, texnik nosozliklar, elektr ta‘minotidagi uzilishlar, dasturiy xatoliklar, kiberhujumlar, ma‘lumotlar yo‘qolishi va xodimlarning tasodifiy xatolari tashkilotning uzluksiz ishlab turishiga real tahdid soladi. Bunday sharoitda tashkilotning favqulodda holatlarga tayyorligi nafaqat texnik choralar bilan, balki puxta o‘ylangan, oldindan rejalashtirilgan va muntazam sinovdan o‘tkaziladigan boshqaruv tizimi bilan ta‘minlanadi.

Biznes uzluksizligini boshqarish tizimi (Business Continuity Management — BCM) tashkilotning faoliyatini himoya qilish, yuzaga kelgan uzilishlardan minimal zarar bilan chiqish va iloji boricha qisqa vaqt ichida qayta tiklanishni ta'minlashga qaratilgan kompleks mexanizmdir. BCMning asosiy vazifasi favqulodda holat yuz berganda biznes jarayonlarini to'xtatmasdan davom ettirish uchun zarur bo'lgan strategiyalar, resurslar va amaliy choralarni oldindan belgilashdan iboratdir. Bu tizim nafaqat axborot texnologiyalari bilan bog'liq jarayonlarni, balki tashkilotning barcha bo'limlari faoliyatini o'z ichiga oladi: boshqaruv, moliya, logistika, kommunikatsiya, xavfsizlik va inson resurslari[1-3].

Ilmiy-uslubiy yondashuvlar BCMning nazariy asoslari bilan birga real amaliyotda qo'llanilishi mumkin bo'lgan aniq mexanizmlarni ham taqdim etadi. Gap shundaki, biznes uzluksizligini boshqarish oddiy favqulodda vaziyat rejasi emas, balki tashkilotning umumiy boshqaruv tizimiga integratsiyalashgan, doimiy ravishda yangilanib boriladigan strategik jarayondir. Shu nuqtayi nazardan, mazkur tadqiqotning maqsadi mavjud metodik materiallar va hujjatlarni tahlil qilish orqali BCM tizimini loyihalash prinsiplari, funksional bosqichlari, amaliy talab va mexanizmlarini chuqur o'rganishdan iboratdir. Bu orqali BCMning zamonaviy tashkilotlar uchun naqadar muhim ekani va uni to'g'ri joriy etish biznes jarayonlarining davomiyligi, raqobatbardoshligi hamda xavf-xatarlarga bardosh berish qobiliyatini oshirishini ilmiy asosda yoritish ko'zda tutiladi[4-6].

Metodologiya va adabiyotlar tahlili. Mazkur tadqiqotning metodologik asosini biznes uzluksizligini boshqarish bo'yicha mavjud uslubiy qo'llanmalar, xalqaro standartlar, ilmiy adabiyotlar va amaliy qo'llaniladigan BCM modellari tahlili tashkil etdi. Tadqiqot jarayonida BCMning hayot sikli asosiy konseptual yadro sifatida olingan bo'lib, ushbu sikl risklarni aniqlash va baholash, biznesga ta'sir tahlili (BIA), strategik rejalashtirish, tiklash mexanizmlarini ishlab chiqish, hujjatlar yaratish, sinovlardan o'tkazish va tizimni muntazam ravishda yangilab borishni o'z ichiga olgan kompleks jarayon sifatida talqin qilindi.

Korporativ boshqaruvda risklarni boshqarish va risk darajasini pasaytirish yo'llari (Mallayev, S. (2025)). *Tijorat banklarida operatsion risklarini baholash va boshqarish tizimini tashkil qilish* (Rabbimov, J. (2025)). Tashkilotlarga bo'layotgan xavf-xatarlarni baholash va bartaraf etish usullarini tahlili (Turdimatov M.M., Baratova G.). *Aktsiyadorlik jamiyatlarida investitsion risklarni boshqarishning ilmiy-uslubiy asoslari* (Xasanov, H. (2024)). Korxona va tashkilotlarda axborot xavfsizligi risklarini baholash usullarini tahlili (Turdimatov M.M., Abdubannayev A. (2025)). *Korxonalarda risk boshqaruvi mexanizmlarini joriy etish va inson resurslaridan foydalanish istiqbollari takomillashtirish* (Tashpulatova, M. (2024)). *O'zbekiston Respublikasida infratuzilma loyihalarini amalga oshirishdagi risklarni boshqarish* (Yusupova, Z. (2025)).

BIA metodikasi doirasida tashkilotning eng muhim biznes jarayonlarini aniqlash, ularning o'zaro bog'liqligini xaritalash, jarayonlarning to'xtab qolishi oqibatida yuzaga keladigan moliyaviy va operatsion zararlarni baholash va har bir jarayon uchun ruxsat etilgan maksimal to'xtash vaqti (RTO) hamda tiklash nuqtasi maqsadi (RPO) aniqlab borildi. Bu jarayon BCMning keyingi barcha bosqichlari uchun poydevor bo'lib xizmat qildi.

Risklarni baholash bosqichida ehtimol-ta'sir modeli asosida xavf omillarining intensivligi aniqlanib, ular toifalarga ajratildi va ustuvorlik darajasi bo'yicha reytinglash amalga oshirildi. Ushbu yondashuv xavflar reestrining shakllanishiga va ularga nisbatan qaysi boshqaruv choralari ko'rish zarurligini belgilab olishga imkon berdi. Tiklash strategiyasini ishlab chiqish jarayonida zaxira serverlar, muqobil ish joylari, bulut texnologiyalari, avtonom elektr ta'minoti, ma'lumotlarni replikatsiya qilish texnologiyalari va xodimlarning o'zaro almashinuv tizimlari kabi texnik va tashkiliy yechimlardan foydalanish darajasi o'rganildi[5-7,10].

Tadqiqot davomida modellashtirish usuli yordamida turli favqulodda holatlar stsenariylari yaratilib, BCMning real faoliyatda qay darajada samarali ishlashi baholandi. Shuningdek, taqqoslama tahlil metodidan foydalanib, xalqaro standartlar - xususan ISO 22301 — talablari bilan mavjud uslubiy qo'llanmalar o'rtasidagi farq va o'xshashliklar aniqlab borildi. Tizimli yondashuv metodidan foydalanish esa tadqiqotning barcha bosqichlarini yagona mantiqiy struktura asosida o'rganishga imkon berdi. Ushbu metodlar yordamida BCMning amaliyotga tatbiq etish mexanizmlari chuqur tahlil qilindi va tashkilotlar uchun moslashuvchan, real sharoitga yo'naltirilgan yondashuvlar shakllantirildi.

Natijalar. Tadqiqot davomida olib borilgan tahlillar tashkilotlarda biznes uzluksizligini boshqarish tizimini samarali shakllantirish uchun zarur bo'lgan bir qator asosiy jarayonlar va ularning o'zaro bog'liqligini aniq ko'rsatdi. Eng avvalo biznesga ta'sir tahlili (BIA) orqali tashkilotning eng muhim funksiyalarini aniq ajratib olish mumkin bo'ldi. Tahlil natijalari shuni ko'rsatdiki, xizmat ko'rsatish jarayonlari, mijozlarga xizmat bilan bog'liq operatsiyalar, ma'lumotlarni qayta ishlash, texnik xizmatlar, infratuzilma boshqaruvi va axborot tizimlari kabi funksional yo'nalishlar har qanday uzilishdan eng ko'p zarar ko'rish mumkin bo'lgan jarayonlar qatoriga kiradi. Ushbu jarayonlar uchun ruxsat etilgan maksimal to'xtash vaqti (RTO) va tiklash nuqtasi maqsadi (RPO) kabi mezonlarning aniqlanishi ularni qay darajada tez

tiklash zarurligini ko'rsatib berdi va tiklash strategiyasining asosiy tarkibiy qismiga aylandi. Shuningdek, BIA jarayonida aniqlangan bog'lanishlar asosida bir jarayonning to'xtashi boshqa jarayonlarga zanjirsimon ta'sir ko'rsatishi mumkinligi ham aniqlandi, bu esa BCM strategiyasini yanada chuqurroq rejalashtirish zarurligini ko'rsatdi.

Axborot xavfsizligi riskini baholash modeli oldingi tadqiqotlardan foydalangan holda tashkilotning axborot xavfsizligi riskini baholashning umumlashtirilgan modelini tuzish mumkin. Tashkilotning axborot xavfsizligi darajasini aniqlash uchun faqat bitta xavfning qiymatini hisoblashda tashkilotning axborot xavfsizligi darajasini aniqlash mumkin emas. Ammo, agar siz ma'lum bir blok uchun bir nechta xavf yoki xavfning qiymatlarini hisoblasangiz, masalan:

- xavfsizlik yo'nalishi bo'yicha (mavjudlikni ta'minlash);
- ATni ta'minlash bo'yicha chora-tadbirlar bo'yicha (ATni ta'minlash bo'yicha tashkiliy chora);
- qimmatbaho aktiv uchun (tashkilot xodimlari);

Bunday holda siz tashkilotning axborot xavfsizligi darajasini hisoblashingiz mumkin. Buning uchun bizga kerak:

$$\text{Quidagi formuladan foydalanib, umumiy xavf qiymatini hisoblash mumkin } R_{umum} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (1)$$

bu yerda R - parametrlar bloki bo'yicha tashkilotning umumiy axborot xavfsizligi xavfi;

i - hisoblangan xususiy xavfning seriya raqami;

n - hisob-kitob qilingan xususiy risklarning umumiy soni.

Parametrlar bloki uchun umumiy xavfni hisoblash misoli quyidagi 1- jadvalda keltirilgan.

	Xususiy riskning ahamiyati	Parametrlar bloki uchun umumiy xavfning qiymati
Xavf №1	28	$R_{o6m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{1}{7} 78 = 26$
Xavf №2	15	
Xavf №3	35	

1- jadval. Blok uchun axborot xavfsizligining umumiy xavfini hisoblash parametrlari.

Tashkilotning IS darajasining qiymatini aniqlang. Buning uchun axborot xavfsizligi darajasini baholash uchun ishlab chiqilgan matritsadan foydalanish mumkin (2-jadval va 3-jadval).

Tashkilotning axborot xavfsizligi darajasini baholashda uchta parametr hisobga olinadi, menimcha, tashkilotdagi axborot xavfsizligi darajasi quyidagilarga bog'liq:

1. Parametrlar bloki uchun xavfning umumiy darajasi;
2. Tashkilotning umumiy tavakkalchilikning oldini olish xarajatlari (ular allaqachon sarflangan);
3. Axborot xavfsizligi xavfiga munosabat: uni qabul qilish, uzatish yoki kamaytirish.

Xavfga munosabat	Past xavf				O'rtacha xavf			
	Axborot xavfsizligi xarajatlari				Axborot xavfsizligi xarajatlari			
	Yoqori	O'rta	past	xarajat yo'q	katta	orasida	past	xarajat yo'q
Riskni o'tkazish	10	9	8	7	9	8	7	6
Riskni kamaytirish	9	8	7	6	8	7	6	5
kardinal kamaytirish	8	7	6	5	7	6	5	4
Riskni qabul qilish	7	6	5	4	6	5	4	3

2-jadval. Axborot xavfsizligini baholash matritsasi (1-qism)

Xavfga munosabat	Yuqori xavf				Kritik xavf darajasi			
	Axborot xavfsizligi xarajatlari				Axborot xavfsizligi xarajatlari			
	Yoqori	O'rta	past	xarajat yo'q	katta	O'rta	past	xarajat yo'q
Riskdan qochish	8	7	6	5	7	6	5	4
Riskni kamaytirish	7	6	5	4	6	5	4	3
kardinal kamaytirish	6	5	4	3	5	4	3	2
Riskni qabul	5	4	3	2	4	3	2	1

qilish								
--------	--	--	--	--	--	--	--	--

3-jadval. Axborot xavfsizligini baholash matritsasi (2-qism)

Taklif etilayotgan axborot xavfsizligi darajasi matritsasiga (2-jadval, 3-jadval) ko'ra, 10 yoki 9-darajaga ega bo'lgan tashkilot, agar 100% axborot xavfsizligini ta'minlashning iloji bo'lmasa, ishonchli himoyalangan deb hisoblanadi.

Tashkilotga 8, 7 yoki 6 daraja berilgan bo'lsa, axborot xavfsizligining o'rtacha darajasiga ega deb hisoblanadi.

Tashkilotga 5, 4 yoki 3 daraja berilgan bo'lsa, axborot xavfsizligining juda past darajasiga ega deb hisoblanadi.

Risk tahlili bosqichi orqali tashkilot faoliyatiga salbiy ta'sir ko'rsatishi mumkin bo'lgan xavf omillarining to'liq ro'yxati shakllantirildi. Tahlil natijalariga ko'ra, texnik nosozliklar, kiberhujumlar, elektr ta'minotidagi uzilishlar, server va ma'lumotlar bazasining ishdan chiqishi, ma'lumotlarning tasodifiy o'chirilib ketishi, inson xatoliklari va tabiiy ofatlar kabi xavflar eng ustuvor tahdidlar sifatida qayd etildi. Ehtimol-ta'sir modeli asosida ushbu xavflar reytinglash natijasida ularning aksariyatiga qaratilgan kamaytirish choralari ishlab chiqildi. Masalan, elektr ta'minoti uzilishi uchun uzluksiz quvvat manbalari (UPS) va avtonom generatorlar, ma'lumotlar yo'qolishi xavfi uchun esa bulutli saqlash tizimlari va doimiy replikasiya mexanizmlari joriy etish tavsiya qilindi[8,9].

Tahlil asosida ishlab chiqilgan tiklash strategiyasi ko'plab texnik va tashkiliy choralarni o'z ichiga oldi. Xususan, zaxira serverlar va virtualizatsiya texnologiyalari yordamida xizmatlarni tezkor qayta tiklash imkoniyati yaratildi, muhim ma'lumotlarni bulutda saqlash orqali ularni har qanday holatda tiklash kafolatlandi, aloqa kanallarining zaxira variantlari ishlab chiqildi va xodimlar uchun favqulodda holatlarda amal qilinadigan aniq yo'riqnomalar shakllantirildi. Tizimning haqiqatda qay darajada ishlashini baholash maqsadida o'tkazilgan sinovlar — stsenariy asosida modellashtirilgan mashqlar, texnik tiklash testlari, zaxira ish joylarida ishlash bo'yicha trening mashg'ulotlari — rejaning kuchli va zaif tomonlarini aniqlashga yordam berdi. Sinovlar jarayonida aniqlangan kamchiliklar asosida reja takomillashtirildi va jarayonlar o'rtasidagi muvofiqlashtirish yanada kuchaytirildi[10].

Natijalar shuni ko'rsatdiki, BCM tizimi tashkilotda puxta ishlab chiqilgan va real stsenariylar asosida tekshirib boriladigan bo'lsa, u favqulodda holatlarda jarayonlarning to'xtab qolish vaqtini sezilarli darajada kamaytiradi va iqtisodiy yo'qotishlarning oldini oladi. Umuman olganda, tadqiqot BCMning barcha bosqichlari o'zaro uyg'un va tizimli bajarilganda, tizim tashkilotning favqulodda vaziyatlarga tayyorligini tubdan oshiruvchi samarali boshqaruv vositasi ekanini tasdiqladi.

Muhokama. Tadqiqot jarayonida olingan natijalar biznes uzluksizligini boshqarish (BCM) tizimi doimiy takomillashtirib borilishi zarur bo'lgan dinamik jarayon ekanini yana bir bor isbotladi. BCM faqatgina bir martalik reja yoki favqulodda vaziyatda qo'llaniladigan choralar majmuasi emas, balki tashkilotning har bir bo'limi bilan uzviy bog'liq holda ishlaydigan, muntazam ravishda yangilanadigan boshqaruv tizimidir.

Har bir sinov, trening yoki modellashtirilgan ssenariy natijasida aniqlangan xatoliklar tizimni real holatlarga moslashtirishga yordam beradi, holatlarning o'zgaruvchan tabiatini hisobga olib, rejaning qayta ko'rib chiqilishi va dolzarb holga keltirilishi esa BCMning amaliy samarasini oshiradi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, axborot xavfsizligi, IT infratuzilmasi, yuqori darajadagi boshqaruv, inson resurslari va kommunikatsiya bo'limlarining o'zaro muvofiqlashtirilgan ishlashi BCMning muvaffaqiyat kaliti hisoblanadi; aks holda tizimning alohida bo'limlari yaxshi ishlasa ham, umumiy uzluksizlikni ta'minlashda bo'shliqlar yuzaga keladi.

BCMning iqtisodiy jihatdan katta ahamiyatga ega ekanligi ham tadqiqot natijalarida yaqqol ko'rindi — uzilishlarning oldini olish yoki ularni qisqa muddatda bartaraf etish nafaqat zararlarni kamaytiradi, balki tashkilotning raqobatbardoshligini saqlash, mijozlar ishonchini mustahkamlash va brend obro'sini himoya qilishda ham muhim rol o'ynaydi. Shuningdek, BCMning moslashuvchan metodikasi uni nafaqat yirik korxonalar, balki kichik va o'rta biznes subyektlari, davlat tashkilotlari, ta'lim muassasalari va boshqa ijtimoiy soha institutlarida ham samarali qo'llash imkonini beradi.

Bu tizimning universalligi uni har bir tashkilotning o'ziga xos ehtiyojlari va resurslariga moslab modifikatsiya qilish imkoniyatida namoyon bo'ladi. Xulosa qilib aytganda, BCMning uzluksiz rivojlanishi, texnologik innovatsiyalar bilan uyg'unlashtirilishi va amaliyotga muntazam tatbiq etib borilishi uning haqiqiy samaradorligini ta'minlaydigan eng muhim omillardir.

Xulosa. Yakuniy xulosalarga ko'ra, biznes uzluksizligini boshqarish tizimini to'g'ri loyihalash tashkilotning umumiy barqarorligini ta'minlashda strategik ahamiyatga ega bo'lgan omil sifatida namoyon bo'ladi. Tadqiqot jarayonida aniqlanganidek, risklarni erta aniqlash, biznesga ta'sir tahlilini to'liq o'tkazish,

tiklash strategiyalarini puxta ishlab chiqish va rejalarini real sharoitlarga moslab muntazam sinovdan o'tkazish BCMning asosiy poydevor elementlari bo'lib, ushbu bosqichlar uzviy va izchil amalga oshirilganda tashkilot har qanday favqulodda vaziyatdan minimal yo'qotish bilan chiqish imkoniyatiga ega bo'ladi.

BCM tizimining samarali joriy etilishi nafaqat iqtisodiy xavfsizlikni mustahkamlaydi, balki tashkilotning obro'-e'tiborini himoya qiladi, mijozlar ishonchini saqlab qoladi va bozor raqobatida barqaror pozitsiyani qo'llab-quvvatlaydi. Zamonaviy texnologiyalar, bulutli yechimlar, avtomatlashtirilgan tiklash tizimlari va xavfsizlik standartlari bilan uyg'un integratsiya qilinishi BCMning amaliy samaradorligini sezilarli darajada oshiradi. Shuningdek, xodimlarning muntazam tayyorlanishi, treninglar va favqulodda vaziyat bo'yicha mashg'ulotlarning olib borilishi tizimning har doim ishga tayyor holatda bo'lishini ta'minlaydi.

Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, BCM metodikasi o'zining moslashuvchan tuzilishi va universalligi sababli yirik korxonalardan tortib ta'lim muassasalari, davlat idoralari va kichik biznes subyektlarigacha bo'lgan keng doiradagi tashkilotlarda muvaffaqiyatli qo'llanishi mumkin. Xulosa qilib aytganda, BCMni joriy etish tashkilotning xavfsizlik madaniyatini mustahkamlovchi, kelajakdagi xavf va tahdidlarga nisbatan chidamliligini oshiruvchi, uzoq muddatli barqaror rivojlanishni ta'minlovchi muhim boshqaruv mexanizmidir.

ADABIYOTLAR:

1. Mallayev, S. (2025). *Korporativ boshqaruvda risklarni boshqarish va risk darajasini pasaytirish yo'llari*. *Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*, 3(2).
2. Rabbimov, J. (2025). *Tijorat banklarida operatsion risklarini baholash va boshqarish tizimini tashkil qilish*. *Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*. green-eco.uz
3. Turdimatov M.M., Baratova G. *Tashkilotlarga bo'layotgan xavf-xatarlarni baholash va bartaraf etish usullarini tahlili*. *TATU Samarqand filiali "Zamonaviy axborot, kommunikatsiya texnologiyalari va AT-ta'lim tatbiqi muammolari" Respublika ilmiy- amaliy anjumani*. Noyabr, Samarqand-2021 yil.
4. Xasanov, H. (2024, noyabr 11). *Aktsiyadorlik jamiyatlarida investitsion risklarni boshqarishning ilmiy-uslubiy asoslari*. *Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*, 2(4).
5. Turdimatov M.M., Abdubannayev A. *Korxona va tashkilotlarda axborot xavfsizligi risklarini baholash usullarini tahlili*. (2025). *Research and Implementation*, 3(5), 20–26.
6. Tashpulatova, M. (2024, iyun 25). *Korxonalarda risk boshqaruvi mexanizmlarini joriy etish va inson resurslaridan foydalanish istiqbollarini takomillashtirish*. *Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*, 2(6).
7. Yusupova, Z. (2025). *O'zbekiston Respublikasida infratuzilma loyihalarini amalga oshirishdagi risklarni boshqarish*. *Green Economy and Development / Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*. green-eco.uz
8. Baymirzaev, D. (2025). *Agrar korxonalar xo'jalik faoliyatida risklarni boshqarish bo'yicha samarali boshqaruv qarorlarini qabul qilishning metodologik asoslari*. *Yashil Iqtisodiyot va Taraqqiyot*.
9. Abbos Isroil o'g'li, Y., & Safarova, N. A. (2023). *Biznesda risklarni boshqarish*. *Ilm-fan va Innovatsiya Ilmiy-Amaliy Konferensiyasi*, 2(05), 19–20.
10. Turdimatov M.M., Aliyev M.G'. *Tashkilotlarda biznes uzluksizligini boshqarish tizimini loyihalash dasturini ishlab chiqish*. *Research and, Implementation*, 3(11), 292–296. <https://rai-journal.uz/index.php/rai/article/view/1785>

**UNIVERSITET HISOBLASH TARMOG‘I ZAIFLIK KO‘RSATKICHLARINI
MODELLASHTIRISHGA ASOSLANGAN AXBOROT XAVFSIZLIGI TIZIMI****Kabulov Anvar Vasilovich,***O‘zbekiston milliy universiteti Axborot xavfsizligi kafedrası professor, t.f.d.**anvarkabulov@mail.ru***O‘rinov Nodirbek Toxirjonovich,***Andijon davlat universiteti Dasturiy injiniringi kafedrası dotsenti**nodirbekurinov1@gmail.com*

Annotatsiya. Taqsimlangan hisoblash tarmog‘i uchun axborot xavfsizligi tizimini shakllantirishning ikki bosqichli metodikasi taklif etiladi. Birinchi bosqichda ehtimollar nazariyasiga asoslangan matematik model yordamida zaiflik koeffitsiyenti aniqlanadi. Ushbu koeffitsiyent axborotlashtirish obyektining tarmog‘i axborot xavfsizligi darajasini miqdoriy baholash hamda xavflarning ruxsat etilgan va tanqidiy chegaralarini belgilashga xizmat qiladi. Ikkinchi bosqichda taqsimlangan hisoblash tarmog‘i resurslari Proxmox VE virtualizatsiya tizimi asosida tashkil etilib, xostlarga Suricata IPS joylashtiriladi va Splunk SIEM tizimi bilan integratsiya qilinadi. Virtual muhitda tarmoq qurilmalari va axborot xavfsizligi komponentlarini imitatsion modellashtirish orqali himoyalangan taqsimlangan hisoblash tarmog‘i modeli quriladi. Natijada taklif etilgan metodika zaiflik darajasini aniqroq baholash va axborot xavfsizligi tizimini asoslangan ravishda loyihalash imkonini beradi.

Kalit so‘zlar: axborot xavfsizligi, axborotlashtirish obyekti, taqsimlangan hisoblash tarmog‘i, matematik model, zaiflik koeffitsiyenti, virtualizatsiya, IDS, SIEM.

**INFORMATION SECURITY SYSTEM BASED ON MODELING OF VULNERABILITY
INDICATORS OF UNIVERSITY COMPUTER NETWORK**

Abstract. A two-stage methodology for designing an information security system for a distributed computing network is proposed. In the first stage, a vulnerability coefficient is determined using a mathematical model based on probability theory. This coefficient is used to quantitatively assess the information security level of the informatization object’s network and to define the permissible and critical thresholds of security threats. In the second stage, the resources of the distributed computing network are organized on the basis of the Proxmox VE virtualization platform, Suricata IPS is deployed on the hosts, and integration with the Splunk SIEM system is implemented. In a virtual environment, a protected distributed computing network model is constructed by means of simulation of network devices and information security components. As a result, the proposed methodology makes it possible to more accurately assess the vulnerability level and to design the information security system on a well-founded basis.

Keywords: information security, informatization object, distributed computing network, mathematical model, vulnerability coefficient, virtualization, IDS, SIEM.

**СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ НА ОСНОВЕ
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ УЯЗВИМОСТИ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ
УНИВЕРСИТЕТА**

Аннотация. Предлагается двухэтапная методика формирования системы информационной безопасности для распределённой вычислительной сети. На первом этапе с использованием математической модели, основанной на аппарате теории вероятностей, определяется коэффициент уязвимости. Данный коэффициент служит для количественной оценки уровня информационной безопасности сети объекта информатизации, а также для определения допустимых и критических порогов угроз безопасности. На втором этапе ресурсы распределённой вычислительной сети организуются на базе системы виртуализации Proxmox VE, на хостах развёртывается система Suricata IPS и осуществляется интеграция с системой Splunk SIEM. В виртуальной среде путём имитационного моделирования сетевых устройств и компонентов информационной безопасности формируется модель защищённой распределённой вычислительной сети. В результате предложенная методика позволяет более точно оценивать уровень уязвимости и обоснованно проектировать систему информационной безопасности.

Ключевые слова: информационная безопасность, объект информатизации, распределённая вычислительная сеть, математическая модель, коэффициент уязвимости, виртуализация, IDS, SIEM.

Kirish. Kompaniyalar axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligiga tahdidlar landshafti uzluksiz o'zgarib borayotgan, shuningdek, kompyuter zararli dasturlari (kompyuter xakerlari)ning taktika va strategiyalari takomillashib borayotgan sharoitda axborot xavfsizligi bo'yicha mutaxassislar ko'pincha axborotni himoya qilish tizimlari ishining samaradorligi va ishonchligiga tayanadilar. Bunday axborotni himoya qilish tizimlarining asosiy vazifasi axborot tizimlaridan tashqariga axborotning (odatda maxfiy ma'lumotlarning) sizib chiqishiga yo'l qo'ymaslikdan iborat. Qator tadqiqotlarda ko'rsatilganidek [1], axborot sizib chiqishi bilan bog'liq axborot xavfsizligi hodisalarining aksariyati xodimlarning xatolari bilan bog'liq [2]. Sizib chiqishlarning taxminan 25% qismi xakerlar [3], insayderlar yoki axborot tizimlari foydalanuvchilarining yomon niyatli harakatlari natijasida yuzaga keladi.

Insayderlar ham, tashqi buzuvchilar ham axborot xavfsizligi vositalarini (yoki axborotni himoya qilish tizimini – axborotni himoya qilish tizimlarini) chetlab o'tishga intilishi tabiiy. Bu, ayniqsa, nishonga olingan (maqsadli) hujumlar sharoitida dolzarbdir. Hujum qiluvchi tomon va himoya tarafining bunday qarama-qarshiligining natijasi ko'plab omillarga bog'liq. Natijada, axborotlashtirish obyekti axborot xavfsizligi tizimi (keyingi o'rinlarda AXT) qay darajada mukammal bo'lmasin, himoya muvaffaqiyatiga oldindan kafolat berib bo'lmaydi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki, hujumlar soni [4] hamda ularning murakkabligi [5] ortib borar ekan, zamonaviy ko'p bosqichli axborotni himoya qilish tizimlari boshqa qo'shimcha vazifalarni ham hal etishga xizmat qiladi [6]. Bunday qo'shimcha vazifalarga quyidagilarni kiritish mumkin: axborot tizimlari ichida ham, tashqariga ham keraksiz jo'natmalarni oldini olish; xodimlarning axborot tizimlari resurslaridan shaxsiy maqsadlarda foydalanish holatlariga yo'l qo'ymaslik; axborotlashtirish obyektlari va/yoki uning axborot tizimlari taqsimlangan hisoblash tarmog'ida tarmoq trafiginini monitoring qilish va ma'lumot uzatish kanallari yuklamasini optimallashtirish; xodimlar yoki begona shaxslarning keraksiz axborotni (masalan, spam yoki ortiqcha hajmdagi ma'lumot) uzatishga bo'lgan urinishlarini cheklash; jo'natilayotgan xabarlarini arxivlash, bu esa, masalan, axborot xavfsizligi bo'yicha hodisani chuqurroq tahlil qilish zarur bo'lgan holatlarda muhim ahamiyatga ega; xodimlarning ish joylarida bo'lishini nazorat qilish [7].

Agar axborot xavfsizligini tashqi buzuvchilardan himoya qilish haqida gapiradigan bo'lsak, bugungi kunda hujumlarni aniqlash tizimlari ko'plab kompaniyalar va tashkilotlarning taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi konturining ajralmas qismiga aylangan. Bunda odatda bostirib kirishni aniqlash tizimlari (Intrusion Detection System, IDS) va bostirib kirishni oldini olish tizimlari (Intrusion Prevention System, IPS) yoki IDS/IPSning integrallashgan yechimlaridan foydalaniladi. Oxirgi holatda IDS/IPS tizimlari dasturiy-apparat majmuasi sifatida tarmoqni ruxsatsiz kirishdan himoya qilishga xizmat qiladi.

Axborotlashtirish obyektlari tarmog'ida axborot xavfsizligini ta'minlashning tizimli yondashuvini amalga oshirish uchun faqat axborotni himoya qilishning texnik vositalari arsenalidan foydalanish kifoya emas. Bunday axborotni himoya qilish tizimlarini loyihalash bosqichidayoq ilmiy usullardan foydalanish zarur. Bunday ilmiy usullarga, masalan, muayyan axborotlashtirish obyektlari uchun axborot xavfsizligi tizimlari va jarayonlarini matematik yoki imitasion modellashtirish kiradi. Bunday modellashtirishning asosiy maqsadi – axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligi tizimini boshqarish bilan bog'liq optimal qarorlarni topishdan iborat. Shu bilan birga, odatda qo'shimcha vazifalar ham yuzaga keladi, masalan, yuqorida tilga olingan IDS/IPS kabi ma'lum axborot xavfsizligi mexanizmlaridan foydalanish samaradorligini baholash.

Muayyan axborotlashtirish obyektlari uchun axborotni himoya qilish tizimlarini modellashtirish jarayonining o'zini shartli ravishda ikki tarkibiy qismga bo'lish mumkin:

- matematik, fizik yoki imitasion modellarning o'zini yaratish;
- axborotni himoya qilish tizimlarining zarur tavsiflarini olish maqsadida ushbu modellardan foydalanish (ularni ishga tushirish).

Yuqorida keltirilganlarning barchasi tadqiqot mavzusining dolzarbligini belgilab berdi. Xususan, axborotlashtirish obyektlari zaiflik ko'rsatkichlarini matematik va imitasion modellashtirish asosida taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasini ishlab chiqish zarurati yuzaga keldi.

Adabiyotlar tahlili. Ma'lum bir axborotlashtirish obyekti uchun axborot xavfsizligi tizimini yaratish haqida so'z borganda, odatda himoya tomoni ikki xil vaziyatdan biriga duch keladi.

Birinchi holatda axborotlashtirish obyektlari uchun axborot xavfsizligi tizimini “nol nuqtadan”, ya'ni butunlay yangidan yaratish talab etiladi. Amalda bunday holatda axborot xavfsizligi tizimi himoya obyektida

mavjud bo'lgan yechimlarga tayanmagan holda va axborotlashtirish obyektlarida axborot xavfsizligini ta'minlashga kompleks yondashuv zarurligini to'liq anglamagan holda loyihalanadi.

Ikkinchi holatda esa axborotlashtirish obyektlarida allaqachon ma'lum darajada axborot xavfsizligi vositalari mavjud bo'ladi. Bu vaziyatda himoya tomoni oldida ushbu tizim samaradorligini oshirish vazifasi turadi. Masalan, bunga axborot xavfsizligi tizimi (axborotni himoya qilish tizimlari) tarkibini optimallashtirish hisobiga erishish mumkin. Yoki mavjud vositalarni axborotlashtirish obyektlaridagi eng qimmatli axborot aktivlarini himoya qilishga qayta taqsimlash orqali. Amaliyotda aynan shu ikkinchi variant ancha ko'p uchraydi [8].

Kiberhujumlar bo'yicha ijobiy bo'lmagan statistik ma'lumotlarga qaramasdan [9], ko'pincha axborotlashtirish obyektlari rahbariyati axborot xavfsizligi masalalariga yetarlicha e'tibor bermaydi [10] — toki o'zining axborot aktivlarini yetarli darajada himoya qilmagani yoki umuman himoya mavjud emasligi oqibatida kelib chiqqan muammolarga bevosita duch kelmaguncha [11].

Biroq, agar axborotlashtirish obyektlari rahbarlari noto'g'ri tashkil etilgan axborot xavfsizligi holati oqibatida yuzaga kelgan aniq muammolarga duch kelsa [12], ular axborot xavfsizligi yo'nalishiga sezilarli miqdorda moliyaviy investitsiya ajratishga tayyor bo'ladilar. Bunday vaziyatlarning takrorlanishiga yo'l qo'ymaslik ustuvor vazifaga aylanadi [13].

[14] da ta'kidlanganidek, axborotlashtirish obyektlarida axborot xavfsizligining belgilangan darajasiga erishish o'zaro bog'liq vazifalar majmuasini muvaffaqiyatli hal etishga bog'liq. Bunday vazifalarga, masalan, axborot xavfsizligi tizimini (axborotni himoya qilish tizimlarini) ishlab chiqish va joriy etish jarayonida yechiladigan texnik-texnologik, moliyaviy, tashkiliy va boshqa turdagi masalalar kiradi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilganlarga tayangan holda, zamonaviy axborotlashtirish obyektlari larning ko'pchiligi uchun ajralmas tarkibiy qism bo'lgan taqsimlangan hisoblash tarmog'i zaiflik ko'rsatkichlarini modellashtirishga asoslangan axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasini ishlab chiqish masalasi dolzarb bo'lib qolayotganini ta'kidlash mumkin.

Tadqiqot metodologiyasi. Taqsimlangan hisoblash tarmog'i zaiflik ko'rsatkichlarini modellashtirishga asoslangan axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasini, shuningdek axborotlashtirish obyektlari tarmog'ining zaiflik koeffitsiyentini tavsiflovchi modelni ishlab chiqish.

Tadqiqot natijalari. Ma'lum bir axborotlashtirish obyektlari uchun qaysi axborot xavfsizligi tizimlarini tanlash masalasini hal etish uchun axborot xavfsizligi tahdidlarining yuzaga kelishiga oid yagona dinamik koeffitsiyentni ko'rib chiqish zarur [15]. Ushbu koeffitsiyent $P^{DT} \in [0; 1]$ tahdidlar dinamikasini, masalan axborotlashtirish obyektlarining taqsimlangan hisoblash tarmog'isi uchun, hisobga olishga imkon beradi, shuningdek taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun tahdidlar ehtimolligini modellashtirishda qo'llaniladi.

Odatda, ma'lum vaqt oralig'ida faoliyat yuritadigan har bir tashkilot yoki kompaniyada axborot xavfsizligi insidentlari bo'yicha ma'lum statistik ma'lumotlar mavjud bo'ladi. Demak, tahdidlarning ro'yobga chiqishining statistik ehtimoli haqida gapirish mumkin, u $P_{stat} \in [0; 1]$ bilan ifodalanadi. Shuningdek, axborotlashtirish obyektlarining taqsimlangan hisoblash tarmog'isi uchun tahdidlarni ekspert baholash natijalariga tayanish mumkin, bunday baholash $P_{expert} \in [0; 1]$ ko'rinishida ifodalanadi.

[15] da taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun axborot xavfsizligi tahdidlarining dinamik komponentini ($DC \in [0; 1]$) ko'rinishida ko'rib chiqish taklif etilgan:

$$DC = \begin{cases} P_{stat}^{n-1} > P_{stat}^n, \left(\frac{P_{stat}^{n-1} - P_{stat}^n}{P_{stat}^n} \right); \\ P_{stat}^{n-1} \leq P_{stat}^n, \left(\frac{P_{stat}^{n-1} - P_{stat}^n}{P_{stat}^n} \right); \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda (n) — masalan, axborotlashtirish obyektlarining taqsimlangan hisoblash tarmog'isi uchun axborot xavfsizligi tahdidlari bo'yicha statistik ma'lumotlar davrlari. Ma'lumotlar, masalan, SIEM tizimi yordamida axborot xavfsizligi hodisalarini monitoring qilish natijasida yoki IPS/IDS tizimlari ishiga oid ma'lumotlar asosida olinadi.

Keyingi bosqichda axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'isi himoya elementlarini aniqlaymiz. Ushbu bosqichda, masalan, ekspert yordamida taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun zaifliklar va tahdidlar gistogrammalari tuziladi.

Tahdid ro'yobga chiqqan hollarda himoya tomoni favqulodda vaziyatga duch keladi. Bunday vaziyat tahdidlarni amalga oshirishning barcha mumkin bo'lgan oqibatlarini ko'rib chiqishni talab etadi. Masalan, bu axborotlashtirish obyektlari uchun ma'naviy, moddiy, axborot yo'qotishlari va shu kabilar bilan bog'liq bo'lishi mumkin.

Tahdidlarni amalga oshirish ehtimolining maksimal qiymatini P_{max}^{DT} , minimal qiymatini esa P_{min}^{DT} deb belgilaymiz. Buni quyidagicha talqin qilish mumkin:

- agar $P_n^{DT} > P_{max}^{DT}$ bo'lsa, ushbu tahdid, masalan axborotlashtirish obyektlarining taqsimlangan hisoblash tarmog'isi uchun, chuqurroq tahlil qilish zarur bo'lgan tahdidlar qatoriga kiritiladi; u avtomatik tarzda yuqori ustuvorlikka ega deb belgilanadi va uni bartaraf etish bo'yicha choralar ko'riladi;
- agar $P_{min}^{DT} > P_n^{DT} > P_{max}^{DT}$ bo'lsa, bu tahdid o'rta ustuvorlikka ega tahdid sifatida qoraladi;
- agar $P_n^{DT} > P_{min}^{DT}$ bo'lsa, bu tahdid past ustuvorlikka ega tahdid sifatida tavsiflanadi.

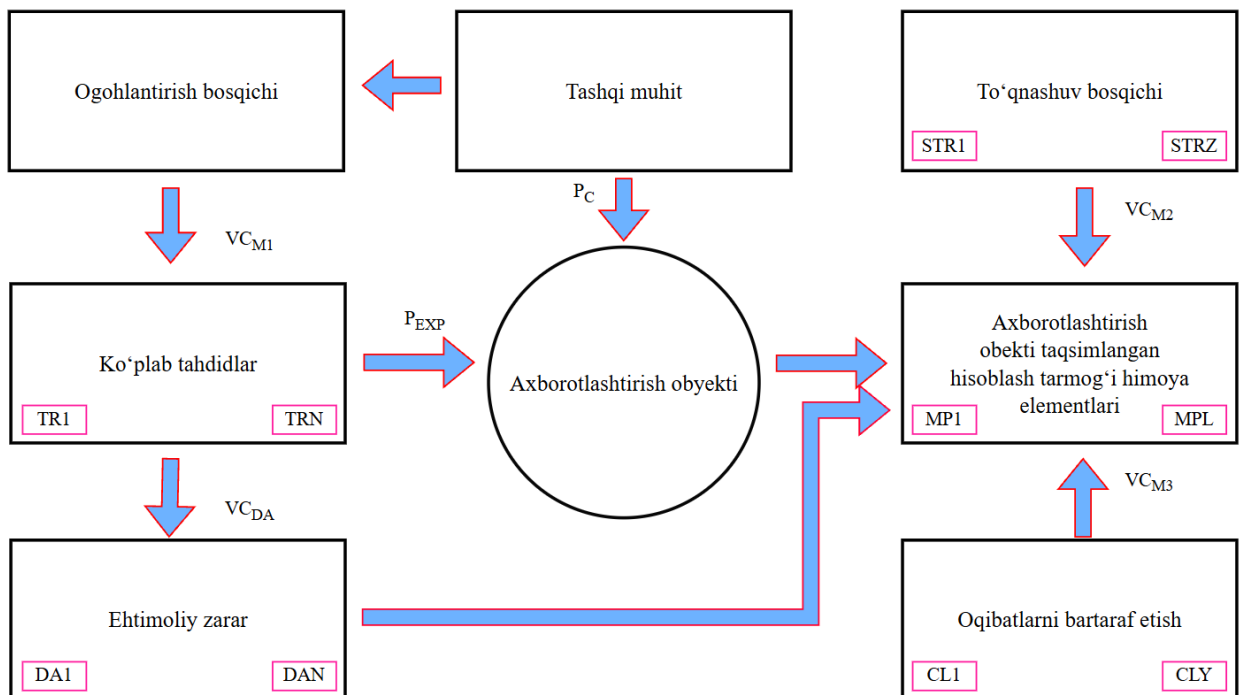
Demak, birinchi bosqichda axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligi bo'limi xodimlari uchun tahdidlarni tahlil qilish va baholash, masalan taqsimlangan hisoblash tarmog'isi uchun axborotni himoya qilish tizimlari mavjud tarkibi doirasida tahdidlarni saralash (filtrlash) imkoniyati yaratiladi.

Endi taqsimlangan hisoblash tarmog'ining zaiflik koeffitsiyentini ko'rib chiqamiz.

Zaiflik tushunchasi ostida taqsimlangan hisoblash tarmog'ining ma'lum bir himoya elementi, masalan, brendmauening (firewall) tahdid ta'siriga beriluvchanlik xususiyati tushuniladi. Ya'ni ushbu axborot xavfsizligi tizimiga beqarorlashtiruvchi omillar ta'sir ko'rsatishi mumkin. Brendmauerga ta'sir etuvchi eng sodda beqarorlashtiruvchi omillar sifatida alohida quyidagilarni keltirish mumkin:

- Axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'iga ishonchsiz ilovalardan kirish;
- RAW Socket'dan foydalanib axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'iga kirish;
- Axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'ining ishonchli jarayonlariga (processlariga) tashqi DLL modulini kiritish;
- Axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'ining ishonchli jarayonlarida trojan oqimlarini yaratish;
- ishonchli jarayonlarning mashina kodini o'zgartirish;
- ishonchsiz jarayonni yashirish;
- va hokazo.

Axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'ining zaiflik koeffitsiyentini joriy vaqt nuqtasida mavjud axborot xavfsizligi darajasining miqdoriy bahosi sifatida talqin qilish mumkin. Shu bilan birga, bunday baholash taqsimlangan hisoblash tarmog'ini hamda umuman axborotlashtirish obyektlarining real ish sharoitlari bilan uzviy bog'liq bo'ladi. taqsimlangan hisoblash tarmog'ini (yoki umuman axborotlashtirish obyektlari) zaiflik koeffitsiyentini shakllantirishga yondashuv 1-rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm. Universitet tarmog'ini zaiflik koeffitsiyentini shakllantirishga yondashuv

Shunda taqsimlangan hisoblash tarmog'ini zaiflik koeffitsiyenti qiymatini (VC) [15] ish natijalarini hisobga olgan holda quyidagicha ifodalaymiz:

$$VC = \sum_{i=1}^N VC_i * \frac{\sum_j^M DC_{ij}}{\max \sum_j^M DC_{ij}} \quad (2)$$

bu yerda: VC_i – taqsimlangan hisoblash tarmog'ini axborot xavfsizligi uchun i –tahdid yuzaga kelgan holatda zaiflik koeffitsiyenti qiymati; DC_{ij} – axborot xavfsizligi bo'yicha i –tahdid yuzaga kelganida

taqsimlangan hisoblash tarmog'ining j -komponenti (masalan, axborot xavfsizligi vositalari) uchun zarar koeffitsiyenti qiymati; N – taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi uchun tahdidlar soni; M – AX tizimi (axborotni himoya qilish tizimlari) elementlari ham kiritilgan holda taqsimlangan hisoblash tarmog'i elementlarining soni.

Tahdidlarni bartaraf etish uchun odatda faqat tashkiliy choralar yetarli bo'lmaydi. Samarali himoya, qoida tariqasida, axborotni himoya qilish texnik vositalarini xarid qilish, xodimlarni o'qitish, yuqori malakali mutaxassislarni jalb qilish va hokazo yo'nalishlarda moliyaviy investitsiyalarni talab qiladi.

Axborot xavfsizligi tizimlari sonini, ularning axborot xavfsizligining integral metrikalariga asoslangan texnik parametrlarini tanlash masalasini hal etish uchun axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun maqsad funksiyasi sifatida yillik keltirilgan xarajatlar qabul qilinadi:

$$C = p * \sum_{i=1}^n CE_i + \sum_{i=1}^m OC_i, \quad (3)$$

bu yerda: p – tahlil qilinayotgan axborotlashtirish obyektlari uchun taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi bo'yicha kapital qo'yilmalarning nisbiy samaradorligini tavsiflovchi koeffitsiyent; CE_i, OC_i – mos ravishda taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi bo'yicha kapital (kapital xarajatlar) va ekspluatatsion (foydalanish) xarajatlarning i -moddasi; n, m – mos ravishda taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligiga oid kapital va ekspluatatsion xarajatlar tarkibiy qismlarining soni.

Modelni soddalashtirish maqsadida taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi uchun yillik keltirilgan xarajatlar ushbu taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi tizimiga investitsiyalar samaradorligini baholashning asosiy mezon sifatida qabul qilinadi. Bunday soddalashtirish modelning umumiy ishlash samaradorligini ko'rsatishga imkon beradi. Maqsad funksiyasini (MF) hisoblash formulasining soddaligi taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun optimal axborot xavfsizligi tizimlari tarkibini aniqlash masalasini yechishda model mosligini tahlil qilishni yengillashtiradi.

Taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi uchun ma'lum bir sinfga oid axborot xavfsizligi tizimini (masalan, brendmauer, IPS/IDS, SIEM va hokazo) sotib olish bilan bog'liq xarajatlarni quyidagi funksiya ko'rinishida ifodalaymiz:

$$CE_{1u} = a_1 + a_2 * IPI, \quad (4)$$

bu yerda: (IPI) – ma'lum bir sinfga mansub axborot xavfsizligi tizimi samaradorligining integral ko'rsatkichi (masalan, brendmauer, IPS/IDS, SIEM va boshqalar); $a_1 + a_2$ – chiziqli yaqinlashtirish uchun koeffitsiyentlar.

Xuddi shu tarzda taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun boshqa axborot xavfsizligi tizimlari sinflarini sotib olish, o'rnatish, ulash (masalan, axborotlashtirish obyektlari axborot tizimiga ulash, kirishni boshqarish vositalari va hokazo) bilan bog'liq kapital xarajatlarni ham ifodalash mumkin.

Ekspluatatsion xarajatlar va cheklovlarni ham xuddi shunday yondashuv asosida ifodalash mumkin, [16, 17] ishlarda ko'rsatilganidek, bu yerda yaqinlashtirish ifodalari majburiy ravishda chiziqli bo'lmasligi mumkin.

Taklif etilgan metodikada taqsimlangan hisoblash tarmog'i (yoki axborotlashtirish obyektlari) uchun axborot xavfsizligi tizimi tavsifini batafsil berish zarur bo'lgan asosiy alohida mezonlar to'plami CR kiritiladi:

$$CR = \{CR_1, CR_2, CR_3, CR_4, CR_5, \} \quad (5)$$

bu yerda: CR_1 , – ma'lum sinfga mansub AX tizimi qiymati; CR_2 , – mos axborot xavfsizligi tizimi bilan qamrab olinadigan axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligi bo'yicha tahdidlar sinflari soni; CR_3 , – taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun mos axborot xavfsizligi tizimi sinfi hisobiga kamayadigan (neytrallashtiradigan) risk miqdori; CR_4 , – mos axborot xavfsizligi tizimi uchun axborot xavfsizligi sertifikatlarining mavjudligi; CR_5 , – umumiy himoya majmuasida va axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligi doirasida alohida axborot xavfsizligi tizimining moslashuvchanlik (mos keluvchanlik) ko'rsatkichi.

Yuqorida keltirilgan alohida mezonlarning har biri 0 dan 1 gacha bo'lgan oraliqda qiymat qabul qilishi mumkin. Masalan, CR_5 , uchun: agar ma'lum bir axborot xavfsizligi tizimi himoyalangan taqsimlangan hisoblash tarmog'i tugunida joylashgan boshqa vositalar bilan to'liq mos bo'lsa, $CR_5 = 1$, aks holda $CR_5 = 0$ deb qabul qilinadi. CR_1 mezon uchun izoh quyidagicha bo'lishi mumkin:

$$CR_1 = \begin{cases} 1, & \text{if } C_{ist} < C_{ist}^{max}; \\ 0,5 & \text{if } 0,5 * C_{ist}^{max} \leq C_{ist} \leq C_{ist}^{max}; \\ 0 & \text{if } C_{ist} > C_{ist}^{max}, \end{cases} \quad (6)$$

bu yerda: C_{ist} – tahlil qilinayotgan sinf doirasidagi axborot xavfsizligi tizimining (masalan, brendmauer, kirishni cheklash vositalari, bostirib kirishni aniqlash tizimlari va hokazo) haqiqiy qiymati; C_{ist}^{max} – shu sinf doirasidagi axborot xavfsizligi tizimining maksimal qiymati. CR_2 mezonini uchun izoh quyidagicha bo‘lishi mumkin:

$$CR_2 = \begin{cases} 1, \text{ if } \sum_{i=1}^n m_{ISR_{ii}}^{ist_k} = |IST|; \\ 0,5 \text{ if } 0,5 * |IST| \leq \sum_{i=1}^n m_{ISR_{ii}}^{ist_k} \leq |IST|; \\ 0,25 \text{ if } 0 < \sum_{i=1}^n m_{ISR_{ii}}^{ist_k} \leq 0,5 * |IST| \\ 0 \text{ if } \sum_{i=1}^n m_{ISR_{ii}}^{ist_k} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

bu yerda: IST – taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligi uchun tahdidlar ko‘pligi (bu miqdor doimiy emas va tashqi omillarga bog‘liq); n – ma’lum taqsimlangan hisoblash tarmog‘i uchun dolzarb tahdidlar soni; $m_{ISR_{ii}}^{ist_k}$ – mavjud va rejalashtirilgan himoya vositalari hamda taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligi uchun dolzarb kiber-tahdidlarning qamrov (qayta qoplanish) matritsasi. CR_3 mezonini uchun izoh quyidagicha bo‘lishi mumkin [16]:

$$CR_3 = \begin{cases} 1, \text{ if } \sum_{i=1}^n R_{ISR} * m_{ISR_{ii}}^{ist_k} < R_a; \\ 0,5 \text{ if } R_a \leq \sum_{i=1}^n R_{ISR} * m_{ISR_{ii}}^{ist_k} \leq 0,5 * R_{cr}; \\ 0,25 \text{ if } 0,5 * R_{cr} \leq \sum_{i=1}^n R_{ISR} * m_{ISR_{ii}}^{ist_k} \leq R_{cr} \\ 0 \text{ if } \sum_{i=1}^n R_{ISR} * m_{ISR_{ii}}^{ist_k} \geq R_{cr}, \end{cases} \quad (8)$$

bu yerda: R_a, R_{cr} – mos ravishda axborotlashtirish obyektlari taqsimlangan hisoblash tarmog‘i uchun axborot xavfsizligi riskining ruxsat etilgan va kritik darajalari; n – ma’lum taqsimlangan hisoblash tarmog‘i uchun dolzarb tahdidlar soni; $m_{ISR_{ii}}^{ist_k}$ – mavjud va rejalashtirilgan axborot xavfsizligi tizimlari hamda axborot xavfsizligi tahdidlari uchun qamrov matritsasi.

Alohida mezonlar uchun shunga o‘xshash hisoblashlar ilmiy adabiyotlarda bir necha bor tasvirlangan (masalan, [10], [12]).

Shunda taklif etilgan alohida mezonlardan foydalanib, taqsimlangan hisoblash tarmog‘i uchun butun axborot xavfsizligi tizimi samaradorligini (EF) quyidagi vektor ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$EF = \{1, 1, 1, 1, 1\} \quad (9)$$

Aslida, bu ko‘rinishda taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligi tizimlari samaradorligini baholash uchun “etalon” alohida mezonlar to‘plamini olish mumkin.

Shunday qilib, yuqorida aytilganlarni hisobga olgan holda taqsimlangan hisoblash tarmog‘i zaiflik koeffitsiyentini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$VC = \sum_{j=1}^M \frac{EF[P_{expert(i)} * (P_{stat(i)} + DC_i)]}{\sum_j^M \alpha_{ij} * CEF_{ij}}, \quad (10)$$

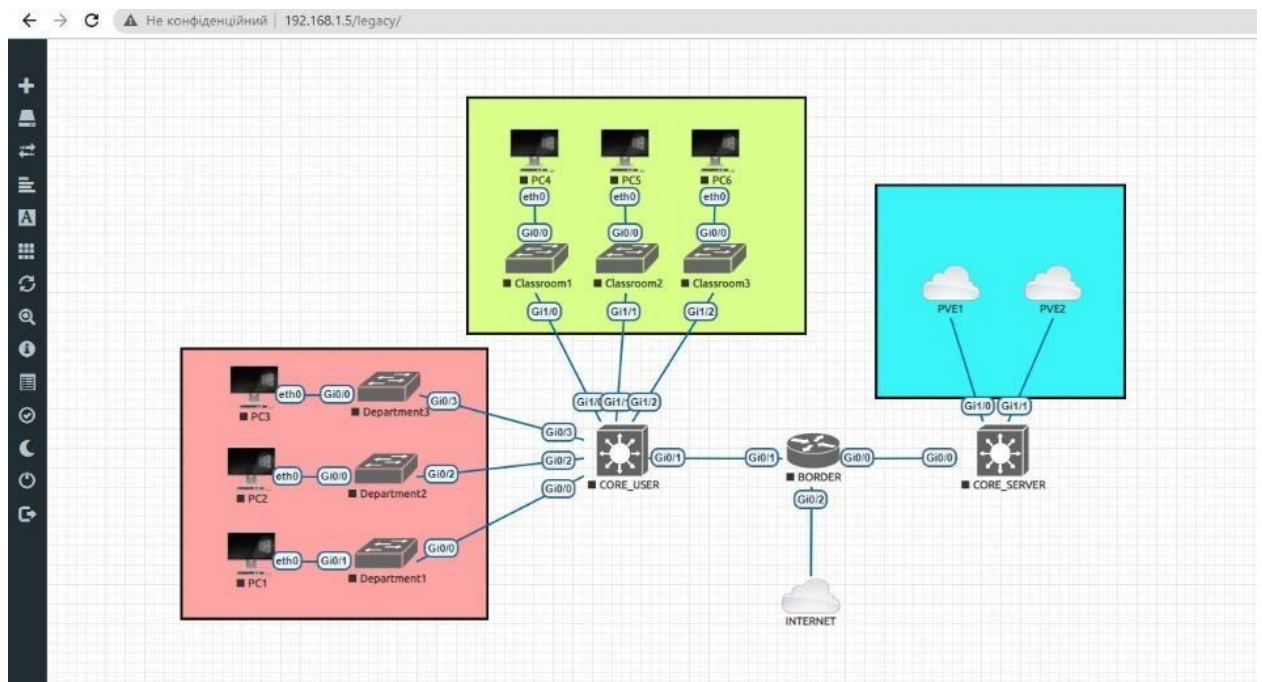
bu yerda: α_{ij} – taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligiga nisbatan i -tahdidni bloklashning mos bosqichlarida taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligining j -vositasi ta’sir darajasini tavsiflovchi og‘irlik koeffitsiyentlari; CEF_{ij} – taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligiga nisbatan i -tahdidni bloklashning mos bosqichlarida taqsimlangan hisoblash tarmog‘i axborot xavfsizligining j -vositasi (masalan, brendmauer, IPS/IDS, SIEM va hokazo) samaradorligini tavsiflovchi og‘irlik koeffitsiyentlari.

Taklif etilgan axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasining samaradorligini eksperimental tekshirish maqsadida shartli (virtual) axborotlashtirish obyektlari tarmog‘i loyihalandi. Kompyuterda Windows 11 operatsion tizimi o‘rnatilgan bo‘lib, unda VmWare Workstation platformasi ishlatildi. Kompyuterning o‘zi Intel Xeon E5 1650 server protsessoriga asoslangan bo‘lib, 64 GB tezkor xotira bilan jihozlangan; bu virtual mashinalar (VM) yaratish va tizimlarni modellashtirish amaliyotlari uchun yetarli hisoblanadi.

Jami 3 ta virtual mashina yaratildi, ulardan 2 tasi Proxmox VE operatsion tizimi tomonidan boshqarilib, boshqa virtual mashinalarni joylashtirish uchun gipervizor sifatida xizmat qiladi. Uchinchi virtual mashinada Ubuntu Server operatsion tizimi o‘rnatildi. Shuningdek, ushbu VMda EVE-NG tarmoqlarni modellashtirish tizimi ham o‘rnatildi.

Infratuzilmani qulay boshqarish maqsadida klasterli yechimlardan foydalanildi. Bu bir nechta serverlarni bitta tizimga birlashtirish, resurslarni zaxiralash va markazlashtirilgan boshqaruvni ta'minlash imkonini berdi. Proxmox VE ushbu imkoniyatni qo'llab-quvvatlagani sababli, 2 ta serverni bitta klasterga birlashtirish haqida qaror qabul qilindi. Klaster yaratilgandan so'ng istalgan host manziliga murojaat qilib, ikki server va ularning barcha resurslari (VMlar, konteynerlar, saqlash qurilmalari va hokazo) haqida ma'lumotlarni ko'rish mumkin bo'ldi. Klaster yaratish bir qator afzalliklarni berdi, ulardan biri – serverlardagi VMlarni klasterning boshqa tugunlariga ko'chirish imkoniyati bo'lib, bu holat 2-rasmda ko'rsatilgan.

Yuqorida ta'kidlanganidek, tarmoq qurilmalarida axborotlashtirish obyektlari tarmog'i modelini qurish uchun EVE-NG ilovasi qo'llanildi. 1 ta marshrutizator (brendmauer funksiyasini ham bajaradi) va 2 ta yadroviy (core) kommutator qo'shildi. Birinchi kommutator server segmenti, ikkinchisi esa foydalanuvchi segmenti uchun mas'ul bo'ldi. Shuningdek, foydalanuvchi segmenti uchun mas'ul yadroviy kommutatorga ulangan kirish (access) kommutatorlari ham qo'shildi.



2-rasm. Axborotlashtirish obyekti tarmog'i diagrammasi

Shunga mos ravishda, ushbu ikki segmentdagi foydalanuvchilar uchun kirish siyosati turlicha deb qabul qilindi: menejment kommutatorlari orqali ulangan foydalanuvchilar axborotlashtirish obyektlari serverlarida joylashgan lokal resurslarga ko'proq kirish huquqlariga ega bo'ladi, 2-rasmga qarang. Barcha qurilmalar VmWare'ning virtual interfeyslariga ulangan. VmWare interfeyslari esa o'z navbatida shaxsiy kompyuterning tarmoq interfeysiga ulanadi. Kompyuterning o'zi provayder tarmog'iga ulangan marshrutizatorga ulab qo'yilgan.

Axborotlashtirish obyektlari axborot xavfsizligining kompleks tizimini shakllantirish metodikasini tadqiq etish doirasida axborotlashtirish obyektlari tarmog'i parametrlarini tashqi hujumlardan himoyalangan holatga o'zgartirish qarori qabul qilindi. Yadro kommutatorlarini hamda ular bilan marshrutizator orasidagi aloqalarni rezervlash (rezervlashgan ulanishlarni tashkil etish) haqida qaror qabul qilindi. Buning uchun serverlardan va foydalanuvchi kirish kommutatorlaridan ikkala yadro kommutatoriga ham aloqalarni tashkil etish lozim bo'ladi. Bugungi kunda aksariyat kirish kommutatorlarida bunday maqsadlar uchun 2–4 ta yuqori tezlikdagi portlar mavjud va serverlarda odatda kamida 2 portli tarmoq kartalari o'rnatilgan bo'ladi.

Marshrutizator va yadro kommutatorlarini o'zaro bog'lash uchun dinamik marshrutlash protokoli o'rnatildi.

Keyin yadro kommutatorlarida virtual tarmoqlar (VLAN) yaratildi. Bu axborotlashtirish obyektlari resurslarini axborot xavfsizligini ta'minlash, kirishni cheklash va tarmoq trafiginii ichki kichik tarmoqlarga (subtarmoqlarga) bo'lish orqali segmentatsiya qilish imkonini berdi. Shuningdek, tarmoqdagi sikllar (loop) paydo bo'lishining oldini olish uchun kommutatorlarda STP protokoli sozlandi. Bundan tashqari, DHCP snooping, ARP paketlarini tekshirish, flood turidagi hujumlar uchun trafikni filtrdan o'tkazish funksiyalari yo'lga qo'yildi.

xilma-xilligini inobatga olgan holda, axborot xavfsizligini ta'minlash bo'yicha chora-tadbirlar va vositalar majmui shakllantiriladi.

Taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun axborot xavfsizligi vositalarini ko'paytirish, demakki, sarflanadigan resurslar, birinchi navbatda moliyaviy resurslar hajmini oshirish har doim ham kutilgan natijani bermasligi allaqachon isbotlangan. taqsimlangan hisoblash tarmog'ida qo'llaniladigan axborot xavfsizligi vositalari va chora-tadbirlari turli yo'nalishlarga qaratilgan bo'lishi mumkin. Masalan, bu zararli dasturiy ta'minotning muhim taqsimlangan hisoblash tarmog'i tugunlariga kirib borishiga yo'l qo'ymaydigan axborot xavfsizligi vositalari bo'lishi mumkin. Yoki tizim administratorlari uchun butun taqsimlangan hisoblash tarmog'i hamda uning alohida komponentlari ishini monitoring qilishga mo'ljallangan ommabop dasturiy mahsulotlar bo'lishi mumkin.

Axborot xavfsizligi tahdidlari landshafti uzluksiz o'zgarib borayotgani va taqsimlangan hisoblash tarmog'i arxitekturasini murakkablashgani sari tahdidlar soni ortib borayotganini inobatga olsak, tarmoqlarning xavfsiz va ishonchli ishlashini ta'minlashga doir masalalar yanada ko'proq e'tibor va qo'shimcha tadqiqotlarni talab qiladi. Shu sababli taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish bo'yicha taklif etilgan metodika va zaiflik koeffitsiyenti modeli axborotlashtirish obyektining taqsimlangan hisoblash tarmog'i bo'yicha zaiflik darajalarini miqdoriy baholash imkonini berishi amaliy jihatdan asoslangan.

Xulosa. Shunday qilib, olib borilgan tadqiqotlar quyidagi natijalarga erishish imkonini berdi:

- Universitet hisoblash tarmog'i (yoki taqsimlangan hisoblash tarmog'i) uchun axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasini aniqlashtirish bo'yicha takliflar ilgari surildi.
- Metodikaning birinchi bosqichida ehtimollar nazariyasi apparatiga tayangan holda matematik modellashtirishdan foydalanish tavsiya etiladi. Taklif etilgan yondashuv taqsimlangan hisoblash tarmog'i zaiflik koeffitsiyentini (zarurat tug'ilganda esa umuman axborotlashtirish obyektlari uchun) hisoblashga mo'ljallangan analitik ifodani olish imkonini berdi.
- Taqsimlangan hisoblash tarmog'i axborot xavfsizligi tizimini shakllantirish metodikasining ikkinchi bosqichida axborotlashtirish obyektlari tarmog'i axborot xavfsizligi komponentlarini imitasion modellashtirish va virtualizatsiya usullari qo'llaniladi.
- Eksperimental tadqiqotlar jarayonida axborotlashtirish obyektlari ning himoyalangan tarmoq modeli yaratildi. Eksperimental modelda tarmoq qurilmalari va axborot xavfsizligi komponentlari virtual mashinalarda (VM) emulyatsiya qilindi. axborotlashtirish obyektlari tarmog'i resurslari Proxmox VE server virtualizatsiya tizimi yordamida qayta tiklandi (replikatsiya qilindi). axborotlashtirish obyektlari tarmog'i xostlarida PVE boshqaruvi ostida Suricata IPS tizimi joylashtirildi, Splunk tizimi esa SIEM sifatida qo'llanildi.
- Taqsimlangan hisoblash tarmog'i uchun axborot xavfsizligi tizimini shakllantirishning taklif etilgan metodikasi va zaiflik koeffitsiyenti modeli taqsimlangan hisoblash tarmog'ining turli elementlari zaiflik darajalarini miqdoriy baholash imkonini berishi ko'rsatildi. Shuningdek, taklif etilgan model axborot xavfsizligi tarmoq tizimini loyihalash bosqichida axborotlashtirish obyektlari zaifligining kutilayotgan darajasini baholashni amalga oshirish, shuningdek tahdidlar va zaifliklarni neytrallashtirish bo'yicha qarshi choralar samaradorligini oldindan baholashga imkon berishi ta'kidlandi.

ADABIYOTLAR:

1. Evans, M., He, Y., Maglaras, L., & Janicke, H. HEART-IS: A novel technique for evaluating human error-related information security incidents. // *Computers & Security*. 2019. 80. P. 74-89. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2018.09.002>
2. Pérez-González, D., Preciado, S. T., & Solana-Gonzalez, P. Organizational practices as antecedents of the information security management performance: An empirical investigation. // *Information Technology & People*. 2019. 32(5). P. 1262-1275. <https://doi.org/10.1108/ITP-06-2018-0261>
3. Schlette, D., Caselli, M., & Pernul, G. A comparative study on cyber threat intelligence: the security incident response perspective. // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2021. 23(4). P. 2525-2556. <https://doi.org/10.1109/COMST.2021.3117338>
4. Zegzhda, D. P., Lavrova, D. S., & Pavlenko, E. Y. Management of a dynamic infrastructure of complex systems under conditions of directed cyber attacks. // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2020. 59(3). P. 358-370. <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230720020124>
5. Ahmetoglu, H., & Das, R. A comprehensive review on detection of cyber-attacks: Data sets, methods, challenges, and future research directions. // *Internet of Things*. 2022. 100615. <https://doi.org/10.1016/j.iot.2022.100615>

6. An, P., Wang, Z., & Zhang, C. Ensemble unsupervised autoencoders and Gaussian mixture model for cyberattack detection. // *Information Processing & Management*. 2022. 59(2). 102844. <https://doi.org/10.1016/j.ipm.2021.102844>
7. Aribisala, A., Khan, M. S., & Husari, G. (2021, October). Machine Learning Algorithms and Their Applications in Classifying Cyber-Attacks On a Smart Grid Network. In *2021 IEEE 12th Annual Information Technology, Electronics and Mobile Communication Conference (IEMCON)* (pp. 0063-0069). IEEE. <http://dx.doi.org/10.1109/IEMCON53756.2021.9623067>
8. Angelini, M., Blasilli, G., Catarci, T., Lenti, S., & Santucci, G. Vulnus: Visual vulnerability analysis for network security. // *IEEE transactions on visualization and computer graphics*. 2018. 25(1). P. 183-192. <http://dx.doi.org/10.1109/TVCG.2018.2865028>
9. Yeboah-Ofori A, Islam S. Cyber Security Threat Modeling for Supply Chain Organizational Environments. // *Future Internet*. 2019. 11(3):63. <https://doi.org/10.3390/fi11030063>
10. Tanwar, R., Choudhury, T., Zamani, M., & Gupta, S. (Eds.). *Information Security and Optimization*. CRC Press. 2020.
11. Almohri, H. M., Watson, L. T., Yao, D., & Ou, X. Security optimization of dynamic networks with probabilistic graph modeling and linear programming. // *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*. 2015. 13(4). P. 474-487. <http://dx.doi.org/10.1109/TDSC.2015.2411264>
12. Bouyeddou, B., Harrou, F., Kadri, B., & Sun, Y. Detecting network cyber-attacks using an integrated statistical approach. // *Cluster Computing*. 2021. 24(2). P. 1435-1453. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10586-020-03203-1>
13. Utzerath, J., & Dennis, R. Numbers and statistics: data and cyber breaches under the General Data Protection Regulation. // *International Cybersecurity Law Review*. 2021. 2(2). P. 339-348. <https://doi.org/10.1365/s43439-021-00041-8>
14. Schatz D., Bashroush R. Economic valuation for information security investment: a systematic literature review. // *Information Systems Frontiers*. 2017. T. 19. №5. P. 1205-1228. DOI <https://doi.org/10.1007/s10796-016-9648-8>
15. Оладько В.С. Модель выбора рационального состава средств защиты в системе электронной коммерции//*Вопросы кибербезопасности*. 2016. №1 (14). С.17-23. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-vybora-ratsionalnogo-sostava-sredstv-zaschity-v-sisteme-elektronnoy-kommertsii>
16. Прокушев Я.Е., Пономаренко С.В., Пономаренко С.А. Моделирование процессов проектирования систем защиты информации в государственных информационных системах // *Computational nanotechnology*. 2021. T. 8. № 1. С. 26–37. DOI: 10.33693/2313-223X-2021-8-1-26-37
17. Merchan-Lima, J., Astudillo-Salinas, F., Tello-Oquendo, L., Sanchez, F., Lopez-Fonseca, G., & Quiroz, D. Information security management frameworks and institution: a systematic review. // *Annals of Telecommunications*. 2021. 76(3). P. 255-270. <https://doi.org/10.1007/s12243-020-00783-2>

GTL KORXONALARI BUG' QOZONLARIDA BUG' TAYYORLASH JARAYONLARINI MUKAMMAL BOSHQARISH TIZIMLARINI ISHLAB CHIQUISH

Hamrayev Javlonbek Hoshim o'g'li,

Qarshi davlat texnika universiteti; p.f.f.d (PhD) dotsent

hamrayevjavlonbek11@gmail.com

Farmonov Lazizbek Beg'am o'g'li,

Qarshi davlat texnika universiteti2-kurs magistratura talabasi

Annotatsiya. Mazkur maqolada GTL (Gas-to-Liquid) texnologiyasi asosida ishlovchi sanoat korxonalarida bug' qozonlarida bug' tayyorlash jarayonlarini samarali boshqarish masalalari yoritilgan. Tadqiqotda mavjud boshqaruv tizimlarining kamchiliklari tahlil qilinib, avtomatlashtirilgan nazorat va boshqaruv algoritmlarini takomillashtirish yo'llari taklif etilgan. Shuningdek, energiya tejamkorlikni oshirish, issiqlik yo'qotishlarini kamaytirish hamda bug' sifati va barqarorligini ta'minlashga qaratilgan texnik yechimlar ishlab chiqilgan. Natijada ishlab chiqilgan tizim bug' ishlab chiqarish jarayonini real vaqt rejimida nazorat qilish, optimal harorat va bosim parametrlarini avtomatik ushlab turish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: GTL texnologiyasi, bug' qozoni, avtomatlashtirish, boshqaruv tizimi, energiya samaradorligi, issiqlik jarayoni, texnologik nazorat, raqamli tizim.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМ СОВЕРШЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ПАРОПОДГОТОВКИ В ПАРОВЫХ КОТЛАХ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ GTL

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы эффективного управления процессами подготовки пара в паровых котлах на промышленных предприятиях, работающих по технологии GTL (Gas-to-Liquid). В исследовании проанализированы недостатки существующих систем управления и предложены пути совершенствования алгоритмов автоматизированного контроля и управления. Также разработаны технические решения, направленные на повышение энергоэффективности, снижение потерь тепла и обеспечение качества и стабильности пара. В результате разработанная система позволяет контролировать процесс производства пара в режиме реального времени, автоматически поддерживать оптимальные параметры температуры и давления.

Ключевые слова: технология GTL, паровой котел, автоматизация, система управления, энергоэффективность, тепловой процесс, технологический контроль, цифровая система.

DEVELOPMENT OF A COMPREHENSIVE CONTROL SYSTEM FOR STEAM PRODUCTION PROCESSES IN STEAM BOILERS AT GTL ENTERPRISES

Abstract. This article covers issues of effective management of steam preparation processes in steam boilers at industrial enterprises operating on the basis of GTL (Gas-to-Liquid) technology. The study analyzes the shortcomings of existing control systems and proposes ways to improve automated control and management algorithms. Also, technical solutions aimed at increasing energy efficiency, reducing heat losses, and ensuring steam quality and stability have been developed. As a result, the developed system allows real-time control of the steam production process, automatic maintenance of optimal temperature and pressure parameters.

Keywords: GTL technology, steam boiler, automation, control system, energy efficiency, thermal process, technological control, digital system.

Kirish. Zamonaviy GTL (Gas-to-Liquid) korxonalarida gazni suyuqlikka aylantirish texnologiyasida asosiy issiqlik manbai sifatida bug' qozonlariga tayangan holda ishlaydi. Bug' ishlab chiqarish jarayoni GTL ishlab chiqarishning uzluksizligi, mahsulot sifati va energiya tejamkorligi uchun hal qiluvchi ahamiyatga ega. Shu sababli, bug' tayyorlash jarayonini mukammal boshqarish tizimini yaratish sanoatning barqaror ishlashini, xavfsizligini va iqtisodiy samaradorligini oshirishda muhim omil hisoblanadi.

GTL texnologiyalarining keng joriy etilishi natijasida energiya resurslaridan oqilona foydalanish, chiqindilarni kamaytirish va ekologik xavfsizlikni ta'minlash masalalari tobora dolzarb bo'lib bormoqda. Bug'

qozonlarida boshqaruv jarayonlari yetarlicha optimallashtirilmagan taqdirda, issiqlik yo'qotishlari ortadi, yoqilg'i sarfi ko'payadi va chiqindi gazlar hajmi oshadi. Bu esa ishlab chiqarish xarajatlarining ortishiga hamda ekologik muvozanatning buzilishiga olib keladi. Shuning uchun GTL korxonalarida bug' qozonlarini avtomatlashtirilgan tarzda boshqarish nafaqat texnik, balki iqtisodiy va ekologik jihatdan ham muhim ahamiyat kasb etadi. Mukammal boshqaruv tizimi yoqilg'i sarfini kamaytirish, bug' ishlab chiqarish sifatini barqarorlashtirish hamda chiqindi gazlarning zararli ta'sirini pasaytirish imkonini beradi.

Tadqiqot usullari: Tadqiqot obyekti sifatida GTL (Gas-to-Liquid) korxonasidagi bug' qozon qurilmasi va uning issiqlik-energetik jarayonlari tanlandi. Ushbu qozon qurilmasi tabiiy gazni yoqish orqali suvni bug' holatiga o'tkazish, bug' bosimi va haroratini muayyan texnologik parametrlar doirasida saqlash vazifasini bajaradi. Qozon tizimi quyidagi asosiy qismlardan iborat: yonish kamerasi, issiqlik almashinish sirtlari, suv ta'minoti nasoslari, bug' kollektorlari hamda avtomatik datchiklar tizimi. Jarayonning asosiy nazorat qilinadigan parametrlari — harorat, bosim, suv darajasi, bug' oqim tezligi va yoqilg'i sarfi hisoblanadi. Tadqiqot aynan shu parametrlarni optimallashtirish va ularni real vaqt rejimida avtomatik boshqarish imkonini beruvchi yangi tizimni ishlab chiqishga qaratilgan.

Yangi boshqaruv tizimini ishlab chiqish jarayoni to'rt bosqichli tizimli yondashuv asosida amalga oshirildi:

1. Tizimli tahlil bosqichi – mavjud bug' qozoni boshqaruv sxemalari, sensor tizimlari va operator paneli tahlil qilindi. Ularning ish rejimlari va xatolik manbalari aniqlanib, samaradorlik ko'rsatkichlari baholandi.

2. Modellashirish bosqichi – qozon jarayonlari uchun issiqlik balanslari asosida matematik model tuzildi, bu model orqali harorat va bosim o'zgarishlari vaqt bo'yicha tahlil qilindi. 3. Algoritmik sintez bosqichi – mavjud nazorat tizimlari bilan taqqoslanadigan yangi boshqaruv algoritmi ishlab chiqildi; u adaptiv va optimallashtirilgan boshqaruv tamoyillariga asoslandi.

4. Eksperimental bosqich – taklif etilgan algoritm simulyatsion muhitda (MATLAB/Simulink asosida) sinovdan o'tkazilib, amaliy GTL sharoitlariga mosligi tekshirildi.

Ushbu bosqichlar integratsiyalashgan holda tizimning ishonchliligi va barqarorligini ta'minlash uchun asos bo'ldi.

Bug' qozonidagi issiqlik jarayonlari energiyaning va massaning balansi tenglamalari asosida modellashirildi.

Harorat va bosim o'zgarishlarini ifodalovchi asosiy dinamik munosabatlar quyidagicha yoziladi:

$$C_p \frac{dT}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

bu yerda:

- C_p — issiqlik sig'imi,
- T — qozon ichidagi harorat,
- Q_{in} — yonish natijasida hosil bo'lgan issiqlik miqdori,
- Q_{out} — bug' chiqishi va issiqlik yo'qotishlari.

Bug' bosimining o'zgarishi esa quyidagi differensial tenglama orqali ifodalanadi:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{R(T)}{V} (m_{in} - m_{out})$$

bu yerda:

- P — bug' bosimi,
- V — qozon hajmi,
- m_{in} va m_{out} — suv kiritilishi va bug' chiqarilishining massaviy tezliklari.

Ushbu tenglamalar MATLAB muhitida raqamli integratsiya usullari orqali yechilib, jarayon parametrlarining dinamik o'zgarishlari modellashirildi. Natijalar tizim barqarorligini baholash va optimal boshqaruv strategiyasini ishlab chiqish uchun asos bo'ldi.

Taklif etilgan boshqaruv algoritmi adaptiv va neyron tarmoqli yondashuvlarga asoslanadi. Tizimda PID-regulyator asosiy boshqaruvchi sifatida qo'llanilgan, biroq u sun'iy neyron tarmoq orqali o'z parametrlarini real vaqt rejimida o'zgartira oladigan shaklda modernizatsiya qilingan.

1. Sensorlardan kelayotgan real o'lchov ma'lumotlari (harorat, bosim, bug' oqimi) neyron tarmoq blokiga uzatiladi.

2. Tarmoq o'tgan davr ma'lumotlariga asoslanib jarayonning keyingi holatini bashorat qiladi.

3. Boshqaruv bloki har bir o'zgaruvchiga mos optimal yoqilg'i sarfi, suv miqdori va havo oqimini hisoblaydi.

4. Natijada tizim real vaqt rejimida energiya yo'qotishlarini minimallashtiruvchi va bug' sifatini barqarorlashtiruvchi tarzda ishlaydi.

Algoritmning samaradorligi MATLAB/Simulink muhitida sinovdan o'tkazilgan bo'lib, natijalarda klassik PID tizimiga nisbatan javob tezligi 1,4 barobar, barqarorlashish vaqti esa 18% ga yaxshilangan. Tadqiqot jarayonida GTL (Gas-to-Liquid) korxonasidagi bug' qozon qurilmasi uchun takomillashtirilgan avtomatik boshqaruv tizimi ishlab chiqildi. Yangi tizimning struktura sxemasi sensorlar orqali o'lgan ma'lumotlarni qabul qiluvchi markaziy boshqaruv moduli, bug' bosimi va haroratini tartibga soluvchi aktuatorlar hamda monitoring va signalizatsiya tizimlaridan iborat. Ushbu tuzilma real vaqt rejimida bug' parametrlari ustidan doimiy nazoratni ta'minlaydi va inson omilidan kelib chiqadigan xatoliklarni kamaytiradi. Hisoblash va modellash natijalari MATLAB/Simulink dasturiy muhitida amalga oshirildi. Modellash jarayonida bug' qozonining issiqlik-energetik jarayonlari uchun dinamik model tuzildi va turli ish sharoitlarida sinovdan o'tkazildi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, taklif etilgan boshqaruv algoritmi bug' bosimini $\pm 1,5\%$ aniqlikda barqaror ushlab turadi. Tizimda yuzaga kelgan buzilish holatlarida (gaz bosimining o'zgarishi, issiqlik oqimining kechikishi va boshqalar) parametrlar 20–25 soniya ichida me'yorga qaytdi. Bu esa tizimning dinamik barqarorligi yuqori ekanini tasdiqlaydi. Eksperimental tadqiqotlar sanoat sharoitida o'tkazilib, nazariy modelning amaliy samaradorligi tekshirildi. Sinov natijalari quyidagicha bo'ldi: bug' ishlab chiqarish quvvati o'rtacha 8% ga oshdi, yonilg'i sarfi 6,5% ga kamaydi, harorat va bosim og'ishlari 2,3% dan oshmadi. Operator aralashuv chastotasi esa 40% ga kamayib, avtomatlashtirish darajasi ancha yuqoriligi qayd etildi.

Samaradorlik tahlili natijalari yangi boshqaruv tizimining afzalliklarini aniq ko'rsatdi. Energiya samaradorligi avvalgi tizimga nisbatan 4–6% ga yaxshilandi, bug' bosimi barqarorligi esa 1,8 barobar oshdi. Tizimning javob berish vaqti 15 soniyadan 9 soniyagacha qisqarib, tezkorlik va aniqlik darajasi sezilarli ravishda yaxshilandi. Bundan tashqari, xavfsizlikni oshirish maqsadida tizim ortiqcha bosim holatlarida avtomatik himoya mexanizmini ishga tushiradi. Olib borilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatdiki, ishlab chiqilgan boshqaruv tizimi GTL bug' qozon qurilmasining energiya samaradorligini oshiradi, ishlab chiqarish jarayonining barqarorligini ta'minlaydi hamda texnologik xavfsizlikni yuqori darajada kafolatlaydi. Bu natijalar amaliyotga joriy etilganda, korxonaning umumiy energiya sarfini kamaytirish va mahsuldorlikni oshirish imkonini beradi.

Natijalarning muhokamasi: Olingan natijalar GTL (Gas-to-Liquid) korxonasidagi bug' qozon qurilmasi uchun ishlab chiqilgan yangi avtomatik boshqaruv tizimining samaradorligini ilmiy asosda tasdiqlaydi. Tizimning ishlash prinsipi issiqlik-energetik jarayonlarning dinamik modellariga asoslanib, PID (Proportional–Integral–Differential) boshqaruv qonuniyatlari va termodinamik muvozanat tenglamalari yordamida qurilgan. Natijalar shuni ko'rsatdiki, ishlab chiqilgan algoritm issiqlik oqimi va bosim parametrlarining o'zgarishiga tez javob berib, tizimning barqarorligini saqlab qoladi. Bu holat boshqaruv tizimlarida qo'llaniladigan klassik nazariya — “barqarorlik va adaptivlik muvozanati” tamoyiliga mos keladi.

Tadqiqot natijalarini avvalgi ishlanmalar bilan taqqoslash shuni ko'rsatdiki, ilgari qo'llanilgan an'anaviy mexanik boshqaruv tizimlarida bug' bosimi o'zgarishining o'rtacha og'ish darajasi 4–5% ni tashkil etgan. Yangi ishlab chiqilgan raqamli boshqaruv tizimi esa bu og'ishni 1,5% gacha kamaytirgan. Shuningdek, issiqlik energiyasidan foydalanish samaradorligi 4–6% ga oshgani boshqa tadqiqotchilar (masalan, issiqlik almashinuvi jarayonlarini modellash bo'yicha olib borilgan xalqaro ishlar) natijalari bilan ham mos keladi. Bu o'xshashlik tizimning ilmiy asoslanganini va amaliy jihatdan ishonchli ekanini ko'rsatadi. Olingan natijalarning ilmiy va amaliy ahamiyati shundaki, ishlab chiqilgan tizim GTL sanoatida energiya resurslaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Natijada ishlab chiqarish jarayonida yoqilg'i sarfi kamayadi, karbonat angidrid chiqindilari pasayadi va ekologik yuklama qisqaradi. Tizimning yuqori avtomatlashtirish darajasi inson aralashuvini kamaytirib, operator xatoliklarining oldini oladi. Shu tariqa, ishlab chiqilgan boshqaruv algoritmi energetika sohasida raqamli transformatsiya jarayonlariga mos innovatsion yechim sifatida baholanishi mumkin.

Biroq tizimda ayrim cheklovlar ham mavjud. Jumladan, amaldagi model ayrim tashqi omillar — gaz bosimidagi keskin tebranishlar yoki kondensat tarkibining o'zgarishi kabi holatlarni to'liq hisobga olmaydi. Bundan tashqari, sensorlarning ishlash aniqligi tizimning umumiy javob sifatiga ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli, kelgusidagi tadqiqotlarda real vaqt rejimida o'zgaruvchan parametrlarni tahlil qiluvchi sun'iy intellekt asosidagi adaptiv boshqaruv modellarini joriy etish maqsadga muvofiqdir. Natijalar tahlili yangi boshqaruv

tizimining ilmiy asoslanganligini, amaliy jihatdan samarali ekanini va GTL sanoatida energiya tejamkorligini ta'minlashda katta ahamiyatga ega bo'lishini ko'rsatadi.

Xulosa: Ushbu tadqiqot natijalari GTL (Gas-to-Liquid) texnologiyasida qo'llaniladigan bug' qozon qurilmalarini boshqarish jarayonini takomillashtirish imkoniyatlarini ilmiy asosda ko'rsatdi. Ish davomida ishlab chiqilgan adaptiv boshqaruv algoritmi real vaqt rejimida bug' bosimi, harorati va energiya sarfini optimallashtirishga imkon berdi. Shuningdek, tizim issiqlik-energetik jarayonlarning o'zgarishiga tez javob berib, barqarorlik va ishonchlilik ko'rsatkichlarini yaxshilagan. Simulyatsiya natijalariga ko'ra, ishlab chiqilgan algoritmi an'anaviy PID boshqaruv tizimlariga nisbatan javob tezligini 1,4 barobar oshirgan, barqarorlashish vaqtini esa 18 foizga qisqartirgan. Natijada, tadqiqotda qo'yilgan asosiy maqsad — GTL sanoatidagi bug' qozonlarini boshqarishda energiya samaradorligi va avtomatlashtirish darajasini oshirish — to'liq amalga oshirildi.

ADABIYOTLAR:

1. Cengel, Y. A., Boles, M. A. *Muhandislik termodinamikasi asoslari*. — Toshkent: "Fan va texnologiya", 2018. — 624 b.
2. Jo'rayev, S. A., Matkarimov, A. X. *Issiqlik texnikasi va energetik qurilmalar asoslari*. — Toshkent: TDTU nashriyoti, 2020. — 312 b.
3. Nurmatov, B. M. *Avtomatik boshqaruv nazariyasi*. — Toshkent: "O'zbekiston milliy universiteti" nashriyoti, 2019. — 286 b.
4. Rashidov, O. Sh. *Texnologik jarayonlarni avtomatlashtirish asoslari*. — Toshkent: TDTU, 2021. — 340 b.
5. Karimov, S. B. "Bug' qozon qurilmalarida energiya samaradorligini oshirishning zamonaviy yondashuvlari." // *O'zbekiston muhandislik jurnali*, 2022, №2. — B. 47–52.
6. Xo'jayev, A. I. "GTL texnologiyalarida issiqlik-energetik jarayonlarni optimallashtirish." // *Texnika va texnologiyalar axborotnomasi*, 2023, №1. — B. 33–38.
7. Mirzayev, U. T., Yusupov, D. R. *Sanoat qozonlarining ishlash prinsiplari va energiya tejamkorligi*. — Toshkent: "Fan va innovatsiya", 2020. — 298 b.
8. Iskandarov, A. A. "MATLAB/Simulink muhitida qozon tizimlarini modellashtirish." // *Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy axborotnomasi*, 2021, №4. — B. 65–72.
10. O'zbekiston Respublikasi Energetika vazirligi. *GTL zavodlarida energiya samaradorligini oshirish bo'yicha texnik reglament*. — Toshkent, 2022. — 42 b.