# МУАММОҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА ВА ТАЪЛИМИ ОН

**(Маводи конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ бахшида ба 35 –солагии Истиқлоли давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон, 30-солагии Конститутсияи Ҷумҳурии Тоҷикистон, “Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф” ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика Тухлиев Қамаридин, Хуҷанд, 21-22 Июни соли 2024)**

**ҚИСМИ 2**

**ЧАСТЬ 2**

**ХУҶАНД - 2024**

**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ**
**ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН**

**МУАССИСАИ ДАВЛАТИИ ТАЪЛИМИИ**
**«ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ХУҶАНД БА НОМИ АКАДЕМИК БОБОҶОН ҒАФУРОВ»**

# МАВОДИ

**КОНФЕРЕНСИЯИ БАЙНАЛМИЛАЛИИ ИЛМӢ – АМАЛИИ**
**«МУАММОҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА ВА ТАЪЛИМИ ОН»**
**БАХШИДА БА 35 – СОЛАГИИ ИСТИҚЛОЛИ ДАВЛАТИИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН, 30 - СОЛАГИИ КОНСТИТУТСИЯИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН, «БИСТСОЛАИ ОМӮЗИШ ВА РУШДИ ФАНҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ, ДАҚИҚ ВА РИЁЗӢ ДАР СОҲАИ ИЛМУ МАОРИФ» ВА 70- СОЛАГИИ ДОКТОРИ ИЛМҲОИ ФИЗИКАЮ МАТЕМАТИКА ТУХЛИЕВ ҚАМАРИДИН**

(ХУҶАНД, 21-22 -УМИ ИЮНИ СОЛИ 2024)

**ХУҶАНД – 2024**

**UDC: 519.644**

**У.Н. Хайриев[1,2,3], С.Ш. Барраева[1]**

[1] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
[2] Азиатский международный университет, Бухара, Узбекистан
[3] Институт математики им. В.И.Романовского Академии наук Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

## ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ С ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена построению оптимальной квадратурной формулы с производной для аппроксимации интегралов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(2)}$ комплекснозначных функций. С помощью построенной оптимальной квадратурной формулы аппроксимируется преобразование Фурье некоторых функций.

**Ключевые слова**: гильбертово пространство, экстремальная функция, функционал погрешности, квадратурная формула.

**U.N. Khayriev[1,2,3],S.Sh. Barraeva[1]**

[1] Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan
[2] Asia International University, Bukhara, Uzbekistan
[3] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

## CONSTRUCTION AN OPTIMAL QUADRATURE FORMULA WITH DERIVATIVE FOR APPROXIMATION OF FOURIER INTEGRALS

**Abstract**. The present paper is devoted to the construction of an optimal quadrature formula with derivative for approximation of Fourier integrals in the Sobolev space $L_2^{(2)}$ of complex-valued functions. Using the constructed optimal quadrature formula, the Fourier transform of some functions is approximated.

**Keywords:** Hilbert space, ekstremal function, error functional, quadrature formula

In this work, we study the problem of constructing an optimal quadrature formula for the numerical calculation of the following Fourier integrals based on the Sobolev method

$$I\left(\omega,\varphi\right)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx,$$

where $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\varphi \in L_2^{(2)}\left[0,1\right]$.

We consider a quadrature formula with derivative of the form

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta^0 \varphi(h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta^1 \varphi'(h\beta) \tag{1}$$

where $C_\beta^0$ are the coefficients given in [1] and $\omega \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$, $h=\dfrac{1}{N}$ and the coefficients $C_\beta^1$ are the unknowns to be determined.

We suppose that a function $\varphi$ belongs to the following space

$$L_2^{(2)}=\{\varphi:[0,1]\to \mathrm{C} \mid \varphi' \text{ is absolute continuous and } \varphi''\in L_2(0,1)\}.$$

The inner product for the functions $\varphi$ and $\psi$ in this space is defined as

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{L_2^{(2)}}=\int_0^1\varphi''(x)\cdot\overline{\psi}''(x)dx,$$

where $\overline{\psi}$ is the complex conjugate function to the function $\psi$ and the corresponding norm of the function $\varphi$ is defined by the formula

$$\|\varphi\|_{L_2^{(2)}}=\langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2}.$$

The difference between the quadrature sum and integral

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}\left(C_\beta^0\varphi(h\beta)+C_\beta^1\varphi'(h\beta)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx, \tag{2}$$

is called *the error* and the corresponding error functional has the form

$$\ell(x)=e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}\left(C_\beta^0\delta(x-h\beta)-C_\beta^1\delta'(x-h\beta)\right). \tag{3}$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality, we get the following

$$\left|(\ell,\varphi)\right|\le\|\ell\|_{L_2^{(2)*}(0,1)}\cdot\|\varphi\|_{L_2^{(2)}(0,1)}.$$

Therefore, the absolute value of the error (2) of the quadrature formula (1) is estimated by the norm of the error functional (3)

$$\|\ell\|_{L_2^{(2)*}(0,1)}=\sup_{\varphi,\|\varphi\|_{L_2^{(2)}(0,1)}\neq 0}\frac{\left|(\ell,\varphi)\right|}{\|\varphi\|_{L_2^{(2)}(0,1)}}.$$

The main goal of this work is to find the minimum of the norm for the error functional $\ell$ by coefficients $C_\beta^1$ in the space $L_2^{(2)}$. That is the problem is to find the coefficients $C_\beta^1$ which attain the following quantity

$$\|\overset{\circ}{\ell}\|_{L_2^{(2)*}}=\inf_{C_\beta^1}\|\ell\|_{L_2^{(2)*}}. \tag{4}$$

The coefficients $C_\beta^1$ which satisfy the last equality are called *optimal coefficients* and are denoted by $\overset{\circ}{C}{}_\beta^1$. The corresponding quadrature formula is called an optimal quadrature formula in the sense of Sard.

**Problem 1.** Find the coefficients $\overset{\circ}{C}{}_\beta^1$ that satisfy equality (4).

The following theorem is appropriate as a solution to Problem 1.

**Theorem 1.** *Coefficients of the optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard for* $\omega\in\mathbb{R}/\{0\}$ *in the space* $L_2^{(2)}(0,1)$ *have the following form*

$$C_0^1=hq_1+q_2+\frac{g_0}{2}+\frac{Q(h)-Q(0)}{h},$$

$$C_\beta^1=2hq_1+\frac{Q(h\beta-h)-2Q(h\beta)+Q(h\beta+h)}{h},\quad \beta=1,2,\dots,N-1,$$

$$C_N^1=(h-2)q_1-q_2+\frac{g_0}{2}+\frac{Q(1-h)-Q(1)}{h},$$

*where*

$$g_0=-\frac{(2\pi i\omega-1)e^{2\pi i\omega}+1}{(2\pi\omega)^2}-\frac{1-2\pi i\omega h-e^{-2\pi i\omega h}}{(2\pi\omega)^2h}\cdot e^{2\pi i\omega}$$

$$-\frac{2(1-\cos(2\pi\omega h))}{(2\pi\omega)^2h}\cdot\frac{\left((1-h)e^{2\pi i\omega h}-1\right)e^{2\pi i\omega}+he^{2\pi i\omega h}}{(e^{2\pi i\omega h}-1)^2},$$

$$q_1=\frac{-e^{2\pi i\omega h}+2\cos(2\pi\omega h)-1+\left(e^{-2\pi i\omega h}-2\cos(2\pi\omega h)+1\right)e^{2\pi i\omega}}{16(\pi\omega)^2 h}$$
$$-\frac{\left(1-\cos(2\pi\omega h)\right)\left(e^{2\pi i\omega h(N+1)}+1\right)}{8(\pi\omega)^2(e^{2\pi i\omega h}-1)h},$$
$$q_2=-\frac{\left(e^{-2\pi i\omega h}-2\cos(2\pi\omega h)+1+h\right)e^{2\pi i\omega}+h}{8(\pi\omega)^2 h}$$
$$-\frac{\left(1-\cos(2\pi\omega h)\right)\left(he^{2\pi i\omega h}+(1+h)e^{2\pi i\omega h(N+1)}-e^{2\pi i\omega h(N+2)}\right)}{4(\pi\omega)^2(e^{2\pi i\omega h}-1)^2 h},$$
$$Q(h\beta)=\frac{\left(e^{-2\pi i\omega h}-2\cos(2\pi\omega h)+1+2h\right)e^{2\pi i\omega}}{16(\pi\omega)^2 h}+\frac{e^{2\pi i\omega}-2e^{2\pi i\omega h\beta}+1}{16(\pi i\omega)^3}+\frac{1-cos(2\pi\omega h)}{8(\pi\omega)^2 h}$$
$$\times\left(\frac{e^{2\pi i\omega h}\left(e^{2\pi i\omega h}+1\right)\left(2e^{2\pi i\omega h\beta}-e^{2\pi i\omega}-1\right)}{(e^{2\pi i\omega h}-1)^3}\cdot h^2+\frac{2e^{2\pi i\omega h(N+1)}}{(e^{2\pi i\omega h}-1)^2}\cdot h-\frac{e^{2\pi i\omega h(N+1)}}{e^{2\pi i\omega h}-1}\right).$$

## References

1. *Hayotov A. R., Jeon S., Lee Ch.O.,* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space // Journal of Computational and Applied Mathematics. 372, 2020, pp. 112713

**УДК 511.354**

**Ш.А. Хайруллоев**

Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан

## ОБ ИССЛЕДОВАНИЕ НУЛЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ НЕ ИМЕЮЩИХ ЭЙЛЕРОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ

В работе доказано неравенства А.А. Карацуба для промежутков, имеющих более короткую длину.

**Ключевые слова.** Нуль нечетного порядка, экспоненциальная пара, короткая промежутка, функция Дэвенпорта-Хейльбронна.

**Sh.A. Khairulloev**

Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan

## RESEARCH OF ZEROS OF ARITHMETIC DIRICHLET SERIES WITHOUT EULER PRODUCT

The paper proves the inequalities of A.A. Karatsuba for gaps having a shorter length.

**Keywords.** Zero of odd order, exponential pair, short span, Davenport-Heilbronn function.

Исследование нулей арифметических рядов Дирихле, представляет собой сложную и важную задачу в аналитической теории чисел. Эти ряды имеют множество интересных свойств, и изучение их нулей имеет большое значение для понимания поведения функций в комплексной плоскости. Эйлерово произведение, которое обычно задается как бесконечное произведение всех нулей функции, играет важную роль в анализе, и его отсутствие у рядов Дирихле представляет особый интерес для математиков. Исследование нулей этих рядов может привести к новым открытиям в области комплексного анализа и теории чисел.