Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2025, № 8, с. 56–68 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Х.М. ШАДИМЕТОВ, Д.М. АХМЕДОВ, А.Х. АВЕЗОВ

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Многие задачи науки и техники естественным образом сводятся к сингулярным интегральным уравнениям. Более того, плоские задачи сводятся к одномерным сингулярным интегральным уравнениям. В настоящей работе разрабатывается оптимальный метод квадратур приближенного решения одномерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Здесь мы занимаемся поиском аналитического вида коэффициентов оптимальной квадратурной формулы. Применим эти коэффициенты к приближенному решению сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Таким образом, показана возможность решения сингулярных интегральных уравнений с более высокой точностью с использованием оптимальной квадратурной формулы.

Ключевые слова: пространство Соболева, экстремальная функция, функционал погрешности, оптимальная квадратурная формула, сингулярный интеграл типа Коши, весовая функция, сингулярное интегральное уравнение.

УДК: 519.644

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-8-56-68

Введение

Изучение различных задач математической физики, а также конкретных задач из аэродинамики, электродинамики, теории упругости и других областей естественным образом сводится к сингулярным интегральным уравнениям [1], [2]. При этом плоские задачи сводятся к решению характеристического сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)dx}{x-x_0}=f(x_0),\quad x_0\in(-1,1), \tag{0.1}$$

где сингулярный интеграл понимается здесь и в дальнейшем в смысле главного значения Коши. Напомним определение сингулярных интегралов в смысле главного значения по Коши.

Определение 1. Главным значением по Коши особого интеграла $\int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{x-t}dx,\ a<t<b,$ называется предел

Поступила в редакцию 26.05.2024, после доработки 26.05.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_a^{t-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx+\int\limits_{t+\varepsilon}^{b}\frac{\varphi(x)}{x-t}dx\right].$$

Известно (см., например, [1], [2]), что если функция φ на сегменте $[a,b]$ удовлетворяет условию Гёльдера $H_\alpha(A)$ с показателем α $(0<\alpha\le 1)$ и коэффициентом A, т. е. если $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le A|x_1-x_2|^\alpha$, то существует интеграл $\int\limits_a^b\frac{\varphi(x)}{x-t}dx$, $a<t<b$. В работе [2] приводятся следующие аналитические решения уравнения (0.1) с индексами $\kappa=1,\ 0$ и -1. При $\kappa=1$ все решения уравнения (0.1) даются формулой

$$\varphi_1(x_0)=-\frac{1}{\pi\sqrt{1-x_0^2}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}f(x)dx}{x-x_0}+\frac{C}{\pi\sqrt{1-x_0^2}},\tag{0.2}$$

где C — константа и

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi(x)dx=C,$$

при $\kappa=0$ имеет место единственное решение вида

$$\varphi_2(x_0)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{f(x)dx}{x-x_0},\tag{0.3}$$

и единственное решение вида

$$\varphi_3(x_0)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{f(x)dx}{x-x_0},\tag{0.4}$$

при $\kappa=-1$ имеется единственное решение

$$\varphi_4(x_0)=-\frac{\sqrt{1-x_0^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_0)}.\tag{0.5}$$

Таким образом, решение сингулярных интегральных уравнений вида (0.1) приводится к вычислению весовых сингулярных интегралов (0.2)–(0.5). Поэтому вопросы разработки эффективных приближенных методов вычисления сингулярных интегралов имеют большое прикладное значение и являются одной из актуальных задач вычислительной математики.

Приближенными методами вычисления интегралов являются квадратурные и кубатурные формулы или формулы численного интегрирования. Имеются алгебраический, вероятностный, теоретико-числовой и функциональный подходы построения формул численного интегрирования.

С исследованиями, проведенными по первым трем подходам построения формул численного интегрирования, можно ознакомиться, например, в работах [3]–[7] — по алгебраическому подходу, в [8]–[11] — по вероятностному подходу и в [12]–[15] — по теоретико-числовому подходу.

Так как исследования настоящей работы относятся к функциональному подходу построения формул численного интегрирования, то далее подробно рассмотрим этот подход.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\omega_i(x)\varphi(x)}{x-t}dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta]\varphi(x_\beta) \tag{1.1}$$

и соответственно ее функционал погрешности

$$\ell_i(x) = \frac{\omega_i(x)\varepsilon_{[-1,1]}(x)}{x-t} - \sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta]\delta(x-x_\beta), \tag{1.2}$$

где $i = 1, 2, 3, 4$;

$$\omega_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad \omega_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad \omega_3(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad \omega_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $-1 < t < 1$, $C[\beta]$ — коэффициенты, $x_\beta = h\beta - 1$ $(\in [-1,1])$ — узлы квадратурной формулы (1.1), N — натуральное число, $\varepsilon_{[-1,1]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-1,1]$, δ — дельта-функция Дирака, φ — функция из пространства $L_2^{(2)}(-1,1)$. Здесь $L_2^{(2)}(-1,1)$ — пространство Соболева функций, второе обобщенное производное, интегрируемое с квадратом и снабженное нормой

$$\left\|\varphi|L_2^{(2)}(-1,1)\right\| = \left\{\int_{-1}^{1} \left(\varphi^{(2)}(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Для того, чтобы функционал (1.2) был определен на пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$, необходимо наложение следующих условий [16]:

$$(\ell, 1) = 0, \quad (\ell, x) = 0. \tag{1.3}$$

Отсюда ясно, что для существования квадратурных формул вида (1.1) должно выполняться условие $N \geq 1$.

В данном случае погрешность формулы (1.1) имеет вид

$$(\ell_i, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_i(x)\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\omega_i(x)\varphi(x)}{x-t}dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta]\varphi(x_\beta). \tag{1.4}$$

На основе неравенства Коши–Шварца

$$|(\ell_i, \varphi)| \leq \left\|\varphi|L_2^{(2)}\right\| \cdot \left\|\ell_i|L_2^{(2)*}\right\|$$

оценка погрешности (1.4) формулы (1.1) на функциях пространства $L_2^{(2)}(-1,1)$ приводится к вычислению нормы функционала погрешности ℓ_i в сопряженном пространстве $L_2^{(2)*}(-1,1)$.

Напомним, что минимизация нормы функционала погрешности ℓ_i по коэффициентам при фиксированных узлах называется *задачей Сарда*, и полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда*. Впервые эта задача исследована А. Сардом [17].

Применение сплайнов для вычисления сингулярных интегралов еще не получило широкого распространения. Здесь можно назвать работы Б.Г. Габдулхаева [18], [19], Р.З. Даутова [20], [21], в которых используются сплайн-функции.

Некторые итоги полученных результатов по интегральным уравнениям подведены в специальных обзорных работах [22]–[35]. Имеется несколько методов построения оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда, такие, как сплайн метод, метод ϕ-функций и метод С.Л. Соболева, который основывается на дискретных аналогах линейных дифференциальных операторов (см., например, [16]).

Основной целью настоящей работы является построение оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1.1) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ методом Соболева для приближенного интегрирования сингулярного интеграла типа Коши. Это значит, что требуется найти коэффициенты $C_i[\beta]$, которые удовлетворяют равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}_i|L_2^{(2)*}\right\| = \inf_{C_i[\beta]} \left\|\ell_i|L_2^{(2)*}\right\|. \tag{1.5}$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (1.1) в смысле Сарда, мы должны последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (1.2) квадратурной формулы (1.1) в пространстве $L_2^{(2)*}(-1,1)$.

Задача 2. Найти коэффициенты $C[\beta]$, удовлетворяющие равенству (1.5).

2. Экстремальная функция и выражение для нормы функционала погрешности

Для нахождения нормы функционала погрешности (1.2) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$ используется экстремальная функция функционала погрешности ℓ_i [16]. Функция ψ_{ℓ_i} называется экстремальной функцией функционала погрешности (1.2), если выполняется равенство

$$(\ell_i,\psi_{\ell_i}) = \left\|\ell_i|L_2^{(2)*}\right\| \ \left\|\psi_{\ell_i}|L_2^{(2)}\right\|. \tag{2.1}$$

В пространстве $L_2^{(2)}$ экстремальная функция $\psi_{\ell_i}(x)$ функционала ℓ_i найдена С.Л. Соболевым [16], которая имеет вид

$$\psi_{\ell_i}(x) = \ell_i(x) * G_2(x) + P_1(x), \tag{2.2}$$

где

$$G_2(x) = \frac{|x|^3}{12} \tag{2.3}$$

— решение уравнения

$$\frac{d^4}{dx^4}G_2(x) = \delta(x), \tag{2.4}$$

$P_1(x)$ — многочлен степени 1, и $*$ — операция свертки, т. е.

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Известно [16], что для любого линейного функционала ℓ_i в $L_2^{(2)*}$ имеет место равенство

$$\left\|\ell_i|L_2^{(2)*}\right\|^2 = (\ell_i,\psi_{\ell_i}) = (\ell_i(x),\ell_i(x)*G_2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_i(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell_i(y)G_2(x-y)dy\right)dx.$$

Применяя это равенство к функционалу погрешности (1.2), получим

$$\|\ell_i\|^2_{L_2^{(2)*}} = (\ell_i, \psi_{\ell_i}) = \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_i[\beta]C_i[\gamma]\frac{|x_\beta - x_\gamma|^3}{12} - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta]\int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)|x-x_\beta|^3}{12(x-t)}dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)\omega_i(y)|x-y|^3}{12(x-t)(y-t)}dxdy. \tag{2.5}$$

Таким образом, задача 1 решена для квадратурных формул вида (1.1) в пространстве $L_2^{(2)}(-1,1)$.

3. Линейная система для оптимальных коэффициентов квадратурных формул

Пусть узлы x_β квадратурной формулы (1.1) фиксированы. Функционал (1.2) удовлетворяет условиям (1.3). Норма функционала погрешности ℓ_i является много переменной квадратной функцией коэффициентов $C_i[\beta]$ ($\beta = \overline{0,N}$). Для нахождения точки условного минимума выражения (2.5) при условиях (1.3) мы применяем метод Лагранжа неопределенных коэффициентов.

Обозначим $\mathbf{C_i} = (C_i[0], C_i[1], \ldots, C_i[N])$ и $\lambda_\mathbf{i} = (\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i})$. Рассмотрим функцию

$$\Psi_i(\mathbf{C_i}, \lambda_\mathbf{i}) = \|\ell_i\|^2 - 2\Big(\lambda_{0,i}(\ell_i, 1) + \lambda_{1,i}(\ell_i, x)\Big).$$

Приравнивая к нулю частные производные от функции $\Psi_i(\mathbf{C_i}, \lambda_\mathbf{i})$ по $C_i[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ и $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}$, мы получим следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_i[\gamma]\frac{|x_\beta - x_\gamma|^3}{12} + \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i}x_\beta = y_i(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{3.1}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_i[\gamma] = g_{0,i}, \qquad \sum_{\gamma=0}^{N} C_i[\gamma]x_\gamma = g_{1,i}, \tag{3.2}$$

где

$$y_i(x_\beta) = \int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)|x-x_\beta|^3}{12(x-t)}dx, \tag{3.3}$$

$$g_{0,i} = \int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)}{x-t}dx, \qquad g_{1,i} = \int_{-1}^{1}\frac{\omega_i(x)x}{x-t}dx, \tag{3.4}$$

$C_i[\gamma]$, $\gamma = 0, 1, \ldots, N$, $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}$ являются неизвестными.

Система (3.1)–(3.2) имеет единственное решение и это решение дает минимум выражению $\|\ell_i\|^2$ при условиях (1.3). Существование и единственность решения таких типов систем обсуждены, например, в [16], [36].

4. Вспомогательные результаты

При решении системы (3.1)–(3.2) мы используем метод С.Л. Соболева построения оптимальных формул [16]. Кроме того, здесь используется теория функций дискретного аргумента. Поэтому приведем некоторые определения по теории функций дискретного аргумента из книги [16].

Определение 2. Функция $\varphi[\beta] = \varphi(h\beta)$ называется функцией дискретного аргумента, если она задана на некотором множестве целочисленных значений β.

Определение 3. Скалярным произведением $\varphi[\beta]$ на $\psi[\beta]$ называется число

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\beta \in B} \varphi[\beta] \cdot \psi[\beta], \tag{4.1}$$

если ряд в правой части (4.1) абсолютно сходится.

Определение 4. Сверткой $\varphi[\beta] * \psi[\beta]$ двух функций $\varphi[\beta]$ и $\psi[\beta]$ дискретного аргумента называется скалярное произведение

$$\chi[\beta] = \varphi[\beta] * \psi[\beta] = [\varphi[\gamma], \psi[\beta - \gamma]] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi[\gamma]\psi[\beta - \gamma].$$

Кроме того, при вычислениях нам требуется дискретный аналог $D_2(h\beta)$ дифференциального оператора d^4/dx^4, который определяется формулой [37]

$$D_2(h\beta) = \frac{3!}{h^4} \begin{cases} 3!\sqrt{3}q^{|\beta|}, & |\beta| \geq 2; \\ 19 - 12\sqrt{3}, & |\beta| = 1; \\ 6\sqrt{3} - 8, & \beta = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $q = \sqrt{3} - 2$.

Приведем некоторые свойства дискретной функции $D_2(h\beta)$ ([37]):

$$D_2(h\beta) * (h\beta - 1)^{\alpha} = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 3, \tag{4.3}$$

$$hD_2(h\beta) * \frac{|h\beta - 1|^3}{12} = \delta(h\beta), \tag{4.4}$$

где $\delta(h\beta)$ – дискретная дельта-функция и $\delta(h\beta) = \begin{cases} 0, & \beta \neq 0; \\ 1, & \beta = 0. \end{cases}$

5. Вычисление коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (1.1)

В настоящем разделе занимаемся решением системы (3.1)–(3.2).

Пусть $C_i[\beta] = 0$ при $\beta < 0$ и $\beta > N$. Тогда, используя определение 4, систему (3.1)–(3.2) перепишем в сверточном виде

$$C_i[\beta] * \frac{|h\beta - 1|^3}{12} + \lambda_{1,i} \cdot (h\beta - 1) + \lambda_{0,i} = y_i(x_\beta), \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{5.1}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta] = g_{0,i}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta] \cdot (h\beta - 1) = g_{1,i}, \tag{5.3}$$

где $y_i(x_\beta)$, $g_{0,i}$ и $g_{1,i}$ определяются соответственно равенствами (3.3) и (3.4).

Введем обозначения

$$v_i(x_\beta) = C_i[\beta] * \frac{|h\beta - 1|^3}{12}, \tag{5.4}$$

$$u_i(x_\beta) = v_i(x_\beta) + \lambda_{1,i} \cdot (h\beta - 1) + \lambda_{0,i}. \tag{5.5}$$

Используя свойства (4.3), (4.4) оператора $D_2(h\beta)$ из (4.2) и (5.5), получим

$$C_i[\beta] = hD_2(h\beta) * u_i(x_\beta). \tag{5.6}$$

Но для вычисления свертки (5.6) нам требуется определить функцию $u_i(x_\beta)$ при всех целых значениях β. При $\beta = 0, 1, 2, \ldots, N$ из (5.1) имеем $u_i(x_\beta) = y_i(x_\beta)$. Поэтому нам достаточно определить функцию $u_i(x_\beta)$, когда $\beta < 0$ и $\beta > N$.

Далее определим вид $u_i(x_\beta)$ при $\beta \leq 0$ и $\beta \geq N$. Из (5.4), используя (5.2), (5.3) при $\beta \leq 0$ и $\beta \geq N$, имеем

$$v_i(x_\beta) = \begin{cases} -\dfrac{1}{12}(h\beta)^3 g_{0,i} + \dfrac{1}{4}(h\beta)^2(g_{1,i} + g_{0,i}) - (h\beta)p_{1,i} - p_{0,i}, & \beta \leq 0; \\ \dfrac{1}{12}(h\beta)^3 g_{0,i} - \dfrac{1}{4}(h\beta)^2(g_{1,i} + g_{0,i}) + (h\beta)p_{1,i} + p_{0,i}, & \beta \geq N. \end{cases}$$

Учитывая последнее равенство, из (5.5) для $u_i(x_\beta)$ получим

$$u_i(x_\beta) = \begin{cases} -\dfrac{1}{12}(h\beta)^3 g_{0,i} + \dfrac{1}{4}(h\beta)^2(g_{1,i} + g_{0,i}) + a_{1,i}^-(h\beta) + a_{0,i}^-, & \beta < 0; \\ y_i(x_\beta), & 0 \leq \beta \leq N; \\ \dfrac{1}{12}(h\beta)^3 g_{0,i} - \dfrac{1}{4}(h\beta)^2(g_{1,i} + g_{0,i}) + a_{1,i}^+(h\beta) + a_{0,i}^+, & \beta > N, \end{cases} \tag{5.7}$$

где $a_{1,i}^-$, $a_{0,i}^-$, $a_{1,i}^+$, $a_{0,i}^+$ являются неизвестными и

$$\begin{array}{ll} a_{1,i}^- = \lambda_{1,i} - p_{1,i}, & a_{0,i}^- = \lambda_{0,i} - p_{0,i} - \lambda_{1,i}, \\ a_{1,i}^+ = \lambda_{1,i} + p_{1,i}, & a_{0,i}^+ = \lambda_{0,i} + p_{0,i} - \lambda_{1,i}. \end{array} \tag{5.8}$$

Таким образом, отсюда и согласно (4.2), (5.6) и (5.7) получается

Задача 3. *Найти решение уравнения*

$$D_2(h\beta) * u_i(x_\beta) = 0 \text{ при } \beta < 0,\ \beta > N, \tag{5.9}$$

имеющее вид (5.7).

Если найдем неизвестные $a_{1,i}^-$, $a_{0,i}^-$, $a_{1,i}^+$, $a_{0,i}^+$, то из (5.8) имеем

$$\begin{gathered} \lambda_{1,i} = \frac{1}{2}(a_{1,i}^- + a_{1,i}^+), \quad \lambda_{0,i} = \frac{1}{2}(a_{0,i}^- + a_{0,i}^+ + a_{1,i}^- + a_{1,i}^+), \\ p_{1,i} = \frac{1}{2}(a_{1,i}^+ - a_{1,i}^-), \quad p_{0,i} = \frac{1}{2}(a_{0,i}^+ - a_{0,i}^-). \end{gathered} \tag{5.10}$$

Неизвестные $a_{1,i}^-$, $a_{0,i}^-$, $a_{1,i}^+$, $a_{0,i}^+$ найдутся из (5.9), используя (4.2) и (5.7). Далее получим явный вид функции $u_i(x_\beta)$ и из (5.6) найдем оптимальные коэффициенты $C_i[\beta]$, $\beta = \overline{0, N}$. Кроме того, из (5.10) найдутся $\lambda_{0,i}$, $\lambda_{1,i}$. Таким образом, поставленная задача полностью решается.

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1.1) *в пространстве* $L_2^{(2)}(-1,1)$ *существует единственная оптимальная квадратурная формула, коэффициенты которой определяются равенствами*

$$C_i[0]=\frac{6}{h^3}\Bigg[\frac{g_{0,i}}{12}h^3+a^-_{1,i}h(q+1)+y_i(x_0)(3q+2)-y_i(x_1)(12q+5)+$$

$$+q^N\Bigg(-3y_i(x_N)(q+1)-a^+_{1,i}h(q+2)-\frac{g_{0,i}}{4}h^2+\frac{g_{1,i}}{4}(h^2+4h(q+2))\Bigg)+6(q+2)\sum_{\gamma=2}^{N}q^\gamma y_i(x_\gamma)\Bigg], \tag{5.11}$$

$$C_i[\beta]=\frac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{\beta-2}q^{\beta-\gamma}y_i(x_\gamma)+(6q+4)y_i(x_\beta)-(12q+5)\Bigg(y_i(x_{\beta-1})+y_i(x_{\beta+1})\Bigg)+$$

$$+6(q+2)\sum_{\gamma=\beta+2}^{N}q^{\gamma-\beta}y_i(x_\gamma)+q^\beta\Bigg(-\frac{g_{1,i}+g_{0,i}}{4}h^2+a^-_{1,i}h(q+2)-3(q+1)y_i(x_0)\Bigg)-$$

$$-q^{N-\beta}\Bigg(3(q+1)y_i(x_N)+a^+_{1,i}h(q+2)+\frac{g_{0,i}}{4}h^2-\frac{g_{1,i}}{4}(4h(q+2)+h^2)\Bigg)\Bigg],\ \beta=1,2,3,\dots,N-1, \tag{5.12}$$

$$C_i[N]=\frac{6}{h^3}\Bigg[6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-2}q^{N-\gamma}y_i(x_\gamma)-y_i(x_{N-1})(12q+5)+y_i(x_N)(3q+2)+\frac{g_{0,i}}{12}h^3+$$

$$+h(q+1)(g_{1,i}-a^+_{1,i})+q^N\Bigg(-\frac{g_{1,i}+g_{0,i}}{4}h^2+a^-_{1,i}h(q+2)-3(q+1)y_i(x_0)\Bigg)\Bigg], \tag{5.13}$$

где $i=1,2,3,4$;

$$y_1(x_\beta)=\frac{1}{12}\Bigg\{\Bigg(\frac14(8t^4-4t^2-1)+3(h\beta-1)(t-2t^3)-3(h\beta-1)^2(1-2t^2)-2t(h\beta-1)^3\Bigg)\times$$

$$\times\arcsin(h\beta-1)+\Bigg(\frac12(h\beta-1)^3-\frac{11}{3}(h\beta-1)^2t+5(h\beta-1)t^2-2t^3-\frac74(h\beta-1)+\frac23t\Bigg)\times$$

$$\times\sqrt{1-(h\beta-1)^2}+\sqrt{1-(h\beta-1)^2}++2(t-(h\beta-1))^3\times$$

$$\times\sqrt{1-t^2}\ln\left|\frac{1-(h\beta-1)t+\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{(h\beta-1)-t}\right|\Bigg\},$$

$$y_2(x_\beta)=\frac{1}{12}\Bigg\{\Bigg((2t^3-2t^2+t-1)-3(h\beta-1)(2t^2-2t+1)+6(h\beta-1)^2(t-1)-2(h\beta-1)^3\Bigg)\times$$

$$\times\arcsin(h\beta-1)+\ \Bigg(-\frac{11}{3}(h\beta-1)^2+5(h\beta-1)(t-1)-\frac13(6t^2-6t+4)\Bigg)\times$$

$$\times\sqrt{1-(h\beta-1)^2}-2(t-(h\beta-1))^3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\left|\frac{1-(h\beta-1)t-\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{(h\beta-1)-t}\right|\Bigg\},$$

$$y_3(x_\beta)=\frac{1}{12}\Bigg\{\Bigg(-2(t-(h\beta-1))^3-(2t^2+t+1)+3(h\beta-1)(2t+1)-6(h\beta-1)^2\Bigg)\times$$

$$\times\arcsin(h\beta-1)+\Bigg(\frac{11}{3}(h\beta-1)^2-5(h\beta-1)(t+1)+\frac13(6t^2+6t+4)\Bigg)\sqrt{1-(h\beta-1)^2}-$$

$$-2(t-(h\beta-1))^3\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\left|\frac{1-(h\beta-1)t-\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{(h\beta-1)-t}\right|\Bigg\},$$

$$y_4(x_\beta)=\frac{1}{12}\Bigg\{-\left(1+2t^2-6t(h\beta-1)+6(h\beta-1)^2\right)\arcsin(h\beta-1)+$$

$$+\left(2t-5(h\beta-1)\right)\sqrt{1-(h\beta-1)^2}+2(t-(h\beta-1))^3\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\left|\frac{1-(h\beta-1)t+\sqrt{(1-t^2)(1-(h\beta-1)^2)}}{(h\beta-1)-t}\right|\Bigg\},$$

$$a^-_{1,i}=\frac{\Delta_{1,i}}{\Delta_i}, \tag{5.14}$$

$$a^+_{1,i}=\frac{\Delta_{2,i}}{\Delta_i}, \tag{5.15}$$

$$a^-_{0,i}=y_i(x_0), \tag{5.16}$$

$$a^+_{0,i}=y_i(x_N)+\frac{1}{3}g_{0,i}+g_{1,i}-2\frac{\Delta_{2,i}}{\Delta_i}, \tag{5.17}$$

$$\Delta_i = B_2^2-A_2^2,$$

$$\Delta_{1,i}=A_2\left[-F_{1,i}-\frac{1}{4}g_{0,i}(B_2+B_3)+\frac{1}{4}g_{1,i}(2B_2+B_3-A_3)-A_1y_i(x_0)-B_1y_i(x_N)\right]-$$

$$-B_2\left[-F_{2,i}-\frac{1}{4}g_{0,i}(A_2+A_3)+\frac{1}{4}g_{1,i}(2A_2+A_3-B_3)-B_1y_i(x_0)-A_1y_i(x_N)\right],$$

$$\Delta_{2,i}=-A_2\left[-F_{2,i}-\frac{1}{4}g_{0,i}(A_2+A_3)+\frac{1}{4}g_{1,i}(2A_2+A_3-B_3)-B_1y_i(x_0)-A_1y_i(x_N)\right]+$$

$$+B_2\left[-F_{1,i}-\frac{1}{4}g_{0,i}(B_2+B_3)+\frac{1}{4}g_{1,i}(2B_2+B_3-A_3)-A_1y_i(x_0)-B_1y_i(x_N)\right],$$

$$F_{1,i}=6(q+2)\sum_{\gamma=1}^{N}q^{\gamma+1}y_i(x_\gamma)-(12q+5)y_i(x_0),$$

$$F_{2,i}=6(q+2)\sum_{\gamma=0}^{N-1}q^{N+1-\gamma}y_i(x_\gamma)-(12q+5)y_i(x_N),$$

$$\begin{array}{lllllllll} A_1 &=& 3q+2, & A_2 &=& h(2q+1), & A_3 &=& h^2q,\\ B_1 &=& 3q^N(3q+1), & B_2 &=& hq^N(2q+1), & B_3 &=& -h^2q^{N+1}, \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllllll} g_{0,1} &=& -\pi t, & g_{1,1} &=& \frac{\pi}{2}(1-2t^2), & g_{0,2} &=& -\pi, & g_{1,2} &=& \pi(1-t),\\ g_{0,3} &=& \pi, & g_{1,3} &=& \pi(1+t), & g_{0,4} &=& 0, & g_{1,4} &=& \pi, \end{array}$$

$q=\sqrt{3}-2.$

Доказательство. Из (5.7) при $\beta=0$ и $\beta=N$ сразу получим (5.16) и (5.17), т. е.

$$a^-_{0,i} = y_i(x_0), \tag{5.18}$$

$$a^+_{0,i}=y_i(x_N)-\frac{1}{12}g_{0,i}+\frac{1}{4}g_{1,i}-a^+_{1,i}. \tag{5.19}$$

Из (5.9), используя (4.2) и (5.7) при $\beta=-1$ и $\beta=N+1$, имеем

$$
\begin{gathered}
-a_{1,i}^{-}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)+a_{1,i}^{+}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(h\gamma)=\\
=-\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma+h)y_i(x_\gamma)-\frac{1}{12}g_{0,i}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)^3-\\
-\frac{1}{4}(g_{1,i}+g_{0,i})\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)^2-\frac{1}{12}g_{0,i}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(2+h\gamma)^3+\\
+\frac{1}{4}(g_{1,i}+g_{0,i})\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(2+h\gamma)^2-\left(y_i(x_N)+\frac{1}{3}g_{0,i}+g_{1,i}\right)\times\\
\times\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)-y_i(x_0)\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h),
\end{gathered}
\tag{5.20}
$$

$$
\begin{gathered}
-a_{1,i}^{-}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(h\gamma)+a_{1,i}^{+}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(h\gamma)=\\
=-\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h(N+1)-h\gamma)y_i(x_\gamma)-\frac{1}{12}g_{0,i}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(h\gamma)^3-\\
-\frac{1}{4}(g_{1,i}+g_{0,i})\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h)(h\gamma)^2-\frac{1}{12}g_{0,i}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(2+h\gamma)^3+\\
+\frac{1}{4}(g_{1,i}+g_{,i})\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)(2+h\gamma)^2-\left(y_i(x_N)+\frac{1}{3}g_{0,i}+g_{1,i}\right)\times\\
\times\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma-h)-y_i(x_0)\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)+h).
\end{gathered}
\tag{5.21}
$$

Таким образом, для неизвестных $a_{1,i}^{-}$, $a_{1,i}^{+}$, $a_{0,i}^{-},a_{0,i}^{+}$ получили систему линейных уравнений (5.18)–(5.21). Решая эту систему, получим (5.14)–(5.17). Значит, мы получили явный вид функции $u_i(x_\beta)$.

Далее в силу (5.7), из (5.6) вычисляя свертку $hD_2(h\beta)*u_i(x_\beta)$ при $\beta=\overline{0,N}$, для оптимальных коэффициентов имеем

$$
\begin{gathered}
C_i[\beta]=hD_2(h\beta)*u_i(x_\beta)=h\Bigg[\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\beta+h\gamma)\Bigg(\frac{g_{0,i}(h\gamma)^3}{12}+\frac{g_{1,i}+g_{0,i}}{4}(h\gamma)^2-\\
-a_{1,i}^{-}(h\gamma)+a_{0,i}^{-}\Bigg)+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\beta-h\gamma)y_i(x_\gamma)+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\times\\
\times\left(\frac{g_{0,i}}{12}(2+h\gamma)^3-\frac{g_{1,i}+g_{0,i}}{4}(2+h\gamma)^2+a_{1,i}^{+}(2+h\gamma)+a_{0,i}^{+}\right)\Bigg].
\end{gathered}
$$

Отсюда, используя (4.2) при $\beta=0$, $\beta=\overline{1,N-1}$ и $\beta=N$, соответственно получим (5.11), (5.12) и (5.13). $\square$

6. Приближенные решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши

Таким образом, мы создали следующие формулы, позволяющие аппроксимировать решения сингулярных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (0.2)–(0.5) на основе оптимальных квадратурных формул вида (1.1):

$$\varphi_i(t) \simeq \frac{1}{\pi\omega_i(t)} \sum_{\beta=0}^{N} C_i[\beta]\varphi(x_\beta), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Заключение

В настоящей работе в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(-1,1)$ построена оптимальная квадратурная формула приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Здесь найдены аналитические формы для коэффициентов построенных оптимальных квадратурных формул. Мы применили эти коэффициенты для приближенного решения сингулярного интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Литература

[1] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях* (Наука, М., 1985).
[2] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент* (Янус, М., 1995).
[3] Крылов В.И. *Приближенное вычисление интегралов* (Наука, М., 1967).
[4] Мысовских И.П. *Интерполяционные кубатурные формулы* (Наука, М., 1981).
[5] Салихов Г.Н. *Кубатурные формулы для многомерных сфер* (Фан, Т., 1985).
[6] Stround A.H. *Approximate calculation of multiple integrals* (Englewood cliffs, NY., 1971).
[7] Cools R., Kim K.J. *Rotation invariant cubature formulas over the n-dimensional unit cube*, J. Comput. Appl. Math. **132**, 15–32 (2001).
[8] Бахвалов Н.С. *Численные методы* (Лаборатория базовых знаний, М., 2001).
[9] Ермаков С.М. *Метод Монте-Карло и смежные вопросы* (Наука, М., 1975).
[10] Соболь И.М. *Численные методы Монте-Карло* (Наука, М., 1973).
[11] Михайлов Г.А. *Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло* (Наука, Н., 1974).
[12] Коробов Н.М. *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе* (Физматгиз, М., 1963).
[13] Ченцов Н.Н. *О модифицированном рекуррентном алгоритме Коробо-ва построения равномерной сетки в многомерном кубе*, Вопр. вычисл. и прикл. матем. **38**, 127–133 (1970).
[14] Жилейкин Я.М. *О квадратурных формулах на классах функций*, ЖВМиМФ **3**, 507–516 (1968).
[15] Шарыгин И.Ф. *О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций*, ДАН СССР **132**, 71–74 (1960).
[16] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).
[17] Sard A. *Integral representations of remarkable*, Duke Math. J. **15**, 333–345 (1948).
[18] Габдулхаев Б.Г. *Сплайн-методы решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем. (6), 14–24 (1975).
[19] Габдулхаев Б.Г. *Об оптимальных квадратурных формулах для сингулярных интегралов*, Изв. вузов. Матем. (3), 24–39 (1978).
[20] Даутов Р.З. *Точная оценка погрешности наилучшего приближения алгебраическими полиномами в весовом $L_2(-1,1)$*, Изв. вузов. Матем. (5), 61–63 (2013).
[21] Даутов Р.З. *Прямые и обратные теоремы аппроксимации функций алгебраическими полиномами и сплайнами в нормах пространства Соболева*, Изв. вузов. Матем. (6), 79–86 (2022).
[22] Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren* (Akademie-Verlag, Berlin, 1980).
[23] Иванов В.В. *Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений*, Итоги науки и техн. Матем. ан., 125–177 (1965).

[24] Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, Итоги науки и техн. Матем. ан. **18**, 251–307 (1980).

[25] Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и интегральные уравнения*, Вычисл. процессы и системы **7**, 94–278 (1990).

[26] Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений* (Наук. думка, Киев, 1968).

[27] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1980).

[28] Габдулхаев Б.Г. *Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений*, Изв. вузов. Матем. (7), 12–24 (2004).

[29] Габдулхаев Б.Г., Тихонов И.Н. *Квадратурно-кубатурный метод решения нелинейных бисингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами*, Изв. вузов. Матем. (6), 14–24 (2006).

[30] Габдулхаев Б.Г. *О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов*, Изв. вузов. Матем. (8), 3–10 (2009).

[31] Qinghua W., Mengjun S. *On the convergence rate of collocation methods for Volterra integral equations with weakly singular oscillatory trigonometric kernels*, Results Appl. Math. **17**, 100352 (2023).

[32] Akhmedov D., Shadimetov Kh. *Optimal quadrature formulas with derivative for Hadamard type singular integrals*, AIP Conf. Proc. **2365**, 020020 (2021).

[33] Akhmedov D. *Approximate Solution of a Class of Singular Integral Equations of the First Kind*, AIP Conf. Proc. **3004**, 060033 (2024).

[34] Nuraliev F. *Cubature formulas of Hermite type in the space of periodic functions of two variables*, AIP Conf. Proc. **2365**, 020031 (2021).

[35] Shadimetov Kh. and Boltaev A. *An exponential-trigonometric optimal interpolation formula*, Lobachevskii J. Math. **44**, 4379–4392 (2023).

[36] Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. *Optimal quadrature formulas with positive coefficients in* $L_2^{(m)}$ *space*, J. Comput. Appl. Math. **235**, 1114–1128 (2011).

[37] Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог оператора* d^{2m}/dx^{2m} *и его построение*, Вопр. вычисл. и прикл. матем. **79**, 22–35 (1985).

Халматвай Махкамбаевич Шадиметов

Ташкентский государственный транспортный университет,
ул. Адылходжаева, д. 1, г. Ташкент, 100167, Республика Узбекистан;
Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

Дилшод Машрабович Ахмедов

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Ташкентский Международный Университет,
ул. Малая кольцевая, д. 7, г. Ташкент, 100084, Республика Узбекистан,

e-mail: axmedovdilshod@mail.ru

Алижон Хайруллоевич Авезов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: a.x.avezov@buxdu.uz

Kh.M. Shadimetov, D.M. Akhmedov, and A.Kh. Avezov

An approximate method for solving a characteristic singular integral equation

Abstract. Many problems in science and engineering are naturally reduced to singular integral equations. Moreover, planar problems are reduced to one-dimensional singular integral equations. In the present paper, we develop an optimal algorithm for the approximate solution of one-dimensional singular integral equations with the Cauchy kernel. Here, we focus on finding the analytical form of the coefficients of the optimal quadrature formula. We apply these coefficients to an approximate solution of the Fredholm singular integral equation of the first kind. Thus, we demonstrate the possibility of solving singular integral equations with higher accuracy using the optimal quadrature formula.

Keywords: Sobolev space, extremal function, error functional, optimal quadrature formula, Cauchy type singular integral, weight function, singular integral equation.

Khalmatvay Makhkambaevich Shadimetov

Tashkent State Transport University,
1 Odilkhodjaev str., Tashkent, 100167 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` kholmatshadimetov@mail.ru

Dilshod Mashrabovich Akhmedov

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Tashkent International University,
7 Kichik khalka yoli, Tashkent, 100084 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` axmedovdilshod@mail.ru

Alijon Khayrullaevich Avezov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` a.x.avezov@buxdu.uz