Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №25 (том 4)
(апрель, 2022)

BOSHLANG'ICH SINF O'QUVCHILARIDA KITOBXONLIK MADANIYATINI SHAKLLANTIRISHNING LINGVOMETODIK ASOSLARI Tursunova Baxtigul Botirjon qizi	238
MAKTAB YOSHIDAGI BOLALARDA JISMONIY TARBIYA DARSLARI AHAMIYATI VA ROLI Ubaydillayeva Dilnoza Muhammad qizi	242
ПРОБЛЕМА ЛИДЕРСТВА И УПРАВЛЕНИЯ Умаров Мухаммадшариф	249
ТИЗИМЛИ ТАҲЛИЛ ВА УНИНГ БОШҚАРУВ ЖАРАЁНИДАГИ ЎРНИ Умаров Мухаммадшариф	253
BOSHLANG’ICH SINF O’QUVCHILARINI MANTIQIY MASALALAR YECHISHGA O’RGATISH USULLARI Umarova Iroda Yakubjanovna	257
DIGESTIVE PHYSIOLOGY OF THE STOMACH. DISORDERS OF GASTRIC MOTILITY. METHODS OF EXAMINATION IN MEDICINE Umarkulov Mukhtorali, Kholmatova Muhlisa Ishpolat qizi	261
PHYSIOLOGY OF ENDOCRINE GLANDS Umarkulov Mukhtorali, Ibrahimova Yulduz Bakhodir qizi	265
PHYSIOLOGY OF THE LIVER AND ITS ROLE IN THE DIGESTIVE PROCESS Umarkulov Mukhtorali, Burkhonova Orzukhon Asrorjon qizi, Turgunboyeva Gulhayo Ikromjon's daughter	272
ARPABODIYON O’SIMLIGINING FOYDALI XUSUSIYATLARI Shaymanov Umidjon Musurmon O’g’li	276
BOSHLANG‘ICH SINF O‘QUVCHILARIDA ATROF-MUHITGA IJOBIY MUNOSABATNI SHAKLLANTIRISHNING PSIXOLOGIK-PEDAGOGIK XUSUSIYATLARI Urinbayeva Venera Abdikalikovna	280
USE OF PSYCHOLOGICAL METHODS IN THE FORMATION OF COGNITIVE ABILITY Mahmud Normominovich Haydarov	290
USING CONVERSATION QUESTIONS IN THE CLASSROOM Abduganieva Shodiya Rakhimovna	293
MAKTABGACHA TA`LIM TASHKILOTLARIDA O`YIN TEXNOLOGIYALARDAN FOYDALANISH Minarova Sevaraxon Ulug`bek qizi, Xolova Mahliyo Po`latovna, Babadjanova Roza Ilxamovna, Akramova Nazokat Xaydarali qizi	297
BOLALARDA RIVOJLANISH SOHALARINI O‘YINLAR ORQALI SHAKLLANTIRISH Qayumova Zilolaxon Jumanazarovna, Ergasheva Maxfuza Ma’murjonovna, Abdusattorova Muxiba Muxammadovna, Tadjibayeva Ra’no Xakimovna	302

БУХОРО АМИРЛИГИ ВА ҚЎШНИ АФҒОНИСТОН ЎРТАСИДАГИ САВДО ЙЎЛЛАРИНИГ ЙЎНАЛИШЛАРИ ВА МАҲСУЛОТ ТУРЛАРИНИНГ УМУМИЙ ТАВСИФИ Сафаров Т.Т.	983
ИНВЕСТИЦИИ В РАЗВИТИИ ЭКОНОМИКИ УЗБЕКИСТАНА Саьдуллаев Хусниддин Хуршид угли	989
USE OF TECHNOLOGY OF REMOTE RELEASE OF GOODS IN THE WORK OF CUSTOMS AUTHORITIES Ladigena E.V., Tursunova M.O.	994
НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ Авезов Алижон Хайруллаевич	1003
DIFFERENSIALLASHGAN TA’LIM – BO‘LAJAK MUTAXASSISLARNING KOMPETENSIYASINI SHAKLLANTIRISH OMILI SIFATIDA Rashidov Anvarjon Sharipovich	1016
ДУХОВНЫЙ КРИЗИС В ПОВЕСТИ Л.С. ПЕТРУШЕВСКОЙ «ВРЕМЯ НОЧЬ» Темурова Шахноза Окиловна	1026
МУЛОҲАЗАЛАР МАВЗУСИНИ ЎҚИТИШДА «ЖАДВАЛ» ГРАФИК ОРГАНАЙЗЕР МЕТОДЛАРИ Умарова Умида Умаровна, Бозорова Дилноза Шавкат кизи	1031
ТЎҒРИ ФИКР ЮРИТИШ ҚОНУНЛАРИ МАВЗУСИНИ ЎҚИТИШДА «ЧАРХПАЛАК» ТЕХНОЛОГИЯСИ Умарова Умида Умаровна, Шукурова Мубаширахон Фуркатовна	1041
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ Курбонов Гуломжон Гафурович	1052
ЛЕКЦИЯ С ЗАРАНЕЕ ОБЪЯВЛЕННЫМИ ОШИБКАМИ ПО ТЕМЕ ТЕОРИЯ ГРАФОВ Умарова Умида Умаровна	1059
MATEMATIKA DARSLARIDA INTERFAOL METODLARDAN FOYDALANISH Rashidov Anvarjon Sharipovich	1067
МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕКОТОРЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ Мамуров Бобохон Жураевич, Жураева Наргиза Олтинбоевна	1077
ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ Сафар Ходжиев, Жўраева Наргиза Олтинбоевна	1088

ФИО автора: *Авезов Алижон Хайруллаевич*
Бухарский государственный университет
Физико-математический факультет
Название публикации: «НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

Аннотация. Данная статья посвящена по преподаванию вычисление производной функций многих переменных. Показано решение несколько примеров. С целью повышения эффективности занятия рекомендовано и обосновано использование нового передового педагогического метода «Математическое лото».
Ключевые слова: функция многих переменных, частная производная, новая педагогическая технология, частное приращение функции, полное приращение, аргумент, граничная точка, дифференцируемость функции.

Известно, что изучение материалов по тему - производные функции многих переменных, в большинство случаев вызывает некоторые трудности для студентов вузов на занятиях по математическому анализу. В связи с этим, в данной статье представлена более подробная информация о вычисление производной функции многих переменных, с использованием передовых педагогических технологий. Приведены контрольные задачи и способы их решения.

Пусть, $M(x_1, \ ,x_m) -$ внутренняя точка области в определения функции $u = f\left(x_{1,} \ ,x_m\right)$.

Рассмотрим частное приращение этой функции в точке $M\left(x_{1,} \ ,x_m\right)$, соответствующее приращению Δx_k аргумента $\Delta u = f(x_1, \ ,x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ ,x_m) - f\left(x_{1,} \ ,x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ x_m\right)$. Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta x_k}$ является функцией одного аргумента Δx_k (при фиксированной точке $M\ (x_1, \ x_m)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Частной производной функцией $u = F(x_1, \ x_m)$ по аргументу x_k в точке M называется предел

$$\lim_{\Delta x_{k \to 0}} \frac{\Delta x_{ku}}{\Delta x_k}$$

(если он существует) [1].

По другому говоря, в математическом анализе частная производная (первая производная) - одно из обобщений понятия производной на случай функции нескольких переменных. Частная производная - это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю.

Она обозначается любым из следующих символов:

$$\frac{du}{dx_k}(M),\ \frac{df}{dx_k}(M),\ u_{xk}(M),\ f_{xk}(M).$$

Следует обратить внимание, что обозначение $\frac{\partial f}{\partial x}$ следует понимать как цельный символ, в отличие от обычной производной функции одной переменной $\frac{df}{dx}$, которую можно представить, как отношение дифференциалов функции и аргумента. Однако, и частную производную можно представить, как отношение дифференциалов, но в этом случае необходимо обязательно указывать, по какой переменной осуществляется приращение функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{d_x f}{dx},$$

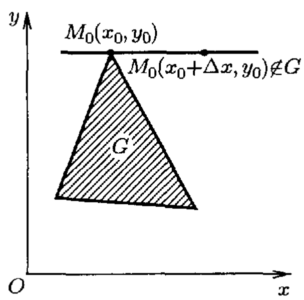
где $d_x f$ - частный дифференциал функции f по переменной x. Часто непонимание факта цельности символа $\frac{\partial f}{\partial x}$ является причиной ошибок и недоразумений, как, например, сокращение ∂x в выражении $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$.

Отметим, что при фиксированных значениях всех аргументов, кроме x_k, функция $u = f(x_1, \ , x_m)$ снова будет функцией одной переменной. Производная этой функции одной переменной и есть частная производная функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументу x_k. Поэтому вычисления частных производных производится по тем же правилам что и вычисление производных функций одной переменной.

Физически смысл частной производной $\frac{du}{dx_k}(M)$ − это скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox_k.

Если M − граничная точка области определения функции, то для такой точки введенное определение частной производной может быть непригодным. Например, если функция $u = f(x,y)$ определена в треугольнике G (см. рис.), то для граничной точки $M_0(x_0, y_0)$ не определено частное приращение $\Delta_x u$, так как при любом $\Delta x \neq 0$ точка $M(x_0 + \Delta x, y_0)$ лежит вне области G. Поэтому нельзя определить $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, пользуясь данным

выше определением частной производной. В таком случае, если существует частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ во внутренних точках M области G, то по определению полагают $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim\limits_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\frac{\partial u}{\partial x}(\mathrm{M})$ (если этот предел существует).



Теперь рассмотрим полное приращение функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ во внутренней точке $M(x_1, \dots, x_m)$ области определения функции

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Приращение функции Δu также является функцией своих аргументов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + a_1\Delta x_1 + \dots + a_m\Delta x_m, \qquad (1)$$

где $A_i -$ некоторые числа, $a_i(i = 1, \ldots, m) -$ функции аргументов $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$, бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_m \to 0$ и равные нулю при $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_m = 0$.

Условие дифференцируемости (1) можно записать в другой, эквивалентной форме

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_m \Delta x_m + \alpha(p), \qquad (2)$$

где $p = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_m)^2} -$ расстояние между точками $M(x_1, \ldots, x_m)$ и $M'(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_m + \Delta x_m)$, $\alpha(p) = o(p)$ при $p \to 0$, $\alpha(p) = 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M, то она не прерывна в этой точке.

Обратная теорема неверна, т.е., непрерывность является только необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Так, функция $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $O(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке (поскольку не имеет частных производных в точке $O(0,0)$. Это доказывает, что непрерывность является только необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Между существование производной и дифференцируемости функции многих переменных имеется тесный связь между ними. Напомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ существование производной в точке x_0 является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в этой точке. Для функции нескольких переменных дифференцируемость и существование частных производных не являются эквивалентными свойствами функции. Так, имеется место следующая теорема.

Теорема 2 (необходимость условие дифференцируемости). Если функция $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M, то она имеет в точке M частные производные по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_m$.

Обратная теорема неверна, т.е. существование частных производных, не является достаточным условием дифференцируемости функции (см. пример, приведенный выше). Верна следующая теорема.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости). Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные по каждому аргументу $x_1, \dots, x_m$ в некоторой окрестности точки M и эти частные производные непрерывны в точке M, то функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке M.

Отметим также, что непрерывность частных производных является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции. Приведем пример [1]:

Функция

$$u = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

имеет частные производные в окрестности точки $O(0,0)$ и дифференцируема в точке $O(0,0)$, но частные производные не являются непрерывными в точке $O(0,0)$.

Докажем это. Во всех точках, кроме точки $O(0,0)$, частные производные функции $u = (x, y)$ можно найти, вычисляя по обычным правилам производные функции

$$(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Например,

$$\frac{du}{dx}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-3/2} 2x$$

$$= 2x\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

при $x^2 + y^2 \neq 0$.

В точке O (0,0) эта формула теряет смысл. Однако, это не означает что $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ не существует, поскольку выражение для $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ было получено при условии $x^2+y^2\neq 0$. Для нахождения $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$ воспользуемся определением частной производной. Так как

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

то

$$\Delta_x u=u(\Delta x,0)-u(0,0)=\Delta x^2\,sin\frac{1}{|\Delta x|}.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{|\Delta x|}=0\,,$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=0.$$

Аналогично можно доказать, что $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$. Итак, функция $u(x,y)$ имеет частные производные в окрестности точки $O(0,0)$.

Докажем, что функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$. Для этого нужно доказать, что

$$\Delta u=u(\Delta x,\Delta y)-u(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\,sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

можно представить в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

т.е. справедливо равенство (учитываем, что $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0$)

$$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

Но это равенство очевидно. Поскольку

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0.$$

Таким образом, функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке $O(0,0)$.

Докажем, наконец, что частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$. Очевидно, первое слагаем $2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ стремится к нулю при $M(x,y)\to O(0,0)$. Второе же слагаемое $(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ не имеет предела при $M(x,y)\to O(0,0)$. В самом деле, если точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по лучу $y=kx(k\neq 0, x>0)$, то на этом луче указанное слагаемое равно $-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\cos\frac{1}{x\sqrt{1+k^2}}$ и, очевидно, не имеет предела при $x\to 0$.
Итак, предел $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$. Аналогично можно показать, что $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ не является непрерывной в точке $O(0,0)$.

Рассмотренный пример показывает, что непрерывность частных производных является только достаточным (теорема 2), но не необходимым условием дифференцируемости функции.
Чтобы это тема было более понятным, мы предлагаем применить метод «Математическое лото», которое организуется следующим образом: игра в математическое лото может проводиться с целью закрепления или контроля знаний и навыков по определенной теме или главе. Подробное описание данного метода имеются в многочисленных литературах и научных работах. Поэтому на изложение метода не будем останавливаться.
Так, после проведения организационной части урока преподаватель начинает этап активизации знаний студентов. Карточки примерно выгладят следующим образом (для образца приведем две карточку и геометрическое карта лото):

Карточка №1

1. Дайте определение частной производной функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ по аргументу x_k во внутренней точке области определения функции;

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии дифференцируемости;

5. Каков физический смысл частной производной?

7. Почему для граничной точки определение частной производной может быть непригодным?

9. Как определяются частные производные функции в граничных точках области определения функции?

11. Запишите формулу для вычисления частных производных сложной функции;

13. Что такое дифференциал функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в данной точке? От каких аргументов он зависит?

15. Докажите дифференцируемость функции $u = x_1 x_2$ в точке O(0,0), представив ее приращение в этой точке в виде (1);

17. Расскажите схема инвариантность формы первого дифференциала пользуясь правилом дифференцирования сложной функции;

19. Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Карточка №2

2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии дифференцируемости;

4. Пользуясь определением частной производной, найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = xy^2$;

6. Каков геометрический смысл дифференцируемости функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$?

8. Дайте определение касательной плоскости к поверхности $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и запишите уравнение касательной плоскости в этой точке;

10. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции;

12. Дайте определение дифференцируемости функции в данной точке;

14. Докажите эквивалентность условий дифференцируемости (1) и (2);

16. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала?
18. Докажите, что дифференцируемая в данной точке функция непрерывна в этой точке;
20. Каков геометрический смысл частной производной?

Геометрическая карта лото №1

1	3	5
7	9	11
13	15	17
	19	

Геометрическая карта лото №2

2	4	6
8	10	12
14	16	18
	20	

Здесь отметим, что применение новых педагогических технологий на занятиях, требуют не только от преподавателей, но и от студентов тоже много работы над собой, что в свою очередь помогает студентам проявлять свои таланты. Практический опыт показывают, что использование новых педагогических технологий изложенных в [2-9], при преподавании специальных предметов, дали хорошие положительные результаты. В работах [10-29] использованы свойства функций многих переменных.

В заключение отметим, что также важно предоставить информацию о применении математики на практике и интеграции с другими дисциплинами [30-40].

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф.Бутузов и др. Математический анализ в вопросах и задачах, Москва, Физматлит, 1002 г., 479 с.
2. Авезов А.Х., Amrullayeva A.N., Namozova M.M. «Aqliy hujum» va «keys study» metodlari yordamida «funksiya hosilasi» mavzusini o‘qitish. Scientific progress, 2:6 (2021), с.1689-1697.

3. Авезов А.Х., Hakimova Sh.H. Hamroyeva Yu.A. Analitik geometriya va chiziqli algebra bobini takrorlashda grafik organayzer metodlari. Scientific progress, 2:6 (2021), c.1680-1688.

4. Avezov A.X., Raxmatova N. Eyler integrallarining tadbiqlari. Scientific progress, 2:1 (2021), c.1397-1406.

5. Avezov A.X., Hakimova S.H., Hamroyeva Y.A. Analitik geometriya va chiziqli algebra bobini takrorlashda grafik organayzer metodlari. Scientific Progress. – 2021. – Т. 2. – №. 6. – С. 1680-1688.

1. Avezov A.X. Ta'limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish. Science and Education" scientific journal, 2:11 (2021), c. 789-797.

2. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o'qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari. Science and Education scientific journal, 2:11 (2021), c. 778-788.

3. Avezov A.X. Умумтаълим мактаблардаги математика дарсларида ахборот технологияларини ривожлантириш тамойиллари. "Science and Education" scientific journal 2:11 (2021), c. 749-758

5. Avezov A.X. Avtonom differensial tenglamalarning qo'zg'almas nuqtalari tasnifi haqida. "Science and Education" scientific journal, 2:11 (2021), c.101-113.

10. Авезов А.Х. Выбор математической модели и исследование трехмерных турбулентных струй. Молодой ученый, 15, (2017). c.101-102.

11. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida. Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.

12. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа. Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.

13. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения. Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.

14. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар. Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.65-76.
15. Бозорова Д.Ш., Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа. Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.14-22.
16. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа. Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.23-30.
17. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines. Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
18. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration. Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
19. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа. ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
20. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа. «Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.
21. Rasulov X.R. (2020). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Uzbek Mathematical Journal, №3, pp.117-125.
22. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
23. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.

24. Rasulov X.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system. Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
25. Расулов Т.Х. (2011). Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке. Теоретическая и математическая физика. 166:1, С. 95-109.
26. Расулов Т.Х., Расулова З.Д. (2015) Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. Сибирские электронные математические известия. 12, С. 168-184.
27. Авезов А.Х. Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, вытекающих из сопла прямоугольной формы на основе «k-ε» модели турбулентности. Ученый XXI века, 5-3(40), май 2018 г.
28. Авезов А.Х. Некоторые численные результаты исследования трехмерных турбулентных струй реагирующих газов. Вестник науки и образования, 95:17-2 (2020), с. 6-10.
28. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа. Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
29. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа. XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
30. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках. Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
31. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии. Scientific progress, 2:2 (2021), р.870-879.
32. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида. Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), р.81-96.

33. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем. «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
34. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида. Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
35. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем. Наука, техника и образование, 72:2-2 (2021) c.27-30.
36. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем. Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) c. 19-22.
37. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари. Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
38. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида. Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
39. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши. Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
40. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики. Наука, техника и образование, 72:8 (2020) c.29-32.