UNIVERSUM:
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Научный журнал
Издается ежемесячно с декабря 2013 года
Является печатной версией сетевого журнала
Universum: технические науки

Выпуск: 10(79)

Октябрь 2020

Часть 1

Москва
2020

Содержание

ИНЖЕНЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, ПОСТАВЛЕННОЕ НА ВЕКТОРНОМ ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ В ОБЛАСТИ С УГЛОМ

Имомова Шафоат Махмудовна
ст. преподаватель
Бухарского государственного университета,
Республика Узбекистан, г. Бухара

Исмоилова Махсума Нарзикуловна
ст. преподаватель
Бухарского государственного университета,
Республика Узбекистан, г. Бухара
E-mail: maxsuma.ismoilova@mail.ru

NUMERICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM, POSED ON A VECTOR WAVE EQUATION IN A DOMAIN WITH AN ANGLE

Shafoat Imomova
Senior Lecturer,
Bukhara State University,
Uzbekistan, Bukhara

Mahsuma Ismoilova
Senior Lecturer,
Bukhara State University,
Uzbekistan, Bukhara

АННОТАЦИЯ

Получена априорная оценка в пространстве Соболева решения смешанной задачи для векторного волнового уравнения в угловом пространстве. Получение априорной оценки основана на построении «диссипативного интеграла энергии». В данной статье построена разностная схема для численного решения смешанной задача для волнового уравнения в области с углом, доказывается её устойчивость.

ABSTRACT

An a priori estimate in the Sobolev space of the solution of the mixed problem for the vector wave equation in angular space is obtained. Obtaining an a priori estimate is based on the construction of a “dissipative energy integral”. In the article a difference scheme for numerical solution of mixed problem for wave equation in wiz corner is constructed. The difference scheme stability is proved.

Ключевые слова: смешанная задача, матрица, разностная схема, устойчивость, комплекс, вектор, условия Лопатинский.

Keywords: mixed problem, matrix, difference scheme, stability, complex, vector, Lopatinskiy terms.

Математико-физические задачи очень обширны и неразрывно связаны с изучением различных физических, механических, биологических и других процессов. Математико-физические уравнения направлены на изучение трех классических: эллиптических, параболических, гиперболических классов. В тех случаях, когда аналитическое выражение решений математико–физических уравнений найти невозможно, приходится находить их числовые решения. Для уравнения векторной волны в угловой области, относящейся к типу симметричных T-гиперболических уравнений, программа численного решения смешанной задачи используется при изучении задач механики сплошных сред.

Рассмотрим следующую задачу:

Найти решение уравнение векторной волны

$$U_{tt} - U_{xx} - U_{yy} = 0 \qquad (1)$$

Библиографическое описание: Имомова Ш.М., Исмоилова М.Н. Численное решение смешанной задачи, поставленное на векторном волновом уравнении в области с углом // Universum: технические науки : электрон. научн. журн. 2020. 10(79). URL: *https://7universum.com/ru/tech/archive/item/10828*

в среде $R_+^3 = \{(t,x,y) | \ t,x,y>0\}$

удовлетворяющее при $x=0$

$$J_1U_t - A_1U_x - B_1U_y = 0\,, \quad (t,y)\in R_+^2 \qquad (2)$$

при $y=0$

$$J_2U_t - A_2U_x - B_2U_y = 0\,, \quad (t,x)\in R_+^2 \qquad (3)$$

граничным условиям и

$$U=\Phi(x,y),\ U_t=\psi(x,y),\ t=0,\ (x,y)\in R_+^2 \qquad (4)$$

начальным условиям.

Здесь $J_1, A_1, B_1, J_2, B_2, A_2 - n$ -размерные фиксированные комплексные матрицы. В монографии [1] получена априорная оценка решения этих задач. Оценка Априора основана на построении «диссипативного интеграла энергии». В задачах $(1)-(4)$ $t>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \xi\in R'$ полярные координаты $\xi,\theta(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, \xi=\ln r)$ проходят в области

$$\left\{e^{\xi}A_0\frac{\partial}{\partial t} - B_0\frac{\partial}{\partial\theta} - C_0\frac{\partial}{\partial\xi} + Q_0\right\}V=0,\ \ t>0,\ (\theta,\xi)\in\Pi \ (5)$$

$$J_1V_1 + A_1V_2 - B_1V_3 = 0, \quad \theta=\frac{\pi}{2},\ \ t>0,\ \xi\in R' \qquad (6)$$

$$J_2V_1 - A_2V_2 - B_2V_3 = 0, \quad \theta=0,\ \ t>0,\ \xi\in R' \qquad (7)$$

$$V=\left\{e^{\xi}\tilde{\psi}(\theta,\xi),\ \tilde{\Phi}'_{\xi}(\theta,\xi)\right\}',\ t=0,\ (\theta,\xi)\in\Pi \qquad (8)$$

здесь

$$A_0=\begin{pmatrix} K & L & M\\ L & K & iN\\ M & -iN & K\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix} L & K & iN\\ K & L & M\\ -iN & M & -L\end{pmatrix},$$

$$C_0=\begin{pmatrix} M & -iN & K\\ iN & -M & L\\ K & L & M\end{pmatrix}$$

$$Q_0=\begin{pmatrix} M & 0 & 0\\ iN & 0 & 0\\ K & 0 & 0\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} V_1\\ V_2\\ V_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\xi}U_t\\ U_\theta\\ U_\xi\end{pmatrix},$$

$K,L,M,N-$ эрмитовые матрицы, которые их любые элементы связаны с θ.

Построим параметрическую разностную схему, аппроксимирующую смешанную задачу $(5)-(8)$.

Для этого произведём замену $V=e^{\frac{1}{2}\xi}Y$ в системе (5) и напишем в следующей форме:

$$e^{\xi}A_0\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial[B_0Y]}{\partial\theta} - C_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \left[Q_0 - \frac{1}{2}C_0 + \frac{d}{d\theta}B_0\right]Y = 0 \ (9)$$

$$e^{\xi}A_0\frac{\partial Y}{\partial t} - B_0\frac{\partial Y}{\partial\theta} - C_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \left[Q_0 - \frac{1}{2}C_0\right]Y = 0 \ (10)$$

Умножаем системы (9)-(10) на матрицу $D=diag(y_1,y_2,y_3)$ слева. Сложим полученные системы и формируем систему:

$$2e^{\xi}DA_0\frac{\partial Y}{\partial t} - D\frac{\partial[B_0Y]}{\partial\theta} - DB_0\frac{\partial Y}{\partial\theta} - 2DC_0\frac{\partial Y}{\partial\xi} + $$
$$+D\left[2Q_0 - C_0 + \frac{d}{d\theta}B_0\right]Y = 0 \qquad (11)$$

На рассматриваемой области $t\ge 0,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\xi\in R^1$ построим сетку с соответствующими шагами $\Delta t=\Delta_t,\ \Delta\theta=\Delta_\theta,\ \Delta\xi=\Delta_\xi$ по осям $t,\ \theta,\ \xi$.

Введем следующие обозначения:

$$Y_{ij}^n = Y(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi) =$$
$$=\left(y_1(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi), y_2(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi), y_3(n\Delta_t, i\Delta_\theta, j\Delta_\xi)\right)',$$
$$i=\overline{0,I},\ n,\ |j|=0,1,\ldots;$$

$$\left\|Y^n\right\|_{A_0}^2 = \Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{\xi_j}\left(A_0Y_{ij}^n, Y_{ij}^n\right),\ \ L=(1,1,1)'$$

Теперь мы построим параметрическое разностное уравнение, которое аппроксимирует уравнение (11):

$$e^{\xi_j}D_{ij}^n(A_0)_i\frac{Y_{ij}^{n+1}-Y_{ij}^n}{\Delta_t} + e^{\xi_j}D_{ij}^{n+1}(A_0)_i\frac{Y_{ij}^{n+1}-Y_{ij}^n}{\Delta_t} -$$
$$-\sigma\left[D_{ij}^{n+1}\frac{(B_0Y)_{i+1j}^{n+1}-(B_0Y)_{ij}^{n+1}}{\Delta_\theta} + D_{i+1j}^{n+1}(B_0)_{i+1}\frac{Y_{i+1j}^{n+1}-Y_{ij}^{n+1}}{\Delta_\theta} + \right.$$
$$\left. + D_{ij}^{n+1}(C_0)_i\frac{Y_{ij+1}^{n+1}-Y_{ij}^{n+1}}{\Delta_\xi} + D_{ij+1}^{n+1}(C_0)_i\frac{Y_{ij+1}^{n+1}-Y_{ij}^{n+1}}{\Delta_\xi}\right] -$$
$$-(1-\sigma)\left[D_{ij}^n\frac{(B_0Y)_{i+1j}^n-(B_0Y)_{ij}^n}{\Delta_\theta} + D_{i+1j}^n(B_0)_{i+1}\frac{Y_{i+1j}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\theta} + \right. \qquad (12)$$
$$\left. + D_{ij}^n(C_0)_i\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi} + D_{ij+1}^n(C_0)_i\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi}\right] +$$
$$+D_{ij}^n\left[2Q_0 - C_0 + \frac{d}{d\theta}B_0\right]_i Y_{ij}^n = 0$$

$$n=\overline{0,N-1},\quad i=\overline{0,I-1},\quad |j|=0,1,2,\ldots$$

$i=0,\ |j|=0,1,2,\dots$ da

$$\left(y_1\right)_{oj}^n - a_2\left(y_2\right)_{oj}^n - b_2\left(y_3\right)_{oj}^n = 0, \tag{13}$$

$i=I,\ |j|=0,1,2,\dots$ da

$$\left(y_1\right)_{Ij}^n + a_1\left(y_2\right)_{Ij}^n - b_1\left(y_3\right)_{Ij}^n = 0, \tag{14}$$

$n=0,\ \ i=0,1,2,\dots,I,\ |j|=0,1,2,\dots$ da

$$Y_{ij}^0 = \left(e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\psi}\left(\xi_j,\theta_i\right),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\psi}_\theta\left(\xi_j,\theta_i\right),\ e^{\frac{1}{2}\xi_j}\tilde{\psi}_\xi\left(\xi_j,\theta_i\right)\right)' \tag{15}$$

Теорема. Предположим, что выполнено ровное условие Лопатинского. Тогда для $\sigma\in[0,1]$ разностная схема $(12)-(15)$ будет устойчив при энергетической норме $\sqrt{J_n}$, здесь

$$J^n = \Delta_\theta\Delta_\xi\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(A_0V,V\right)_{ij}^n.$$

Доказательство.

Вышеперечисленную систему уравнений с правой стороны скалярно умножаем на вектор, который составители состоят из единиц.

$$\left(\bar{D}_{ij}^n\left(A_0\right)_i\frac{Y_{ij}^{n+1}+Y_{ij}^n}{\Delta_t},L\right)+\left(D_{ij}^{n+1}\left(\bar{A}_0\right)_i\frac{\bar{Y}_{ij}^{n+1}-\bar{Y}_{ij}^n}{\Delta_t},L\right)=$$
$$\left(\left(A_0\right)_i\frac{Y_{ij}^{n+1}+Y_{ij}^n}{\Delta_t},\left(\bar{D}L\right)_{ij}^n\right)+\left(\left(A_0\right)_i\left(DL\right)_{ij}^{n+1},\frac{\bar{Y}_{ij}^{n+1}-\bar{Y}_{ij}^n}{\Delta_t}\right)=$$
$$\frac{1}{\Delta_t}\left(A_0Y,\bar{Y}\right)_{ij}^{n+1}-\frac{1}{\Delta_t}\left(A_0Y,\bar{Y}\right)_{ij}^{n+1};$$

$$\left(\sigma\bar{D}\frac{\left[B_0Y\right]_{i+1}-\left[B_0Y\right]_i}{\Delta_\theta},L\right)+\left(\sigma D_{i+1}\left[\bar{B}_0\right]_{i+1}\frac{\bar{Y}_{i+1}-\bar{Y}_i}{\Delta_\theta},L\right)=$$
$$=\sigma\left(\frac{\left[B_0Y\right]_{i+1}-\left[B_0Y\right]_i}{\Delta_\theta},\bar{Y}_i\right)+\sigma\left(\left[B_0Y\right]_{i+1},\frac{\bar{Y}_{i+1}-\bar{Y}_i}{\Delta_\theta}\right)=$$
$$=\frac{\sigma}{\Delta_\theta}\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_{i+1j}^n-\frac{\sigma}{\Delta_\theta}\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_{ij}^n;$$

здесь $D=D_{ij}^n,\ \ \bar{D}_{i+1}=\bar{D}_{i+1j}^n$ и т.д. Получим уравнения:

$$\left(\sigma\bar{D}C_0\frac{Y_{j+1}-Y_j}{\Delta_\xi},L\right)+\left(\sigma D_{j+1}C_0\frac{\bar{Y}_{j+1}-Y_j}{\Delta_\xi},L\right)=$$
$$=\sigma\left(C_0\frac{Y_{j+1}-Y_j}{\Delta_\xi},\bar{Y}_j\right)+\sigma\left(C_0Y_{j+1},\frac{\bar{Y}_{j+1}+Y_j}{\Delta_\xi}\right)=$$
$$=\frac{\sigma}{\Delta_\xi}\left(C_0\bar{Y},\bar{Y}\right)_{ij+1}^n-\frac{\sigma}{\Delta_\xi}\left(C_0Y,\bar{Y}\right)_{ij}^n;$$

$$\left((1-\sigma)D_{ij}^n\frac{\left[B_0Y\right]_{i+1j}^n-\left[B_0Y\right]_{ij}^n}{\Delta_\theta},L\right)+$$
$$+\left((1-\sigma)D_{i+1j}^n\left[B_0\right]_{i+1}\frac{Y_{i+1j}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\theta},L\right)=$$
$$=(1-\sigma)\left(\frac{\left[B_0Y\right]_{i+1j}^n-\left[B_0Y\right]_{ij}^n}{\Delta_\theta},Y_{ij}^n\right)+$$
$$+(1-\sigma)\left(\frac{Y_{i+1j}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\theta},\left[B_0Y\right]_{i+1,j}^n\right)=$$
$$=\frac{1-\sigma}{\Delta_\theta}\left(B_0Y,Y\right)_{i+1j}^n-\frac{1-\sigma}{\Delta_\theta}\left(B_0Y,Y\right)_{ij}^n$$

$$\left((1-\sigma)D_{ij}^n\left(C_0\right)_i\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi},L\right)+$$
$$+\left((1-\sigma)D_{ij+1}^n\left[C_0\right]_i\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi},L\right)=$$
$$=(1-\sigma)\left(\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi},\left(C_0\right)_iY_{ij}^n\right)+$$
$$+(1-\sigma)\left(\frac{Y_{ij+1}^n-Y_{ij}^n}{\Delta_\xi},\left[C_0Y\right]_{i,j+1}^n\right)=$$
$$=\frac{1-\sigma}{\Delta_\xi}\left(C_0Y,Y\right)_{ij+1}^n-\frac{1-\sigma}{\Delta_\xi}\left(C_0Y,Y\right)_{ij}^n$$

$$\left(\bar{D}\left[Q_0-\mu C_0+\frac{d}{d\theta}B_0\right]Y,L\right)+\left(D\left[\bar{Q}_0-\mu\bar{C}_0\right]\bar{Y},L\right)=$$
$$=\left(\left[Q_0-\mu C_0+\frac{d}{d\theta}B_0\right]Y,\bar{Y}\right)+\left(D\left[Q_0^*-\bar{\mu}C_0\right]\bar{Y},Y\right)=$$
$$\left(\left[Q_0+Q_0^*-2\operatorname{Re}\mu C_0+\frac{d}{d\theta}B_0\right]Y,\bar{Y}\right)$$

Из этих уравнений получаем соотношения

$$e^{\xi_j}\frac{1}{\Delta_t}\left\{\left(A_0Y,\bar{Y}\right)^{n+1}-\left(A_0Y,\bar{Y}\right)^n\right\}-\frac{\sigma}{\Delta_\theta}\left\{\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_{i+1}-\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_i\right\}-$$
$$-\frac{1}{\Delta_\xi}\left\{\left(C_0Y,\bar{Y}\right)_{j+1}-\left(C_0Y,\bar{Y}\right)_j\right\}-\frac{1-\sigma}{\Delta_\theta}\left\{\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_{i+1}-\left(B_0Y,\bar{Y}\right)_i\right\}-$$
$$-\frac{1-\sigma}{\Delta_\theta}\left\{\left(C_0Y,\bar{Y}\right)_{j+1}-\left(C_0Y,\bar{Y}\right)_j\right\}+$$
$$+\left(\left[Q_0+Q_0{}'-C_0+\frac{d}{d\theta}B_0\right]_iY,Y\right)_{ij}^n=0$$

Эту соотношению умножаем на Δ_ξ,Δ_θ и сложим по i от 0 до $I-1$ и по j от $-\infty$ до $+\infty$.

Введя обозначение $\left\|Y^{n+1}\right\|_\Delta^2=\Delta_\theta\cdot\Delta_\xi\cdot\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}e^{\xi_j}\left(A_0Y_{ij}^{n+1},\bar{Y}_{ij}^{n+1}\right)$ и принимая во внимание в $|\xi| \to \infty$ $\|Y\| = \left(\bar{Y}, Y\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ получим уравнение

$$\left\|Y^{n+1}\right\|_A^2 - \left\|Y^n\right\|_A^2 = \Delta_\theta \cdot \Delta_\xi \cdot \sigma \cdot \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(B_0 Y, \bar{Y}\right)_{I,j}^n - \left(B_0 Y, \bar{Y}\right)_{0,j}^n \right\} +$$

$$+\Delta_t \cdot \Delta_\theta \cdot \Delta_\xi \cdot \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\left[Q_0 + Q_0^* - 2\operatorname{Re} \mu C_0 - \frac{d}{d\theta} B_0 \right] Y, \bar{Y} \right)_{ij}^n$$

На основе [2] можно доказать неравенство:

$$e^{\xi_0} \left(A_0 Y, Y\right)_{ij}^n > 0,\ e^{\xi_0} \left(A_0 Y, Y\right)_{ij}^{n+1} > 0,$$

$$-\sigma\left(B_0 Y, Y\right)_{Ij}^n \geq 0,\ \sigma\left(B_0 Y, Y\right)_{ij}^n \geq 0,$$

$$\sigma\left(B_0 Y, Y\right)_{0j}^{n+1} \geq 0,\quad (1-\sigma)\left(B_0 Y, Y\right)_{0j}^n \geq 0$$

А из этого получим соотношение

$$\left\|U^{n+1}\right\|_{W_2^{'}}^2 \leq \Delta_\theta \cdot$$

$$\cdot \Delta_\xi \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(U, \bar{U}\right)_{ij}^n + \left(U_t, \bar{U}_t\right)_{ij}^n + \left(U_x, \bar{U}_x\right)_{ij}^n + \left(U_y, \bar{U}_y\right)_{ij}^n \right\}$$

Это полностью доказывает теорему.

В статье показано приближенное решение смешанной задачи поставленного векторного волнового уравнения на угловом пространстве.

Список литературы:

1. Блохин А.М., Ткачев Д.Л. Смешанная задача для волнового уравнения в координатных областях. Получение априорных оценок для смешанных задач для многомерного волнового уравнения. // Вычислительные технологии. Т.1, № 1,2. 1996, с.13-37, 26-46.
2. Бердиева С.М., Имомова Ш.М. Использование инновационных технологий на уроках информатики// Наука, техника и образование. 2018.10 (51).С. 28-31.
3. Бердиева С.М., Имомова Ш.М. Построение двухмерных графиков на уроках информатики средствами Excel // ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА СОВРЕМЕННОЙ НАУКИ. 2017. № 12(30).
4. Исроилов М.И. Ҳисоблаш усуллари. 1-қисм.-Тошкент, Ўзбекистон нашриёти, 2003.
5. Исмоилова М.Н., Имомова Ш.М. Интерполяция функции // ВЕСТНИК НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ 2020. № 3(81). Часть 3. С. 5.
6. Имомова Ш.М., Исмоилова М.Н. Вычисление наибольшего собственного значения матрицы и соответствующего ей собственного вектора в среде Mathcad// ACADEMY. 2020. № 6(57). С9.
7. Худойберганов М.У. Устойчивость разностных схем для векторного волнового уравнения. // Труды Международной научной конференции. Дифф. урав. частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. –Ташкент. 2004, с. 305-308.