



BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

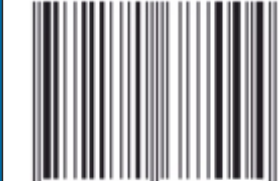
9/2024

E-ISSN 2181-1466

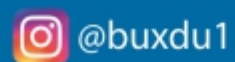
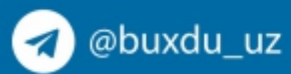


9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



9/2024

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2024, № 9, sentabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023 yil 29 avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoirra Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Jamilova Bashorat Sattorovna, filologiya fanlari doktori, professor

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, professor

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Klichev Oybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

МАТЕМАТИКА * MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА**

Отакулов С., Рахимов Б.Ш.	О локально-относительной управляемости одного класса дифференциальных включений	3
Ergashova Sh.H.	Ikki bozonli sistemaga mos Shryodinger operatori hos qiymatlarining cheksizligi	11
Жураев Ф.М.	Задача с условием Геллерстедта на не параллельных характеристиках для вырождающегося нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа	17
Muxammadjonov A.A., Abduraxmonova R.A., Vasiyeva G.A.	Cho‘zilgan uchburchak gumbaz qirralari bo‘ylab uch quvlovchi va bir qochuvchining tutish differensial o‘yini	29
Imomova Sh.M., Mardonova M.A.	Koshi masalasini taqribiy yechish	39
Durdiev U.D.	Initial-boundary value problem for the integro-differential equation of beam vibration	47
Akhadkulov H.A.	Exploring rigidity for circle diffeomorphisms with break type of singularitie	52
Tosheva N.A., Ravshanova M.I.	Silvestr alomati va uning tatbiqlari	56
Муминов М.Э., Раджабов Т.А.	Условия существования решений уравнений в частных производных с кусочно-постоянными аргументами	63
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Ergashev S.Sh., Sanaqulov Sh.M., Boymurodova R.A.	Maydanak observatoriyasida ekzosayyoralar kuzatuvi	70
Тешаев М.Х., Ҳомидов Ф.Ф., Жалолов Ф.Б., Нарзуллоев М.А.	Йиғилган массали қовушқоқ-эластик пластинканинг хос тебранишлари	75
Саипназаров Ж. М.	Распространение волн в двухслойной упругой среде	82
Химматов И.Ф., Улин С.Е.	Моделирование нейтронозахватной терапии с использованием GEANT4	91
Xidirov B.G‘., Махманов У.К.	РЗНТ miqdorining qiymati organik quyosh elementlarning optik va strukturaviy xossalariga ta’siri	95
Халилов Ш.Ф.	Қовушқоқ эластик муҳит билан алоқада бўлган цилиндрик қобикқа хос тўлқинларни тарқалиши	102
Shermatov B.N., Murodov S.N., Shermatov A.B., Nishonov I.E., Xoldorov O.N., Mirov M.F.	Kiselev qora tuynukning xususiyatlarini o‘rganishda kvazi davriy tebranishlar va ularning umumiy xususiyatlari	106
Sharopov U.B., Akbarova F.Dj.	Elektron nurlanishda rux oksid kristallari sirtida zaryadlarning hosil bo‘lishi	110

Nishonov I.E., Egamberdiyev I.M., Ajabov A.Q., Qayumova K.A., Boliyev Sh. I.	Collision of particles in modified black-bounce geometry	118
Эсанов Н.Қ.	Tekis qatlamli qovushqoq elastik dissipativ to‘lqin o‘tkazgichlarda to‘lqin tarqalishi	124
Aliev B.T., Shamshidinov M.E.	Analyzing the magnetic flow regulation of frequency converters of the linter device electric motor and working at different speeds	131
Quvondiqov A.O., O‘rinboyev N.M., Rahmatov B.M.	The motion of a particle around Ayon-Beato and Garcia black hole (non-linear electrodynamics)	137
Doniyorov L.S.	The relationship between Physics and Technology	145
Razikov T.M., Ergashev B.A., Bobomuradov Sh.M.	Sb ₂ Se ₃ asosli yupqa qatlamli quyosh elementlarining raqamli simulatsiyasi	150
Aliyeva M. H., Boymurodova R. A., Soatov H. P., Xoldorov O.N., Abduraimov D. K., Nishonov I.E.	Strong gravitational lensing by gup-modified Schwarzschild black hole	159
Алибеков А.С., Реутова М.А., Шаронов И.А., Адизов С.М., Хасанова Н.А.	Применение рентгенофлуоресцентного анализа и нейтронной томографии при исследовании фрагментов древних глиняных сосудов	163
KIMYO *** CHEMISTRY *** ХИМИЯ		
Xusanova D.X., Egamberdiyev K.B., Safarov F.M., Xalilov U.B.	Kremniy oksidi nanozarrachalari agregatsiyasining ilk bosqichlarini modellashtirish	168
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Xolmurodov B.B., Sattorova K.A.	Xorazm viloyatida yetishtirilgan yantoq ekstrakti tarkibidagi aminokislotalar va vitaminlarni xromatografiya usuli bilan o‘rganish	174
Назаров М.Р., Назарова Н.М.	Тут меваси ва унинг хусусиятлари	181
TEXNIKA *** TECHNIQUE *** ТЕХНИКА		
Samiyev K.A., Hojiyev T.S.	Passiv quyosh isitish tizimlarining tashqi devor materiallarini tanlashda vaqt bo‘yicha kechikish va amplituda so‘nish kattaliklarining ahamiyati	185

KOSHI MASALASINI TAQRIBIY YECHISH

Imomova Shafoat Mahmudovna,

Buxoro davlat universiteti

Amaliy matematika va dasturlash texnologiyalari kafedrasida dotsenti

s.m.imomova@buxdu.uz

Mardonova Maftunabonu Abrorovna,

Buxoro davlat universiteti

Amaliy matematika (sohalar bo'yicha) mutaxassisligi magistranti

Annotatsiya. Matematika, mexanika, fizika, kimyo, iqtisodiyot fanlarining bir qator masalalarini yechishda funksiya, uning argumenti va hosilasining o'zaro bog'liqligini ifodalovchi tenglamalarga asoslanadi. Bunday tenglamalar differensial tenglamalar deyiladi. Koshi masalasi - differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalaridan biri. Differensial tenglamaning ma'lum boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (integrali)ni izlashdan iborat. Maqolada Koshi masalasini taqribiy yechish usullari Eyler, Eyler - Koshi usullari, Runge-Kutta metodlari haqida ma'lumot berilgan.

Kalit so'zlar: oddiy differensial tenglama, iteratsion metod, Koshi masalasi, taqribiy yechim, Eyler usuli, Eyler - Koshi usullari, Runge-Kutta metodi, boshlang'ich shart, xatolik, Runge qoidasi.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Аннотация. Решение ряда задач математики, механики, физики, химии и экономики основано на уравнениях, отражающих взаимозависимость функции, её аргумента и её производной. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями. Задача Коши - одна из основных задач теории дифференциальных уравнений. Он заключается в поиске решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего определённым начальным условиям. В статье приведены сведения о методах приближённого решения задачи Коши: методах Эйлера, методах Эйлера-Коши и методах Рунге-Кутты.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, итерационный метод, задача Коши, приближённое решение, метод Эйлера, методы Эйлера-Коши, метод Рунге-Кутты, начальное условие, погрешность, правило Рунге.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM

Abstract. The solution of a number of problems in mathematics, mechanics, physics, chemistry and economics is based on equations that reflect the interdependence of a function, its argument and its derivative. Such equations are called differential equations. The Cauchy problem is one of the main problems in the theory of differential equations. It consists of finding a solution (integral) of a differential equation that satisfies certain initial conditions. The article provides information on methods for approximate solution of the Cauchy problem: Euler methods, Euler-Cauchy methods and Runge-Kutta methods.

Keywords: ordinary differential equation, iteration method, Cauchy problem, approximate solution, Euler's method, Euler-Cauchy methods, Runge-Kutta method, initial condition, error, Runge's rule.

Kirish. Ilmiy va tatbiqiy masalalarda ko'pincha shunday oddiy differensial tenglamalar uchraydiki, ularning umumiy yechimini oshkor ko'rinishda ifodalash mumkin emas. Yechimi oshkor ko'rinishda topiladigan differensial tenglamalar sinfi ancha tor. Masalan, ko'rinishi soddagina bo'lgan

$$y' = x + x^2 + y^2$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi. Bu yechim ancha murakkab tarzda kasr tartibli Bessel funksiyalari orqali ifodalanadi. Ko'p hollarda yechimning hatto shunaqa ifodasini ham bilmaymiz. Shuning uchun ham bunday tenglamalarni u yoki bu taqribiy metod bilan yechishga to'g'ri keladi.

Taqribiy yechim analitik ko'rinishda yoki jadval shaklida izlanishiga qarab taqribiy metodlar *analitik* va *sonli metodlarga* bo'linadi.

Oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasi va chegaraviy masala qo‘yiladi. Koshi masalasini yechish chegaraviy masalani yechishga nisbatan ancha yengildir. Hozirda EHMLarning rivojlanishi bilan aniqlik tartibi yuqori bo‘lgan sonli metodlarga e‘tibor kuchaydi.

Asosiy qism. Faraz qilaylik, bizga quyidagi Koshi masalasi berilgan bo‘lsin

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Bu masalani $[x_0, X]$ oraliqda yechish talab etilgan bo‘lsin.

Berilgan kesmani N ta teng bo‘lakka bo‘lamiz:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = \frac{X - x_0}{h}, \quad h > 0.$$

Adams ekstrapolyatsion metodiga ko‘ra

$$y_{n+1} = y(x_n) + h \left[y'(x_n) + \frac{1}{2} \Delta y'(x_{n-1}) + \frac{5}{12} \Delta^2 y'(x_{n-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3 y'(x_{n-3}) + \dots + C_k \Delta^k y'(x_{n-k}) \right] + R_k \tag{3}$$

ga ega bo‘lamiz. Bunda

$$C_k = \int_0^1 \frac{u(u+1)\dots(u+k)}{k!} du \tag{4}$$

$$R_k = h \int_0^1 z_k(u) du = h^{k+2} \int_0^1 \frac{u(u+1)\dots(u+k)}{(k+1)!} y^{(k+2)}(\xi) du$$

Eyler va Eyler - Koshi usullari

(3) formulada $k = 0$ bo‘lgan holda hisoblash jarayoni

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \tag{5}$$

formula bilan tashkil etiladi. Buni Eyler taklif qilgan, shuning uchun bunday hisoblash jarayoni *Eyler metodi* deb yuritiladi.

Eyler usulining quyidagicha modifikatsiyasi mavjud.

Avval quyidagi yaqinlashish

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f_n = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

hisoblanadi, so‘ng

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1/2} \tag{6}$$

formula yordamida x_{n+1} nuqtadagi yechimning taqribiy qiymati topiladi. Bu yerda

$$y_{n+1/2} = y\left(x_n + \frac{h}{2}\right), \quad f_{n+1/2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}\right)$$

(6) ifoda *Eyler usulining modifikatsiyasidir*.

Eyler-Koshining modifikatsiyalangan metodi quyidagicha aniqlanadi.

Avval

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf_n$$

hisoblanadi, so‘ng x_{n+1} nuqtadagi yechimning taqribiy qiymati

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_n + \bar{f}_{n+1}) \tag{7}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$\bar{f}_{n+1} = f(x_{n+1} + \bar{y}_{n+1})$$

Agar (1), (2) masalaning taqribiy yechimini $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$ deb, uni quyidagi

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})) \tag{8}$$

iteratsion jarayon bilan berilgan aniqlik miqdorida topilsa, (8) ifoda *Eyler-Koshining iteratsion metodi* deyiladi.

Runge-Kutta metodi

(1), (2) masalani yechish uchun

$y(x_{n+1}) = y_n + h \int_0^1 y'(x_n + uh) du$ formulani qulaylik uchun indeksiz quyidagicha

$$y(x+h) = y(x) + h \int_0^1 f(x+uh, y(x+uh)) du \tag{9}$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

Bu yerdagi integralni kvadratur formulalar yordamida taqribiy hisoblash mumkin emas, chunki integral ostida noma'lum funksiya qatnashyapti. Uni quyidagicha hisoblaymiz. Buning uchun uch guruhdan iborat

$$\begin{aligned} & \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r; & (a) \\ & \beta_{21}, \\ & \beta_{31}, \beta_{32}, & \\ & \dots \dots \dots & (b) \\ & \beta_{r1}, \beta_{r2}, \dots, \beta_{rr-1}, \\ & p_1, p_2, \dots, p_r & (p) \end{aligned}$$

hozircha noma'lum parametrlarni kiritamiz va bular yordamida (9) dagi integralni kvadratur summaga o'xshash chekli summaga almashtiramiz

$$y(x+h) - y(x) \cong \sum_{i=1}^r p_i K_i \tag{10}$$

bu yerda

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x, y), \\ K_2 &= hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} K_1), \\ K_3 &= hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} K_1 + \beta_{32} K_2), \\ & \dots \dots \dots \\ K_r &= hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} K_1 + \beta_{r2} K_2 + \dots + \beta_{r-1} K_{r-1}), \end{aligned}$$

Agar (a) va (b) guruh parametrlar tanlangan bo'lsa, K_1, K_2, \dots, K_r , miqdorlar ketma-ket hisoblanadi. (10) taqribiy tenglikning xatoligi

$$\varphi_r(h) = \Delta y - \sum_{i=1}^r p_i K_i$$

bo'lsin. (1) ning o'ng tomoni yetarlicha silliq bo'lsa, u holda $\varphi_r(h)$ funksiya ham yetarlicha tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'ladi. Demak, quyidagi Makloren formulasini yoza olamiz:

$$\varphi_r(h) = \sum_{j=0}^s \frac{h^j}{j!} \varphi_r^{(j)}(0) + \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \varphi_r^{(s+1)}(\theta h), \quad 0 < \theta < 1. \tag{11}$$

Agar (a), (b), (p) guruh parametrlarini tanlash evaziga $\varphi_r^{(j)}(0) = 0, j = 0, 1, \dots, s$ va $\varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0$ bo'lishini ta'minlasak, (10) formulaning xatoligi

$$\varphi_r(h) = \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \varphi_r^{(s+1)}(\theta h)$$

ko'rinishda bo'lib, uning qadami h ga nisbatan tartibi $s+1$ ga teng. Odatda, s ni Runge-Kutta metodining aniqlik darajasi deyiladi. Noma'lum (a), (b), (p) guruh elementlarini quyidagi talablardan topamiz. (10) ning chap va o'ng tomonini h ning darajalari bo'yicha yoyilmasida ixtiyoriy $f(x, y)$ va h uchun imkoni boricha h ning yuqori darajasigacha hadlar bir xil bo'lishini talab etamiz.

Boshqacha aytganda,

$$\varphi_r(h) = y(x+h) - y(x) - \sum_{i=1}^r p_i K_i(h)$$

funksiya

$$\varphi_r(0) = \varphi_r^{(1)}(\theta) = \dots = \varphi_r^{(s)}(0) = 0, \quad \varphi_r^{(s+1)}(0) \neq 0$$

xossalarga ega bo'lib, (a), (b), (p) guruh elementlari shunday tanlanishi kerakki, ixtiyoriy h va $f(x, y)$ uchun s mumkin qadar katta bo'lsin.

Umumiy holda (a), (b), (p) guruh parametrlarni aniqlaydigan tenglamalar sistemasini yozish ancha murakkab bo'lganligi uchun Runge-Kutta metodi bilan bir qadamli qoidalarning r ning to'rtta qiymatidagisini topish masalasini ko'ramiz.

$r = 1$ bo'lsin, unda (10)

$$y(x+h) - y(x) = p_1 hf(x, y)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan

$$\varphi_1(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x, y)$$

ekanligini ko'ramiz. Bundan hosilalar olamiz

$$\begin{aligned} \varphi_1'(h) &= y'(x+h) - p_1 f(x, y) \\ \varphi_1''(h) &= y''(x+h) \end{aligned}$$

$\varphi_1''(0) = y''(x)$ miqdor p_1 parametrga bog'liq emas va p_1 ni tanlash hisobiga nolga aylanmaydi. $\varphi_1''(0) = y''(x) - p_1 f(x, y) = (1 - p_1)f(x, y)$ miqdor ixtiyoriy $f(x, y)$ uchun $p_1 = 1$ bo'lganda nolga teng bo'ladi.

Demak, (10) $r = 1$ da $p_1 = 1$ bo'lsa

$$y(x+h) - y(x) \cong p_1 h f(x, y)$$

ko'rinishda bo'lib, uning xatoligi esa (11) ga asosan

$$\varphi_1(h) = \frac{h^2}{2} \varphi_1''(\theta h) = \frac{h^2}{2} h''(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

bo'ladi. Birinchi tartibli Runge-Kutta metodi Eyler metodi bilan ustma-ust tushar ekan.

Endi $r = 2$ bo'lsin. (10) formula

$$y(x+h) - y(x) \cong p_1 K_1 + p_2 K_2 = h p_1 f(x, y) + h p_2 f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} f(x, y))$$

ko'rinishda

bo'ladi.

$p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ parametrlarni aniqlash uchun $y(x+h) - y(x)$ va $p_1 K_1 + p_2 K_2$ larni h ning darajalari bo'yicha yoyilmasini topamiz:

$$y(x+h) - y(x) = \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + o(h^4) = h f + \frac{h^2}{2!} (f_x + f \cdot f_y) + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + 2f \cdot f_{xy} + f_y (f_x + f \cdot f_y)) + o(h^4) \quad (12)$$

$$p_1 K_1 + p_2 K_2 = h p_1 f(x, y) + h p_2 f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} f(x, y)) = h(p_1 + p_2) + h^2 p_2 (\alpha_2 f_x + \beta_{21} f \cdot f_x) + \frac{h^3}{2} p_2 (\alpha_2^2 f_{xx} + 2\alpha_2 \beta_{21} f \cdot f_{xy} + \beta_{21}^2 f^2 \cdot f_{yy}) + o(h^4)$$

(12) va (13) yoyilmalarda ixtiyoriy $f(x, y)$ uchun hadlar h ning iloji boricha yuqori darajalarigacha ustma-ust tushsin, deb talab qilamiz. Bu ikki yoyilmani taqqoslasak, $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ larni topish uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} hf & : p_1 + p_2 = 1, \\ h^2 f_x & : p_2 + \alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ h^2 f \cdot f_x & : p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Yuqoridagi (12), (13) yoyilmalarning ko'rinishidan ma'lumki, $r = 2$ da kiritilgan $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ parametrlarni tanlash evaziga ixtiyoriy $f(x, y)$ uchun h^3 li hadlarning bir xil bo'lmasligini ko'rish mumkin. Demak, yuqoridagi $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ larga bog'liq uchta tenglamadan $p_2 \neq 0$ deb

$$p_1 = 1 - p_2, \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2p_2}$$

larni aniqlaymiz. Odatda, p_2 ni shunday tanlanadiki, hosil bo'ladigan formula hisoblashlarda qulaylikka ega bo'lishi kerak.

Misol uchun $p_2 = \frac{1}{2}$ bo'lsin, unda $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$ bo'ladi va quyidagi ikkinchi tartibli

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} (f(x, y) + f(x+h, y + K_1))$$

formula hosil bo'ladi.

Agar $p_2 = 1$ desak, unda $p_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ bo'ladi va

$$y(x+h) = y(x) + h f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y))$$

ikkinchi tartibli hisoblash formulasiga ega bo'lamiz.

$r = 3$ bo'lganda kiritilgan $\alpha_2, \alpha_3, p_1, p_2, p_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ parametrlar uchun bajarilishi kerak bo'lgan shartlarni keltirish bilan chegaralanamiz, chunki (12) va (13) tipidagi yoyilmalar $r = 3$ da bundan ham katta ko'rinishda bo'ladi. Ular quyidagicha

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 &= \frac{1}{2}, \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 &= \frac{1}{3}, \\ p_2 \alpha_2 \beta_{32} &= \frac{1}{6}, \\ \beta_{31} + \beta_{32} &= \alpha_3, \\ \beta_{21} &= \alpha_2 \end{aligned}$$

ko'rinishga ega. Bu tenglamalar sistemasini yechimlaridan biri quyidagilar:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 1, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = -1, \beta_{32} = 2,$$

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}.$$

Bu parametrlar bilan aniqlangan uchinchi tartibli Runge-Kutta metodi

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda

$$K_1 = hf(x, y), \quad K_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 = hf(x+h, y - K_1 + 2K_2).$$

Bundan boshqa yana bir formulani keltiramiz:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_3) \\ K_1 = hf(x, y), \quad K_2 = hf\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{1}{3}K_1\right) \\ K_3 = hf\left(x + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}K_2\right).$$

Endi $r = 4$ bo'lganda eng ko'p ishlatiladigan to'rtinchi tartibli metodni keltiramiz:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

bu yerda

$$K_1 = hf(x, y), K_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{2}K_2\right) \quad K_4 = hf(x+h, y + K_3)$$

Yuqorida chiqarilgan birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tartibli metodlarni birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini taqribiy yechishda qo'llash mumkin. Masalan, quyidagi Koshi masalasi berilgan bo'lsin:

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_i(x_0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$r = 1$ da hisoblash jarayoni quyidagicha amalga oshiriladi:

$$y_i(x+h) = y_i(x) + hf_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$r = 2$ da esa formulalar

$$y_i(x+h) = y_i(x) + \frac{1}{2}(K_{i1} + K_{i2}), \\ K_{i1} = hf(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ K_{i2} = hf(x+h, y_1 + K_{11}, y_2 + K_{21}, \dots, y_n + K_{n1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Runge-Kutta metodi bilan qurilgan metodlarda yechimning bitta nuqtadagi qiymati ishtirok etishi bo'lsa bir qadamli metodlar deyiladi.

Runge-Kutta metodi xatoligining bosh hadi va uni baholashda Runge qoidasi

Tartibi S ga teng Runge-Kutta metodi bilan Koshi masalasini yechishda har bir qadamdagi xatolik miqdori

$$\frac{h^{S+1}}{(S+1)!} \cdot \varphi_r^{(S+1)}(\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

ga teng bo'lib, tartibi h^{S+1} edi. Agar differensial tenglamaning o'ng tomoni ancha murakkab bo'lsa, bu xatolikni baholash amaliyotda ancha qiyinchiliklarni tug'diradi. Metodning jami xatoligi tartibi esa h^S ga teng bo'ladi [8], ya'ni

$$y(x_n) = y_n + p(x_n)h^S + o(h^{S+1}) \tag{14}$$

Agar $p(x_n) \neq 0$ bo'lsa, yetarlicha kichik h uchun $p(x_n)h^S$ miqdor metod xatoligiga ancha yaxshi yaqinlashgan bo'ladi. Bu miqdor, odatda, xatolikning bosh hadi deb ataladi. Xatolikning bosh hadi xatolikni to'liq xarakterlamaydi, lekin uning miqdori metod xatoligi miqdorini yaxshi tasavvur etishga imkon beradi.

(14) formula yordamida xatolikning bosh hadini aposterior baholash qoidasi mavjud, uni *Runge qoidasi* deb ataladi.

Faraz qilaylik, $[x_0, X]$ oraliqning ξ , nuqtasida tartibi S ga teng metod bilan $h = h_1$ va $h = h_2$ qadamlarda yechimning y_{h1} va y_{h2} taqribiy qiymatlari topilgan bo'lsin.

Agar h_1 j va h_2 yetarlicha kichik bo'lsa, unda (14) ga asosan

$$y(\xi) - y_{h_1} \cong \rho(\xi)h_1^S,$$

$$y(\xi) - y_{h_2} \cong \rho(\xi)h_2^S,$$

taqribiy tengliklarning xatoliklari ancha kichik bo'lishligini kutish mumkin. Bundan

$$\rho(\xi) \cong \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^S - h_1^S} \quad (15)$$

ligini aniqlaymiz. Demak, hisoblashlarni $h \sim h_n$, $h = h_2$ qadam bilan ξ , nuqtaga bajsarsak, xatolikning bosh hadining taqribiy qiymatlarini ikkala holda ham aniqlagan bo'lamiz:

$$h_1^S \cong \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^S - h_1^S}, \quad h_2^S \cong \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^S - h_1^S},$$

Agar bu miqdorlar berilgan aniqlik ε dan katta bo'lsa, quyidagi taqribiy tenglik

$$\varepsilon \approx |\rho(\xi)h_\varepsilon^S| \approx \left| \frac{y_{h_1} - y_{h_2}}{h_2^S - h_1^S} \right| h_\varepsilon^S$$

dan tegishli shartlarni bajaradigan qadamni ko'rsatish mumkin:

$$h_\varepsilon \approx \sqrt[S]{\varepsilon \left| \frac{h_2^S - h_1^S}{y_{h_1} - y_{h_2}} \right|}.$$

Agar $h_1 = h$, $h_2 = 2h$ bo'lsa, (15) formula

$$\rho(\xi) = \frac{y_h - y_{2h}}{h^2(2^S - 1)}$$

ko'rinishda bo'lib, metod xatoligi uchun

$$y - y_h \approx \frac{y_h - y_{2h}}{2^S - 1} \quad (16)$$

taqribiy ifodaga ega bo'lamiz. Bu formula asimptotik xarakterga ega bo'lib, kafolatlangan bahoni bermaydi. Shunga qaramasdan, u amaliy nuqtayi nazardan ko'pincha yaxshi natijalarni beradi.

Shu narsani ta'kidlash lozimki, (16) formulada yaxlitlash xatoligi inobatga olinmagan. Shuning uchun, hisoblash jarayonida yaxlitlash xatoligi salmoqli bo'lsa, xatolikning bosh hadini baholashda (16) ni qo'llab bo'lmaydi.

Agar (16) ni quyidagicha

$$y \approx y_h + \frac{y_h - y_{2h}}{2^S - 1} \quad (17)$$

yozsak, (17) ning o'ng tomoni yechimning aniq qiymati y ga, y_h va y_{2h} dan ko'ra ancha yaqinroq bo'lishligiga umid qilish mumkin.

Natijalar.

Misol 1. $y' = x + y$

$$y(0) = 1$$

Koshi masalasining $[0; 0,4]$ oraliqda $h = 0,1$ qadam bilan Eyley usulida yechimini toping. Taqribiy yechim va aniq yechim orasidagi farqni hisoblang. Analitik yechim $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Yechish. Differensial tenglamaning o'ng tomoni $f(x, y) = x + y$;

boshlang'ich ma'lumotlar: $x_0 = 0$, $y_0 = 1$;

yechim izlanayotgan $[a, b]$ oraliq: $a = 0$, $b = 0,4$;

oraliqning bo'linish soni: $n = 4$, $h = 0,1$.

Quyidagi

$x_{i+1} = x_i + 0,1$; $\Delta y_i = 0,1(x_i + y_i)$; $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$; ($i = 0,1,2,3$) rekurrent formulalardan foydalanib ketma-ket quyidagilarni topamiz:

1-qadamda ($i = 0$): $x_1 = 0,1$; $y_1 = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1$,

2-qadamda ($i = 0$): $x_2 = 0,2$; $y_2 = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22$,

3-qadamda ($i = 0$): $x_3 = 0,3$; $y_3 = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362$,

4-qadamda ($i = 0$): $x_4 = 0,4$; $y_4 = 1,362 + 0,1(0,3 + 1,362) = 1,52821$.

$d_i = |y(x_i) - y_i|$ deb belgilaymiz va hisoblashlarimiz natijalarini jadval ko'rinishida keltiramiz:

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	d_i
1	0,1	1,1	1,110342	0,010342
2	0,2	1,22	1,242806	0,022806
3	0,3	1,362	1,399718	0,037718
4	0,4	1,5282	1,583649	0,055449

Misol 2.

$$y' = x + y$$

$$y(0) = 1$$

Koshi masalasini [0;0,4] oraliqda $h = 0,1$ qadam bilan Eyer-Koshi usuli bilan yeching.
Yechish. $x_0 = 0, y_0 = 1$ deb, Eyer-Koshi metodini indeks i uchun quyidagicha yozamiz:

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (i = 0,1,2,3)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{2} (K_i^{(1)} + K_i^{(2)}), \quad K_i^{(1)} = h \cdot f(x_i, y_i), \quad K_i^{(2)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_i^{(1)})$$

Yechilyotgan masala uchun

$$i = 0; \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1; \quad K_0^{(1)} = h(x_0 + y_0) = 0,1(0 + 1) = 0,1;$$

$$K_0^{(2)} = h(x_0 + h + y_0 + K_0^{(1)}) = 0,1 \cdot (0 + 0,1 + 1 + 0,1) = 0,12;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{2} (K_0^{(1)} + K_0^{(2)}) = \frac{1}{2} (0,1 + 0,12) = 0,11;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,11 = 1,11.$$

Xuddi shunday hisoblashlarni qolgan qadamlar uchun bajaramiz, xatolik $d_i = |y(x_i) - y_i|$ va hisoblashlar natijasini quyidagi jadvalda keltiramiz:

i	x_i	$K_{i=1}^{(1)}$	$K_{i=1}^{(2)}$	$\Delta y_{i=1}$	y_i	$y(x_i)$	d_i
1	0,1	0,1	0,12	0,11	1,11	1,110342	0,000342
2	0,2	0,121	0,1431	0,13205	1,24205	1,242805	0,000756
3	0,3	0,144205	0,168626	0,156415	1,398466	1,399718	0,001252
4	0,4	0,169847	0,196831	0,183339	1,581804	1,583649	0,001845

Topilgan taqribiy yechim xatoligi $|y_4 - y(x_4)| \approx 0,002$ dan ortmaydi.

Misol 3. Yuqoridagi misolni to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli bilan yeching.

Yechish.

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad K_i^{(1)} = hf(x_i, y_i), \quad K_i^{(2)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_i^{(1)}}{2}\right)$$

$$K_i^{(3)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_i^{(2)}}{2}\right), \quad K_i^{(4)} = hf\left(x_i + h, y_i + K_i^{(3)}\right)$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (K_i^{(1)} + 2K_i^{(2)} + 2K_i^{(3)} + K_i^{(4)}), \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0,1,2,3)$$

$x_0 = 0, y_0 = 1$ deb y_1 nitopamiz:

$$i = 0; \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1; \quad K_0^{(1)} = h(x_0 + y_0) = 0,1(0 + 1) = 0,1$$

$$K_0^{(2)} = h\left(x_0 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}K_0^{(1)}\right) = 0,1(0 + 0,05 + 1 + 0,05) = 0,11;$$

$$K_0^{(3)} = h\left(x_0 + \frac{1}{2}h + y_0 + \frac{1}{2}K_0^{(2)}\right) = 0,1(0 + 0,05 + 1 + 0,055) = 0,1105;$$

$$K_0^{(4)} = h(x_0 + h, y_0 + K_0^{(3)}) = 0,1(0 + 0,1 + 1 + 0,1105) = 0,12105;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (K_0^{(1)} + 2K_0^{(2)} + 2K_0^{(3)} + K_0^{(4)}) = \frac{1}{6} (0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105 + 0,12105) \approx 0,11;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \approx 1 + 0,110342 = 1,110342.$$

Shunday hisoblashlarni keyingi qadamlar uchun ham bajarib hisoblash natijalarini esa quyidagi jadvalda keltiramiz:

i	x_i	$K_{i-1}^{(1)}$	$K_{i-1}^{(2)}$	$K_{i-1}^{(3)}$	$K_{i-1}^{(4)}$	Δy_{i-1}	y_i
1	0,1	0,100000	0,110000	0,110500	0,121050	0,110342	1,110342
2	0,2	0,121034	0,132086	0,132638	0,144298	0,132468	1,242805
3	0,3	0,144281	0,156495	0,157105	0,169991	0,156912	1,399717
4	0,4	0,169972	0,183470	0,184145	0,198386	0,183931	1,583648

Topilgan taqribiy yechim xatoligi 0,000001 dan ortmaydi.

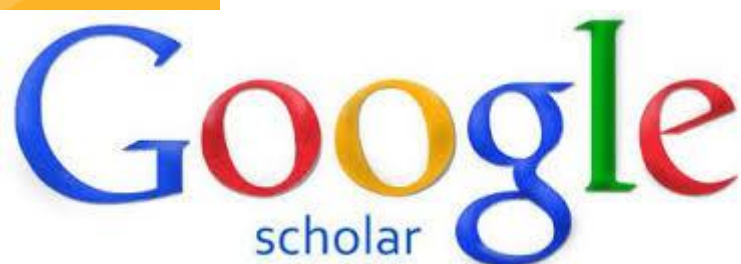
Taqqoslash uchun uchta metod bilan yechilgan bitta masalani tugun nuqtalardagi yechimning taqribiy qiymatlarini va aniq yechimning qiymatlarini quyidagi jadvalda keltiramiz.

i	x_i	Usullar bo'yicha topilgan y_i qiymati			Aniq yechimi $y(x_i) = 2e^x - x - 1$
		Eyler	Eyler- Koshi	Runge- Kutta	
1	0,1	1,1	1,11	1,110342	1,110342
2	0,2	1,22	1,24205	1,242805	1,242805
3	0,3	1,362	1,398466	1,399717	1,399718
4	0,4	1,5282	1,581804	1,583648	1,583649

Xulosa. Koshi masalasi yordamida fizika va texnikaning juda ko'plab muhim masalalarini hal qilish mumkin. Koshi masalasini yechish bu biror bir tabiiy jarayonni ifodalovchi differensial tenglamani va qo'shimcha (boshlang'ich) shartni qanoatlantiruvchi noma'lum funksiyani aniqlashdan iborat. Maqolada Koshi masalasini taqribiy yechish usullari Eyler, Eyler - Koshi usullari, Runge-Kutta metodlari haqida ma'lumot berilgan. Bu usullar misollar orqali batafsil yoritilgan.

ADABIYOTLAR:

1. *Агапова Е. Г. Вычислительная математика : учеб. пособие / Е. Г. Агапова ; [науч. ред. Т. М. Попова]. - Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. - 92 с.*
2. *Imomova Shafolat Mahmudovna. Matematikani o'qitishda matematik tizimlardan foydalanish//Pedagogik mahorat. Maxsus son(2022 yil, derkabr),2022, C.77-80.*
3. *Imomova Shafolat Mahmudovna, Zarnigor Bahodirovna Rahmonqulova. Funksiyalarni mathcad muhitida sonli integrallash// buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 4, 2023, C.9-14.*
4. *Imomova Shafolat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullari va tadbirlari// Educational Research in Universal Sciences. Volume 3 | Special Issue 2 | 2024, C.397-404.*
5. *A. Hayotov, S. Babaev, N.Olimov, and Sh.Imomova, "The error functional of optimal interpolation formulas in $W_2(,2\sigma,1)$ space," AIP Conference Proceedings 2781, 020044 (2023), <https://doi.org/10.1063/5.0144752>.*
6. *Samandar Babaev, Nurali Olimov, Shafolat Imomova, and Bekhruzjon Kuvvatov, "Construction of Natural L Spline in $W_2(,2\sigma,1)$ Space" , AIP Conf. Proc. 3004, 060021 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0199595>*
7. *Imomova Sh.M., Amonova N.A. Chekli elementlar usullari// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 3, 2024, C.73-81.*
8. *Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan Mathcad muhitida sonli yechish // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 5, 2024, C.30-35.*



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara State University, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
28.09.2024 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.

Published in the printing house
"BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara,
K.Murtazayev street, 344