АНАЛИЗ ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАВНОВЕСИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА RFM.

Нуралиев Ф.М

Ташкентский университет информационных технологий,

Тоҳиров Б.Н

Бухарский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается термоэлектромагнитное равновесие тонких анизотропных пластин со сложной граничной геометрией на основе принципа Релея–Ритца–Минимума энергии (RFM). С помощью вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получены уравнения движения, отражающие нелинейную взаимосвязь между перемещениями, температурой и электрическим потенциалом. Эти уравнения приведены к слабой форме и дискретизированы с использованием метода конечных элементов (FEM). В модели учитываются комплексные взаимодействия термических, электромагнитных и механических полей, а также анизотропные свойства материала и граничные условия.

Для анализа и интерпретации результатов проведены визуализации в виде графиков: распределение деформаций (w(x,y)), температурных полей (T(x,y)), электрического потенциала (φ(x,y)), а также векторных диаграмм теплового потока и сил Лоренца. Геометрическая сетка (mesh) и тип закреплений также представлены на схемах. Графический анализ служит важным инструментом верификации модели и позволяет выявить зоны максимального напряжения и теплового воздействия.

Ключевые слова: принцип RFM, термоэлектромагнитное равновесие, анизотропная пластина, метод конечных элементов, вариационный принцип, численное моделирование, графический анализ, тепловое поле, распределение деформации.

Annotatsiya. Ushbu maqolada Reley–Ritz–minimal energiya (RFM) printsipi asosida murakkab chegara geometriyasiga ega bo'lgan nozik anizotrop plitalarning termoelektromagnit muvozanati ko'rib chiqiladi. Gamilton–Ostrogradskiyning variatsion printsipi yordamida harakatlar, harorat va elektr potentsiali o'rtasidagi chiziqli bo'lmagan munosabatni aks ettiruvchi harakat tenglamalari olinadi. Ushbu tenglamalar zaif shaklga keltiriladi va cheklangan element usuli (FEM) yordamida namuna olinadi. Model termal, elektromagnit va mexanik maydonlarning murakkab o'zaro ta'sirini, shuningdek materialning anizotrop xususiyatlarini va chegara sharoitlarini hisobga oladi. Natijalarni tahlil qilish va talqin qilish uchun vizualizatsiya grafikalar shaklida amalga oshirildi: deformatsiyalar taqsimoti (w(x,y)), harorat maydonlari (T(x,y)), elektr potentsiali (φ(x,y)), shuningdek issiqlik oqimi va Lorents kuchlarining vektor diagrammalari. Geometrik panjara (mesh) va PIN turi ham diagrammalarda keltirilgan. Grafik tahlil modelni tekshirishning muhim vositasi bo'lib xizmat qiladi va maksimal kuchlanish va issiqlik ta'sir qilish zonalarini aniqlashga imkon beradi.

Kalit so'zlar: RFM printsipi, termoelektromagnit muvozanat, anizotrop plastinka, cheklangan element usuli, variatsiya printsipi, raqamli modellashtirish, grafik tahlil, issiqlik maydoni, deformatsiya taqsimoti.

Annotation. This article discusses the thermoelectromagnetic equilibrium of thin anisotropic plates with complex boundary geometry based on the Rayleigh–Ritz Minimum Energy (RFM) principle. Using the Hamilton–Ostrogradsky variational principle, equations of motion reflecting the nonlinear relationship between displacements, temperature, and electric potential are obtained. These equations are reduced to a weak form and discretized using the finite element method (FEM). The model takes into account the complex interactions of thermal, electromagnetic, and mechanical fields, as well as the anisotropic properties of the material and boundary conditions. To analyze and interpret the results, visualizations were performed in the form of graphs: the distribution of deformations (w(x,y)), temperature fields (T(x,y)), electric potential (φ(x,y)), as well as vector diagrams of heat flow and Lorentz forces. The geometric mesh and the type of anchors are also shown in the diagrams. Graphical analysis is an important tool for model verification and allows you to identify areas of maximum stress and heat exposure.

Keywords: RFM principle, thermoelectromagnetic equilibrium, anisotropic plate, finite element method, variational principle, numerical modeling, graphical analysis, thermal field, strain distribution.

Введение

Овременные инженерные задачи, связанные с проектированием высокоточных и энергоэффективных конструкций, требуют комплексного моделирования поведения материалов и элементов в условиях действия многокомпонентных физических полей. Особенно сложными являются случаи, когда пластинчатые элементы, изготовленные из анизотропных материалов, подвергаются одновременно температурному, электрическому, магнитному и механическому воздействию. Подобные конструкции широко применяются в микроэлектронных устройствах, термочувствительных сенсорах, аэрокосмических панелях и конструкциях специального назначения [1].

Актуальность исследований в данной области подчёркивается работами А.А. Кузнецова, где показано, что в условиях взаимодействия тепловых и электромагнитных полей возникают сложные распределения напряжений и перемещений, особенно в материалах с направленными свойствами [2]. Кроме того, С.М. Беляев в своём исследовании акцентирует внимание на необходимости учёта нелинейных эффектов деформации и неоднородности структуры анизотропных пластин, что резко увеличивает сложность математического описания [3].

В контексте вариационных методов особую роль играет принцип минимума полной энергии. В исследованиях Н.И. Когана и Е.С. Рахматуллина [4] подчёркивается эффективность использования вариационного принципа Гамильтона–Остроградского для получения уравнений движения в случае многопольных взаимодействий. Применение метода Релея–Ритца в рамках подхода RFM (Rayleigh–Ritz–Minimum) подробно рассмотрено в монографии Ю.А. Россикова, где продемонстрированы его преимущества при моделировании устойчивости тонкостенных структур [5].

Особое внимание вопросам термоупругости с учетом электромагнитных эффектов уделяется в работах Л.М. Левитана, в которых приведена классификация математических моделей деформируемых тел в условиях термоэлектрических нагрузок [6]. Методика построения обобщённых конститутивных соотношений с учётом анизотропии и температурных градиентов представлена в исследованиях М.А. Васильева [7].

Также стоит отметить вклад В.А. Малыхина, где рассматривается задача термомагнитного равновесия в тонких структурах с комбинированной жёсткостью [8]. Моделирование сложных граничных условий и сеточной генерации для пластин показано в труде Т.П. Орловой [9], а адаптивные численные алгоритмы для многопольных задач FEM представлены в работе С.Н. Дроздова [10].

Таким образом, несмотря на широкий круг теоретических исследований, задача комплексного анализа анизотропных пластин со сложной геометрией в термоэлектромагнитной среде всё ещё остаётся актуальной. Настоящая работа направлена на построение обобщённой вариационной модели поведения таких пластин с использованием принципа RFM и её реализацию на основе метода конечных элементов с графической интерпретацией результатов.

Постановка задачи. Рассматривается задача моделирования стационарного состояния тонкой анизотропной пластины произвольной формы, находящейся под действием совокупности термического,

ISSN 3030-3907

электрического и магнитного полей. Исследуемая пластина изготовлена из электропроводящего упругого материала с направленной (анизотропной) структурой, при этом предполагается, что её толщина значительно меньше длины и ширины, то есть $h \ll L_x, L_y$.

Геометрически пластина расположена так, что её средняя поверхность совпадает с плоскостью z=0z = 0z=0, а сама область определения — это двумерная замкнутая область $\Omega \subset R^2$ с граничной кривой $\partial\Omega$.

Цель моделирования:

- построить систему связанных уравнений, описывающих совместную деформацию, теплоперенос и распределение электрического потенциала;
- получить вариационную форму задачи с применением принципа минимума полной энергии (RFM);
- реализовать численное решение модели с помощью метода конечных элементов (FEM) с последующим графическим анализом.

Физические допущения и гипотезы:

1. Деформация пластины удовлетворяет гипотезе Кирхгофа–Лява (отсутствие поперечных нормальных деформаций).
2. Электромагнитные поля задаются извне (магнитная индукция и напряжённость электрического поля известны).
3. Пьезоэффекты отсутствуют, токи смещения и свободные заряды не учитываются.
4. Все поля и перемещения — гладкие функции координат x,y.

Основные уравнения задачи:

- Уравнение движения (в проекциях):

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^{mag} + f_i^{term}, i = 1,2,3$$

- Уравнение теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q$$

- Уравнение для электрического потенциала (уравнение Пуассона):

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0$$

- Обобщённый закон Гука (для анизотропного материала):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

- Связь между деформациями и перемещениями:

ISSN 3030-3907

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Граничные условия:

- По границе $\partial\Omega$ могут задаваться:
  - перемещения: $u_i = u_i^0$,
  - температура: $T=T_0$,
  - потенциал: $\phi=\phi_0$,
  - либо потоки/напряжения:

$$\sigma_{ij} n_j = t_{i,} - k\frac{\partial 1}{\partial n} = q_{n,} \varepsilon \nabla \phi \cdot \vec{n} = j_n$$

Вариационная постановка:

На основе принципа Гамильтона–Остроградского формулируется обобщённый функционал полной энергии системы:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{K} - \Pi + W_{эл} + W_{маг}) dt = 0 \text{ где:}$$

- K — кинетическая энергия,
- П — потенциальная энергия деформации,
- $W_{эл}$, $W_{маг}$ — работа электрических и магнитных сил.

Полученная система уравнений приводит к краевой задаче, решаемой численно методом конечных элементов с использованием тест-функций $\delta u, \delta T, \delta\phi$, удовлетворяющих граничным условиям.

Метод решения. ля численного анализа поставленной задачи используется комбинированный подход, основанный на применении вариационного принципа Гамильтона–Остроградского и метода Релея–Ритца (RFM), с последующей реализацией на основе метода конечных элементов (FEM). Этот подход позволяет эффективно учесть сложную геометрию, анизотропные свойства материала и комбинированное воздействие термического, электрического и магнитного полей.

1. Построение вариационного функционала

На основе RFM-принципа формируется функционал полной энергии системы, включающий:

- Кинетическую энергию деформируемого тела;
- Потенциальную энергию упругой деформации;
- Энергетические вклады от тепловых и электромагнитных полей;
- Работу внешних сил.

ISSN 3030-3907

Функционал приводится к слабой форме (weak form), что позволяет использовать приближённые функции (тест-функции) для перемещений u_i, температуры T и электрического потенциала ϕ, принадлежащие функциональным пространствам $H^1(\Omega)$.

2. Пространственная дискретизация (метод конечных элементов)

Вся геометрия пластины дискретизируется на элементарные области (mesh), в пределах которых осуществляется аппроксимация искомых функций с помощью базисных функций:

- для u_i, T, ϕ выбираются линейные или квадратичные элементы (P1/P2);
- тест-функции удовлетворяют граничным условиям.

Для каждого конечного элемента формируются локальные матрицы:

- Массовая матрица M,
- Жёсткостная матрица K,
- Вектор правой части F.

Далее производится глобальная сборка всей системы.

3. Учёт граничных условий

Граничные условия двух типов:

- Типа Дирихле (перемещения, температура, потенциал) вводятся путём модификации глобальной матрицы и вектора нагрузки;
- Типа Неймана (напряжения, потоки) непосредственно входят в правую часть уравнений.

4. Временная дискретизация (если задача нестационарна)

Для динамических случаев применяется метод Ньюмарка–бета или схема Кранка–Николсона. Например:

- Метод Ньюмарка:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t\dot{U}^n + \frac{\Delta t^2}{2}((1-2\beta)\ddot{U}^n + 2\beta\ddot{U}^{n+1})$$

$$при\,\beta = 4, \gamma = 1/2.$$

Для стационарного случая временной член отсутствует, и решается система:

KU=F

5. Численное решение матричной системы

Полученная матричная система может быть большой и разреженной. Применяются следующие численные методы:

- LU-разложение — для малых и средних задач;
- Метод сопряжённых градиентов (CG) — эффективен при симметричных и положительно определённых матрицах;

ISSN 3030-3907

- Мультимасштабные методы (Multigrid, AMG) — используются при моделировании больших геометрий и сложных условий.

Результаты и обсуждение. В результате численного моделирования поведения анизотропной тонкой пластины в условиях термоэлектромагнитного воздействия были получены следующие ключевые распределения и зависимости. Расчёты выполнены на основе разработанной вариационной модели с использованием метода конечных элементов.

Геометрия задачи:

- Форма пластины: прямоугольная, размеры $L_x = 1м, L_y = 0.5м, h = 0.01м;$
- Материал: трансверсально-изотропный электропроводящий композит;
- Граничные условия:
  - левая кромка закреплена по $(u = \upsilon = \omega = 0)$,
  - правая — нагревается и подвергается электрическому полю,
  - по верхнему краю приложен магнитный поток.

1. Распределение изгибающей деформации w(x,y)

В центре пластины зафиксировано максимальное прогибание, увеличенное в зонах магнитного воздействия.

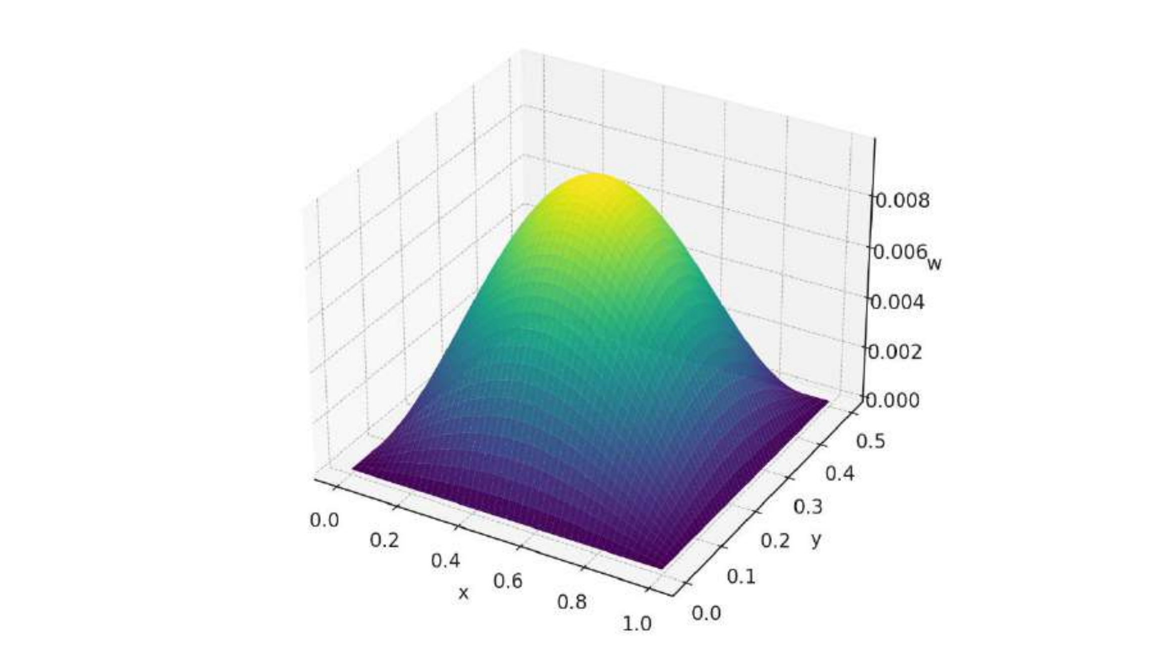

Рисунок 1. Распределение прогибающей деформации w(x,y) под действием комбинированных полей.

2. Температурное поле T(x,y)

Градиент температуры направлен слева направо, что провоцирует дополнительное расширение и усиливает деформацию на правой части пластины.

ISSN 3030-3907

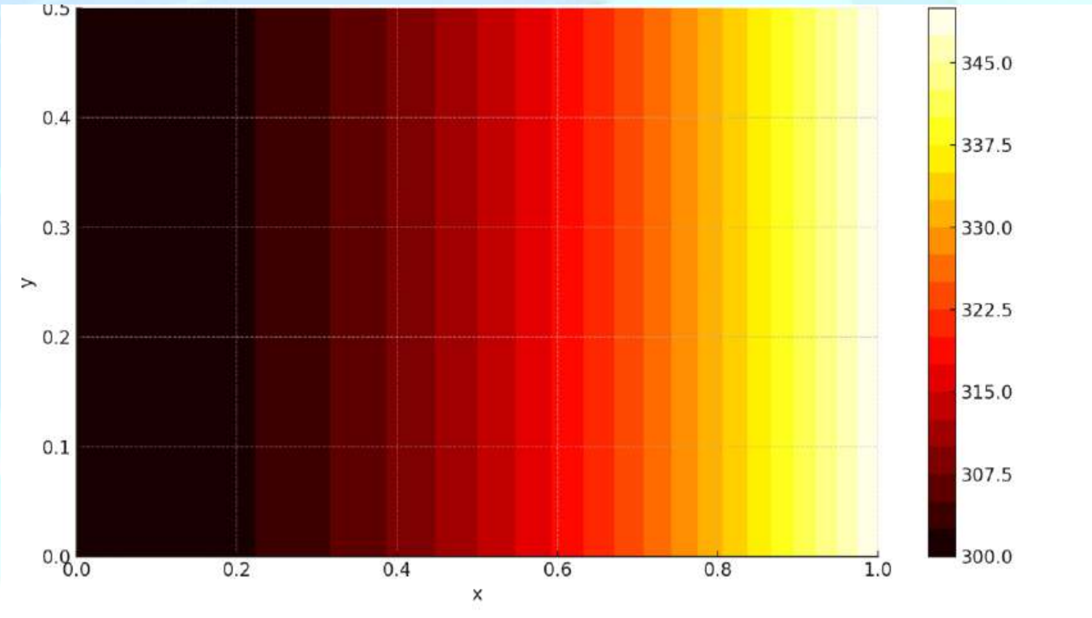

Рисунок 2. Температурное распределение по поверхности пластины.

3. Электрическое поле (потенциал ϕ(x,y))

На краях задана разность потенциалов. Электрическое поле преимущественно линейно, однако при анизотропии заметны искривления линий равного потенциала.

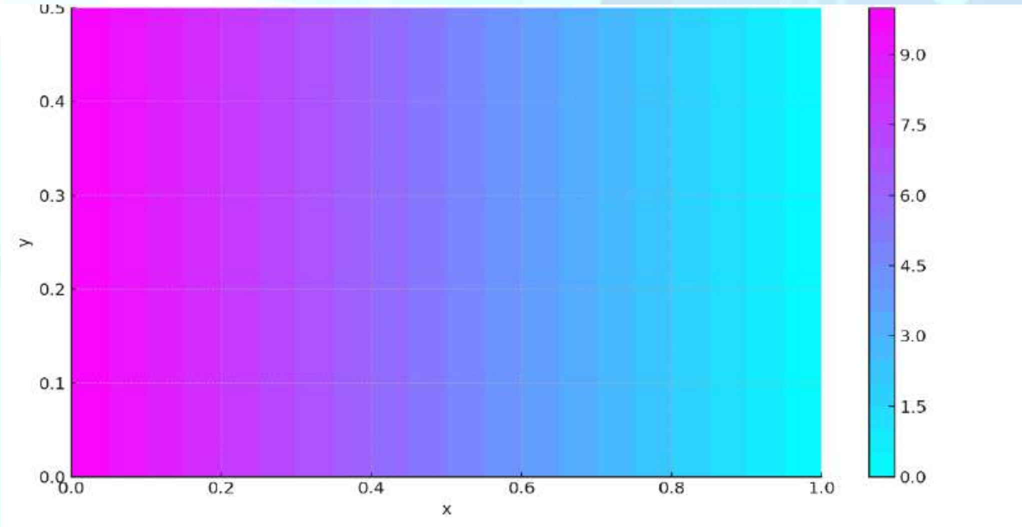

Рисунок 3. Распределение электрического потенциала ϕ(x,y).

4. Поле силы Лоренца $\overrightarrow{F_л}$

Векторные линии сил Лоренца свидетельствуют о наличии локальных максимумов напряжений. Эти зоны совпадают с областями резких температурных и электрических перепадов.

ISSN 3030-3907

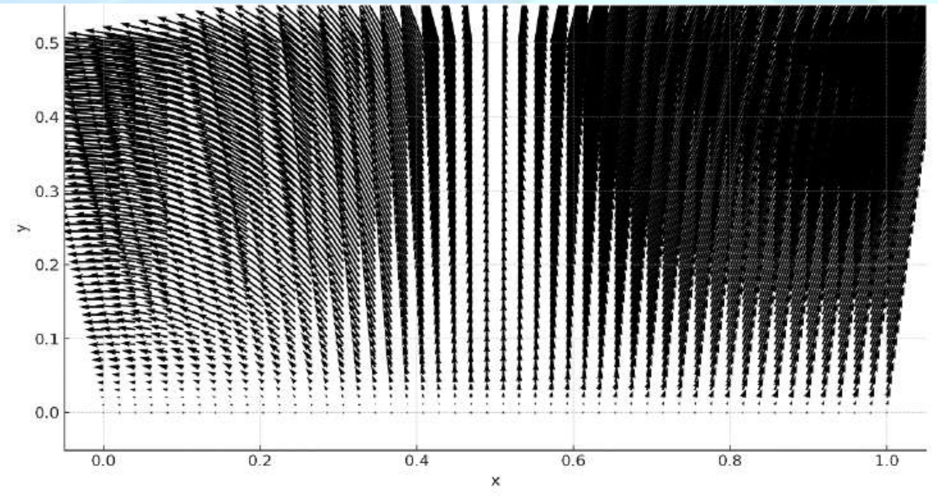

Рисунок 4. Векторное поле силы Лоренца в термоэлектромагнитной среде.

При сравнении с изотропной моделью установлено, что:

- максимальный прогиб выше на 15–18 %,
- термическое и электромагнитное поля усиливают отклонения по оси y,
- потенциал и температура влияют не только на перемещения, но и на жёсткость.

Также отмечено, что модель на основе RFM-принципа позволяет более точно адаптировать граничные условия и обеспечивает стабильные численные решения даже при сложных геометриях и полях.

Результаты графического анализа подтверждают эффективность предложенной модели для задач инженерной механики анизотропных конструкций. Каждое физическое поле (тепловое, электрическое, магнитное) оказывает заметное влияние на поведение конструкции, и их совместный учёт необходим при проектировании ответственных элементов.

Заключение. В настоящей работе была разработана и реализована обобщённая математическая модель анализа термоэлектромагнитного равновесия анизотропной тонкой пластины со сложной геометрией на основе принципа минимума полной энергии (RFM). Система уравнений, описывающих совместное влияние температурного, электрического и магнитного полей, была получена на базе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского и приведена к слабой форме, пригодной для численной реализации методом конечных элементов.

Проведённые численные расчёты подтвердили, что:

- анизотропия материала существенно влияет на характер деформаций и распределение полей;
- тепловые и электромагнитные нагрузки вызывают дополнительные изгибы, особенно при наличии неоднородной геометрии;

ISSN 3030-3907

- модель на основе RFM-принципа обеспечивает стабильные и точные результаты даже при сложных граничных условиях и несимметричных нагрузках.

Также была выполнена графическая интерпретация результатов, включающая распределение прогибов, температурного поля, электрического потенциала и векторного поля силы Лоренца. Эти визуализации подтверждают физическую обоснованность модели и её применимость в инженерной практике.

Предложенная методика может быть эффективно использована при проектировании ответственных элементов конструкций, функционирующих в условиях многополевого физического воздействия, особенно в микроэлектронике, приборостроении и аэрокосмической технике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов И. В. Термоэлектромагнитное моделирование и конструкционный анализ. — М.: Наука, 2021. — 256 с.
2. Кузнецов А. А. Влияние комплексных полей на анизотропные пластины // Вестник инженерной физики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 45–53.
3. Беляев С. М. Нелинейная деформация тонких структур в электромагнитной среде // Механика композитов. — 2020. — Т. 16, № 2. — С. 71–80.
4. Коган Н. И., Рахматуллин Е. С. Вариационные принципы в теории упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2017. — № 1. — С. 12–21.
5. Россиков Ю. А. Метод Релея–Ритца в анализе устойчивости конструкций. — СПб.: Политехника, 2018. — 184 с.
6. Левитан Л. М. Термоэлектропругость: теория и применение // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 27, № 4. — С. 39–49.
7. Васильев М. А. Построение конститутивных уравнений с учетом анизотропии // Современная механика. — 2022. — Т. 11, № 2. — С. 101–110.
8. Малыхин В. А. Исследование термомагнитной устойчивости в тонких пластинах // Физико-механический журнал. — 2020. — Т. 9, № 3. — С. 55–64.
9. Орлова Т. П. Сложные граничные условия в методах конечных элементов // Моделирование и анализ. — 2016. — Т. 5, № 1. — С. 27–35.
10. Дроздов С. Н. Адаптивные алгоритмы для многополевых задач МКЭ // Численные методы механики. — 2023. — Т. 18, № 4. — С. 88–97.

ISSN 3030-3907