

K. НАВРУЗОВ, Н.И. АБДИКАРИМОВ, Ж. ЖУМАЕВ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕЧЕНИИ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Аннотация. В статье рассмотрено решение задачи о нестационарном течении упруговязкой жидкости в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления на основе обобщенной модели Максвелла. Решением поставленной задачи определены формулы для распределения скорости, расхода жидкости и другие гидродинамические величины. На основе найденных формул анализированы переходные процессы при нестационарном течении упруговязкой жидкости в плоском канале. По результатам анализа было показано, что переходные процессы под влиянием числа Деборы, определяющие свойства упругости жидкости в упруговязком течении принципиально отличаются от переходного процесса в ньютоновской жидкости. При этом было обнаружено, что процессы перехода характеристик упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное при малых значениях чисел Деборы практически не отличаются от процессов перехода ньютоновской жидкости. При превышающих значениях чисел Деборы сравнительно единицы установлено, что процесс перехода упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное носит волновой характер изменения, в отличие от процесса перехода ньютоновской жидкости, и время перехода в несколько раз больше, чем время перехода ньютоновской жидкости. Было обнаружено также, что в переходном процессе могут возникать возмущенные процессы. Это возмущение, происходящее в нестационарном потоке упруговязкой жидкости, будет стабилизировано путем смешивания в ее ньютоновской жидкости, т. е. мгновенное максимальное увеличение скорости упруговязкой жидкости в результате увеличения концентрации ньютоновской жидкости нормализуется. Реализация этого свойства важно в технических и технологических процессах, в предотвращении технических сбоев или неполадок.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, продольная скорость, расход жидкости, стационарное течение.

УДК: 532.516

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-3-30-44>

ВВЕДЕНИЕ

Практический интерес представляет изучение нестационарного течения упруговязкой жидкости в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления. Особенно, в технических процессах в трубопроводном транспорте вязкой и, или упруговязкой жидкости при пусковом и остановочном режимах рабочих органов (механизмов) наблюдается нестационарный поток. В таких случаях изменения скорости, расхода жидкости и другие гидродинамические характеристики потока существенно отличаются от характеристик обычных потоков ньютоновской жидкости. Однако, такие потоки широко используются в

Поступила в редакцию 22.02.2024, после доработки 22.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

различных технологических процессах, в химической технологии, в биологической механике и в акустике.

В работах [1]–[6] исследования посвящены изучению нестационарных течений ньютоновских и неニュтоновских, в частности, упруговязких жидкостей в трубах и каналах. Впервые нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе было исследовано в работах И.С. Громеки [7], [8]. В них он определил изменения скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига на стенке. С помощью этих формул можно определить время установления гидродинамических величин при течении вязкой жидкости в цилиндрической трубе.

Нестационарные пульсирующие течения вязкой и упруговязкой жидкостей в круглой цилиндрической трубе бесконечной длины под действием гармонического изменяющего градиента давления исследованы в работе [9]. При помощи решения задачи получены расчетные формулы для распределения скорости и расхода жидкости. Численные расчеты показали, что в пульсирующем потоке при меньших значениях безразмерной частоты колебаний скорость, расход и другие гидродинамические параметры из нулевого начального состояния устанавливаются медленно при сравнительно больших частотах колебаний и близки к параметрам не пульсирующего потока. В осциллирующем потоке при больших значениях частоты колебаний эти параметры устанавливаются практически мгновенно.

В [10] проанализированы нестационарные упруговязкие течения жидкости Олдройда-Б через бесконечную трубу круглого сечения. Жидкость движется под действием зависящего от времени градиента давления в трех следующих случаях:

- 1) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальным законом;
- 2) градиент давления пульсирует;
- 3) градиент давления постоянный.

Получены формулы для распределения скорости жидкости, расхода жидкости и другие гидродинамические характеристики потока.

На основе модели Максвелла рассмотрена задача нестационарного колебательного течения упруговязкой жидкости в плоском канале [11], [12]. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что упруговязкие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. В работах [13], [14] решены задачи нестационарных течений упруговязкой жидкости в длинных трубах кольцевого сечения. Реологические характеристики жидкости считались не зависящими от скорости деформирования, с помощью этого условия задача приводится к линейным и ее аналитическое решение получено с помощью преобразования Лапласа. Расчеты, в частности, проведены для жидкости с постоянными свойствами, соответствующими ньютоновской жидкости, где развитие профилей скорости носит диффузионный характер. Скорость и касательные напряжения монотонно растут до своих стационарных значений. Упругость жидкости придает волновой характер развитию ее течения.

Ламинарные колебательные течения упруговязких жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [15], где демонстрируется много интересных особенностей отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей.

В работе [16] исследовано электрокинетическое течение упруговязких жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однородно, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считаются малыми, поэтому уравнение Пуассона–Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, когда преобладают упругие свойства жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливают электрокинетические эффекты, и вместе с тем усиливается эффективность преобразования электрокинетической энергии.

В работе [17] рассмотрена математическая модель движения нелинейновязкой жидкости с условием проскальзывания на границе, где математическая модель неильтоновских жидкостей подчиняется принципу объективности поведения рассматриваемых материалов. Кроме того, рассматриваемая задача с проскальзыванием граничных условий существенно отличается от классических условий прилипания.

В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменение максимальной продольной скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига на стенке, возникающие при движении нестационарного потока, исследовано относительно мало.

В данной работе исследуется нестационарное течение упруговязкой жидкости на обобщенной модели Максвелла в плоском канале под воздействием постоянного градиента давления. Определяются расчетные формулы для распределения продольной скорости, расхода жидкости и касательного напряжения сдвига на стенке. Анализируются переходные процессы при пусковом режиме течения упруговязкой жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачи нестационарного течения упруговязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Ось Ox проходит горизонтально в средине канала вдоль потока. Ось Oy направлена перпендикулярно к оси Ox . Течение упруговязкой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения упруговязкой несжимаемой жидкости в напряжениях имеет вид [1], [6]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1)$$

где u — продольная скорость, p — давление, ρ — плотность, τ — касательное напряжение, t — время. Реологические уравнения состояния жидкости принимается в виде обобщенного уравнения Максвелла [15], [18]

$$\tau = \tau_s + \tau_p, \quad \tau_s = -\eta_s \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial \tau_p}{\partial t} + \tau_p = -\eta_p \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2)$$

здесь λ — время релаксации, τ_s — касательная напряжения ньютоновской жидкости, τ_p — касательная напряжения максвелловской жидкости, τ — касательная напряжения раствора, η_s — динамическая вязкость ньютоновской жидкости, η_p — динамическая вязкость максвелловской жидкости. Связь динамических вязкостей представляется равенством [14], [19]

$$\eta = \eta_s + \eta_p,$$

где η — динамическая вязкость раствора. Подставляя (2) в уравнение движения (1) для скорости жидкости, получаем

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Чтобы решить уравнение (3), необходимо сформулировать начальные и граничные условия. Считаем, что до момента $t = 0$ жидкость находится в покое. С момента $t = 0$ жидкость движется за счет положительного постоянного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$.

В этом случае начальное условие и условие прилипания на стенке будут иметь вид

$$u = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad u = 0 \quad \text{при } y = h. \quad (4)$$

Течение происходит симметрично оси канала, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (5)$$

Проводя преобразование Лапласа–Карсона, т. е. переходя от оригинала к изображению в уравнении (3) и граничных условиях (4) и (5), получим

$$\frac{d^2 \bar{u}(y, s)}{dy^2} + \frac{i^2 \rho s}{\eta \eta^*(s)} \bar{u}(y, s) = \frac{1}{\eta \eta^*(s)} \frac{d \bar{p}(x)}{dx}.$$

Здесь

$$\eta^*(s) = \left(\frac{\eta_s}{\eta} + \frac{\eta_p}{\eta} \frac{1}{1 + s\lambda} \right) = \left(X + Z \frac{1}{1 + s\lambda} \right).$$

Фундаментальными решениями уравнения без правой части будут функции косинуса и синуса $\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right)$ и $\sin \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right)$, а частным решением уравнения (3) с правой частью будет постоянная $-\frac{1}{\rho s} \frac{d \bar{p}(x)}{dx}$.

Таким образом, общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\bar{u}(y, s) = C \cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right) + D \sin \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right) - \frac{1}{\rho s} \frac{d \bar{p}(x)}{dx}.$$

С помощью граничного условия (5) находим постоянную D , которая равна нулю, а для определения постоянной C воспользуемся граничным условием (4). В результате этого для изображения скорости получим

$$\bar{u}(y, s) = \frac{1}{\rho s} \left(-\frac{d \bar{p}(x)}{dx} \right) \left(1 - \frac{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right)}{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} h \right)} \right).$$

Используя формулу обращения преобразования Лапласа–Карсона, для скорости движения жидкости получим следующее интегральное выражение:

$$u(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{1}{\rho s} \left(-\frac{d p(x)}{dx} \right) \left(1 - \frac{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} y \right)}{\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} h \right)} \right) \frac{ds}{s}. \quad (6)$$

Для вычисления интеграла (6) по комплексному переменному необходимо установить вычеты под интегральным выражением. Приравнивая знаменатель нулю и учитывая, что корни косинуса являются действительными числами, найдем

$$s = 0 \quad \text{и} \quad s = -v \frac{s_{1,2,n}}{h^2};$$

здесь $s_{1,2,n}$ — решения трансцендентного уравнения $\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right) = 0$. Все полюсы будут простыми, поэтому можем воспользоваться разложением мероморфной функции на простые дроби в виде

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{1}{\rho s} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{\left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right) - \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right) \right)}{\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)} \frac{e^{st}}{s} = \frac{C_0}{s} + \sum_{i=1}^2 \frac{C_{i,n}}{s - s_{i,n}}, \quad (7)$$

$$F_1(s) = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right) - \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right) \right) e^{st}, \quad F_2(s) = \rho s^2 \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right).$$

Для определения вычета C_0 мы должны умножить обе части равенства (7) на s , а затем устремить s к нулю:

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sF_1(s)}{F_2(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right) - \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}y\right) \right)}{\rho s^2 \cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right)} = \\ = \frac{1}{2\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) h^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right);$$

$$\text{здесь } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots.$$

Для определения вычета $C_{i,n}$ необходимо умножить (7) на разность $s - s_{in}$ и устремить s к s_{in} , учитывая, что

$$C_{in} = \lim_{s \rightarrow s_{in}} \frac{F_1(s)}{F_2(s) - F_2(s_{in})} = \frac{F_1(s_{in})}{F'_2(s_{in})}. \quad (8)$$

Теперь нам необходимо найти значение s_{in} , для этого воспользуемся уравнением

$$\cos\left(i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h\right) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$i\sqrt{\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}}h = \frac{2n+1}{2}\pi. \quad (9)$$

Здесь, учитывая, что $\eta^*(s) = \left(X + Z\frac{1}{1+s\lambda}\right)$, приведем уравнение (9) к виду

$$\frac{\rho s}{\eta\eta^*(s)}h^2 = -\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 \quad \text{или} \quad s = -\frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2 \frac{\nu}{h^2} \left(X + Z\frac{1}{1+s\lambda}\right). \quad (10)$$

Отсюда легко привести уравнение (10) к квадратному уравнению

$$Des^2 - \bar{s}(1 + XDea_0^2) + a_0^2 = 0; \quad (11)$$

здесь $a_0 = \frac{2n+1}{2}\pi$, $De = \frac{\lambda\nu}{h^2}$. Квадратное уравнение (10) имеет два корня: действительно разные, действительно равные и комплексно сопряженные. Все эти случаи будем рассматривать в численном расчете и обсуждениях.

Теперь с учетом $s = s_{in}$ найдем

$$C_{in} = \lim_{s \rightarrow s_{in}} \frac{F_1(s)}{F_2(s) - F_2(s_{in})} = \frac{F_1(s_{in})}{F'_2(s_{in})},$$

здесь числитель легко вычисляется:

$$\begin{aligned} F_1(s_{in}) &= \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s_{in}}{\eta \eta^*(s_{in})}} h \right) - \cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s_{in}}{\eta \eta^*(s_{in})}} y \right) \right) e^{s_{in}t} = \\ &= \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(-\cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{y}{h} \right) \right) e^{s_{in}t}, \\ &\quad \cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s_{in}}{\eta \eta^*(s_{in})}} h \right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Знаменатель вычисляется с помощью производной по s :

$$\begin{aligned} F'_2(s) &= 2\rho s \cos \left(ih \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} \right) - \rho s^2 \sin \left(ih \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} \right) \left(ih \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} \right)'_s = \\ &= -\rho s^2 (-1)^n \left(ih \sqrt{\frac{\rho s}{\eta \eta^*(s)}} \right)'_s = -\rho s^2 (-1)^n \frac{ih}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Производная $\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s$ из формулы (13) вычисляется следующим образом:

$$\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right) \left(\frac{s}{\eta^*(s)} \right)'_s = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right) \left(\frac{\eta^*(s) - s(\eta^*(s))'_s}{\eta^{*2}(s)} \right).$$

Так как $\frac{ih}{\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} = \frac{2n+1}{2}\pi$, то

$$\left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s = \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}} \left(\frac{\eta^*(s) - s(\eta^*(s))'_s}{\eta^{*2}(s)} \right). \tag{14}$$

Учитывая, что $\eta^*(s) = -\frac{4s}{(2n+1)^2\pi^2} \frac{h^2}{\nu}$, (14) преобразует вид

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s &= \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}} \left(\frac{\eta^*(s) - s(\eta^*(s))'_s}{\eta^{*2}(s)} \right) = \\ &= \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}} \frac{(2n+1)^4\pi^4\nu^2}{16s^2} \frac{h^4}{h^4} (\eta^*(s) - s(\eta^*(s))'_s). \end{aligned} \tag{15}$$

Найдена производная (15), учитывая (13), находим формулу для вычисления знаменателя (8):

$$\begin{aligned} F_2'(s) &= -\rho s^2 (-1)^n \frac{ih}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\frac{s}{\eta^*(s)}} \right)'_s = \\ &= -\rho s^2 (-1)^n \frac{ih}{\sqrt{\nu}} \frac{ih}{(2n+1)\pi\sqrt{\nu}} \frac{(2n+1)^4 \pi^4 \nu^2}{16s^2} \frac{h^4}{h^4} (\eta^*(s) - s((\eta^*(s))'_s)) = \\ &= \rho (-1)^n \frac{(2n+1)^3 \pi^3}{16} \frac{\nu}{h^2} (\eta^*(s) - s((\eta^*(s))'_s)). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя в (16) вместо $\eta^*(s)$ его значение

$$\begin{aligned} \eta^*(s) &= \left(X + Z \frac{1}{1+s\lambda} \right), \quad \eta^{*\prime}(s) = \frac{-\lambda Z}{(1+s\lambda)^2}, \\ \eta^*(s) - s\eta^{*\prime}(s) &= \left(X + Z \frac{1}{1+s\lambda} \right) - \frac{-s\lambda Z}{(1+s\lambda)^2} = \frac{1+2\lambda s + \lambda^2 s^2 X}{(1+s\lambda)^2}, \end{aligned}$$

и учитывая, что $s = -\frac{\nu}{h^2} \bar{s}$, $De = \frac{\lambda\nu}{h^2}$, получим

$$\begin{aligned} F_2'(\bar{s}) &= \rho (-1)^n \frac{(2n+1)^3 \pi^3}{16} \frac{\nu}{h^2} (\eta^*(s) - s((\eta^*(s))'_s)) = \\ &= (-1)^n \frac{(2n+1)^3 \pi^3}{16} \frac{\eta}{h^2} \frac{1-2Des+De^2\bar{s}^2X}{(1-sDe)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значения $F_1(\bar{s})$, $F_2'(\bar{s})$ из (12), (17) подставляя в (8) и заменяя \bar{s} на \bar{s}_{in} , получим окончательные значения для C_{in} :

$$\begin{aligned} C_{in} &= \frac{F_1(s_{in})}{F'_2(s_{in})} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{\left(-\frac{dp}{dx} \right) \left(-\cos \left(\frac{(2n+1)}{2} \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{in} t} \right)}{(-1)^{n+1} \frac{(2n+1)^3 \pi^3}{16} \frac{\eta}{h^2} \frac{1-2Des_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1-s_{in}De)^2}} = \\ &= \frac{16h^2}{\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^n \cos \left(\frac{(2n+1)}{2} \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{in} t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1-2Des_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1-s_{in}De)^2}}. \end{aligned}$$

Суммируя значения C_o и C_{in} и подставляя в (7), находим решение уравнения (3) в виде

$$u(y, t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^n \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{in} t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1-2Des_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1-s_{in}De)^2}} \right], \quad (18)$$

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = 1 + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^n e^{-\frac{\nu}{h^2} \bar{s}_{in} t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1-2Des_{in}+De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1-\bar{s}_{in}De)^2}}; \quad (19)$$

здесь $u_0 = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right)$. Выражение (19) указывает на то, что при стремлении t к бесконечности распределение скорости становится параболическим:

$$u(y, t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right).$$

Таким образом, решение задачи о стационарном движении жидкости между параллельными стенками получается из решения задачи о нестационарном движении при обращении t в бесконечность.

2. ЧИСЛОВЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Используя формулы (18), (19), проведены числовые расчеты по установлению нестационарных процессов гидродинамических характеристик при нестационарном течении упруговязкой жидкости. Для удобства сравнения установления ньютоновской жидкости с установлением вязкоупругой жидкости проведем сначала исследование ньютоновской жидкости. Формулы для расчета ньютоновской жидкости получаются из формул (18), (19) при $\lambda = 0$, $\eta^*(s) = 0$, $X = 1$, $Z = 0$, в этом случае решение трансцендентного уравнения имеет вид

$$\cos \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta}} h \right) = 0, \quad \left(i \sqrt{\frac{\rho s}{\eta}} h \right) = \frac{2n+1}{2} \pi, \quad s = -\frac{\nu}{h^2} \bar{s}, \quad \bar{s} = \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2.$$

С помощью этих выражений из формул (18), (19) можно найти расчетные формулы для исследования ньютоновской жидкости

$$u(y, t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{\nu}{h^2} \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 t} \right],$$

$$\frac{u(0, t)}{u_{0 \max}} = 1 + 32 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3 \pi^3} e^{-\frac{\nu}{h^2} \frac{(2n+1)^2}{4} \pi^2 t}. \quad (20)$$

На основании формулы (20) произведены числовые расчеты, показывающие изменение отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного течения в зависимости от времени (рис. 1). Видно, что относительная максимальная скорость при нестационарном течении ньютоновской жидкости, в зависимости от времени, монотонно увеличивается до величины, соответствующей стационарному течению. Информация о процессе перехода ньютоновской жидкости из нестационарного режима течения в стационарный приведена во многих литературных источниках [1], [13]. Но процессы перехода упруговязкой жидкости из нестационарного течения в стационарное исследованы недостаточно. Работы [13], [14] также посвящены нестационарным движениям упруговязкой жидкости в некоторых кольцевых трубах, решение которых основано на методе конечных разностей. Ниже приводим анализ задачи, решенной на основе обобщенной двухжидкостной модели Максвелла. Для этого используем формулы (18), (19). Одним из физических свойств потока упруговязкой жидкости является то, что в начальный момент времени скорость достигает своего максимального значения, затем переходит в стадию монотонного уменьшения и стационарного течения. На основе формул (18), (19) проанализирован процесс перехода из нестационарного состояния к стационарному в плоском канале упруговязкой жидкости на основе модели Максвелла. В данном случае решение квадратного уравнения (11) определяет корни $s_{1n,2n}$ из (18), (19). Известно, что квадратное уравнение (11) имеет два корня:

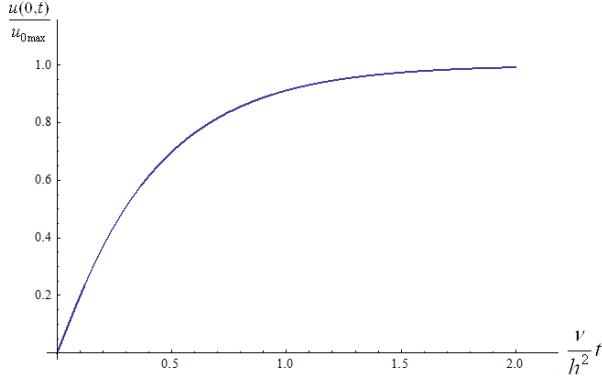


Рис. 1. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении ньютоновской жидкости

действительно разные, действительно равные и комплексно сопряженные:

$$s_{1n} = \frac{1 + XDea_0^2 + \sqrt{1 - 2Dea_0^2(X - 2) + X^2De^2a_0^4}}{2De}, \quad (21)$$

$$s_{2n} = \frac{1 + XDea_0^2 - \sqrt{1 - 2Dea_0^2(X - 2) + X^2De^2a_0^4}}{2De}. \quad (22)$$

Для того, чтобы корни квадратного уравнения были действительными, необходимо, чтобы дискриминант в формулах (21), (22) $(1 - 2Dea_0^2(X - 2) + X^2De^2a_0^4)$ был равен нулю или больше нуля. В данном случае корни действительны, поэтому решения уравнений (18), (19) представлены в виде

$$u(y, t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{n+1} \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) e^{-\frac{V}{h^2} \bar{s}_{in} t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1 - 2De\bar{s}_{in} + De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1 - s_{in}De)^2}}, \quad (23)$$

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = 1 + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{n+1} e^{-\frac{V}{h^2} \bar{s}_{in} t}}{(2n+1)^3 \pi^3 \frac{1 - 2De\bar{s}_{in} + De^2\bar{s}_{in}^2 X}{(1 - \bar{s}_{in}De)^2}}. \quad (24)$$

В этом случае решения (23), (24) будут выглядеть так же, как решения (18), (19). Этот случай соответствует меньшим значениям числа Деборы. Анализ формул (23), (24) представлен на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что в данном случае процессы нестационарности в потоке упруговязкой жидкости практически ничем не отличаются от процессов нестационарности в ньютоновской жидкости. В этом случае вместо нестационарности потока упруговязкой жидкости можно принять процесс установления нестационарного потока ньютоновской жидкости. Теперь рассмотрим случай, когда корни квадратного уравнения (11) состоят из комплексных сопряженных корней. Этот случай наблюдается, когда дискриминант уравнения (11) меньше нуля. Этот случай соответствуют для больших значений числа Деборы. Решение

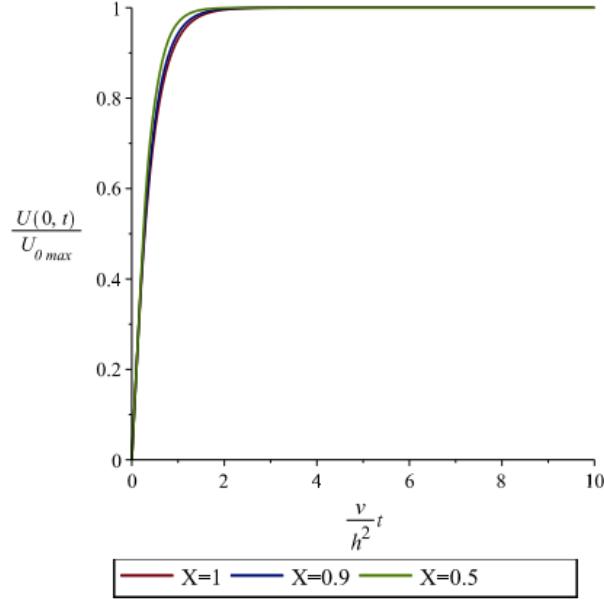


Рис. 2. Изменение во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении упруговязкой жидкости (когда число Деборы $De = 0.1$, и при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости)

квадратного уравнения определяется следующим образом:

$$s_{1n} = \frac{1 + X De a_0^2 + i \sqrt{2 De a_0^2 (2 - X) - X^2 De^2 a_0^4 - 1}}{2 De} = a + bi,$$

$$s_{2n} = \frac{1 + X De a_0^2 - i \sqrt{2 De a_0^2 (2 - X) - X^2 De^2 a_0^4 - 1}}{2 De} = a - bi;$$

здесь

$$a = \frac{1 - X De a_0^2}{2 De}, \quad b = \frac{\sqrt{2 De a_0^2 (2 - X) - X^2 De^2 a_0^4 - 1}}{2 De}, \quad a_0 = \frac{2n + 1}{2} \pi,$$

$$De = \frac{\lambda \nu}{h^2}, \quad s_{1n} = a + bi, \quad s_{2n} = a - bi.$$

В этом случае решения (18), (19) имеют вид

$$u(y, t) = \frac{h^2}{2\eta} \left(-\frac{dp(x)}{dx} \right) \left[\left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \right. \\ \left. + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \left(\left(\frac{2n+1}{2} \right) \pi \frac{y}{h} \right) 2e^{-\frac{\nu}{h^2} a_n t}}{(2n+1)^3 \pi^3 (M_2^2 + N_2^2)} \left(M_3 \cos b_n \frac{\nu}{h^2} t + N_3 \sin b_n \frac{\nu}{h^2} t \right) \right], \\ \frac{u(0, t)}{u_0} = 1 + 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} e^{-\frac{\nu}{h^2} a_n t}}{(2n+1)^3 \pi^3 (M_2^2 + N_2^2)} \left(M_3 \cos b_n \frac{\nu}{h^2} t + N_3 \sin b_n \frac{\nu}{h^2} t \right); \quad (25)$$

здесь

$$\begin{aligned} M_1 &= 1 - 2a_n De + a_n^2 De^2 - b_n^2, \quad N_1 = 2a_n b_n - 2b_n De, \\ M_2 &= 1 - 2a_n De + a_n^2 De^2 X - De^2 b_n^2 X, \quad N_2 = 2a_n b_n De^2 X - 2b_n De, \\ M_3 &= M_1 M_2 + N_1 N_2, \quad N_3 = -(M_1 N_2 - M_2 N_1). \end{aligned}$$

Используя формулу (25), проанализируем результаты численного расчета нестационарного течения упруговязкой жидкости, когда решения уравнения (11) состоят из комплексных сопряженных корней. На рис. 3–6 показаны изменения во времени отношения максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля при нестационарном течении упруговязкой жидкости (когда число Деборы имеет значения $De = 0.5$, $De = 1$, $De = 3$, $De = 5$ соответственно и при различных значениях концентрации Ньютоновской жидкости).

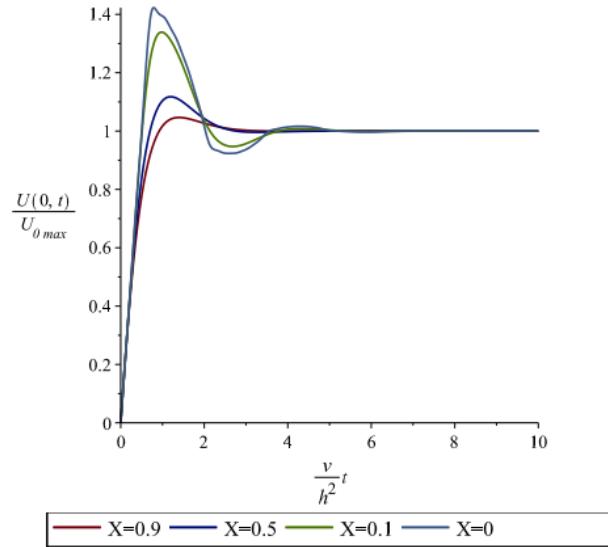
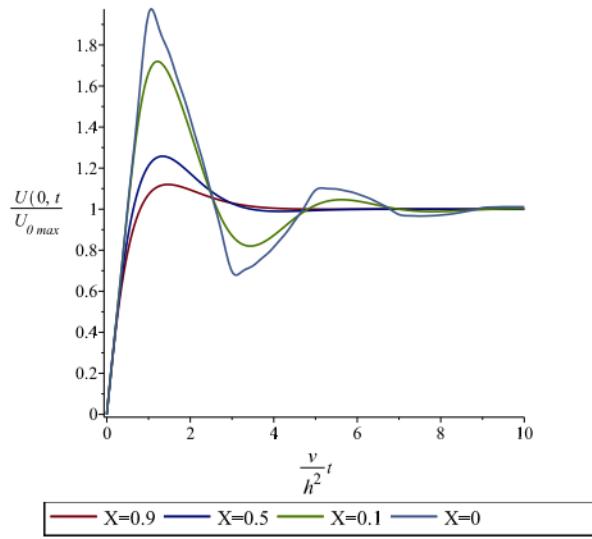
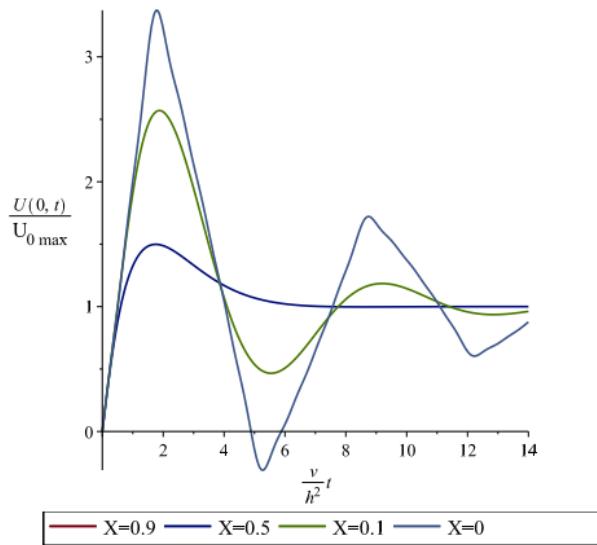


Рис. 3. $De = 0.5$

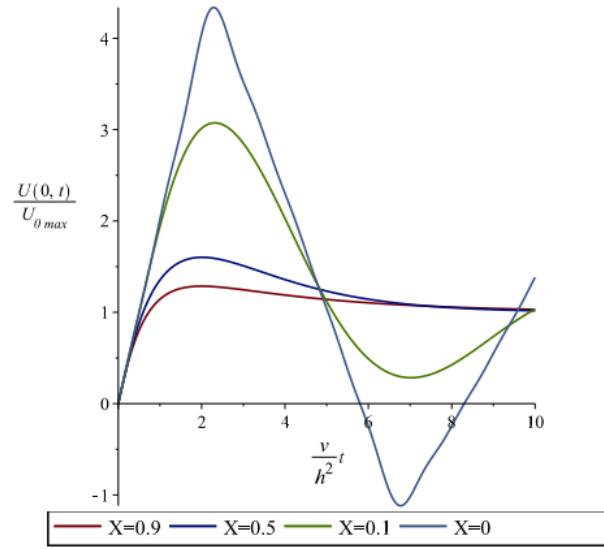
Из рис. 3–6 видно, что процесс перехода упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное носит волновой характер, в отличие от процесса перехода ньютоновской жидкости, и время перехода в несколько раз больше, чем время перехода ньютоновской жидкости. Например, можно заметить, что в 1.4 раза на рис. 3, в 2 раза на рис. 4, в 3.5 раза на рис. 5 и в 4.5 раза на рис. 6. На рис. 5, 6 показано, что увеличение числа Деборы превышает отношение максимальной скорости к максимальной скорости стационарного профиля упруговязкой жидкости в 4.5–5 раз по сравнению с максимальной скоростью ньютоновской жидкости в переходном процессе. В качестве основной причины резкого увеличения гидродинамических величин в процессе перехода упруговязкой жидкости можно назвать силу инерции, учитываемую в модели Максвелла. Нетрудно видеть, что если убрать действие силы инерции, то она ничем не отличается от ньютоновской жидкости. Здесь эффект силы инерции существует наличием числа Деборы, т. е. релаксации. Было обнаружено также, что в переходном процессе могут возникать возмущенные процессы. Это возмущение, происходящее в нестационарном потоке упруговязкой жидкости, будет стабилизировано путем перемешивания в нее ньютоновской жидкости, т. е. мгновенное максимальное увеличение скорости упруговязкой жидкости в результате увеличения

Рис. 4. $De = 1$ Рис. 5. $De = 3$

концентрации ньютоновской жидкости нормализуется. Реализация этого свойства играет важную роль в технических и технологических процессах, в предотвращении технических сбоев и неполадок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе обобщенной модели Максвелла решена задача о нестационарном течении упруговязкой жидкости под воздействием постоянного градиента давления в плоском канале.

Рис. 6. $De = 5$

При решении определены формулы для определения распределения профиля скорости, расхода жидкости в нестационарном потоке упруговязкой жидкости. На основе установленных формул проанализированы процессы перехода характеристик упруговязкой жидкости в плоском канале из нестационарного состояния в стационарное. По результатам анализа было показано, что переходные процессы под влиянием числа Деборы, определяющие свойство упругости жидкости в упруговязком течении, принципиально отличаются от переходного процесса в ньютоновской жидкости. При этом было обнаружено, что процессы перехода характеристик упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное при малых значениях числа Деборы практически не отличаются от процессов перехода в ньютоновской жидкости. При больших значениях числа Деборы, сравнительно единицы, установлено, что процесс перехода упруговязкой жидкости из нестационарного состояния в стационарное носит волновой характер, в отличие от процесса перехода ньютоновской жидкости, и время перехода в несколько раз больше, чем время перехода в ньютоновской жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа* (Дрофа, М., 2003).
- [2] Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. *Гидродинамика пульсирующих потоков* (Ташкент, Фан, 1986).
- [3] Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н. *Введение в механику несжимаемой жидкости* (Изд. ПНИПУ, Пермь, 2019).
- [4] Слезкин Н.А. *Динамика вязкой несжимаемой жидкости* (Гостехиздат, М., 1956).
- [5] Тарг С.М. *Основные задачи теории ламинарных течений* (Гостехиздат, М., 1951).
- [6] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя* (Наука, М., 1974).
- [7] Громека И.С. *К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках*, Собр. сочин., 149–171 (Унив. тип., Казань, 1882).
- [8] Громека И.С. *О скорости распространения волнобразного движения жидкости в упругих трубах*, Собр. сочин., 172–183 (Унив. тип., Казань, 1952).
- [9] Наврузов К., Хакбердиев Ж.Б. *Динамика неニュтоновских жидкостей* (Фан, Ташкент, 2000).
- [10] Hassan A. Abu-EL, EL-Maghawry *Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd B fluid*, Rheology-New Concepts, Appl. Methods, Ed. by R. Durairaj **6**, 91–106 (2013).

- [11] Navruzov K., Sharipova Sh. B. *Tangential Shear Stress in Oscillatory Flow of a Viscoelastic incompressible fluid in a plane Channel*, Fluid Dynam. **58** (3), 360–370 (2023).
- [12] Navruzov K., Fayziev R.A., Mirzoev A.A., Sharipova Sh.B. *Tangential Shear Stress in Oscillatory Flow of a Viscoelastic Fluid in a Flat Channel*, Lect. Notes Comput. Sci. **13772**, 1–14 (2023).
- [13] Шульман З.П., Хусид Б.М. *Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах*. Под ред. Р.И. Нигматулина (Наука и техн., Минск, 1983).
- [14] Шульман З.П., Хусид Б.М. *Фенологические и микроструктурные теории наследственных жидкостей*, Препринт АН БССР, Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова (4) (Минск, 1983).
- [15] Casanellas L., Ortin J. *Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids: Theoretical analysis*, J. Non-Newtonian Fluid. Mech. **166** (23–24), 1315–1326 (2011).
- [16] Ding Z., Jian Y. *Electrokinetic oscillatory flow and energy conversion of viscoelastic fluids in microchannels: a linear analysis*, J. Fluid. Mech. **919**, 1–31 (2021).
- [17] Кузьмин М.Ю. *О математической модели движения нелинейно-вязкой жидкости с условием проскальзывания на границе*, Изв. вузов. Матем. (5), 53–62 (2007).
- [18] Наврузов К., Бегжанов А.Ш., Шарипова Ш.Б., Жумаев Ж.К. *Математическое моделирование гидродинамического сопротивления в колебательном потоке вязкоупругой жидкости*, Изв. вузов. Матем. (8), 45–55 (2023).
- [19] Астарита Дж., Марруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей* (Мир, М., 1978).

Куралбай Наврузов

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамида Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,

e-mail: qurol_46@mail.ru

Набијон Ибадуллаевич Абдикаримов

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамида Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,
e-mail: nabijon.88@mail.ru

Жура Жумаев

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбала, д. 11, г. Бухара, 200018, Республика Узбекистан,
e-mail: j.jumaev@buxdu.uz

K. Navruzov, N.I. Abdikarimov, and J. Jumayev

Transient processes during unstationary flow of an elastic-viscous liquid in a flat channel

Abstract. The paper considers the solution to the problem of unsteady flow of an elastic-viscous fluid in a flat channel under the influence of a constant pressure gradient based on the generalized Maxwell model. By solving the problem, formulas for velocity distribution, fluid flow and other hydrodynamic quantities are determined. Based on the formulas found, transient processes during unsteady flow of an elastic-viscous fluid in a flat channel are analyzed. Based on the results of the analysis, it is shown that transient processes under the influence of the Deborah number, which determine the elasticity properties of a fluid in an elastic-viscous flow, are fundamentally different from the transient process in a Newtonian fluid. At the same time, it is discovered that the processes of transition of the characteristics of an elastic-viscous fluid from an unsteady state to a stationary state at small values of Deborah numbers practically do not differ from the processes of transition of a Newtonian fluid. When the Deborah number exceeds relatively unity, it has been established that the process of transition of an elastic-viscous fluid from an unsteady state to a stationary state is a wave-type change, in contrast to the transition process of a Newtonian fluid, and the transition time is several times longer than the transition time of a Newtonian fluid. It is also discovered that disturbances may occur during the transient process. This disturbance, occurring in the unsteady flow of an elastic-viscous fluid, will be stabilized by mixing a Newtonian fluid into it. That is, the instantaneous maximum increase in the velocity of the viscoelastic fluid as a result of an increase in the concentration of the Newtonian fluid is normalized. The implementation of this property is important in technical and technological processes, in preventing technical failures or malfunctions.

Keywords: viscoelastic fluid, unsteady flow, longitudinal velocity, fluid flow, steady flow.

Kuralbay Navruzov

Urgench State University,

14 Hamid Olimjon str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: qurol_46@mail.ru

Nabijon Ibadullayevich Abdikarimov

Urgench State University,

14 Hamid Olimjon str., Urgench, 220100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: nabijon.88@mail.ru

Jura Jumaev

Bukhara State University,

11 M. Ikboz str., Bukhara, 200018 Republic of Uzbekistan,

e-mail: j.jumaev@buxdu.uz