

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. МАТЕМАТИКА

Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Казань)

Номер: 8 Год: 2023

| | Название статьи | Стр. | Цит. |
|---|--|-------|------|
| <input type="checkbox"/> | СУММАРНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПОРОЖДЕННОЕ ПЯТИУГОЛЬНИКОМ, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ | 3-9 | 0 |
|  | <i>Гарифьянов Фархат Нургаязович, Стрежнева Елена Васильевна</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ | 10-22 | 0 |
|  | <i>Дурдиев Умиджон Дурдимуратович</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ШРЁДИНГЕРА-КИРХГОФА С ДРОБНЫМ $p(x, \cdot)$-ЛАПЛАСИАНОМ | 23-34 | 0 |
|  | <i>Мирзапур Марьям</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ЗАДАЧА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ И С НЕДОСТАЮЩИМ УСЛОВИЕМ ГЕЛЛЕРСТЕДА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА | 35-44 | 0 |
|  | <i>Мирсабуров Мирахмат, Эргашева Сарвиноз Бахтиёровна</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ | 45-55 | 0 |
|  | <i>Наврузов Куралбай, Бегжанов Амирбек Шихназарович, Шарипова Шахиста Бакберган кизи, Жумаев Жура</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ОБРАТИМОСТЬ И СПЕКТР ОПЕРАТОРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ | 56-63 | 0 |
|  | <i>Пасенчук Александр Эдуардович</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ДИФРАКЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ | 64-70 | 0 |
|  | <i>Тешаев Мухсин Худойбердиевич, Каримов Исроил Мирзаевич, Умаров Аловиддин Очилович, Жураев Шухрат Исроилович</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СУПЕРКАВИТИРУЮЩИХ ГИДРОПРОФИЛЕЙ | 71-77 | 0 |
|  | <i>Маклаков Дмитрий Владимирович, Газизова Светлана Евгеньевна, Каюмов Ильгиз Рифатович</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | УТОЧНЕННАЯ ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ УЧАСТКОМ НА ОДНОЙ ИЗ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ | 78-86 | 0 |
|  | <i>Паймушин Виталий Николаевич, Камалутдинов Айрат Марсович, Шишов Максим Александрович, Чумакова Софья Федоровна</i> | | |
| <input type="checkbox"/> | ШИРОКОМАСШТАБНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА И ПОРОДИВШЕЙ ЕЕ ФУНКЦИИ | 87-92 | 0 |
|  | <i>Темиргалиев Нурлан, Таугынбаева Галия Ерболовна, Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна</i> | | |

К. НАВРУЗОВ, А.Ш. БЕГЖАНОВ, Ш.Б. ШАРИПОВА, Ж. ЖУМАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация. Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости на основе обобщенной модели Максвелла. Определена передаточная функция амплитудно-фазовой частотной характеристики. С помощью этой функции исследованы зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний при различных значениях упругого числа Деборы и концентрации ньютоновской жидкости. Показано, что в колебательном течении вязкоупругой жидкости, гидродинамическое сопротивление уменьшается в зависимости от числа Деборы. С увеличением этого числа уменьшение становится еще ярче. Этот эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости, осредненной по сечению канала, а также при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке, и определить диссипации механической энергии среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, передаточная функция, колебательное течение, амплитуда, фаза.

УДК: 532.516

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-45-55

ВВЕДЕНИЕ

Практический интерес представляет изучение пульсирующих течений вязкоупругой жидкости в плоском канале и цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. В [1] исследовано движение вязкоупругой жидкости по длинной трубе под действием колебательного градиента давления. Показаны отличительные особенности этого движения по сравнению соответствующего движения ньютоновской жидкости. Исследовано безынерционный колебательный поток вязкоупругой жидкости в круглой бесконечной трубе под действием колебательного градиента давления в работе [2], в котором показано, что в осциллирующем потоке профили продольной скорости симметричны и существует значительный фазовый сдвиг между градиентом давления и скоростью. В пульсирующих потоках фазовый сдвиг фактически отсутствовал, и осевая скорость изменялась несимметрично относительно своего среднего за период колебания. Ламинарные колебательные течения вязкоупругих жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [3], где демонстрируется много интересных особенностей отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей. Результаты исследования [3] показывают, что в безынерционном режиме,

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

когда $Re\ 1$ свойства течения зависят от трех характерных длин. Длина волны λ_0 и длина затухания вязкоупругих сдвиговых волн $x_0 = \left(\frac{2\nu}{\omega_0}\right)^{1/2}$; здесь ν — кинематическая вязкость, ω_0 — частота колебаний, где a — характерный поперечный размер системы. В этой связи соответственно длины разделены на три шкалы и три независимые безразмерные группы: $\frac{t\vartheta}{\lambda}$ (вязкость до времени релаксации), De (время релаксации до периода колебаний) и X (коэффициент вязкости). Вместе с этим колебательные области течения разделены на две системы, соответствующие "широким" $\left(\frac{a}{x_0} > 1\right)$ и "узким" $\left(\frac{a}{x_0} < 1\right)$ системам. В широких системах колебания ограничиваются околостеночными, а в центральном ядре — невязкими течениями. В узких системах поперечные волны пересекают всю систему и также ее центр, что в конечном итоге приводит к конструктивным резонансам, которые ведут к резкому увеличению амплитуды профиля скорости. В [4] проанализированы нестационарные течения вязкоупругой жидкости на модели Олдройда-Б в круглой бесконечной цилиндрической трубе под действием зависящего от времени градиента давления в следующих случаях: а) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальным законом, б) градиент давления изменяется по гармоническим законам, с) градиент давления постоянный. Во всех случаях получены формулы для распределения скорости, расхода жидкости и других гидродинамических величин в пульсирующем потоке. На основе модели Максвелла в [5] рассмотрена задача нестационарного колебательного течения вязкоупругой жидкости в круглой цилиндрической трубе. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квази-стационарного подхода. В последние десятилетия электрокинетические явления, в том числе электроосмос, потенциал течений, электрофорез и седиментационный потенциал привлекают к себе большое внимание и имеют множество приложений в микро- и наноканалах. В связи с этим в работе [6] исследовано электрокинетическое течение вязкоупругих жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однонаправленно, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считаются малыми, поэтому уравнение Пуассона–Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, когда преобладают упругие свойства жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливает электрокинетические эффекты, и вместе с тем усиливается эффективность преобразования электрокинетической энергии. В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменения касательных и нормальных напряжений, возникающие при движении, исследованы относительно мало. В большинстве случаев в гидродинамических моделях нестационарных течений жидкости заменялись последовательностью течений с квазистационарным распределением гидродинамических величин. Однако структуры нестационарных течений отличаются от структуры стационарных течений, и в таких случаях такая замена должна быть обоснована в каждом конкретном случае. В настоящее время вопрос правомерности исследования квазистационарных характеристик для определения поля касательных напряжений в нестационарных течениях вязкой и вязкоупругой жидкостей далеко не решен. Естественно, что в таких условиях возникает необходимость использовать гидродинамические модели нестационарных процессов, учитывающие изменение гидродинамических характеристик потока

в зависимости от времени. Следует отметить, что в общем случае гидродинамические характеристики в трубопроводном транспорте не может быть определено из характеристик, которые соответствуют условиям стационарного потока. В данной работе исследуются колебательные течения вязкоупругой жидкости на обобщенной модели Максвелла в плоском канале при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Определяется передаточная функция амплитудно-фазовых частотных характеристик. С помощью этой функции анализируется изменение гидродинамического сопротивления при колебательном потоке упруговязкой жидкости в зависимости от безразмерной частоты колебаний.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу медленного колебательного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через $2h$. Ось Ox проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось Oy направлена перпендикулярно к оси. Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения вязкоупругой несжимаемой жидкости в напряжениях имеет следующий вид [7]–[10]:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1)$$

где u — продольная скорость, p — давление, ρ — плотность, τ — касательная напряжения, t — время.

Реологические уравнения состояния жидкости принимаются в виде обобщенного уравнения Максвелла [3], [6]:

$$\tau = \tau_s + \tau_p, \quad \tau_s = -\eta_s \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial \tau_p}{\partial y} + \tau_p = -\eta_p \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь λ — время релаксации, τ_s — касательная напряжения ньютоновской жидкости, τ_p — касательная напряжения максвелловской жидкости, τ — касательная напряжения раствора, η_s — динамическая вязкость ньютоновской жидкости, η_p — динамическая вязкость максвелловской жидкости. Между динамическими вязкостями выполняется равенство [3], [6]:

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p,$$

где η_0 — динамическая вязкость раствора. Подставляя (2) в уравнение движения (1) для скорости жидкости, получаем

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = - \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta_p \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебания расхода жидкости или продольной скорости осредненной по сечению канала

$$Q = a_Q \cos \omega t = \operatorname{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad \langle u \rangle = a_u \cos \omega t = \operatorname{Re} a_u e^{i\omega t},$$

где a_Q и a_u — соответственно амплитуда расхода жидкости и амплитуда продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае течение происходит симметрично по оси канала, а на стенке канала удовлетворяется условие прилипания, т. е. продольная скорость на стенке канала равна нулю. Тогда граничными условиями будут

$$u = 0 \text{ при } y = h, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0. \quad (4)$$

В силу линейности уравнения (3) продольную скорость, давление, касательное напряжение на стенке можно записать следующим образом:

$$u(y, t) = \operatorname{Re} u_1(y)e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = \operatorname{Re} p_1(x)e^{i\omega t}, \quad \tau(t) = \operatorname{Re} \tau_1 e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Подставляя (5) в уравнение (3), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega}{\eta_0} \left(X + \frac{Z}{1 + i\omega\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\eta_0} \left(\left(X + \frac{Z}{1 + i\omega\lambda} \right)^{-1} \right) \frac{\partial p_1(x)}{\partial x}. \quad (6)$$

Здесь

$$X = \frac{\eta_s}{\eta_0}, \quad Z = \frac{\eta_p}{\eta_0}, \quad X + Z = \frac{\eta_s}{\eta_0} + \frac{\eta_p}{\eta_0} = 1.$$

Фундаментальными решениями уравнения (6) без правой части будут функции

$$\cos \left(\frac{i^{3/2} \alpha_0}{h} \eta(i\omega) y \right), \quad \sin \left(\frac{i^{3/2} \alpha_0}{h} \eta(i\omega) y \right).$$

Здесь

$$\eta(i\omega) = \left(\frac{1 + i\omega\lambda}{1 + i\omega\lambda X} \right)^{1/2}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\rho\omega}{\eta_0}} h,$$

а решение неоднородной части имеет вид

$$\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (6) будет

$$u_1(y) = C_1 \cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h} \right) + C_2 \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h} \right) + \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Для определения постоянных коэффициентов используем граничные условия (4)

$$\frac{\partial u_1(y)}{\partial y} = C_1 \frac{i^{3/2} \alpha_0}{h} \eta(i\omega) \sin \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h} \right) + C_2 \frac{i^{3/2} \alpha_0}{h} \eta(i\omega) \cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h} \right). \quad (8)$$

При $y = 0$ соотношение (8) имеет вид

$$0 = C_2 \frac{i^{3/2} \alpha_0}{h} \eta(i\omega).$$

Отсюда легко найти $C_2 = 0$. При условии, что $u_1 = 0$ при $y = h$, из (7) определяем

$$C_1 = -\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \frac{1}{\cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}.$$

В результате для определения скорости будем иметь

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h} \right)}{\cos \left(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \right), \quad (9)$$

где $\alpha_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0}} h$ — колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний), ν_0 — кинематическая вязкость раствора.

С помощью уравнения

$$\tau_1(i\omega) = -\frac{\eta_0}{\eta^2(i\omega)} \frac{\partial u_1(y)}{\partial y} \Big|_{y=h}$$

находим касательное напряжение сдвига на стенке

$$\tau_1(i\omega) = -h \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{i\alpha_0^2} \left(\frac{i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{\cos \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \right). \quad (10)$$

Проинтегрировав обе части формулы (9) по переменной y в пределах от $-h$ до h , найдем формулы для расхода жидкости

$$Q_1 = 2h \left[\frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \cos \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \right) \right]. \quad (11)$$

Учитывая в формуле (11) $Q_1 = 2h \langle u_1 \rangle$, находим продольную скорость осредненной по сечению канала

$$\langle U_1(i\omega) \rangle = \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \cos \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \right), \quad (12)$$

$$\rho i \omega = i \frac{\omega}{v} h^2 \frac{\eta_0}{h^2} = i \alpha_0^2 \frac{\eta_0}{h^2}.$$

Тогда формула (12) с учетом (10) приобретает вид

$$\langle U_1(i\omega) \rangle = -\frac{3}{3\eta_0} \tau_1 \frac{3\alpha_0 \eta(i\omega) \cos(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega)) - \sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \right)^2 \sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}. \quad (13)$$

Используя (13), для касательного напряжения на стенке определяем передаточную функцию

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h}{3\eta_0} \frac{\tau_1(i\omega)}{u_1(i\omega)}. \quad (14)$$

С учетом (14) из уравнения (13) получаем

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h}{3\eta_0} \frac{\tau_1(i\omega)}{\langle u_1(i\omega) \rangle} = -\frac{\left(i^{\frac{3}{2}} \right)^2 \sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{3 \left(\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \cos \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) - \sin \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \right)} = \chi + \beta i. \quad (15)$$

Передаточная функция (15) иногда называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой. Эти функции позволяют оценить гидравлическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала. Так как ее действительная часть позволяет определить активное гидравлическое сопротивление, а мнимая часть — реактивность или индуктивность колебательного потока.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗ.

Гидродинамическое сопротивление при колебательном потоке в ньютоновских, а также вязкоупругих течениях определяется отношением градиента давления к средней скорости, иногда это отношения называется "импедансом" потока. Отношение градиента давления к средней скорости находим из формулы (12)

$$Z = \frac{\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right)}{R_0 \langle u_1(i\omega) \rangle} = \left[\frac{1}{i\alpha_0^2} \left(1 - \frac{\sin(M_1 - i\bar{M}_1)}{(M_1 - i\bar{M}_1) \cos(M_1 - i\bar{M}_1)} \right) \right]^{-1} = R_n^0 + iL_0. \quad (16)$$

Здесь $R_0 = \frac{\eta}{h^2}$ – гидродинамическое сопротивление Ньютоновской жидкости при стационарном потоке. Выделяя действительную и мнимую части формулы (16), определяем полное гидродинамическое сопротивление \bar{R} и индуктивность \bar{L} :

$$R = \frac{\alpha_0^2 (A_1^2 + B_1^2)}{(A_2^2 + B_2^2)} B_2, \quad \bar{L} = \frac{(A_1^2 + B_1^2)}{\alpha_0^2} A_2,$$

где

$$A_1 = \bar{A}\bar{M}_1 + \bar{B}M_1, \quad B_1 = \bar{A}M_1 - \bar{B}\bar{M}_1,$$

$$A_2 = (A_1^2 + B_1^2) - A_1C - B_1D, \quad B_2 = (B_1C - A_1D),$$

$$C = \sin M_1 \operatorname{ch} \bar{M}_1, \quad D = -\cos M_1 \operatorname{sh} \bar{M}_1;$$

$$\bar{A} = \sin M_1 \operatorname{sh} \bar{M}_1, \quad \bar{B} = \cos M_1 \operatorname{ch} \bar{M}_1, \quad M_1 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} \bar{G}_1, \quad \bar{M}_1 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} \bar{G}_2,$$

$$\bar{G}_1 = \bar{G}_1 + \bar{G}_2, \quad \bar{G}_2 = \bar{G}_1 - \bar{G}_2, \quad \sqrt{\frac{1}{\eta^*(i\omega)}} = \sqrt{G_1 + G_2i} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2i,$$

$$\bar{G}_1 = \sqrt{\sqrt{G_1^2 + G_2^2} \cos \frac{\varphi + 2n\pi}{2}}, \quad \bar{G}_2 = \sqrt{\sqrt{G_1^2 + G_2^2} \sin \frac{\varphi + 2n\pi}{2}}, \quad n = 0, 1;$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{G_2}{G_1}, \quad \frac{1}{\eta^*(i\omega)} = \frac{1 + \operatorname{De}^2 X_1 \alpha_0^4 + i \operatorname{De} \alpha_0^2 (1 - X_1)}{1 + \operatorname{De}^2 X_1^2 \alpha_0^4} = G_1 + G_2i,$$

$$G_1 = \frac{1 + \operatorname{De}^2 X_1 \alpha_0^4}{1 + \operatorname{De}^2 X_1^2 \alpha_0^4}, \quad G_2 = \frac{\operatorname{De} \alpha_0^2 (1 - X_1)}{1 + \operatorname{De}^2 X_1^2 \alpha_0^4},$$

$$\eta^*(i\omega) = \left(\frac{\eta_s}{\eta} + \frac{\eta_p}{\eta} \frac{1}{1 + i \operatorname{De} \alpha_0^2} \right) = \left(X_1 + Z_1 \frac{1}{1 + i \operatorname{De} \alpha_0^2} \right) = \frac{1 + i \operatorname{De} X_1 \alpha_0^2}{1 + i \operatorname{De} \alpha_0^2}, \quad \frac{\eta_s}{\eta} + \frac{\eta_p}{\eta} = 1,$$

$$X_1 = \frac{\eta_s}{\eta}, \quad Z_1 = \frac{\eta_p}{\eta}, \quad X_1 + Z_1 = 1,$$

$$\operatorname{De} = \frac{\lambda \eta}{\rho h^2}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\omega}{\nu} h^2.$$

Результаты исследования (16) для ньютоновской жидкости приведены во многих работах [7], [9], [10]. В рис. 1 представлена зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 , когда упругое число $\operatorname{De} = 0.05$, и при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости в растворе.

В графике рис. 1 при $X = 1$ приведены изменения полного гидродинамического сопротивления ньютоновской жидкости в колебательном потоке, совпадающие с результатами

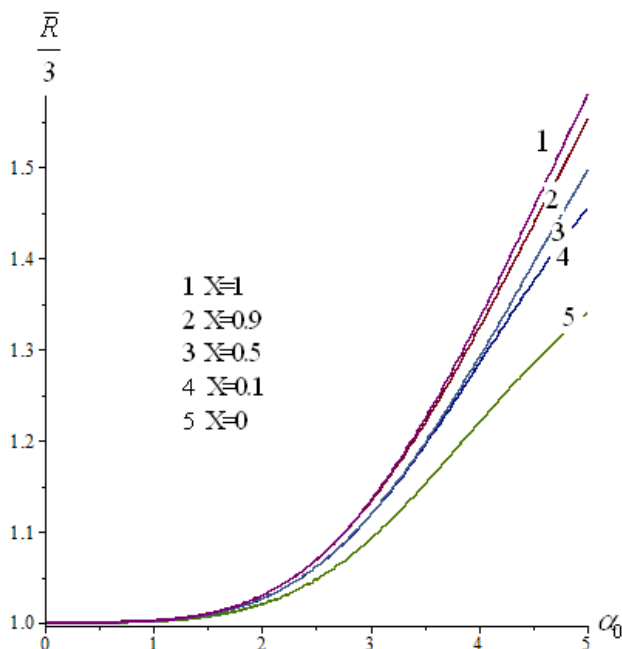


Рис. 1. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости для $De = 0.05$

других исследователей [7], [9]. Из этого графика видно, что с увеличением безразмерной частоты колебаний α_0 полное гидродинамическое сопротивление ньютоновской жидкости монотонно возрастает. Кривые 2–5, приведенные в рис. 1, характеризуют изменение гидродинамического сопротивления в колебательном потоке упруговязкой жидкости с низким упругим числом Деборы, с добавлением ее ньютоновской жидкости. Действительно кривые 2–5 мало отличаются от кривой 1. Это означает, что в этом случае вместо гидродинамического сопротивления упруговязкой жидкости можно принимать гидродинамическое сопротивление ньютоновской жидкости. Однако с увеличением упругого числа Деборы наблюдается существенное отличие между гидродинамическим сопротивлением упруговязкой жидкости и ньютоновской жидкостью. Это отличие показано на рис. 2–4 при возрастающих значениях упругого числа Деборы. Начиная с упругого числа Деборы $De = 0.5$, наблюдается уменьшение гидродинамического сопротивления в зависимости от концентрации ньютоновской жидкости (кривые 3–5 на рис. 3). Когда отсутствует ньютоновская жидкость в растворе, тогда раствор обладает вязкоупругими свойствами. В таких случаях в колебательном потоке гидродинамическое сопротивление упруговязкой жидкости изменяется колебательным образом в зависимости от безразмерной частоты колебаний α_0 , и он усиливается с увеличением упругого числа Деборы (кривые 5 на рис. 2–4). Содержание ньютоновской жидкости в растворе сглаживает колебательный режим изменения гидродинамического сопротивления (кривые 3, 4 на рис. 2–4). В общем случае при колебательном течении вязкоупругой жидкости гидродинамическое сопротивление уменьшается максимально в диапазоне значений $1 < \alpha_0 < 3$ безразмерной частоты колебаний, а затем увеличивается с увеличением этой частоты. Полученный эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости, осредненной по сечению канала, а также

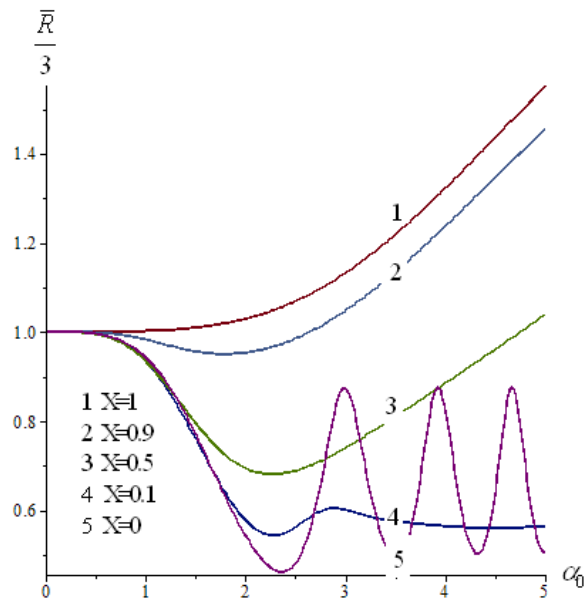


Рис. 2. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости для $De = 0.5$

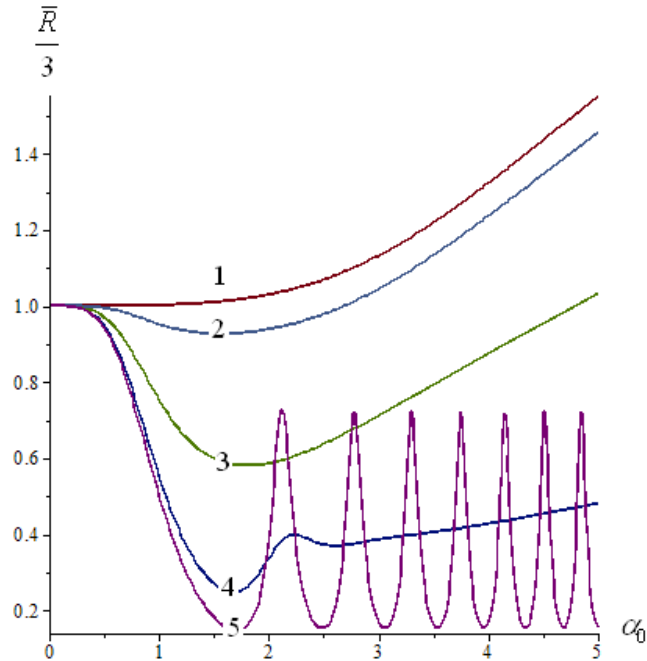


Рис. 3. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости для $De = 1$

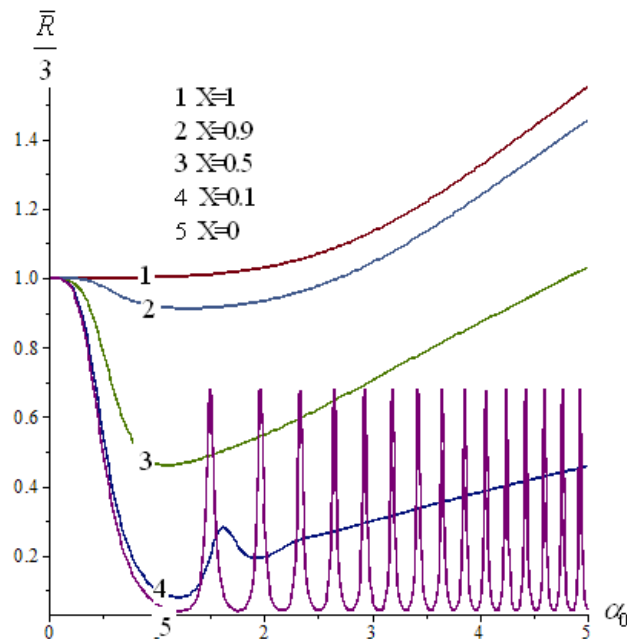


Рис. 4. Зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний α_0 при различных значениях концентрации ньютоновской жидкости для $De = 2$

при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке. Таким образом, можно определить диссипации механической энергии среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости на основе обобщенной модели Максвелла. Определена передаточная функция, амплитудно-фазовой частотной характеристик. С помощью этой функции исследованы зависимость гидродинамического сопротивления от безразмерной частоты колебаний при различных значениях упругого числа Деборы и концентрации ньютоновской жидкости. Показано, что в колебательном течении вязкоупругой жидкости гидродинамическое сопротивление уменьшается в зависимости от числа Деборы. С увеличением этого числа уменьшение становится еще ярче. Этот эффект позволяет оценить гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменения продольной скорости, осредненной по сечению канала, а также при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке, которые позволяют определить диссипации механической энергии среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jons J.R., Walters T.S. *Flow of elastic-viscous liquids in channel under the influence of a periodic pressure gradient*, p. 1, Rheol. Acta. Part 1 **6**, 240–245 (1967).
- [2] Khabakhpasheva E.M., Popov V.I., Kekalov A.N., Mikhailova E.S. *Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **33** (3), 289–304 (1989).

- [3] Casanellas L., Orti'n J. *Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids: Theoretical analysis*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **166**, 1315–1326 (2011).
- [4] Hassan A.Abu-El, El-Maghawru E.M. *Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd-B fluid in, Rheology-New concepic. Appl. and Meth.* Ed by Durairaj R. **6**, 91–106 (2013).
- [5] Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S., Khuzhayorov B.Kh. *Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube*, Fluid Dynamics **56** (2), 189–199 (2021).
- [6] Ding Z., Jian Y. *Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis:a linear analysis*, Fluid. Mech. **6919**, 1–31 (2021).
- [7] Попов Д.Н. *Нестационарные гидромеханические процессы* (Машиностроение, М., 1982).
- [8] Астарита Дж. *Основы гидромеханики ньютоновских жидкостей* (Мир, М., 1978).
- [9] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа* (Дрофа, М., 2003).
- [10] Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н. *Введение в механику несжимаемой жидкости* (Изд-во Пермск. нац. иссл. полит. ун-та, Пермь, 2019).

Куралбай Наврузов

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамида Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,
e-mail: qurol_46@mail.ru

Амирбек Шихназарович Бегжанов

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамида Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,
e-mail: Amirbek_beg@mail.ru

Шахиста Бакберган кизи Шарипова

Ургенчский государственный университет,
ул. Хамида Олимжона, д. 14, г. Ургенч, 220100, Республика Узбекистан,
e-mail: shohistasharipova0@gmail.com

Жура Жумаев

Бухарский государственный университет,
ул. Мухаммад Икбол, д. 11, г. Бухара, 200018, Республика Узбекистан,
e-mail: j.jumaev@buxdu.uz

K. Navruzov, A.Sh. Begjanov, Sh.B. Sharipova, and J. Jumayev

Mathematical modeling of hydrodynamic resistance in a viscolitative flow of a viscoelastic fluid

Abstract. The problems of the oscillatory flow of a viscoelastic fluid in a flat channel for a given harmonic oscillation of the fluid flow rate are solved on the basis of the generalized Maxwell model. The transfer function of the amplitude-phase frequency characteristics is determined. These functions make it possible to evaluate the hydraulic resistance under a given law, the change in the longitudinal velocity averaged over the channel section, as well as during the flow of a viscoelastic fluid in a non-stationary flow, allow, to determine the dissipation of mechanical energy in a non-stationary flow of the medium, which are important in the regulation of hydraulic and pneumatic systems. Since its real part allows, determines the active hydraulic resistance, and the imaginary part is reactive or inductance of the oscillatory flow.

Keywords: viscoelastic fluid, unsteady flow, transfer function, oscillatory flow, amplitude, phase.

Kuralbay Navruzov

*Urganch State University,
14 Hamid Olimjon str., Urganch, 220100 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: qurol_46@mail.ru

Amirbek Shixnazarovich Begjanov

*Urganch State University,
14 Hamid Olimjon str., Urganch, 220100 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: Amirbek_beg@mail.ru

Shokhista Bakbergan qizi Sharipova

*Urganch State University,
14 Hamid Olimjon str., Urganch, 220100 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: shohistasharipova0@gmail.com

Jura Jumayev

*Bukhara State University,
11 Muhammad Ikbol str., Bukhara, 200018 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: j.jumaev@buxdu.uz