E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

5/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

5/2025

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2025, № 5, may

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari boʻyicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari boʻyicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar boʻyicha, **tarix** fanlari boʻyicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab Oʻzbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruriy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
MATEMATIKA * MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА**		

УДК 519.6, 536.25

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Жумаев Жура,
профессор Бухарского государственного университета
j.jumaev@buxdu.uz
Очилов Бехзод Гани угли,
магистрант Бухарского государственного университета
Иззатуллоев Акбарали Эркинович,
магистрант Бухарского государственного университета

Аннотация. *В статье приведено подробное описание встроенной функции Pdesolve для решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов, а также встроенной функции Multigrid для решения эллиптического типа. Приведены виды уравнений, начальные и граничные условия. Показаны вызовы этих встроенных функций непосредственно в математическом пакете, полученные результаты показаны в виде графиков и сделаны соответствующие выводы.*

Ключевые слова: *математические пакеты, встроенные функции, дифференциальные уравнения в частных производных, начальные и граничные условия, вызов функций в математическом пакете.*

MATEMATIK PAKETLARDAN XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHDA FOYDALANISH

Annotatsiya. *Maqolada giperbolik va parabolik tipdagi xususiy differensial tenglamalarni yechish uchun mo'ljallangan Pdesolve funksiyasi, shuningdek, elliptik tenglamalarni yechish uchun mo'ljallangan Multigrid funksiyasi batafsil tavsiflangan. Tenglamalar ko'rinishlari, boshlang'ich va chegaraviy shartlar berilgan. Ushbu o'rnatilgan funksiyalarni matematik paketda to'g'ridan-to'g'ri chaqirilib, natijalar olingan hamda olingan natijalar grafiklar shaklida ko'rsatilgan va tegishli xulosalar chiqarilgan.*

Kalit so'zlar: *matematik paketlar, o'rnatilgan funksiyalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, boshlang'ich va chegaraviy shartlar, matematik paketda funksiyalarni chaqirish.*

APPLICATION OF MATHEMATICAL PACKAGES TO SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *The article provides a detailed description of the built-in function Pdesolve for solving partial differential equations of hyperbolic and parabolic types, as well as the built-in function Multigrid for solving elliptic types. The types of equations, initial and boundary conditions are given. Calls to these built-in functions directly in the mathematical package are shown, the results obtained are shown in the form of graphs, and the corresponding conclusions are made.*

Keywords: *mathematical packages, built-in functions, partial differential equations, initial and boundary conditions, calling functions in a mathematical package.*

Введение. Разные науки естественно-математического цикла имеют задачи, основным способом решения которых является составление и решение дифференциального уравнения. При изучении тех или иных физических, биологических процессов и механических явлений составляются дифференциальные уравнения этих процессов или явлений. В процессе решения таких уравнений выводится функциональный закон описания изучаемого вопроса [1].

На сегодняшний день существует большое количество различных математических пакетов, использование которых упрощает решение самых разнообразных математических задач. Однако не во всех таких программных пакетах есть возможность решения дифференциальных уравнений. Поэтому возникла необходимость провести обзор и сравнительный анализ различных математических пакетов на возможность применения их при решении дифференциальных уравнений. В данной работе рассмотрены популярные математические программы, применяемые для решения дифференциальных уравнений. К ним относят такие математические пакеты, как MATLAB, MathCad и Maple [2-3].

Среди этих пакетов инструмент MathCad – это комплексное программное обеспечение, система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением, отличается лёгкостью использования и возможностью применения для коллективной работы. MathCad имеет простой для использования и интуитивно понятный интерфейс пользователя – ввод формул и данных осуществляется как при помощи клавиатуры, так и с использованием специальной панели встроенных инструментов. Изучение пользования возможностями Mathcad является актуальным для исследователей, магистрантов.

Методика. Встроенная функция pdesolve в MathCAD применяется в рамках вычислительного блока, начинающегося ключевым словом Given, и пригодна для решения различных гиперболических и параболических уравнений. Она предназначена для решения одномерного уравнения (или системы уравнений) в частных производных (того, которое определит пользователь в рамках вычислительного блока Given), зависящего от времени t и пространственной координаты x, имеет целый набор различных аргументов.

Блок Given…Pdesolve предназначен для решения, как одиночных уравнений, так и систем линейных и нелинейных уравнений в частных производных с граничными условиями типа равенств. Входящая в этот блок функция Pdesolve (u, x, xrange, t, trange, [xpts], [tpts]) будет вычислять либо скалярную функцию u(x, t), либо вектор с элементами в виде функций, которые и являются решением в общем случае нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Значения решений, которые получаются этой функцией Mathcad’а и будут являться результатом интерполяции матрицы решений, вычисленных с помощью метода конечных разностей[4-5].

В общем виде обращение к этой функции имеет вид:

$$Pdesolve(u, x, xrange, t, trane, [xpts], [tpts])$$

где аргументами являются:

- u- скалярная функция или вектор функций, который пишется без перечисления аргументов;

- x- пространственная координата;

- $xrange$ - вектор (столбец с 2 элементами для уравнения 2-го порядка), который содержит конкретные значения для x на левой и правой границах;

- t имя переменной времени;

- $trange$ - вектор (столбец с 2 элементами), который содержит граничные значения для t;

- $xpts$ - число точек пространственной дискретизации (необязательный параметр), является числом целого типа;

- $tpts$ - число точек временной дискретизации (необязательный параметр), является числом целого типа.

Таким образом, чтобы решить уравнения или системы уравнений таким блоком Given…Pdesolve нам необходимо записать на экране компьютера:

- оператор Given;
- заданное пользователем уравнение или систему уравнений;
- систему ограничений, если они на задании имеются;
- начальные и граничные условия;
- оператор присваивания искомой функции или вектору искомых функций функции Pdesolve с параметрами;
- отобразить результат решения на экране компьютера.

Имеется отличие при записи производной, которое используется для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, производные для блока Pdesolve нужно задавать в индексной форме записи. То есть первая производная от y по x будет записана как y_x. В MathCADe для записи таких производных в нижнем регистре надо нажать кнопку "." (или "ю" на русской клавиатуре).

Рассмотрим примеры. Пусть нам дано одномерное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t) \quad (1)$$

Здесь w- перемещение. Если обозначим через v-скорость перемещения, тогда уравнение (1) можно представить как систему двух уравнений первого порядка[6-7]

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x,t) = v(x,t), \quad \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t) \quad (2)$$

Теперь рассмотрим пример решения параболического уравнения, заданного в виде:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа (уравнения Пуассона) встречается в технике, такие как для описания полей напряжения и деформаций, в задачах теплопроводности, гидродинамике, аэродинамике, электростатике и др.

Уравнения Пуассона имеет следующий вид [8]:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = -\rho(x,y) \quad (4)$$

Если в этом уравнении правая часть равно нулю, тогда это уравнение называется уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

При решении уравнения Пуассона в MathCADe используется метод конечных разностей, и в случае с этим, это уравнение представляется в виде:

$$a u_{i+1,j} + b u_{i-1,j} + c u_{i,j-1} + d u_{i,j+1} + e u_{i,j} = p_{i,j}$$

Чему будут равны коэффициенты a, b, c, d, e, можно узнать, переходя к конечно-разностному аналогу уравнения Пуассона.

Численное решение этого уравнения в математическом пакете MathCAD ищется в квадратной области, состоящей из (n+1)x(n+1) точек. А граничные условия определяются для всех четырёх сторон этого квадрата. Если эти граничные условия нулевые, тогда мы получим решения уравнения Пуассона.

В этом случае лучше воспользоваться функцией multigrid.

В MathCADe обращение к этой функции имеет вид:

Multigrid(M, Ncycle),

где M – квадратная матрица размером (n+1)x(n+1), задающая правую часть уравнения Пуассона, Ncycle – параметр численного алгоритма, в большинства случаев предлагается взять как Ncycle=2.

Результаты. Рассмотрим реализацию решения уравнения (1) с применением Pdesolve MathCADe:

$$a := 1 \quad T := 2\cdot\pi \quad L := 2$$

Given

$$w(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad v(x,0) = 0 \quad w(0,z) = 0 \quad w(L,z) = 0$$

$$v_z(x,z) = a^2 \cdot w_{xx}(x,z) \qquad w_z(x,z) = v(x,z)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \mathrm{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, z, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$

Составим график перемещения в разных значениях времени (рисунок 1).

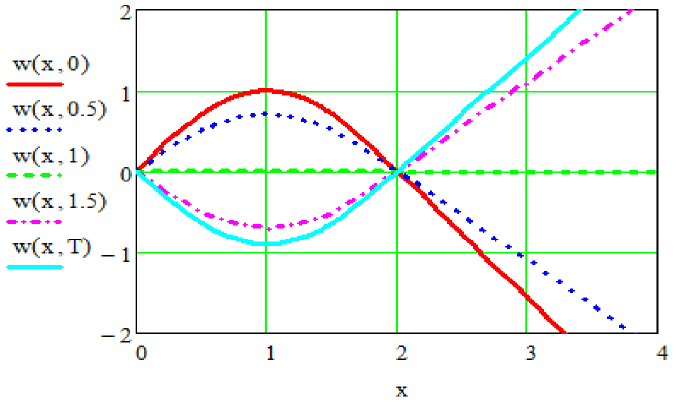

Рисунок 1. График решения волнового уравнения в MathCADe

С помощью функции CreateMesh получим трёхмерный график решения волнового уравнения (рисунок 2).

$$M := \mathrm{CreateMesh}(w, 0, L, 0, T)$$

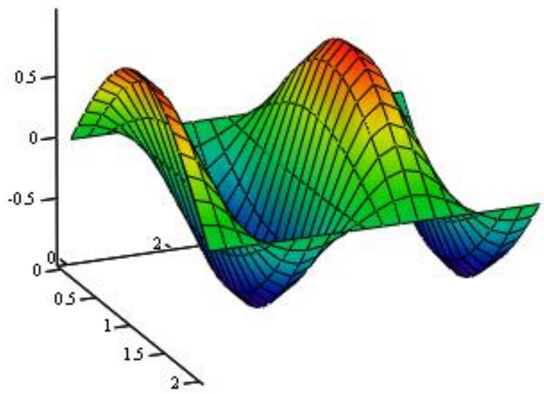

Рисунок 2. Трёхмерный график решения волнового уравнения

С соответствующими начальными и граничными условиями, которые запишем на экране MathCADa:

$$D \equiv 0.01 \quad T := 1 \quad L := 1$$

Given

$$u_t(x,t) = D\cdot u_{xx}(x,t)$$

$$u(x,0) = x \qquad u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

$$u := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$

График решения в нескольких временных слоях получим в виде(рис.3):

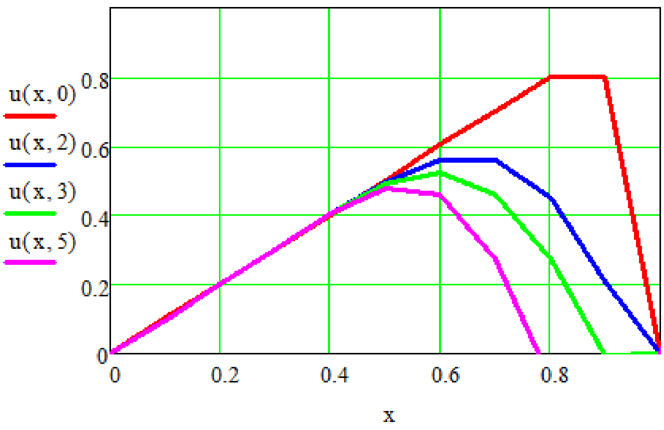

Рисунок 3. Результаты решений на нескольких временных слоях

Трёхмерный график этого решения имеет вид (рисунок 4):

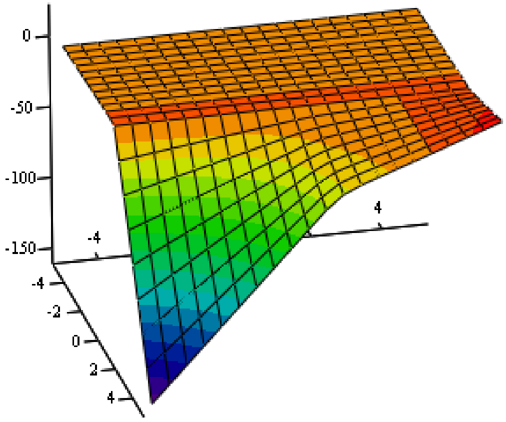

Рисунок 4. Трёхмерный график с соответствующими граничными условиями

Рассмотрим ещё один пример применения функции Pdesolve, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура, и получим графики изменения температуры внутри стержня на разные моменты времени.

$$D \equiv 0.01 \qquad T := 10 \qquad L := 1$$

Given

$$u_t(x,t) = D \cdot u_{xx}(x,t)$$

$$u(x,0) = 0 \qquad u(0,t) = 10 \qquad u(L,t) = 20$$

$$u := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right]$$

Результат показан на рисунке 5.

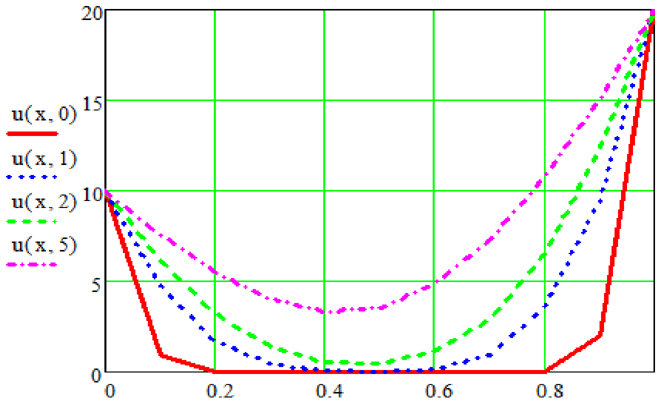

Рисунок 5. График решения уравнения, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура

Трёхмерный график этого же процесса показан на рисунке 6.

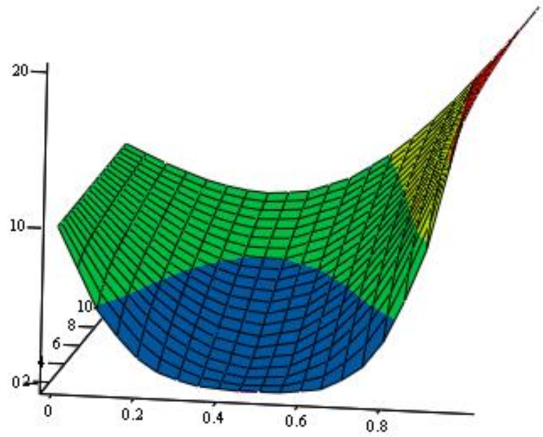

Рисунок 6. Трёхмерный график распределения температуры на стержне

При применении функции Multigrid задание предварительных данных имеет вид:

$M := 0$ Обнуление предыдущих значений

$n := 32$ $\quad M_{n,n} := 0$ Обнуление правых частей уравнения

$M_{4,4} := -200$ $\quad M_{20,12} := 200$ $\quad M_{25,25} := -200$ Задание точечных источников

$F := \mathrm{multigrid}(M, 2)$ Вызов функции

Трёхмерный график результата функции Multigrid имеет вид (рисунок 7):

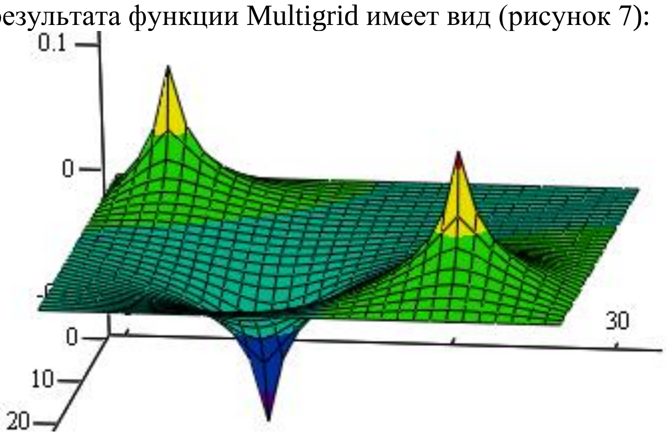

Рисунок 7. Решение уравнения Лапласа с помощью функции Multigrid

Выводы. Таким образом, показаны методы получения решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов с применением встроенной функции Pdesolve, а также встроенной функции Multigrid для решения эллиптического типа. Для записи производных для блока Pdesolve и Multigrid нужно задавать в индексной форме записи. Этими встроенными функциями можно пользоваться при решении прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *MathCAD: решаем основные типы дифференциальных уравнений встроенными функциями // Блог Not URL: http://blog.kislenko.net/show.php?id=1407*
2. *Новиковский Е.А. Работа в системе MathCAD. Учебное пособие.// Барнаул: Типография АлтГТУ, 2013. -114 с.*
3. *Жумаев Ж., Фатиллоева М.Н., Шамсиддинова М.У. Решение задачи теплопроводности на пластинке методом локально-однородной схемы// Universum: технические науки: научн. журн. 2024. 4(121). С.57-60.*
4. *Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ,2007. – 172 с.*
5. *Jumayev J., Fatilloyeva M.N. Manbasiz turli materialli bir o'lchovli sohalarda issiqlik tarqalishini sonli o'rganish// BuxDU ilmiy axboroti, 2023, № 9, 35-43 betlar.*
6. *Abdirashidov A. va b. Parabolik tipdagi tenglamali chegaraviy masalalarni sonli yechish. Uslubiy ko'rsatmalar. – Samarqand: SamDU nashri, 2018. – 72 bet.*
7. *Крайнов А.Ю., Рыжих Ю.Н., Тимохин А.М. Численные методы в задачах теплопереноса: учебно-методическое пособие. Томск. Том. ун-т, 2009. 114 с.*
8. *Пулькина Л.С., Стригун М.В. Две начально-краевые задачи с нелинейными граничными условиями для одномерного гиперболического уравнения // Вестник СамГУ - Естественнонаучная серия. 2011, № 2(83), с.46-55.*