



B.E.HUSENOV

FUNKSIYALAR NAZARIYASI

(KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI
FUNKSIYALAR NAZARIYASI)

1-QISM



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

B.E.HUSENOV

**FUNKSIYALAR NAZARIYASI (KOMPLEKS
O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR
NAZARIYASI)**

1-QISM

O‘quv qo‘llanma

**“Durdona” nashriyoti
Buxoro – 2025**

UO‘K 517.5(075.8)

22.161.5ya73

H 84

Husenov, B.E.

Funksiyalar nazariyasi (kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi) [Matn]:
o‘quv qo‘llanma / B.E. Husenov.-Buxoro: Sadriddin Salim Buxoriy, 2025.-164 b.

KBK 22.161.5ya73

Ushbu o‘quv qo‘llanma “Matematika” bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, Matematikaning Funksiyalar nazariyasi sohasining qismi bo‘lgan “Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” fanining kompleks sonlar, golomorf funksiyalar, Koshi integrali, Teylor va Loran qatorlari, hamda chegirmalar nazariyasiga doir mavzularni o‘z ichiga oladi.

O‘quv qo‘llanma yangi dasturga mos ravishda tayyorlangan. Qo‘llanmada Kompleks sonlar maydoni, kompleks tekislikda soha va egri chiziqlar, kompleks o‘zgaruvchili funksiya, golomorf funksiya, konform akslantirishlar, kompleks o‘zgaruvchili funksiya differensial va integrali, chegirmalarni hisoblash kabi mavzular bayon qilingan.

Muallif:

Husenov Behzod Erkin o‘g‘li, Buxoro Davlat universiteti Matematik analiz kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD).

Taqrizchilar:

E.B.Dilmurodov, Buxoro Davlat universiteti Matematik analiz kafedrası mudiri, fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

A.O.Umarov, Buxoro Davlat Texnika universiteti Aniq fanlar kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 11-noyabrdagi 429-sonli buyrug‘iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan. Ro‘yxatga olish raqami 429-422.

ISBN 978-9910-634-92-5

MUNDARIJA

Soʻz boshi	5
I bob. Kompleks sonlar toʻgʻrisida asosiy tushunchalar	6
§ 1. Kompleks sonlar va ustida amallar	6
§ 2. Kompleks tekislik. Kompleks tekislikda soha va egri chiziqlar	13
§ 3. Kompleks sonlar ketma-ketligi va uning limiti	22
II bob. Kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar, limiti, uzluksizligi va differensialli	29
§ 4. Kompleks oʻzgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi ...	29
§ 5. Kompleks oʻzgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi. Koshi-Riman shartlari	36
§ 6. Golomorf funksiya tushunchasi	40
§ 7. Hosila moduli va argumentining geometrik maʼnosi. Konform akslantirishlar	46
III bob. Konform akslantirishlar	52
§ 8. Kasr-chiziqli funksiyalar va uning xossalari.....	52
§ 9. Jukovski funktsiyasi	57
§ 10. Darajali, koʻrsatkichli va koʻp qiymatli funksiyalar	62
§ 11. Trigonometrik, giperbolik funksiyalar va ularning xossalari .	68
IV bob. Koshi integrali	72
§ 12. Kompleks argumentli funksiyalarning integrali	72
§ 13. Koshi teoremasi.....	77
§ 14. Boshlangʻich funksiya tushunchasi.....	82
§ 15. Koshining integral formulasi	84
V bob. Kompleks analizda qatorlar nazariyasi.....	92
§ 16. Kompleks sonlar tekislikda sonli va funksional qatorlar.....	92
§ 17. Kompleks sonlar tekislikda darajali qatorlar. Abel teoremasi	99
§ 18. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi. Koshi-Adamar formulasi.....	103
§ 19. Golomorf funksiya xossalari	107
VI bob. Kompleks analizda Teylor qatorlari	111
§ 20. Kompleks sonlar tekislikda Teylor qatorlari	111
§ 21. Golomorf funksiya nollari.....	114
§ 22. Yagonalik teoremasi. Veyershtass teoremasi	119
VI bob. Loran qatorlari.....	123
§ 23. Loran qatorlari.....	123

§ 24. Funksiyani Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligi. Maxsus nuqtalar va Loran qatorlari orasidagi bog‘lanishlar	126
§ 25. Maxsus nuqtalar va ularning turlari	135
VII bob. Chegirmalar nazariyasi. Ba’zi tushunchalar	141
§ 26. Chegirmalar va ularni hisoblash.....	141
§ 27. Chegirmalar nazariyasining ba’zi tadbiqlari	146
§ 28. Geometrik prinsiplar.....	151
§ 29. Analitik davom ettirish tushunchasi.....	156
§ 30. Riman teoremasi.....	159
Foydalanilgan adabiyotlar	163

SO‘Z BOSHI

Funksiyalar nazariyasi Matematika muhim yo‘nalishi bo‘lib, u Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan iborat. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursi bakalavriyatning Matematika ta‘lim yo‘nalishi 3-bosqichida o‘qitiladigan asosiy fanlardan biri hisoblanadi. Ushbu kursning birinchi qismida kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchalari, elementar funksiyalar yordamida bajariladigan konform akslantirishlar, kompleks o‘zgaruvchili funsiyaning integrali, golomorf funksiyalar va ularning xossalari, chegirmalar nazariyasi kabi bo‘limlarini qamrab olgan.

Ma‘lumki, hozirgi kunda talabalarga zamonaviy fanlardan bilim berish bilan bir qatorda, mutaxassislik fanlarini yangi pedagogik metod va texnologiyalar asosida o‘qitishga katta e‘tibor qaratilmoqda. Buning natijasida o‘quv reja va fan dasturlariga bir qancha o‘zgartirishlar kiritildi. O‘qitiladigan fanlarning dolzarbligi va mazmuniga hamda talabalarning mustaqil ta‘lim olishlariga alohida urg‘u berilmoqda.

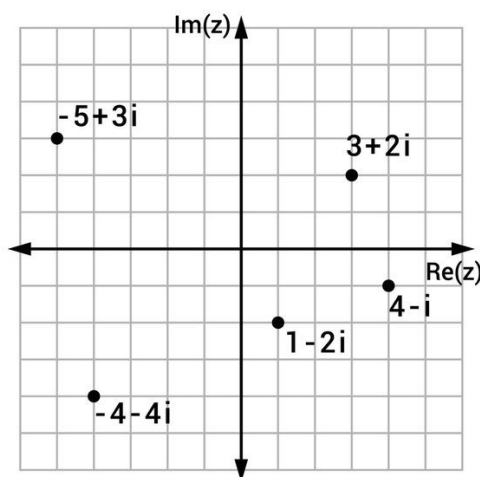
O‘quv qo‘llanma yangi dasturga mos ravishda tayyorlangan bo‘lib, qo‘llanmada kompleks sonlar maydoni, kompleks tekislikda soha va egri chiziqlar, kompleks o‘zgaruvchili funksiya, golomorf funksiya, konform akslantirishlar, kompleks o‘zgaruvchili funksiya differensial va integrali kabi mavzular bayon qilingan. Qo‘llanma ma‘ruza va amaliy mashg‘ulot darslariga mo‘ljallab yozilgan bo‘lib, undan “Matematika” ta‘lim yo‘linalishi talabalariga o‘qitiladigan “Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” kursida foydalanish mumkin. Bundan tashqari, “Amaliy matematika va informatika”, “Mexanika”, hamda boshqa texnik yo‘nalishlar talabalari “Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” kursini o‘rganishda ham foydalanishlari mumkin.

Muallif

I BOB. KOMPLEKS SONLAR TO'G'RISIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

§ 1. Kompleks sonlar va ustida amallar

1. Kompleks son tushunchasi. Aytaylik, $\mathbb{R}^2$ fazoga izomorf bo'lgan $\mathbb{C}$ kompleks sonlar tekisligi berilgan bo'lsin. Bu tekislikning elementlari $z = x + iy$ ko'rinishidagi kompleks son bo'lib, bu yerda $i^2 = -1$ (i – mavhum birlik) ga teng. Shuningdek, kompleks sonning $x = \operatorname{Re} z$ – haqiqiy qismi, $y = \operatorname{Im} z$ – mavhum qismi deyiladi. (Re – lotincha *realis* – “haqiqiy”, Im – lotincha *imaginarins* – “mavhum” degan ma'noni bildiradi.)



1-chizma

1-chizmada $x = \operatorname{Re} z$ – haqiqiy o'q, $iy = i \operatorname{Im} z$ – mavhum o'q deb qaraymiz.

Bizga 2 ta $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Ular ustida quyidagi amallarni qaraymiz:

- 1) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$ – kompleks sonlarning tengligi;
- 2) $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ – kompleks sonlar yig'indisi;
- 3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ – kompleks sonlar ko'paytmasi;
- 4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}$ – kompleks sonlarning nisbati.

Kompleks sonlar yig'indisiga nisbatan quyidagi xossalar o'rinli:

1⁰) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ –kommutativlik;

2⁰) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ –assotsiativlik.

Kompleks sonlar ko‘paytmasiga nisbatan quyidagi xossalar ham o‘rinli:

1⁰) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ –kommutativlik;

2⁰) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ –assotsiativlik;

3⁰) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ –distributivlik.

$z = x + iy$ kompleks sonning *qo‘shmasi* deb $\bar{z} = x - iy$ songa aytiladi va $\bar{\bar{z}}$ kabi belgilanadi. Kompleks sonlarning qo‘shmasi uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1⁰) $\overline{(\bar{z})} = z$;

2⁰) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

3⁰) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

4⁰) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

2. Kompleks sonning moduli, argumenti va trigonometrik shakli. $z = x + iy$ kompleks sonning *moduli* deb $\sqrt{x^2 + y^2}$ songa aytiladi va $|z|$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

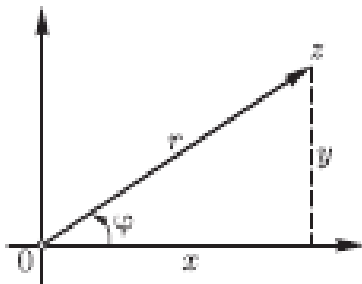
Bundan kelib chiqadiki, $|z| \geq 0$ bo‘ladi, faqat $z = 0$ bo‘lgandagina $|z| = 0$ bo‘ladi. Modul haqiqiy son bo‘lib, bu kompleks sonning absolut qiymatini ifodalaydi. (1) dan quyidagi tengliklarni olamiz:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|;$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2. \quad (2)$$

Kompleks tekislikdagi $z = x + iy$ nuqtaning holati nafaqat Oxy dekart koordinatalar sistemasida emas, balkim (r, φ) qutb koordinatalar sistemasida ham ifodalanadi (2-rasm), bu yerda $r = |z| - 0$ nuqtadan z nuqttagacha bo‘lgan masofa, $\varphi - z$ vektor va haqiqiy o‘qning musbat yo‘nalishi orasidagi burchak. Bu burchak z ($z \neq 0$) kompleks sonning *argumenti* deyiladi va $\varphi = \arg z$ kabi belgilanadi. $z = 0$ son uchun argument aniqlanmagan.



2-rasm

2-rasmdan ko'rinadiki,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (3)$$

Shuningdek, ixtiyoriy $z \neq 0$ kompleks sonni

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4)$$

(4) ko'rinishi kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

Agar $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$ bo'lsa, u holda (3) formuladan quyidagilarni olamiz:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5)$$

Shuningdek, $z = x + iy$ kompleks son argumentini topish uchun (5) tenglamalar sistemasini yechish kerak.

(5) sistema cheksiz ko'p yechimga ega va uning barcha yechimlari $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ formula bilan topiladi, bu yerda φ_0 – (5) sistemaning bitta yechimi. Shunday qilib, kompleks sonning argumenti bir qiymatli aniqlanmas ekan: agar φ_0 – z kompleks sonning argumenti qiymatidan biri bo'lsa, u holda argumentning barcha qiymatlari quyidagi formulada ifodalanadi:

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

(5) sistemadan $z = x + iy$ kompleks son argumenti quyidagi tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz:

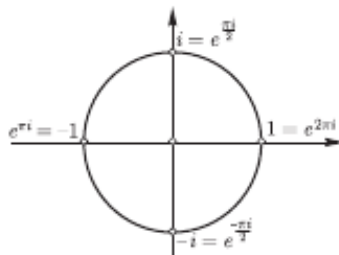
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (7)$$

(5) tenglamalar sistemasi (7) tenglamani barcha ildizlarini ham hosil qilmaydi.

3. Kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi. $|z|=1$, $\varphi = \arg z$ bo'lsin. U holda (4) formuladan $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ bo'ladi. Bu kompleks sonni $e^{i\varphi}$ simvol orqali belgilanadi, ya'ni $e^{i\varphi}$ funksiya uchun ixtiyoriy φ haqiqiy son uchun Eyler formulasi quyidagicha aniqlanadi:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (8)$$

Xususan, 3-rasmdan $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $e^{-\frac{\pi i}{2}} = -i$ bo'ladi:



3-rasm

Ixtiyoriy φ haqiqiy son uchun $|e^{i\varphi}| = 1$ bo'lishini belgilaymiz. (8) da φ ni o'rniga $-\varphi$ ni qo'ysak, u holda quyidagi tenglikni olamiz:

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (9)$$

(8) va (9) tengliklarni taqqoslab ayirib yuborib

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}),$$

Eyler formulasini olamiz, bunda trigonometrik funksiyalar ko'rsatkichli funksiyalar orqali ifodalanadi.

$e^{i\varphi}$ funksiya ko'rsatkichli funksiyalar kabi oddiy xossalarga ega:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (10)$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (11)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Bu yerda (10) tenglikni isbotlaymiz:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &+ i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(11) tenglik ham shunga o'xshash kiritiladi. (12) tenglik induksiya bo'yicha (10) va (11) dan kelib chiqadi.

(8) va (12) dan

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, n \in \mathbb{Z}$$

Muavr formulasini olamiz.

(4) va (8) formulalardan kelib chiqadiki, ixtiyoriy $z \neq 0$ kompleks sonni

$$z = re^{i\varphi} \quad (13)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. (13)

ko'rinishdagi kompleks sonlar uning ko'rsatkichli ko'rinishi deyiladi.

(10) va (11) tengliklar yordamida kompleks sonlarning ko'paytmasini va bo'linmasini ko'rsatkichli ko'rinishda ifodalaymiz:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (14)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (15)$$

(12) tenglikdan formulani qurilishida butun darajada ifodalanadi:

$$z^n = (re^{i\varphi})^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

(14)-(16) formulalardan, xususan (2) formuladan quyidagi argument xossalarini olamiz:

$$\text{agar } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2 \text{ bo'lsa, u holda } \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2); \quad (17)$$

$$\text{agar } \varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2 \text{ bo'lsa, u holda } \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right); \quad (18)$$

$$\text{agar } \varphi = \arg z \text{ bo'lsa, u holda } \varphi_1 - \varphi_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right); \quad (19)$$

Kompleks sonning tenglik qoidasini trigonometrik yoki ko'rsatkichli ko'rinishda ko'rsatamiz: agar $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$ bo'lsa, u holda $z_1 = z_2$ tenglik faqatgina

$$|z_1| = |z_2| \text{ va } \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \quad (20)$$

bo'lgandagina o'rinli bo'ladi, bunda k – biror butun son.

4. Kompleks sondan ildiz chiqarish. Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$z^n = a, \quad (21)$$

bu yerda $a \neq 0$ – kompleks son, n – natural son. $a = \rho e^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$ bo'lsin. U holda

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

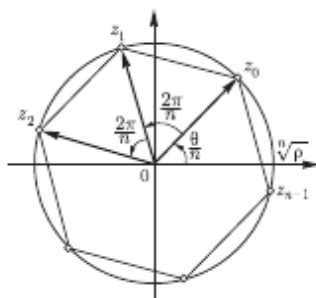
Ushbu tenglamadan (22) qoida yordamida $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2\pi k$ olamiz,

bundan $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$ va

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{(\theta + 2\pi k)i}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

munosabatlarni olamiz.

Bu sonlarni $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ning turli qiymatlarida va $k = n$ da esa sonning o'zini beradi. Kompleks tekislikda bu nuqtalar n – burchakning uchlarida belgilanadi, shuningdek markazi 0 nuqtada, radiusi $\sqrt[n]{\rho}$ aylanani qaraymiz:



4-rasm

Izoh. Agar $z^n = a$ bo'lsa, z kompleks son a sonda olingan n -darajali ildiz $\sqrt[n]{a}$ kabi belgilanadi. Yuqoridan ko'rinadiki, $a \neq 0$ bo'lsa, a sonda n -darajali ildizlari n ta turli xil ildizlar bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1. $\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish: $z_1 = (1+i)(1-2i)$, $z_2 = 3+i$. U holda z_1 ni soddalashtirib: $z_1 = 3-i$, keyin z_1 va z_2 larning nisbatini olsak:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{3+i} = \frac{(3-i)^2}{10} = \frac{8-6i}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i.$$

2. $(12+5i)\left(\frac{3}{13} - \frac{4}{13}i\right)(12-5i)$ ifodani soddalashtiring.

Yechish: Bu ifodani soddalashtirishda 1-qavsga 3-qavsni ko'paytirsak, hisoblash osonlashadi:

$$(12+5i)\left(\frac{3}{13} - \frac{4}{13}i\right)(12-5i) = (12^2 - 5^2i^2)\left(\frac{3}{13} - \frac{4}{13}i\right) = 169\left(\frac{3}{13} - \frac{4}{13}i\right) = 39 - 52i.$$

3. $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$ ni hisoblang.

Yechish: Kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishidan foydalanamiz: $1-i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi i}{3}}$, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ va bularni kasrning berilishiga qo'yib, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4} = \frac{2^6 e^{-2\pi i}}{(\sqrt{2})^4 e^{i\pi}} = -16.$$

4. $z^6 = -8$ tenglamaning barcha ildizlarini toping.

Yechish: (22) formuladan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$z_k = \sqrt[6]{2} e^{\frac{(\pi+2\pi k)i}{6}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

bunda

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_1 &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{2}} = \sqrt{2}i, \\ z_2 &= \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_3 &= -z_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_4 &= -z_1 = -\sqrt{2}i, & z_5 &= -z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollardagi ifodalarni soddalashtiring:

1. a) $\frac{2}{i}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2-i}$; c) $\frac{5}{3-4i}$.
2. a) $\frac{3-i}{3+i}$; b) $\frac{1}{2+i} - \frac{1}{2-i}$; c) $\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$.
3. a) $\frac{1}{2i} - \frac{1}{2+i}$; b) $\frac{(1+3i)(4-i)}{1-3i}$; c) $\frac{1-2i}{(1+2i)(1-i)}$.
4. a) $\frac{1-3i}{1+3i} + \frac{1}{3i}$; b) $\frac{1}{4i} - \frac{1}{5i} + \frac{1}{6i}$; c) $\frac{2i}{\frac{1}{2i} + \frac{2+i}{2-i}}$.
5. a) $\frac{1+i}{2i} - \frac{1}{i}$; b) $\left(\frac{2}{i} - \frac{5}{3+4i}\right)(-4+3i)$; c) $(2+i)(3-4i)(2-i)$.
6. a) $(1+2i)(2-i) + (1-2i)(2+i)$; b) $\frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i}$.
7. Quyidagi determinantlarni hisoblang:
 - a) $\begin{vmatrix} 1+2i & 1-i \\ 3+2i & 2+i \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i & 2-i \\ 2+i & 3 & 4+i \\ 4-i & 4-i & 1-i \end{vmatrix}$.
8. Quyidagi tenglamalar sistemalarini yechimlarini toping:
 - a) $\begin{cases} (2+i)z_1 + (3-i)z_2 = 4+2i, \\ (5-2i)z_1 + (2+3i)z_2 = -5i \end{cases}$; b) $\begin{cases} (2-i)z_1 + (4-i)z_2 = 2-i, \\ (3-i)z_1 + (2-3i)z_2 = 1-i \end{cases}$.
9. Quyidagi kompleks sonlarning moduli va argumentini toping:
 - a) $3i$; b) -2 ; c) $1+i$; d) $-1-i$; e) $2+5i$; f) $2-5i$; g) $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
10. Hisoblang:

a) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; b) $\frac{(1-2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$; c) $(1+\sqrt{3}i)^3$.

11. Quyidagi kompleks sonlarning ildizlarini toping va barcha qiymatlarini tekislikda tasvirlang:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt[6]{-8}$; e) $\sqrt{1-i}$; f) $\sqrt{3+4i}$; g) $\sqrt[3]{-2+2i}$; h) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

12. Quyidagi tenglamalarning barcha ildizlarini toping:

a) $\bar{z} = z^3$; b) $|z| - z = 1 + 2i$; c) $z + |z+1| + i = 0$; d) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$.

13. Quyidagi tenglamalar sistemasining barcha ildizlarini toping:

a) $\begin{cases} |z-2i|=z, \\ |z-i|=|z-1| \end{cases}$; b) $\begin{cases} |z^2-2i|=4, \\ |z+i+1|=|z-i-1| \end{cases}$.

§ 2. Kompleks tekislik. Kompleks tekislikda soha va egri chiziqlar

1. Kompleks tekislik. Ma'lumki, tekislikning barcha nuqtalari to'plami bilan barcha kompleks sonlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bunda barcha haqiqiy sonlarni absissalar o'qini, barcha mavhum sonlarni ordinatalar o'qi ifodalaydi. Shuning uchun ham absissalar o'qini haqiqiy o'q, ordinatalar o'qini esa mavhum o'q deb ataymiz.

$\mathbb{R}^2$ tekislikning har bir nuqtasi kompleks sonni ifodalagani tufayli ushbu tekislikni kompleks tekislik deb ataymiz va $\mathbb{C}$ kabi belgilaymiz.

2. Kompleks tekislikda sohalar. Aytaylik, bizga $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda biror a nuqta hamda $\forall \varepsilon > 0$ berilgan bo'lsin.

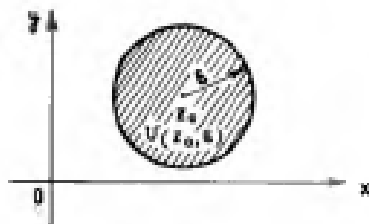
1-ta'rif. Ushbu

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning ε -atrofi deyiladi va $U(a, \varepsilon)$ kabi belgilanadi:

$$U(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \varepsilon\}.$$

Ravshanki, a nuqtaning ε atrofi markazi a nuqtada, radiusi ε bo'lgan ochiq doira bo'ladi:



5-rasm

Bizga biror $D \subset \mathbb{C}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar $a \in D$ nuqtaning shunday ε atrofi $U(a, \varepsilon)$ mavjud bo'lib, bu atrofning barcha nuqtalari shu D to'plamga tegishli bo'lsa $U(a, \varepsilon) \subset D$, u holda a nuqta D to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi.

2-ta'rif. Agar D to'plamning har bir nuqtasi uning ichki nuqtasi bo'lsa, u holda D **ochiq to'plam** deyiladi.

Aytaylik, bizga biror $G \subset \mathbb{C}$ to'plam berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $a \in \mathbb{C}$ nuqtaning ixtiyoriy $U(a, \varepsilon)$ atrofida G to'plamning a nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, a nuqta G to'plamning **limit nuqtasi** deyiladi.

4-ta'rif. Agar G to'plamning barcha limit nuqtalari shu to'plamga tegishli bo'lsa, G **yopiq to'plam** deyiladi.

5-ta'rif. Agar D to'plamning ixtiyoriy $z_1, z_2 \in D$ nuqtalarini birlashtiruvchi shunday uzluksiz $\gamma \subset D$ egri chiziq topilsaki, u D to'plamga tegishli bo'lsa, D **bog'lamli to'plam** deyiladi.

6-ta'rif. Agar D to'plamning ixtiyoriy $z_1, z_2 \in D$ nuqtalarini birlashtiruvchi shunday to'g'ri chiziq $l \subset D$ kesmasi topilsaki, u D to'plamga tegishli bo'lsa, D **qavariq to'plam** deyiladi.

7-ta'rif. Agar D to'plam ochiq hamda bog'lamli to'plam bo'lsa, bunday to'plam **soha** deyiladi.

D sohaning o'ziga tegishli bo'lmagan limit nuqtalaridan tashkil topgan to'plam D sohaning chegarasi deyiladi va ∂D kabi belgilanadi.

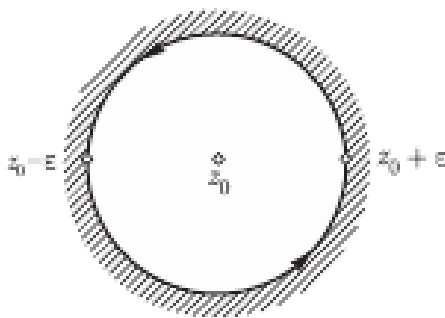
Ushbu $D \cup \partial D$ to'plam D kabi belgilanadi. Demak, $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Agar D sohaning chegarasi ∂D bog'lamli to'plam bo'lsa, D bir bog'lamli, aks holda esa ko'p bog'lamli soha deyiladi.

D soha chegarasi ∂D ning bog'lamli komponentalari soniga qarab D sohani bir bog'lamli, ikki bog'lamli, ..., n bog'lamli soha deb ataymiz.

Soha chegarasining *musbat yo'nalishi* deb, soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalish bo'yicha, *manfiy yo'nalish* deb soat strelkasi bo'yicha harakatlanishni qaraymiz.

1-misol. $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ sohaning chegarasi $z = z_0$ nuqtani va $|z - z_0| = \varepsilon$ aylanani hosil qiladi, soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda harakatlansin. Bu soha: “ z_0 nuqtasi o'yilgan $|z - z_0| < \varepsilon$ doirasi” yoki “ z_0 nuqtaning o'yilgan atrofi” deb nomlanadi.



6-rasm

3. Uzlüksiz egri chiziqlar. Chekli $[\alpha, \beta]$ kesmada 2 ta uzluksiz $\xi(t)$ va $\eta(t)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. U holda bu kesmada uzluksiz kompleks qiymatli haqiqiy o'zgaruvchili funksiya berilgan bo'lsin:

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

Bu holda berilgan uzluksiz egri chiziq

$$z = \sigma(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (1)$$

tenglama ushbu chiziqning *parametrik tenglamasi* deyiladi. Bunda agar $z_1 = \sigma(t_1)$ va $z_2 = \sigma(t_2)$, bu yerda $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, bo'lsa, u holda z_1 nuqtadan tashqari z_2 nuqta (1) egri chiziq kelib chiqadi. Shunday qilib, (1) *egri chiziq kompleks tekislikning tartiblangan nuqtalar to'plamini* hosil qiladi. Boshqacha aytganda, (1) egri chiziq t parametrning o'sish yo'nalishida har doim oriyentirlangan hisoblanadi. *Yo'nalish* z nuqta harakati (1) egri chiziq bo'ylab t parametrning o'sishiga mos bo'lsa, u holda u musbat deyiladi. $a = \sigma(\alpha)$ nuqta (1) egri chiziqning *boshlang'ichi* (yoki boshlang'ich nuqta), $b = \sigma(\beta)$ uning *oxiri* (yoki oxirgi nuqtasi) deyiladi.

γ egri chiziq (1) tenglama bilan berilgan bo'lsin. U holda kompleks tekislikda $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ nuqta biror $M(\gamma)$ to'plamni ifodalaydi. Ushbu to'plam egri chiziqning o'zidan farq qiladi, avvalambor, egri chiziq tartiblangan nuqtalar to'plamini hosil qiladi.

1-misol. $z = \cos t$, $\pi \leq t \leq 2\pi$ egri chiziq $z = -1$ nuqtadan $z = 1$ nuqtaga tomon yo'nalishda oriyentirlangan $[-1, 1]$ kesmada hosil bo'ladi:



7-rasm

2-misol. $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ egri chiziq $|z|=1$, $\text{Im } z \geq 0$ yarim aylanada soat strelkasiga teskari yo'nalishda oriyentirlangan holda hosil bo'ladi:



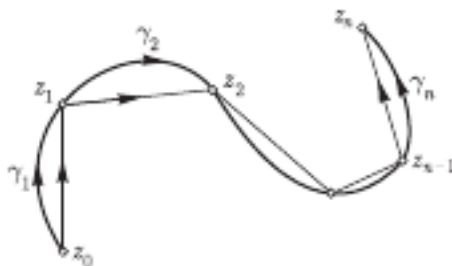
8-rasm

γ egri chizig'ining $M(\gamma)$ to'plamidan ikkinchi farqi shundaki, egri chiziqning turli nuqtalariga tekislikning yagona nuqtasi mos keladi: agar $t_1 \neq t_2$ da $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ bo'lsa, u holda γ chiziqda $z_1 = \sigma(t_1)$ va $z_2 = \sigma(t_2)$ nuqtalar turli xil bo'ladi, ammo tekislikning nuqtalari sifatida ularga mos keladi. Bunday nuqtalar (1) *egri chiziqning o'z-o'zi bilan kesishadigan nuqtalari* deyiladi. Egri chiziqning boshi va oxiri ustma-ust tushishi istisno holga mos keladi: agar $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ bo'lsa, u holda ushbu nuqta (1) egri chiziqning o'z-o'zi bilan kesishadigan hisoblanmaydi.

O'z-o'zi bilan kesishadigan nuqtalarga ega bo'lmagan egri chiziq *oddiy egri chiziq* deyiladi. Boshi va oxiri ustma-ust tushadigan egri chiziq *yopiq egri chiziq* deyiladi.

4. Bo'lakli uzluksiz egri chiziqlar. Berilgan $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ tenglamali γ egri chiziqni qaraymiz. Olingan γ egri chiziqdan qarama-qarshi oriyentatsiyali o'zgaradigan egri chiziqni γ^{-1} orqali belgilanadi. U holda γ^{-1} egri chiziqning tenglamasi $z = \sigma(-t)$, $-\beta \leq t \leq -\alpha$ ko'rinishda belgilanadi. $z_1 = \sigma(t_1)$ nuqtadan $z_2 = \sigma(t_2)$ nuqtaga o'tadigan γ egri chiziqning qismi γ *egri chiziqning yoyi* deyiladi, bunda t_1 va t_2 lar $[\alpha, \beta]$ kesmada yotadi.

$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ va $\gamma_k - \gamma$ egri chiziqning yoyi $z_{k-1} = \sigma(t_{k-1})$ nuqtadan $z_k = \sigma(t_k)$, $k \in \mathbb{N}$ nuqtaga qarab yo'nalgan bo'lsin. U holda $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yoylarga bo'lingan γ egri chiziq yoki $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ yoylardan iborat γ egri chiziqni qaraymiz. Bu faktdan quyidagini belgilaymiz: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$. Uchlari $z_k = \sigma(t_k)$ nuqtalar ketma-ketligida bo'lgan siniq chiziq γ *egri chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziq* quyidagi rasmdagidek tasvirlanadi:



9-rasm

γ egri chiziqqa ichki chizilgan barcha siniq chiziqlar majmuini qaraymiz. Agar bu siniq chiziqlar uzunligi chegaralangan to'plam bo'lsa, u holda γ egri chiziq *to'g'rilanuvchi* deyiladi, bu to'plamning aniq yuqori chegarasi γ egri chiziq uzunligi deyiladi.

Egri chiziq *silliq* deyiladi, agar uning tenglamasini $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa (bu yerda $\xi(t)$ va $\eta(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi), u holda bu kesmada $\sigma(t)$ funksiya $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$ va $\sigma'(t) \neq 0$ uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi, bundan tashqari, agar egri chiziq yopiq bo'lsa, u holda $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$ tenglik bajarilishi kerak.

Agar uni chekli sondagi silliq chiziqlarga bo'laklash mumkin bo'lsa, egri chiziq *bo'lakli-silliq* deyiladi. Bo'lakli-silliq egri chiziqlarga siniq chiziqlarni misol keltirsak bo'ladi.

Bo'lakli-silliq egri chiziq tenglamasini $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ ko'rinishda yozish mumkin, bunda $\sigma(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz va bo'lakli-uzluksiz differensiallanuvchi va bu kesmada $\sigma'(t) \neq 0$. Bundan keyin hamma joyda faqat bunday funksiyalar yordamida bo'lakli-silliq egri chiziqning tenglamasini yozamiz.

Kompleks qiymatli funksiya hosilasi geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: agar γ egri chiziq $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ tenglama berilsa va biror $t_0 \in [\alpha, \beta]$ nuqtada $\sigma'(t) \neq 0$ bo'lsa, u holda γ egri chiziqqa $z_0 = \sigma(t_0)$ nuqtada $\sigma'(t_0)$ urinmaviy vektor bo'ladi. Shuning uchun, bo'lakli-silliq egri chiziqning barcha nuqtalarida urinma o'tkazsa bo'ladi, ehtimol cheklangan sondan bundan tashqari, chekli sondagi nuqtalarda urinmaning o'ng va chap limiti mavjud bo'ladi. Ushbu kritik nuqtalar *egri chiziqning burchak nuqtalari* deb ataladi.

Matematika analiz kursidan ma'lumki, γ bo'lakli-silliqlik egri chiziq quyidagicha ifodalanadi: $\gamma: z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ to'g'rilanuvchi va uning $l(\gamma)$ uzunligi

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(t)| dt$$

formula bilan ifodalanadi, bu yerda $|\sigma'(t)| dt = dl_{\gamma}$ egri chiziqning uzunligi.

Keyinchalik hamma joyda egri chiziqlarni faqat bo'lakli-silliqlik deb qaraymiz.

Endi chegaralanmagan egri chiziq tushunchasini kiritamiz. $t \geq \alpha$ nurda uzluksiz kompleks qiymatli $z = \sigma(t)$ va $\sigma(+\infty) = \infty$ funksiya berilgan bo'lsin, ya'ni $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \infty$. U holda berilgan *chegaralanmagan egri chiziqni*

$$z = \sigma(t), \alpha \leq t < +\infty, \quad (2)$$

tenglama ko'rinishidagi ushbu egri chiziqning *parametrik tenglamasi* deyiladi. (2) chegaralanmagan egri chiziq *bo'lakli-silliqlik* deyiladi, agar har bir chekli $\beta > \alpha$ uchun $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ egri chiziq bo'lakli silliqlik hosil qiladi.

Chegaralanmagan egri chiziq holida ham xuddi shunday ta'riflanadi, ya'ni t parametr $-\infty < t \leq \alpha$ yarim o'qini yoki barcha sonlar o'qini qabul qiladi.

(2) chegaralanmagan egri chiziq tenglamasini $z = \sigma_1(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta_1$ ko'rinishida yozish mumkin, bunda $\tau \rightarrow \beta_1$ da $\sigma(\tau) \rightarrow \infty$ (β_1 - chekli son). Bunday egri chiziq tenglamasini aniqlash uchun faqat (2) ko'rinishda yoziladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. 1) $[-1, 1]$ kesmada berilgan $z = \cos t$, $\pi \leq t \leq 2\pi$ egri chiziq $z = -1$ nuqtadan $z = 1$ nuqtaga yo'nalishda oriyentirlangan:



10-rasm

Bu chiziqning tenglamasini $z = t$, $-1 \leq t \leq 1$ yoki $z = 2t - 1$, $0 \leq t \leq 1$ ko'rinishda yozish mumkin.

2) $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ egri chiziq $|z| = 1$, $\text{Im } z \geq 0$ yarim aylanadan iborat bo'ladi, u soat strelkasiga teskari yo'nalishda oriyentirlangan:



11-rasm

2-misol. $z = e^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$ egri chiziq $|z|=1$ aylanadan iborat bo'ladi, boshlang'ich va oxirgi nuqtasi $z=1$ da bo'lgan soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda oriyentirlangan. Bu oddiy yopiq egri chiziqqa misol bo'ladi:

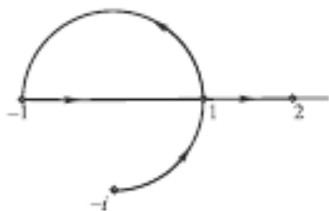


12-rasm

3-misol. $z = \sigma(t)$, $0 \leq t < 2\pi$, bunda

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \\ \frac{3t}{\pi} - 4, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$z=1$ nuqtada o'z-o'zi bilan kesishadigan yopiq bo'lmagan egri chiziqni hosil qiladi:



13-rasm

Bu $z_1 = \sigma(0)$ va $z_2 = \sigma\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ nuqtalarda berilgan egri chiziqda turli xil nuqtalar tekislikda ustma-ust tushadi: $z_1 = z_2 = 1$.

4-misol. $[-1,1]$ kesmada $z = \cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$ egri chiziq ikki xil hosil qilinadi: dastlab $z=-1$ nuqtadan $z=1$ nuqtaga, keyin $z=1$ nuqtadan $z=-1$ nuqtaga qarab yo'naladi:



14-rasm

Bu yopiq egri chiziqqa misol bo'lib, unda $(-1,1)$ intervaldagi har bir nuqtada o'z-o'zi bilan kesishadigan nuqtadan iborat bo'ladi.

5-misol. $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ soha chegarasi $z = z_0$ nuqtadan iborat bo'ladi va $|z - z_0| = \varepsilon$ aylana soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda oriyentirlanadi:



15-rasm

Bu soha quyidagicha nomlanadi: “ z_0 nuqtasi kesilgan $|z - z_0| < \varepsilon$ doira” yoki “ z_0 nuqtaning o'yilgan atrofi”. Bu soha bir bog'lamli emas.

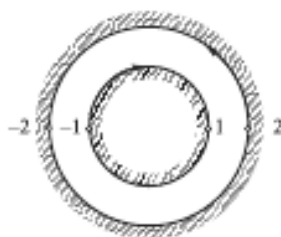
6-misol. $|z| < 1$, $0 < \arg z < 2\pi$ soha 16-rasmda tasvirlangan va quyidagicha nomlanadi: “ $[0,1]$ kesmasi kesilgan $|z| < 1$ doira”.



16-rasm

Bu sohaning chegaraviy Γ egri chizig'i quyidagi qismdan iborat: $[0,1]$ kesmaning pastki chizig'idan $z=0$ nuqtadan $z=1$ nuqttagacha o'tadigan; $|z|=1$ aylana soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda oriyentirlangan. Belgilaymizki, $(0,1]$ intervalning har bir nuqtasi Γ egri chiziqning turli ikki nuqtasini tutashtiradi.

7-misol. $1 < |z| < 2$ sohaning Γ chegarasi Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlardan tuzilgan, bunda $\Gamma_1 - |z|=2$ aylana soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda oriyentirlangan, $\Gamma_2 - |z|=1$ aylana soat strelkasi bo'ylab yo'nalgan:



17-rasm

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi shartlar berilgan soha va egri chiziqlarni tekislikda geometrik o'rnini aniqlang va tasvirlang:

1. $|z - z_0| < R$; $|z - z_0| > R$; $|z - z_0| = R$.
2. $|z - 2| + |z + 2| = 5$. 3. $|z - 2| - |z + 2| > 3$.
4. $|z - z_1| = |z - z_2|$. 5. 1) $\operatorname{Re} z \geq C$; 2) $\operatorname{Im} z < C$.
6. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.
7. $\alpha < \arg z < \beta$; $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ ($-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$).
8. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$. 9. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.
10. $\operatorname{Im} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$; $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$. 11. $|2z| > |1 + z^2|$.
12. Agar $0 < \arg z \leq 2\pi$ bo'lsa, holda $|z| < \arg z$.

Quyidagi tenglamalar bilan berilgan chiziqlar oilasini tekislikda geometrik o'rnini aniqlang va tasvirlang:

13. 1) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = C$; 2) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = C$ ($-\infty < C < \infty$).
14. 1) $\operatorname{Re} z^2 = C$; 2) $\operatorname{Im} z^2 = C$ ($-\infty < C < \infty$).
15. $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \lambda$ ($\lambda > 0$). 16. $\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha$ ($-\pi < \alpha < \pi$).

17. Quyidagi berilgan chiziqlardan koordinata boshigacha bo'lgan eng yaqin va eng uzoq masofalarni toping ($a > 0$):

$$1) \left| z + \frac{1}{z} \right| = a; \quad 2) \left| z + \frac{b}{z} \right| = a.$$

Quyidagi parametrik holda berilgan egri chiziqlarning tekislikda geometrik o'rnini aniqlang va tasvirlang:

18. $z = a + (b - a)t$, $0 \leq t \leq 1$; 19. $z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $R > 0$.
20. $z = t + it^2$, $t \geq 0$; 21. $z = t + it^2$, $t \geq 0$;
22. $z = t + \frac{i}{t}$, $t \geq 1$; 23. $z = 1 + e^{-it}$, $0 \leq t < 2\pi$;
24. $z = t \cos t$, $0 \leq t < 2\pi$; 25. $z = a + \rho e^{-it}$, $0 \leq t < 2\pi$.

§ 3. Kompleks sonlar ketma-ketligi va uning limiti

1. Kompleks sonlar ketma-ketligi haqida tushuncha. Aytaylik, har bir $n \in \mathbb{N}$ natural songa biror qonuniyat asosida $z_n \in \mathbb{C}$ kompleks songa mos qo'yilgan bo'lsa, hosil bo'lgan

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$$

ketma-ketlikka *kompleks sonlar ketma-ketligi* va u $\{z_n\}$ kabi belgilanadi.

1-misol. Masalan, $\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{2n} + i \frac{2}{3n} \right\}$ kompleks sonlar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\frac{1}{2} + i \frac{2}{3}, \frac{1}{4} + i \frac{1}{3}, \frac{1}{6} + i \frac{2}{9}, \dots, \frac{1}{2n} + i \frac{2}{3n}, \dots$$

2. Kompleks sonlar ketma-ketligining limiti. Faraz qilaylik, bizga $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ kompleks sonlar ketma-ketligi va $a \in \mathbb{C}$ berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ uchun

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, a soniga $\{z_n\}$ **ketma-ketlikning limiti** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

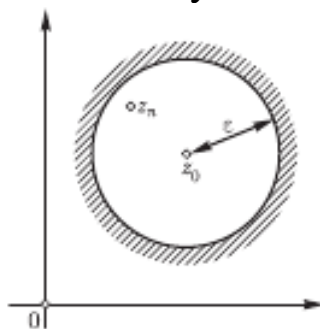
$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

Boshqacha aytganda, chekli a soni $\{z_n\}$ ketma-ketlikni limiti bo'lsa, u holda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0. \quad (2)$$

Shuningdek, agar $\{z_n\}$ ketma-ketlik uchun (2) shart bajarilsa, u holda ushbu ketma-ketlik *yaqinlashuvchi* deyiladi.

(1) tengsizlikni geometrik ma'noda xulosalasak, z_n nuqta markazi a nuqtada radiusi ε bo'lgan doirada yotadi:



1-rasm

Bu doira a nuqta $\{z_n\}$ ketma-ketlikning ε -atrofi deyiladi, ya'ni atrofda tegishli z_n nuqtalar $|z_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Shuning uchun ham, agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofiga ushbu $\{z_n\}$ ketma-ketlikni barcha hadlari tegishli bo'lsa, u holda a nuqta $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligining limiti bo'ladi.

Shunday qilib, 1-ta'rifdan ko'rinadiki, haqiqiy sonlar sonlar ketma-ketligining oddiy ta'rifini kompleks sonlar uchun berdik.

$z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$ bo'lsin. Matematik analiz kursidan quyidagi teorema isbotlanadi:

1-teorema. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ limitning mavjudligidan quyidagi ikkita limitlar mavjud bo'ladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{Re} a = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} a = y_0.$$

Ushbu teoremadan va yaqinlashuvchi haqiqiy sonlar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi kompleks sonlar ketma-ketligi quyidagi xossalarni olamiz:

agar $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = b$, bunda $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$,

u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \zeta_n) = a \pm b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot \zeta_n) = a \cdot b$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b}$, agar $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ da $\zeta_n \neq 0$ bo'ladi.

Matematik analiz kursidan quyidagi teoremani beramiz:

2-teorema (Koshi kriteriyasi). $\{z_n\}$ ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $m > n_0$ lar uchun $|z_n - z_m| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligida shunday $R > 0$ mavjud bo'lib, barcha n nomerlar uchun $|z_n| < R$ bajarilsa, ushbu ketma-ketlik chegaralangan deyiladi. Ketma-ketlikning limiti geometrik interpretatsiyadan ixtiyoriy yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Tasdiqning teskarisi o'rinli emas.

Yaqinlashuvchi kompleks sonlar ketma-ketligi xossalarni ketma-ketliklarni moduli va argumenti xossalari bilan birgalikda ifodalaymiz:

1⁰) $\{z_n\}$ ketma-ketlikning ta'rifidan va $\|z_n\| - \|a\| \leq |z_n - a|$ tengsizlikdan quyidagi xossani olamiz:

agar $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|$ bo'ladi.

2⁰) $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ bo'lsin, bunda $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
 $z_n = r_n \cos \varphi_n + i r_n \sin \varphi_n$ dan va 1-teoremadan $\{z_n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashuvchiligini zaruriy shartini olamiz:

agar $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$ bo'ladi.

3. Kompleks sonlar tekisligini kengaytirilishi. Quyidagi ta'rif yordamida "cheksizlik" tushunchasini kiritamiz:

2-ta'rif. Agar $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \quad (3)$$

bo'lsa, ushbu ketma-ketlik **cheksizga yaqinlashadi** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

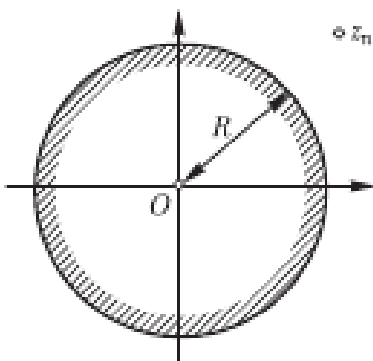
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty. \quad (4)$$

Ushbu ta'rif formal ravishda tegishli haqiqiy sonlar uchun berilgan ta'rifga mos keladi, chunki (4) munosabat, ixtiyoriy $R > 0$ uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ raqam mavjudki, barcha $n > n_0$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$|z_n| > R. \quad (5)$$

(6) tengsizlik geometrik jihatdan z_n nuqta markazi O nuqtada bo'lgan radiusi

R ga teng bo'lgan doiraning tashqarisida joylashishini bildiradi:



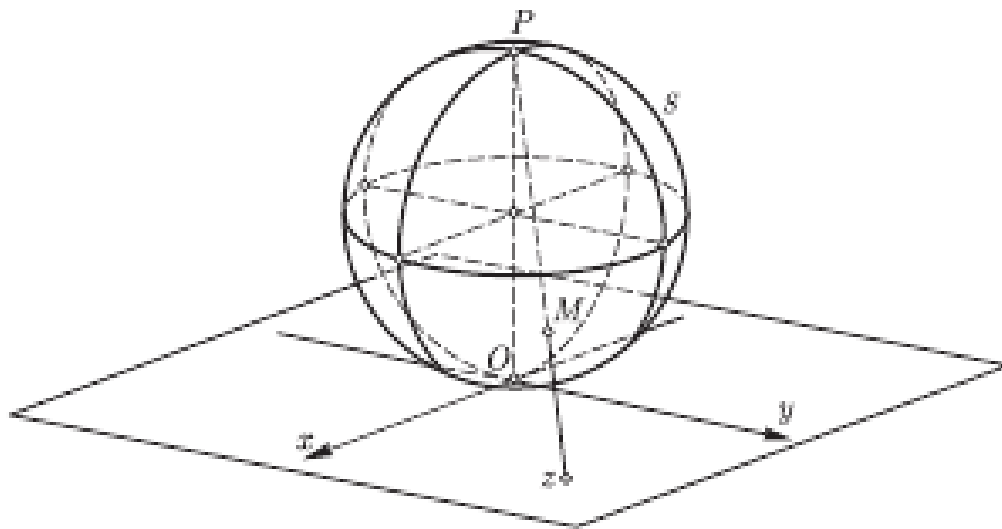
2-rasm

Bu to'plam "*cheksizning atrofi*" deyiladi. Shuningdek, $z = \infty$ nuqta $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limitini hosil qiladi, agar $z = \infty$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi bu ketma-ketlikning chekli sonidagi rad etiladigan nuqtalardan tashqari barcha hadlarini o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, $z = \infty$ "son" belgilanishi bilan cheksiz uzoqlashgan nuqtaga mos keladi. Cheksiz uzoqlashgan nuqta bilan to'ldirilgan kompleks tekislik *kengaytirilgan kompleks tekislik* deb ataladi va $\mathbb{C}$

kabi belgilanadi. Kengaytirilgan kompleks tekislikning geometrik izohini kiritamiz.

S sferani P nuqta orqali S sferaning O nuqtaning diametrial qarama-qarshi nuqtasini qaraymiz. Kompleks tekislikdagi har bir z nuqtasiga sferaning M nuqtasini mos qo'yamiz, unda z bilan P nuqtani tutashtiruvchi nur sferani M nuqtasida kesib o'tadi. Ushbu $\{z_n\}$ ketma-ketlik cheksizga yaqinlashganda S sferaning nuqtalariga ketma-ketligi mos ravishda P nuqtaga yaqinlashadi.



3-rasm

Kengaytirilgan kompleks tekislikning har bir nuqtasi va S sferaning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Ushbu moslik *stereografik proeksiya*, S sfera esa *Riman sferasi* deyiladi.

Kompleks sonni ($z = \infty$ nuqta bilan olinganda) Riman sferasi nuqtalarida tasvirlash mumkin. Bu holda Riman sferasida kompleks songa yaqinlashuvchi ketma-ketliklar nuqtalari Riman sferasidagi nuqtalarga yaqinlashuvchi ketma-ketliklari tasvirlangan. 3-rasmda tasvirlangan fazoda ξ, η, ζ koordinatalar sistemasida $O\xi$ va $O\eta$ o'qlar kompleks tekislikdagi Ox va Oy o'qlar bilan ustma-ust tushadi, $O\zeta$ o'q esa Riman sferasining diametri bo'ylab yo'naladi. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ bo'lsin, $M(z)$ nuqta fazoviy koordinatalari (ξ, η, ζ) kabi bo'ladi:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \quad (6)$$

Kompleks tekislikda esa (x, y) nuqtaning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2 + \eta^2}, \eta = \frac{\eta\zeta}{\xi^2 + \eta^2}. \quad (7)$$

Stereografik proeksiyada aylana aylanaga o'tadi, tekislikda kesishgan egri chiziqlar orasidagi burchak Riman sferasida ushbu egri chiziqlar obrazlari orasidagi burchakka teng bo'ladi.

3-teorema. *Kengaytirilgan kompleks tekislik kompakt bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy kompleks sonlar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik (cheksizga yaqinlashishi mumkin) ajratish mumkin.*

Bu teorema matematik analiz kursida isbotlangan.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $\{z_n\} = \{na^n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bu yerda $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Ketma-ketlikning umumiy hadi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ bo'lishini isbotlang.

Yechish: Aytaylik, $a \neq 0$ bo'lsin. $q = \frac{1}{|a|}$ deb olamiz, u holda $q > 1$

va $q = 1 + \delta$ deb qarash mumkin, bu yerda $\delta > 0$. Bundan Nyuton-Binomi formulasidan foydalanib, $n > 2$ da

$$q^n = (1 + \delta)^n > \frac{n(n-1)}{2} \delta^2 > \frac{n^2 \delta^2}{4}$$

munosabatni olamiz, bundan $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, barcha $n \geq n_0$ larda $n|a|^n = \frac{n}{q^n} < \frac{4}{n\delta^2} < \varepsilon$ munosabat bajariladi, bu yerda $n_0 = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon \delta^2} \right\rceil + 1$.

Shuningdek, $\lim_{n \rightarrow \infty} n|a|^n = 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ bo'ladi.

2-misol. $\mathbb{C}$ kompleks tekislikdagi $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ nuqtaning S Riman sferasidagi koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ nuqtaning Oxy tekislikdagi koordinatalari $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ kabi bo'ladi. Shuningdek, (6) dagi koordinatalarni topish uchun $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ kompleks sonni moduli ham

zarur: $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$. Endi (6) tenglikdan Riman sferasining (ξ, η, ζ) koordinatalarini topamiz:

$$\xi = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \eta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \zeta = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Bundan $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

a parametrning qanday qiymatida quyidagi kompleks sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlang ($n \in \mathbb{N}$):

1. $\{z_n\} = \{a^n\}$; 2. $\{z_n\} = \left\{\frac{a^n}{n}\right\}$; 3. $\{z_n\} = \{na^n\}$; 4. $\{z_n\} = \left\{\frac{a^n}{1+a^n}\right\}$;
5. $\{z_n\} = \{1+a+a^2+\dots+a^n\}$; 6. $\{z_n\} = \{1+a+a^2+\dots+a^n\}$;
7. $\{z_n\} = \left\{\frac{a}{1^2} + \frac{a^2}{2^2} + \dots + \frac{a^n}{n^2}\right\}$.

Quyidagi ketma-ketliklarni yaqinlashuvchiligini ko'rsating va ularning limitini toping:

8. $\{z_n\} = \left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a| < 1$; 9. $\{z_n\} = \left\{\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right\}$, $|a| > 1$;
10. $\{z_n\} = \left\{\frac{a}{1^4} + \frac{a^2}{2^4} + \dots + \frac{a^n}{n^4}\right\}$, $|a| > 1$; 11. $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{n}(1+e^{i\varphi}+\dots+e^{in\varphi})\right\}$,
 $0 < \varphi < 2\pi$;

12. $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}(1-e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}-\dots+(-1)^n e^{in\varphi})\right\}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Quyidagi ketma-ketliklarning limitini toping:

13. $\{z_n\} = \left\{1+i\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$; 14. $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{m} + \frac{i}{n}\right\}$, $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
15. $\{z_n\} = \left\{\frac{2n}{3n-1} + i\frac{4n}{5n+2}\right\}$.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Kompleks sonning ta'rifi, belgilanishi.
2. Kompleks sonlar ustida amallar.
3. Kompleks sonning qo'shmasi tushunchasi.

4. Kompleks sonning moduli, argumenti va trigonometrik shakli.
5. Kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi va Muavr formulasi.
6. Kompleks son dan ildiz chiqarish.
7. a nuqtaning ε –atrofi deganda nimani tushunasiz?
8. Ochiq va yopiq to'plamga ta'rif bering.
9. Bog'lamli va qavariq to'plamga ta'rif bering.
10. Soha deganda nimani tushunasiz?
11. Uzlüksiz egri chiziq tushunchasi.
12. Bo'lakli uzluksiz egri chiziq deganda nimani tushunasiz?
13. Kompleks sonlar ketma-ketligi deganda nimani tushunasiz?
14. Kompleks sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifini bering.
15. Yaqinlashuvchi kompleks sonlar ketma-ketligi uchun Koshi kriteriyasini ayting.
16. Yaqinlashuvchi kompleks sonlar ketma-ketligi xossalari ni keltiring?
17. Cheksiz uzoqlashgan nuqta deganda nimani tushunasiz?
18. Riman sferasini tasvirlang va koordinatalari qanday aniqlanishini keltiring.

II BOB. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR, LIMITI, UZLUKSIZLIGI VA DIFFERENSIALI

§ 4. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya tushunchasi. Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ soha berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $f(z)$ *kompleks o'zgaruvchili funktsiya* D berilgan deyiladi, agar har bir $z \in D$ nuqtani biror f qoida asosida w kompleks songa mos qo'yilsa, ya'ni

$$f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \text{ yoki } w = f(z). \quad (1)$$

Bu ta'rifdan ixtiyoriy funktsiya bir qiymatli bo'ladi (ko'p qiymatli funktsiyalar bilan keyingi bobda tanishamiz). Ba'zida o'zaro bir qiymatlilik xossasini yana boshqacha holda ham qaraymiz. Agar $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ funktsiyada turli xil $z_1, z_2 \in D$ nuqtalar uchun $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik kelib chiqsa, u holda ushbu funktsiya *o'zaro bir qiymatli* yoki *bir yaproqli* deyiladi.

Kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funktsiyani haqiqiy ikki o'zgaruvchili

$$u(z) = u(x, y), v(z) = v(x, y) \quad (2)$$

funktsiyalar tashkil qiladi, bunda $u : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ va $v : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($z = x + iy$ va $f(z) = u(z) + iv(z)$). Agar $f \neq 0$, $f \neq \infty$ bo'lsa, u holda $f(z) = \rho e^{i\psi}$ Eyler almashtirishidan ushbu funktsiyani quyidagi munosabatlar orqali yozishimiz mumkin:

$$\rho = \rho(z), \psi = \psi(z) + 2\pi k, (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

(funktsiyani $f = 0$ va $f = \infty$ nuqtalarda $\rho = 0$ yoki $\rho = \infty$ aniqlanadi, ψ esa ixtiyoriy ravishda o'zgaradi).

2. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning limiti. $f(z)$ funktsiya D sohada aniqlangan, a nuqta D sohaning limit nuqtasi va A kompleks soni berilgan bo'lsin. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning limitini ikkita ekvivalent Koshi va Geyne ta'riflari yordamida beramiz:

2-ta'rif (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta > 0$, $0 < |z - a| < \delta$ ni barcha z lar uchun $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlikni bajarilsa, u holda A kompleks soni $f(z)$ *funktsiyaning z ning a ga intilgandagi Koshi limiti* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \text{ yoki } z \rightarrow a \text{ da } f(z) \rightarrow A.$$

Endi Geyne ta'rifini beramiz:

3-ta'rif (Geyne). Agar a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ kompleks sonlar ketma-ketligi uchun $\{f(z_n)\}$ ketma-ketlik A soniga intilsa, $\exists \delta > 0$, $0 < |z - a| < \delta$ ni barcha z lar uchun $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlikni bajarilsa, u holda A kompleks soni $f(z)$ **funksiyaning z ning a ga intilgandagi Geyne limiti** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A \text{ kelib chiqadi.}$$

1-bob 3-§ dagi 1-teoremadan $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ limitning mavjudligi kelib chiqadi, bunda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, ikki $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y)$ va $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y)$ limitlar mavjudligi ekvivalent, bundan tashqari quyidagi munosabat o'rinli:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Bu yerdan, shuningdek, Geyne bo'yicha funksiya limitining ta'rifidan va yaqinlashuvchi kompleks sonlar ketma-ketliklarining xossalardan funksiyalar limitining quyidagi xossalarni olamiz:

Agar $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ va $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda quyidagi limitlar mavjud bo'ladi:

- $\lim_{z \rightarrow a} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$
- $\lim_{z \rightarrow a} [f(z)g(z)] = AB;$
- $\lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{A}{B}$, bu yerda $B \neq 0$.

3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning nuqtada va sohada uzluksizligi va tekis uzluksizligi.

4-ta'rif. Agar z_0 nuqtaning atrofida aniqlangan $f(z)$ funksiya uchun $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ shart bajarilsa, u holda $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Bu ta'rifdan quyidagi ekvivalent ta'rif kelib chiqadi: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar $(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa.

5-ta'rif. Qaralayotgan sohaning har bir nuqtasida $f(z)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya **sohada uzluksiz** deyiladi.

Shuningdek, uzluksiz funksiyalar superpozitsiyasi ham uzluksiz funksiya bo'ladi: agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz, shuningdek $F(\xi)$ funksiya esa $\xi_0 = f(z_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda murakkab $F(f(z))$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-misol. z , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$ va $|z|$ funksiyalar butun $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda uzluksiz bo'ladi.

2-misol. Kompleks koeffitsiyentli $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ko'phad butun $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda uzluksiz funksiya bo'ladi.

3-misol. Ratsional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(z) \neq 0$ funksiya, bu yerda $P(z)$, $Q(z)$ - ko'phadlar bo'lib, butun $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda uzluksiz funksiya bo'ladi.

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha va unda aniqlangan $w = f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiya berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, D sohaning $|z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall z', z'' \in D$ nuqtalarda

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya D sohada **tekis uzluksiz** deyiladi.

Matematik analizdagi uzluksizlik va tekis uzluksiz orasidagi bog'liqlik Kantor teoremasini kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun keltiramiz:

1-teorema (Kantor teoremasi). Agar $f(z)$ funksiya chegaralangan yopiq to'plamda (kompaktda) uzluksiz bo'lsa, funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi.

4. Funksiyaning egri chiziqda va soha chegarasigacha uzluksizligi. Bizga

$$\gamma: z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (4)$$

egri chiziq hamda $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan ikkita haqiqiy $u(t)$ va $v(t)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Bu holda γ egri chiziqda

$$w = f(t) = u(t) + iv(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (5)$$

funksiya aniqlanadi.

7-ta'rif. (5) funksiya (4) **egri chiziqda uzluksiz** deyiladi, agar $[\alpha, \beta]$ kesmada $u(t)$ va $v(t)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsa, bundan tashqari, agar (1) egri chiziq yopiq bo'lsa, u holda $f(\alpha) = f(\beta)$ tengsizlik bajarilishi kerak.

$\mathbb{C}$ kompleks tekislikning shunday z nuqtalari to'plamini $M(\gamma)$ kabi belgilaymiz, bunda $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Agar γ oddiy egri chiziq bo'lsa, u holda (5) munosabat $M(\gamma)$ da o'zaro bir qiymatli $w = f(z) = f(\sigma(t)) = f_1(t)$ funksiyani aniqlaydi. Umumiy holda, γ egri chiziqning nuqtalari o'z-o'zi bilan kesishganda, (5) funksiya z ning funksiyasi, $M(\gamma)$ da o'zaro bir qiymatli emas deb qarash mumkin. Ammo bu holda (5) ifodaning o'rnida qisqalik uchun $w = f(z) = f(\sigma(t))$ deb yozishimiz mumkin.

Quyidagi tasdiqlar o'rinli:

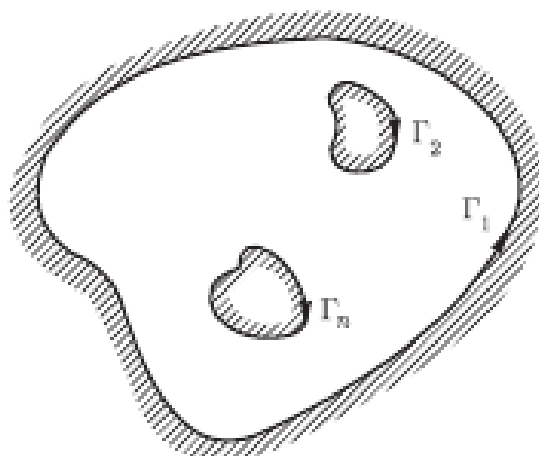
1) Agar $f(z)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsa, u holda ushbu funksiya D sohada yotadigan har bir egri chiziqda uzluksiz bo'ladi.

2) Agar $f(z)$ funksiya D sohadagi har bir egri chiziqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya D sohada uzluksiz bo'ladi.

Chegaralangan $D \subset \mathbb{C}$ sohani qaraylik, uning chegarasi ∂D chekli sondagi oddiy yopiq egri $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$ chiziqlardan iborat bo'lsin. Bu holda

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \dots \cup \Gamma_n.$$

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsin, ya'ni bu sohada $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsin. Va $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiyalar ∂D chegaragacha yanada aniqlash mumkin, bundan funksiyalar $\bar{D}$ da uzluksizligini olamiz. Shunday hollarda doim $f(z)$ funksiyani $\bar{D}$ da $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ifoda bo'yicha aniqlanadi va ushbu funksiyani D sohada uning chegarasi ∂D gacha uzluksiz deyiladi. Belgilaymizki, bu holda $f(z)$ funksiya har bir chegaraviy Γ_k , $k \in \mathbb{N}$ egri chiziqlarda uzluksiz bo'ladi.



1-rasm

8-ta’rif. Chegaralangan D sohada uzluksiz $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasigacha uzluksiz deyiladi, agar D sohani chekli sondagi D_k , $k \in \mathbb{N}$ sohalarga ajratish mumkinki, $f(z)$ funksiya $\overline{D_k}$ larda uzluksiz bo‘lsa.

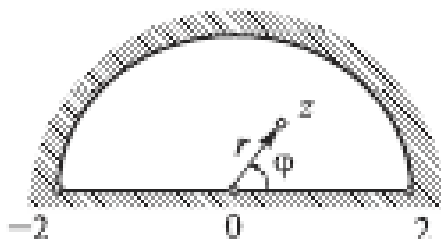
Bundan quyidagi ekvivalent ta’rif kelib chiqadi: $f(z)$ funksiya chegaralangan D sohada uning chegarasigacha uzluksiz bo‘ladi, agar har bir qismaniy $D_1 \subset D$ soha uchun $f(z)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, bu yerda D_1 sohaning chegarasi oddiy egri chiziqlardan iborat.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko‘rsatmalar

1-misol. D – yarimdoira, ya’ni $|z| < 2$, $\text{Im} z > 0$ bo‘lsin (2-rasm). Bu sohada $f(z) = \sqrt{z} e^{\frac{i\varphi}{2}}$ funksiyaning qaraymiz, bu yerda $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Ushbu funksiyaning $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qaraymiz, bunda

$$u(x, y) = \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \cos \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{y}{x} \right),$$

$$v(x, y) = \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \sin \left(\frac{1}{2} \arctg \frac{y}{x} \right).$$



2-rasm

Shuningdek, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar D sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(z)$ funksiya ham bu sohada uzluksiz bo‘ladi. Shartdan

funksiya chegaraviy egri chiziqda formulalar bo'yicha soha ichkarisida o'zining chegaraviy qiymatlari aniqlangan deb faraz qilamiz:

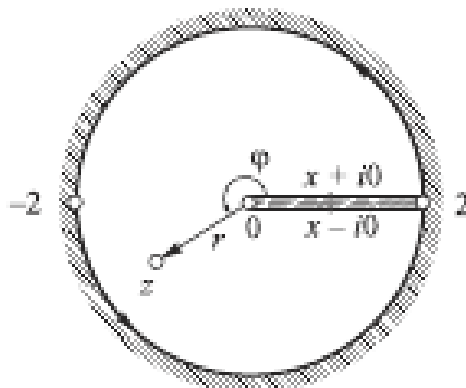
$$0 \leq \varphi \leq \pi \text{ bo'lganda, } f(2e^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}};$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ bo'lganda, } f(x) = \sqrt{x};$$

$$-2 \leq x \leq 0 \text{ bo'lganda, } f(x) = i\sqrt{|x|}.$$

Bundan $f(z)$ funksiya $\bar{D}$ sohada uzluksizligi kelib chiqadi.

2-misol. D -kesilgan doira, ya'ni $|z| < 2$ dan $[0; 2]$ kesmasini chiqarib tashlangan bo'lsin:



(3-rasm)

Bu sohada $f(z) = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}$ funksiyaning qaraymiz, bu yerda $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Shuningdek, 1-misoldan $f(z)$ funksiya D sohada uzluksizligini ko'rsatish mumkin. Biroq, geometrik jihatdan $|z| = r$ va φ qutb burchagi (x, y) bo'yicha uzluksizlikni hosil qiladi. $f(z)$ funksiya D sohaning chegaraviy egri chizig'igacha quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$0 < \varphi < 2\pi \text{ bo'lganda, } f(2e^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

kesmaning yuqori qirg'og'ida

$$0 \leq x \leq 2 \text{ bo'lganda, } f(x + i0) = \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im } z > 0}} f(z) = \sqrt{x},$$

kesmaning quyi qirg'og'ida

$$0 \leq x \leq 2 \text{ bo'lganda, } f(x - i0) = \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ \text{Im } z < 0}} f(z) = -\sqrt{x}.$$

Funksiyaning $\bar{D}$ sohada uzluksizlik hosil qilmasligini olamiz, chunki har xil qirg'oqlar kesmasida u har xil qiymatlarni qabul qiladi: uzluksizlik bo'lishi uchun uni kesish bo'ylab "yopishtirib" bo'lmaydi. Bu holda $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasigacha uzluksiz deyiladi.

2-misoldagi D sohani $[-2;0]$ kesma bo'yicha sohani "kesamiz" (ikkiga bo'lamiz): D_1 –yuqori yarimtekislik, ya'ni $|z| < 2, \operatorname{Im} z > 0$ bo'lsin (2-rasm) va D_2 –yuqori yarimtekislik, ya'ni $|z| < 2, \operatorname{Im} z < 0$ bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiya 1-misoldan $\bar{D}_1$ va $\bar{D}_2$ sohalarda uzluksiz bo'ladi.

3-misol. $f(z) = z^2$ funksiyaning $D = \{z : |z| \leq R\}$ to'plamda tekis uzluksiz bo'lishini, ammo $\mathbb{C}$ da tekis uzluksiz bo'lmasligini isbotlang.

Yechish: 1) D –yopiq, chegaralangan to'plam, $f(z) = z^2$ funksiya har bir $z \in \mathbb{C}$ nuqtada uzluksiz va xususan, D to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda u bu to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi (Kantor teoremasidan).

2) $\forall \delta > 0$ son uchun shunday $\varepsilon_0 > 0$ son mavjudki, $z_i = z_i(\delta) \in \mathbb{C}$ ($i=1,2$) nuqta aniqlangan bo'lib,

$$|z_1 - z_2| < \delta, |f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon_0$$

isbotlash zarur.

Berilgan $\delta > 0$ bo'yicha $n \in \mathbb{N}$ natural sonni tanlaymiz, chunki $\frac{1}{\sqrt{n}} < \delta$ tengsizlik bajariladi va biz zaruriy nuqtalarni qo'yamiz:

$$z_1 = \sqrt{n+1}, z_2 = \sqrt{n}.$$

U holda

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \delta,$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| = 1 = \varepsilon_0$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi funksiyalarni $|z| < 1$ birlik doirada uzluksizlikka tekshiring: 1) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, 2) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Ushbu funksiyalar qaralayotgan sohada tekis uzluksiz bo'ladimi?

2. $f(z) = e^{\frac{1}{|z|}}$ funksiyaning $|z| \leq R$ doirada ($z=0$ dan tashqari) tekis uzluksizlikka tekshiring.

3. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ funksiyaning $|z| \leq R$ doirada ($z=0$ dan tashqari) tekis uzluksizlikka tekshiring.

4. $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ funksiyani $0 < |z| \leq R$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{6}$ sektorda tekis uzluksizlikka tekshiring.

$f(z) = e^{\frac{1}{|z|}}$ funksiyani quyidagi sohalarda ($z=0$ dan tashqari) uzluksizlikka tekshiring:

5. $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ yarimdoira;

6. $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ yarimdoiraning ichki qismi;

7. $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ sektor.

Quyidagi funksiyalarni $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda uzluksizlikka tekshiring:

8. $f(z) = z^4$; 9. $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$; 10. $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$; 11. $f(z) = \frac{|z+2|}{2z^2+z^3}$;

12. $f(z) = \arg(z-1)$; 13. $f(z) = \frac{1}{z^3}$.

Quyidagi funksiyalarni ko'rsatilgan sohalarda tekis uzluksizlikka tekshiring:

14. $f(z) = z^4$, $E = \{|z| \leq 1\}$; 15. $f(z) = z^3$, $E = \mathbb{C}$;

16. $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}$, $E = \{0 < |z| < 1\}$; 17. $f(z) = \frac{1}{2-z}$, $E = \{|z-2| < 1\}$;

18. $f(z) = \frac{1}{4+z^2}$, $E = \{|z| < 2\}$; 19. $f(z) = \frac{1}{z}$, $E = \{r < |z| < +\infty\}$, $r > 0$;

20. $f(z) = \frac{1}{z}$, $E = \{0 < |z| < +\infty\}$.

§ 5. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi. Koshi-Riman shartlari

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi. Faraz qilaylik, $E \subset \mathbb{C}$ ochiq to'plamda aniqlangan va bir qiymatli $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad z, z+h \in E \quad (1)$$

nisbat h - orttirma ixtiyoriy yo‘nalish bo‘ylab nolga intilganda aniq chekli (yagona) limitga ega bo‘lsa, u holda $f(z)$ funksiya $z \in E$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi. Ushbu limitga $f(z)$ **funksiyaning z nuqtadagi hosilasi** deyiladi va $f'(z)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \quad (2)$$

Nuqtada differentsiallanuvchi funksiya shu nuqtada *monogen funksiya* deyiladi. Nuqtada monogen funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo‘ladi.

2-ta’rif. Agar funksiya E ochiq to‘plamning har bir nuqtasida monogen bo‘lsa, u holda bu funksiya E to‘plamda **bir qiymatli golomorf funksiya** deyiladi.

2. Koshi-Riman shartlari. Faraz qilaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ funksiya E ochiq to‘plamda aniqlangan va shu to‘plamning z nuqtasida hosilasi mavjud funksiya (monogen) bo‘lsin.

Bu ikkala funksiya uchun quyidagi Koshi-Riman shartlari o‘rinli bo‘ladi:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

hosil qilinadi.

1-teorema. E ochiq to‘plamda aniqlangan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning E da bir qiymatli analitik bo‘lishi uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu to‘plamning har bir nuqtasida birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib, (3) Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi zarur.

Agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar to‘liq differensialga ega bo‘lsa, $f(z)$ funksiya E ochiq to‘plamning har bir nuqtasida bir qiymatli golomorf bo‘lishi uchun (3) Koshi-Riman shartini bajarilishi yetarli.

3-ta’rif. Haqiqiy o‘zgaruvchili $u(x, y)$ funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lib, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x, y)$ funksiya D sohada **garmonik funksiya** deyiladi.

4-ta'rif. D sohada (3) Koshi-Riman sistemasining qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ garmonik funksiyalar **o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar** deyiladi.

Demak, D sohada bir qiymatli golomorf $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu sohada o'zaro qo'shma garmonik funksiyalardan iborat bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $w = f(z) = z \operatorname{Im} z$ funksiya differensiallanuvchi bo'ladigan barcha nuqtalarni toping, bu yerda $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z = y$, $z = x + iy \in E = \mathbb{C}$.

Yechish: Bu funksiyaning $z = 0$ nuqtadagi orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta w = f(z+h) - f(z) = (z+h) \operatorname{Im}(z+h) - z \operatorname{Im} z = (z+h)(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h) - z \operatorname{Im} z = z \operatorname{Im} z + z \operatorname{Im} h + h \operatorname{Im} z + h \operatorname{Im} h - z \operatorname{Im} z = z \operatorname{Im} h + h \operatorname{Im} z + h \operatorname{Im} h.$$

Bundan (1) dagi nisbat quyidagicha yoziladi

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = z \frac{\operatorname{Im} h}{h} + \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} h$$

va $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Im} h = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z$. Ikkala limit ham $z \in \mathbb{C}$ ning ixtiyoriy qiymatida mavjud. Endi birinchi qo'shiluvchi $z \frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} z \frac{\operatorname{Im} h}{h} = z \frac{\operatorname{Im} h}{h}.$$

Agar $z = 0$ bo'lsa, bu limit mavjud va nolga teng. Demak, funksiya $z = 0$ nuqtada monogen va uning hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(0) = 0$.

Agar $z \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada funksiyaning monogen yoki monogen bo'lmasligi $\frac{\operatorname{Im} h}{h}$ ifodaning limiti mavjud yoki mavjud emasligidan bog'liq bo'ladi. Endi limitni hisoblaymiz.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im} h}{h} = \begin{cases} 0, & h = h_1 + ih_2 \quad h_2 = 0, \quad h_1 \rightarrow 0 \\ \frac{1}{i}, & h = h_1 + ih_2 \quad h_1 = 0, \quad h_2 \rightarrow 0. \end{cases}$$

Bu hisoblashdan ravshanki limit nolga intilish yo'lidan bog'liq ekan. Bu tanlab olingan ikkita yo'l bo'yicha nolga intilganda limitlar har xil (0 va $-i$). Demak, ifoda aniq yagona limitga ega emas, ya'ni limit mavjud emas.

Xulosa. 1-misolda (2) nisbatning limiti faqat va faqat $z = 0$ nuqtadagina mavjud, ya'ni funksiya nol nuqtada monogen va uning hosilasi $f'(0) = 0$. Agar $z \neq 0$ bo'lsa, (2) nisbatning limiti mavjud emas,

ya'ni berilgan funksiya $z \neq 0$ bo'lgan qiymatlarida monogen emas. Funksiya $z = 0$ nuqtada monogen, ya'ni hosilaga ega, ammo bir qiymatli golomorf emas.

2-misol. Ushbu $f(z) = |z|^2 + i[\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z]^2$ funksiyaning $\mathbb{C}$ -differensiallanuvchanlikka tekshiring.

Yechish: Bu funksiya uchun $u(x, y) = |z|^2 = x^2 + y^2$, $v(x, y) = [\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z]^2 = x^2 y^2$ funksiyalar bo'lib, $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiyalar $\mathbb{R}^2$ da differensiallanuvchi. Bu funksiyalar uchun (3) shartni tekshiramiz:

$$\begin{cases} 2x = 2x^2 y, \\ 2y = -2xy^2 \end{cases}$$

tengliklardan ko'rinadiki, Koshi-Riman shartlari faqat $x = 0$, $y = 0$ nuqtada bajariladi. Demak, berilgan funksiya faqat $z = 0$ nuqtada $\mathbb{C}$ -differensiallanuvchi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi funksiyalarning hosilalar qiymatlarini shu hosilalar mavjud bo'lgan nuqtalarda hisoblang.

1. $f(z) = 2z + 1$. 2. $f(z) = z^3$. 3. $f(z) = \frac{1}{z}$. 4. $f(z) = \frac{1}{z+1}$.

5. $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$.

Ushbu funksiyalarni $\mathbb{C}$ -differensiallanuvchilikka tekshiring.

6. $f(z) = \operatorname{Re} z$. 7. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$. 8. $f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 \cdot [\operatorname{Im} z]^2$. 9. $f(z) = |z|^2$.

10. $f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 + i[\operatorname{Im} z]^2$. 11. $f(z) = [\operatorname{Re} z]^2 - i[\operatorname{Im} z]^2$. 12. $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

13. $f(z) = z \operatorname{Im} z$. 14. $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$, ($z = x + iy$).

15. $f(z) = z \operatorname{Im} z$ funksiya uchun $f'(0)$ ni toping.

16. Ushbu $f(z) = z^n$ funksiya uchun Koshi-Riman shartlarining bajarilganligini tekshiring va $(z^n)' = n z^{n-1}$ tenglikni isbotlang.

17. Ushbu $f(z) = \sqrt{|xy|}$ funksiya uchun $z=0$ nuqtada Koshi-Riman shartlari bajarilishini, lekin shu nuqtada funksiya hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

18. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya D sohada differensiallanuvchi, $F(t)$ esa butun haqiqiy o'qda monoton va uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $\operatorname{Re} f(z) = F[\operatorname{Im} f(z)]$ tenglik bajarilsa, $f(z) = \text{const}$ ekanligini isbotlang.

Quyidagi misollardagi funksiyalar uchun $\frac{\partial f}{\partial z}$ va $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ larni hisoblang:
19. $f(z)=[z]$. **20.** $f(z)=e^{-x}(\cos y - i \sin y)$ ($z = x + iy$).

§ 6. Golomorf funksiya tushunchasi

1. Golomorf funksiya tushunchasi. Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ soha va bu sohada aniqlangan $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ $\mathbb{C}$ -differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ nuqtada **golomorf (yoki analitik)** deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada **golomorf** deyiladi.

Odatda, D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $O(D)$ kabi belgilanadi.

3-ta'rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya " ∞ " nuqtada **golomorf** deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\overline{f(z)}$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada **antigolomorf** deyiladi.

Aytaylik, R^2 fazodagi $E \subset R^2$ sohada $F = F(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ega bo'lsin.

5-ta'rif. Agar E sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

tenglik bajarilsa, $F(x, y)$ funksiya E sohada **garmonik funksiya** deyiladi.

Odatda, (1) *Laplas tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama ushbu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (1) tenglikni quyidagicha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

yo'zish mumkin.

2. Antigolomorf funksiya. Quyida golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasidagi munosabatni ifodalaydigan teoremani keltiramiz:

1-teorema. $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning haqiqiy hamda mavhum qismlari $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu sohada garmonik bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada golomorf bo'lsin. unda

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

tenglik bajariladi.

Bu tengliklardan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Agar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $u(x, y)$ funksiyaning garmonik funksiya ekanligini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash $v(x, y)$ funksiyaning garmonik funksiya bo'lishi ko'rsatiladi. *Teorema isbot bo'ladi.*

3. Golomorf funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari qo'shma garmonik funksiyalar sifatida. Faraz qilaylik, bizga biror G sohada bir qiymatli va analitik $w = f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Kelgusida isbot qilamizki, agar funksiya G sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu sohada ixtiyoriy tartibli uzluksiz hosilalarga ega. Bu kompleks funksiyalarning ajoyib xususiyatlaridan biridir. Shu

jumladan, $w = u + iv$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismidan iborat u va v funksiyalarning itiyoriy tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega ekanligi ham kelib chiqadi. Xususan, u va v funksiyalar barcha ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Bundan tashqari ular o'tgan mavzuda isbotlangan Koshi-Riman shartlarini ham qanoatlantiradi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Agar bu tenglikning birinchi shartini x bo'yicha, ikkinchisini y bo'yicha differensiallab, natijalarni qo'shib, keyin esa turli tartibda olingan ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning tengligi uchun yetarli shartlarning bajarilishini e'tiborga olsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3)$$

tenglikni olamiz.

Yuqoridagi kabi (2) tenglikning birinchi shartini y bo'yicha, ikkinchisini x bo'yicha differensiallab, natijalarni ayiramiz va yana aralash hosilalarning tengligidan foydalansak, u holda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

6-ta'rif. Agar ikki o'zgaruvchili haqiqiy $\varphi(x, y)$ funksiya G sohada ikki marta uzluksiz differensillanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, ya'ni $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ munosabat bajarilsa, u holda $\varphi(x, y)$ funksiya G sohada garmonik funksiya deyiladi.

Bu ta'rifdan va (2), (3) munosabatlardan kelib chiqadiki, G sohada analitik $w = f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisientlari u va v funksiyalar shu G sohada garmonik funksiyalardan iborat ekan.

7-ta'rif. Agar u va v funksiyalar o'zaro Koshi-Riman shartlari bilan bog'langan bo'lsa, u holda ularni o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deb ataymiz.

4. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida golomorf funksiyaning qurish. Faraz qilaylik, bizga biror bir bog'lamli chekli G sohada garmonik bo'lgan $\varphi(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u

shu sohada qandaydir analitik $w = f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismidan iborat bo'lsin: $\varphi(x, y) = u(x, y)$, $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Endi biz $f(z)$ funksiyaning tiklash masalasini qaraymiz. Bu masalani yechish uchun $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi $v(x, y)$ funksiyaning izlash kerak: $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = ?$ Koshi-Riman shartlaridan foydalansak, $v(x, y)$ ning xususiy hosilalarini berilgan $u(x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalari bilan ifodalash mumkin:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y).$$

Endi o'z navbatida $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiylar ham xususiy hosilalarga ega va bu funksiylar differensiallanuvchi funksiylardan iborat:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{va} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Bu yerdan $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglikning bajarilishini olamiz. U holda quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ larning $\frac{\partial P}{\partial y}$ va $\frac{\partial Q}{\partial x}$ xususiy hosilalari bilan birgalikda tekislikdagi G sohada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

egri chiziqli integralning ixtiyoriy (x_0, y_0) va (x, y) nuqtalarni tutashtiruvchi chiziqdan bog'liq bo'lmasligi uchun $\forall z \in G$ uchun $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tenglikning bajarilishi zarur va G soha bir bog'lamli bo'lganda esa yetarlidir.

Boshlang'ich nuqtani o'zgarmas deb olib, oxirgi nuqtani o'zgaruvchi deb qarasak, $\psi(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan bir qiymatli funksiya iborat bo'lib qoladi. Ikkinchi tomondan $\psi(x, y)$ funksiya xususiy hosilalariga P ning mos xususiy hosilalariga G sohada aynan teng:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = P(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

U holda u va v funksiyalar faqat o'zgarimas son bilan farq qiladi. Chunki ularning ayirmasining xususiy hosilalari aynan nolga teng. Shunday qilib,

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C.$$

Endi $u(x, y)$, $v(x, y)$ funksiyalar ikki o'zgaruvchili funksiyalar sifatida G sohada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, Koshi-Riman shartlarini qanoatlantiradi. Demak, kompleks funksiya differensiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartlari bajariladi. Shuning uchun $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya G sohada golomorf funksiya. Shunday qilib, analitik $f(z)$ funksiyani uning berilgan garmonik $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ qismi bo'yicha

$$f(z) = u(x, y) + i \left[\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C \right]. \quad (5)$$

ko'rinishda tiklash (qurish) mumkin ekan. Bu berilgan haqiqiy qismi bo'yicha analitik funksiyani tiklash formulasidir.

Shunga o'xshash $w = f(z)$ funksiyaning berilgan garmonik mavhum $v(x, y)$ qismi bo'yicha ham golomorf $f(z) = u + iv$ funksiyani tiklash mumkin.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu

$$f(z) = z^2$$

funksiyaning hosilasi mavjudligini tekshiring.

Yechish. Qaralayotgan

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$$

funksiya uchun $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = -2xy$ bo'lib, (2) tengliklar $(0, 0)$ nuqtadan boshqa hech bir nuqtada bajarilmaydi. Demak, $f(z) = z^2$ funksiya $z_0 \neq 0$ nuqtalarda hosilaga ega emas, $z_0 \neq 0$ nuqtaga esa uning hosilasi mavjud va $f'(0) = 0$.

2-misol. $u(x, y) = xy$ berilgan bo'lsa, u holda $w = f(z) = u + iv$ golomorf funksiyani tiklang.

Yechish. Avvalo bu funksiyaning butun $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda garmonik ekanligini ko'rsatamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Demak, $u(x, y)$ funksiya $\mathbb{C}$ da garmonik ekan. G soha bir bog‘lamli va chekli bo‘lganligi uchun (3) formulaga ko‘ra

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C.$$

$v(x, y)$ ni ifodalovchi integralning qiymati chiziqning shaklidan bog‘liq bo‘lmaganligi uchun integrallash chizig‘i sifatida chizmada ko‘rsatilgan chiziqni olamiz. U holda

$$v(x, y) = \int_0^x -x dx + \int_0^y y dy + C = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C.$$

Bundan

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) + iC.$$

Agar bu yerda $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ekanligini hisobga olib, x va y larning o‘rniga qo‘yib, hosil bo‘lgan ifodani soddalashtirsak, u holda

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i} - \frac{i}{2} \frac{((z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2)}{4} + iC = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i} - \frac{i}{2} \left(\frac{z^2 + 2z\bar{z}}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{z}^2 + z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} \right) + iC = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i} - \frac{i}{4}(z^2 + \bar{z}^2) + iC = -\frac{i}{2}z^2 + iC. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarda berilgan $f(z)$ funksiyalari uchun shunday a, b, c o‘zgarmaslarni topingki, natijada $f(z)$ funksiyalar golomorf bo‘lsin.

1. $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$, 2. $f(z) = x^2 - ay^2 + ibxy$,

3. $f(z) = \cos(chy + ash) + i \sin(chy + bsh)$.

4. Ushbu $f(z) = |x^2 - y^2| + 2ixy$ funksiya golomorf bo‘lgan sohalarni toping.

5. Ushbu $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ funksiya golomorf bo‘lgan sohani toping.

6. Agar $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada antigolomorf bo‘lsa, u holda shu nuqtada $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ shartni bajarishini isbotlang.

Golomorf $f(z)$ funksiyalarning o‘rinli ekanligini isbotlang.

7. $f(z) = |z|^p$, 8. $f(z) = \ln|z - a|$, 9. $f(z) = \arctg \frac{1+|z|}{1-|z|}$.

Golomorf $f(z)$ funksiya uchun quyidagi tengliklar o'rinli ekanligini isbotlang.

10. $\frac{\partial f}{\partial z}(|f(z)|) = \frac{1}{2}|f(z)| \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$, 11. $\frac{\partial}{\partial z}[Re f(z)] = \frac{1}{2}f'(z)$,

12. $\frac{\partial}{\partial z}[Im f(z)] = \frac{1}{2i}f'(z)$.

Haqiqiy yoki mavhum qismlari quyidagi misollardagi tengliklar yordamida berilgan golomorf $f(z)=u(x,y)+iv(xy)$ funksiya mavjudmi? Mavjud bo'lsa uni toping.

13. $u(x,y)=x^2 - y^2$, 14. $v(x,y) = 3x^2y - y^3$, 15. $v(x,y) = 2xy + 2x - 1$,

16. $v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

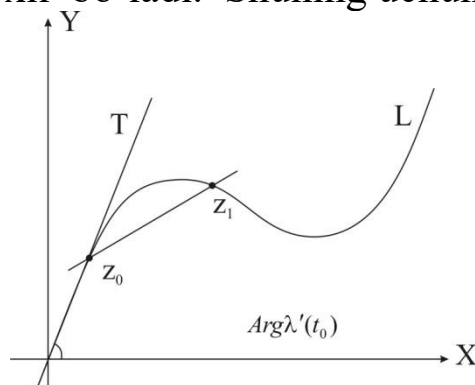
Quyidagi misollarda berilgan ko'rinishdagi o'zgarmasdan farqli garmonik funksiyalar mavjudmi? Mavjud bo'lsa ularni toping:

17. $u = \varphi(x)$, 18. $u = \varphi(ax + by)$ (a va b lar haqiqiy sonlar), 19. $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 20. $u = \varphi(xy)$.

§ 7. Hosila moduli va argumentining geometrik ma'nosi. Konform akslantirishlar

1. Hosila argumenti va modulining geometrik ma'nosi. Dastlab sonlar o'qining biror $E=[\alpha, \beta]$ kesmada $z = \lambda(t)$ uzluksiz kompleks funksiyaning qaraymiz. Ma'lumki, bu funksiya tekislikda biror L uzluksiz egri chiziqni ifodalaydi. Faraz qilaylik, qandaydir $t_0 \in E$ nuqtada E to'plam bo'yicha $\lambda'(t_0)$ hosila mavjud va $\lambda'(t_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda L chiziqning t_0 ga mos $z_0 = \lambda(t_0)$ nuqtasida T urinma mavjud va haqiqiy o'qning musbat qismi hamda T urinma orasidagi burchak $Arg \lambda'(t_0)$ ga teng ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $z_0 = \lambda(t_0)$ va $z_1 = \lambda(t_1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesuvchi o'tkazamiz. $\lambda'(t_0) \neq 0$ dan kelib chiqadiki, $z_1 = \lambda(t_1)$ nuqtani $z_0 = \lambda(t_0)$ nuqtadan farqli qilib tanlash mumkin. Agar bunga teskarisini faraz qilsak, u holda, shunaqa $\{t_n\} \rightarrow t_0$ ketma-ketlik topiladiki, $\forall n \in \mathbb{N}$ lar

uchun $\lambda(t_{1_n}) - \lambda(t_0) = 0$ bajariladi. U holda, $\lambda'(t_0) = \lim_{t_{1_n} \rightarrow t_0} \frac{\lambda(t_{1_n}) - \lambda(t_0)}{t_{1_n} - t_0} = 0$ bo'ladi. Bu esa $\lambda'(t_0) \neq 0$ shartga ziddir, ya'ni farazimiz noto'g'ri. U holda yuqorida tavsiflangan kesuvchining yo'nalishi $\frac{(z_1 - z_0)}{t_1 - t_0}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi. Shuning uchun



1-rasm

$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \lambda'(t_0) \neq 0$ ning mavjudligidan $\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \text{Arg} \left(\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} \right) = \text{Arg} \lambda'(t_0)$ ning

mavjudligi yoki kesuvchilar limit holatining mavjudligi, ya'ni L chiziqning z_0 nuqtasida o'tkaziladigan T urinmaning mavjudligi va Ox o'qining musbat qismi hamda T urinma orasidagi burchakning $\text{Arg} \lambda'(t_0)$ ga tengligi kelib chiqadi (1-rasm).

Faraz qilaylik, biror $z_0 \in G$ nuqtada $f'(z_0)$ hosila mavjud va $f'(z_0) \neq 0$ bo'lsin. z_0 nuqtadan biror $L: z = \lambda(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta, \lambda(\alpha) = z_0$) egri chiziq o'tkazamizki, $\lambda'(t_0)$ mavjud va $\lambda'(t_0) \neq 0$ bo'lsin. L chiziqning $w = f(z)$ funksiya orqali akslantirishdagi obrazi $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi $\Gamma: w = f[\lambda(t)] = \mu(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta, \mu(t_0) = f(z_0) = w_0$) tenglama orqali ifodalanadigan chiziq bo'lsin. U holda $\mu'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \neq 0$ bo'lib, G egri chiziq w_0 nuqtada urinmaga ega va bu urinma hamda haqiqiy o'qning musbat qismi orasidagi burchak

$$\text{Arg} \mu'(t_0) = \text{Arg}[\lambda'(t_0) f'(z_0)] = \text{Arg} \lambda'(t_0) + \text{Arg} f'(z_0)$$

ga teng. Bu yerdan ko'rinadiki, L chiziqni $w = f(z)$ funksiya orqali akslantirishdagi G ning w_0 nuqtasidagi urinmani hosil qilish uchun L chiziqning z_0 nuqtasidagi urinmani L chiziqdan bog'liq bo'lmagan $\text{Arg} f'(z_0)$ burchakka burish kerak ekan. Hosila

argumentining geometrik ma'nosi ana shundan iborat. Shuning uchun z_0 nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy ikki chiziq orasidagi burchak $w = f(z)$ ($f'(z_0) \neq 0$) funksiya orqali akslantirishda ham qiymat va ham yo'nalish jihatdan saqlanadi.

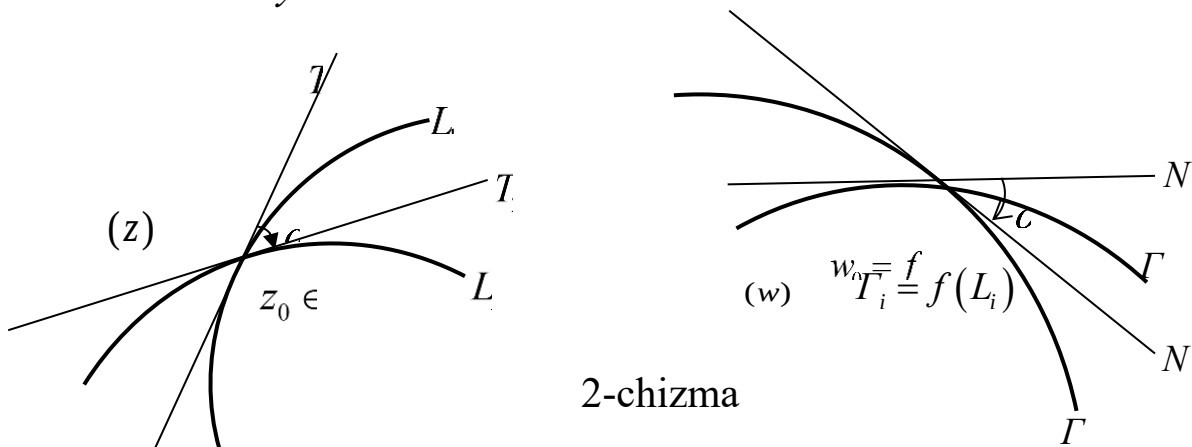
Tushunarliki, $|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$ bo'lib, bu yerdan hosila

modulining geometrik ma'nosi $w = f(z)$ funksiya orqali akslantirishda z_0 nuqtadan chiquvchi vektorlar cho'zilish koeffitsientlari (agar $|f'(z_0)| > 1$ bo'lsa) va yoki qisilish koeffitsientlari (agar $|f'(z_0)| < 1$ bo'lsa) ning $z \rightarrow z_0$ dagi limitidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

2. Konform akslantirish tushunchasi. 1-ta'rif. Berilgan nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy ikki chiziq orasidagi burchakni saqlovchi va shu nuqtada o'zgarmas cho'zilishni ta'minlovchi uzluksiz funksiya orqali bajariladigan akslantirish shu nuqtada **konform akslantirish** deyiladi.

2-ta'rif. Agar bunday akslantirish faqat burchaklar emas, balki ularni hisoblash yo'nalishi ham saqlansa, u holda bunday akslantirish qaralayotgan nuqtada **birinchi tur konform akslantirish** deyiladi.

3-ta'rif. Agar bunday akslantirishda burchaklar saqlanib, ularni hisoblash yo'nalishi teskariga o'zgarsa, u holda bunday akslantirish qaralayotgan nuqtada **ikkinchi tur konform akslantirish** deyiladi.



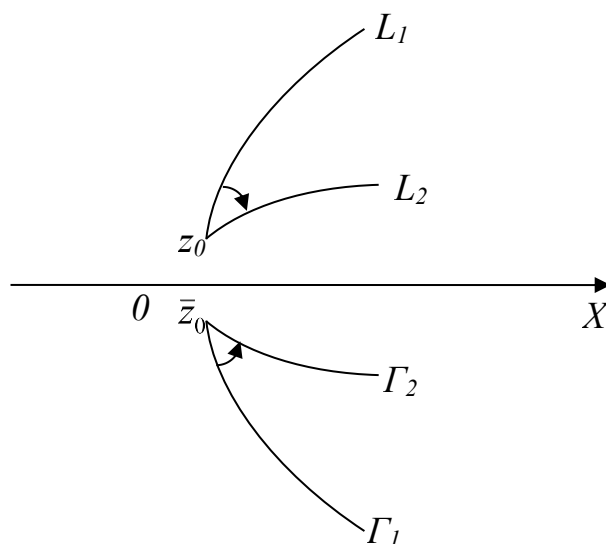
Ushbu mavzuning 1- va 2-punktalaridan kelib chiqadiki, biror G sohada regulyar $w = f(z)$ funksiya orqali bajariladigan akslantirish

shu sohaning har bir $f'(z) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi z nuqtasida birinchi tur konform akslantirishdan iboratdir.

Ikkinchi tur konform akslantirishga $f(z) = \bar{z}$ funksiyani oddiy misol sifatida ko'rsatish mumkin (3-rasm).

Ikkinchi tur konform akslantirishga umumiy misol sifatida $f'(z) \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi golomorf funksiyaga qo'shma $w = \overline{f(z)}$ funksiya bajaradigan akslantirishni olish mumkin.

4-ta'rif. Agar $f(z)$ akslantirish G sohada bir yaproqli va uning barcha nuqtalarida konform bo'lsa, u holda u G sohada **konform akslantirish** deyiladi.



3-rasm

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Faraz qilaylik $\gamma - i$ nuqtadan chiquvchi $\arg(z - i) = \varphi$ nur bo'lsin. akslantirish uchun i nuqtadagi cho'zilish koeffitsiyenti $R(\varphi)$ va burilish burchagi $\alpha(\varphi)$ ni toping.

$$w = \frac{z-i}{z+i} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \text{ uchun}$$

$$w'(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)' = \frac{2i}{(z+i)^2} \Rightarrow w'(i) = -\frac{i}{2}.$$

$$\text{Demak, } R(\varphi) = |w'(i)| = \left| -\frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad \text{va} \quad \alpha(\varphi) = \arg w'(i) = \arg \left(-\frac{i}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Bu misolni Maple matematik paketida yechishni ko'rsatamiz:

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z+i} - \frac{z-i}{(z+i)^2}$$

$$a(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{z-i}{(z+i)^2}, \Rightarrow a(i) = -\frac{1}{2}i.$$

$$k = |a(i)|, \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = \arg|a(i)|, \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2}\pi.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Faraz qilaylik $\gamma - z_0$ nuqtadan chiquvchi $\arg(z-z_0)=\varphi$ nur bo'lsin. Quyidagi misollar uchun z_0 nuqtadagi cho'zilish koeffitsienti $R(\varphi)$ va burilish burchagi $\alpha(\varphi)$ ni toping.

1. $w = \bar{z}^2, z_0 = i.$

2. $w = 2z + i\bar{z}^2, z_0 = 0.$

3. $w = z^2 + 2z, z_0 = i.$

4. $w = ie^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y), z_0 = 0.$

5. $w = \frac{1-iz}{1+iz}, z_0 = -i.$

Quyidagi misollarda berilgan $w=f(z)$ akslantirishlar natijasida tekislikning qaysi qismi siqiladi, qaysi qismi esa cho'ziladi?

6. $w = e^x(\cos y + i \sin y),$

7. $w = z^2 - 4z,$

8. $w = \frac{1}{z}.$

Shunday nuqtalar to'plamini topingki, shu nuqtalarda quyidagi misollardagi akslantirishlarning cho'zilish koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lsin.

9. $w = z^3,$

10. $w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1, c \neq 0.$

Shunday nuqtalar to'plamini topingki quyidagi misollardagi akslantirishlarning shu nuqtalardagi burilish burchagi 0 ga teng bo'lsin.

11. $w = iz^2,$

12. $w = \frac{i}{z},$

13. Ushbu $w = 2z$ akslantirishni konformlikka tekshiring.

14. $w = (z - 2)^2$ akslantirishni konformlikka tekshiring.

15. $f(z) = \frac{1}{z-2}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtada konformligini isbotlang.

Quyidagi misollardagi funksiyalarni berilgan E sohada konformlikka tekshiring.

16. $f(z) = z + \frac{1}{z}$, $E = \{|z| < 1\}$,

17. $f(z) = z^2$, $E = \{3 < |z + 2| < 4, 0 < \arg(z + 2) < \frac{3\pi}{2}\}$,

18. $f(z) = e^x(\cos y + \sin y)$, $E = \{|z| < 4\}$,

19. $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$, $E = \{|z| < 1\}$,

20. $f(z) = z + \frac{1}{z}$, $E = \{|z - i| < \sqrt{2}\}$.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya deganda nimani tushunasiz?
2. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limiti ta'rifini bering.
3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning nuqtada va sohada uzluksizligi va tekis uzluksizligi ta'riflarini bering.
4. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchanligi ta'rifini bering.
5. Koshi-Riman shartlarini keltiring.
6. Golomorf funksiya ta'rifini keltiring.
7. Antigolomorf funksiya ta'rifini keltiring.
8. Berilgan garmonik haqiqiy yoki mavhum qismi yordamida golomorf funksiyaning qurishni tushuntiring.
9. Hosila argumenti va modulining geometrik ma'nosini tushuntiring.
10. Konform akslantirish ta'rifini bering.

III BOB. KONFORM AKSLANTIRISHLAR

§ 8. Kasr-chiziqli funksiyalar va uning xossalari

1. Chiziqli funksiyalar va ularning xossalari. 1-ta'rif. Ushbu

$$w = az + b \quad (1)$$

ko'rinishidagi funksiya **chiziqli funksiya (chiziqli akslantirish)** deyiladi, bunda a, b lar o'zgarmas kompleks sonlar va $a \neq 0$.

Bu funksiya $\mathbb{C}_z$ to'plamda aniqlangan, unga teskari funksiyalar ham chiziqli funksiya bo'lib, u quyidagi

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} \quad (2)$$

ko'rinishga ega.

(1) va (2) akslantirishlardan $\mathbb{C}_z$ va $\mathbb{C}_w$ tekislik nuqtalari o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligi kelib chiqadi. Bunda $z = \infty$ da $w = \infty$ bo'ladi va aksincha.

Ravshanki,

$$w' = (az + b)' = a.$$

Demak,

$$w = az + b$$

akslantirish $\mathbb{C}_z$ tekislikni $\mathbb{C}_w$ tekislikka konform akslantiradi.

Chiziqli funksiya yordamida bajariladigan akslantirishni aniqlash uchun avvalo uning xususiy hollarini qaraymiz.

1) Aytaylik,

$$w = z + b \quad (3)$$

bo'lsin. Agar kompleks son vektor orqali ifodalanishini inobatga olsak, unda (3) akslantirish z va b vektorlar yig'indisi orqali topilishini ko'ramiz. Demak, bu holda z ga ko'ra uning aksi w parallel ko'chirish orqali topilar ekan.

2) Aytaylik,

$$w = e^{i\alpha} z, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

bo'lsin. Avvalo

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

ekanini e'tiborga olib, so'ng

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

tenglik foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} w = e^{i\alpha} z &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\ &= |z|(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)) \end{aligned}$$

Demak,

$$|w| = |z|, \arg w = \varphi + \alpha = \arg z + \alpha$$

bo‘ladi. Bu holda z ga ko‘ra uning aksi w, z vektorni α burchakka burish bilan topilar ekan.

3) Aytaylik,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

bo‘lsin. U holda z ga ko‘ra uning aksi w, z vektorni cho‘zish ($k > 1$) yoki siqish ($k < 1$)

bilan topiladi. Yuqorida keltirilgan hollardan ko‘rinadiki,

$$w = az + b$$

chiziqli funksiya yordamida akslantirish $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi sohani “parallel ko‘chirish”, “burchakka burish” hamda “cho‘zish yoki siqish” ni amalga oshirar ekan.

2. Kasr-chiziqli funksiyalar va uning xossalari. 1-ta’rif. *Ushbu*

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (4)$$

ko‘rinishidagi funksiya kasr-chiziqli funksiya deyiladi, bunda a, b, c, d lar o‘zgarmas kompleks sonlar va

$$ad - bc \neq 0 \quad (5)$$

shartning bajarilmasligi w funksiyaning o‘zgarmas bo‘lib qolishiga olib keladi.

Haqiqatan ham,

$$ad - bc = 0$$

bo‘lsa, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0, d \neq 0$) bo‘lib,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{b\left(\frac{a}{b}z+1\right)}{d\left(\frac{c}{d}z+1\right)} = \frac{b}{d} = \text{const}$$

bo‘ladi.

$c \neq 0$ bo‘lganda,

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad (6)$$

$$c = 0 \text{ bo‘lganda, } w(\infty) = \infty$$

deb qaraymiz.

(4) munosabatni z ga nisbatan yechish natijasida berilgan kasr-chiziqli funksiya nisbatan teskari bo‘lgan

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad (7)$$

funksiya kelamiz. Bu yerda ham

$$c \neq 0 \text{ bo'lganda, } z(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty,$$

$$c = 0 \text{ bo'lganda, } z(\infty) = \infty$$

deb qaraymiz.

Demak,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

funksiya $\mathbb{C}_z$ to'plamda

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

funksiya esa $\mathbb{C}_w$ to'plamda aniqlangan.

Ayni paytda (7) funksiya $\mathbb{C}_z$ to'plam nuqtalarini $\mathbb{C}_w$ to'plam nuqtalariga o'zaro bir qiymatli akslantiradi.

Ravshanki,

$$w' = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{(cz+d)a - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

bo'lib, bu hosila

$$\overline{C_z} \setminus \{z \in \overline{C_z} : z = -\frac{d}{c}, z = \infty\}$$

to'plamda chekli hamda (5) shartga binoan $w' \neq 0$.

Demak,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

akslantirish

$$\overline{C_z} \setminus \{z \in \overline{C_z} : z = -\frac{d}{c}, z = \infty\}$$

to'plamda konform akslantirish bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu

$$w = \frac{1}{z}$$

akslantirish $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi to'g'ri chiziqni yoki aylanani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi to'g'ri chiziqqa yoki aylanaga o'tkazishini isbotlang.

Ma'lumki, R^2 tekislikda

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \quad (8)$$

tenglama ($A = 0$ bo'lganda) to'g'ri chiziqni yoki ($A \neq 0, B^2 + C^2 - AD > 0$ bo'lganda) aylanani ifodalaydi.

Endi

$$x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z},$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

$$y = -\frac{i(z - \bar{z})}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, (8) tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$Az \cdot \bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0 \quad (9)$$

Bunda $E = B + Ci$

Shunday qilib, (9) tenglama $\mathbb{C}_z$ tekislikda to'g'ri chiziq yoki aylananing kompleks argumentlik ko'rinishidagi ifodasi bo'ladi va aksincha.

(9) ning $w = \frac{1}{z}$ akslantirish yordamida hosil bo'lgan aksini topish uchun undagi z o'rniga $\frac{1}{w}$ ni qo'yamiz. Natijada

$$A \cdot \frac{1}{w \cdot \bar{w}} + \bar{E} \frac{1}{w} + E \frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

ya'ni

$$Dw \cdot \bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0 \quad (10)$$

Tenglama hosil bo'ladi. (9) hamda (10) munosabatlarni solishtirib, (10) ning ham $\mathbb{C}_z$ tekislikda to'g'ri chiziq yoki aylana bo'lishini topamiz.

2-misol. Kompleks tekislikda $z_1 = 1 + i$ nuqta uchun ushbu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ aylanaga nisbatan simmetrik nuqtani toping.

Yechish: Izlanayotgan nuqtani z_1^* deylik. Uni topishda $z_1^* - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}$ formuladan foydalanamiz. $z_0 = 0$ hamda $R=1$ bo'lishini e'tiborga olib, $z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1}$ bo'lishini topamiz. Demak, $z_1^* = \frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

3-misol. $0, 1, \infty$ nuqtalarni mos ravishda $i, \infty, 0$ nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani toping.

Yechish: Avvalo, z_1, z_2, z_3 nuqtalarni w_1, w_2, w_3 nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani yozib olaylik:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

Bu tenglikda $z_3 \rightarrow \infty, w_2 \rightarrow \infty$ deb limitga o'tsak,

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{w - w_1}{w_3 - w_1}$$

munosabatga kelimiz. Bu tenglik yordamida z_1, z_2, ∞ nuqtalarni w_1, ∞, w_3 nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani aniqlaymiz.

Demak, izlanayotgan funksiya

$$\frac{z-0}{z-1} = \frac{w-i}{0-i}$$

ya'ni

$$w = \frac{-zi}{z-1} + i = -\frac{i}{z-1}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi to'plamlar $w = \frac{1}{z}$ akslantirish yordamida aksini toping:

1. $\arg z = \frac{\pi}{4}$, 2. $-1 \leq x \leq 1, y = 0$, 3. $z = \cos t (\cos t + i \sin t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$,
4. $x^2 + y^2 = ax$ — aylanalar oilasi.

Berilgan D sohaning kasr chiziqli $w=f(z)$ akslantirish yordamidagi aksini toping:

5. $D = \{|z| < 1\}$, $w = \frac{z-1}{z+1}$, 6. $D = \{0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$, $w = \frac{1}{z}$,
7. $D = \{|z-1| < 2\}$, $w = \frac{z+1}{z-2}$, 8. $D = \{\operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \frac{z-3+i}{z+1+i}$,
9. $D = \{1 < |z| < 2\}$, $w = \frac{2}{z-1}$.

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi kasr-chiziqli $w(z)$ akslantirishni toping:

10. $w(0) = 4$, $w(1+i) = 2+2i$, $w(2i) = 0$,
11. $w(0) = 0$, $w(1+i) = \infty$, $w(2i) = 2i$,
12. $w(i) = 0$, $w(\infty) = 1$, $w(-i) = 0$,
13. $w(-1) = 0$, $w(i) = 2i$, $w(-i) = 2$,
14. $w(-1) = -0$, $w(\infty) = \infty$, $w(i) = 1$.

15. Ushbu $\{|z-2| < 1\}$ doirani $\{|w-2i| < 2\}$ doiraga shunday akslantiringki, $w(2) = i$ va $\arg w'(2) = 0$ bo'lsin.

16. $\frac{1}{2}$ va 2 nuqtalarni qo'zg'almaydigan, $\frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$ nuqtani esa ∞ ga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani toping.

17. i nuqta ikki karrali qo'zg'almas nuqtasi bo'lgan va 1 nuqtani ∞ ga akslantiruvchi kasr-chiziqli funksiyani toping.

18. Ikki 1 va i nuqtalarni qo'zg'almas qoldiruvchi 0 nuqtani esa -1 nuqtaga akslantiruvchi kasr chiziqli funksiyani toping.

19. $\{|z| < R\}$ doirani o'zini o'ziga akslantiruvchi va $w(a) = 0$ ($|a| < R$) shartni qanoatlantiruvchi kasr-chiziqli funksiyalar umumiy ko'rinishini toping.

20. Ushbu $\{|z| < 1\}$ birlik doirani $Imw > 0$ yuqori yarim tekislikka shunday aylantiringki, i nuqta doiraning markaziga o'tsin va akslantiruvchi nuqtada funksiya hosilasi 0 ga teng bo'lsin.

§ 9. Jukovski funktsiyasi

Ushbu

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

ko'rinishdagi funksiya *Jukovski funktsiyasi* deyiladi.

Bu funksiya $C \setminus \{0\}$ sohada holomorf, uning yordamida bajariladigan akslantirish $C_z \setminus \{0; -1; 1\}$ to'plamning har bir nuqtasida konform akslantirish bo'ladi.

z va w o'zgaruvchilarni $z = re^{i\varphi}$, ($z \in C_z$), $w = u + iv$ ($w \in C_w$) deb olamiz. Unda (1) akslantirish ushbu

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right)$$

ko'rinishga keladi.

Ravshanki,

$$re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

Natijada,

$$u + iv = \frac{1}{2} \left[\left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \right]$$

bo'lib, undan

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

akslantirish ushbu

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi \quad (2)$$

akslantirishga keladi. (2) munosabatdan foydalanib, quyidagilarni topamiz.

1) C_z tekislikda radiusi ρ ga ($0 < \rho < 1$) teng bo'lgan

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

aylanani olaylik. Jukovski funktsiyasi yordamida bu aylana C_z tekislikdagi

$$u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi$$

chiziqqa akslanadi.

Agar

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$$

deyilsa, unda

$$u = a_\rho \cos \varphi, \quad v = b_\rho \sin \varphi$$

bo'lib,

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1$$

bo'ladi. Bu C_w tekislikda fokuslari ± 1 nuqtada, yarim o'qlari a_ρ va b_ρ bo'lgan ellipsni ifodalaydi.

Demak, Jukovski funktsiyasi

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

C_z tekislikdagi radiusi ρ bo'lgan

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

aylanani C_w tekislikdagi

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1$$

ellipsga akslantiradi.

2) C_z tekislikda radiusi ρ ga teng bo'lgan ushbu

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

aylanani olaylik. Jukovski funktsiyasi

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

bu aylanani ham

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1$$

ellipsga akslantiradi.

3) C_z tekislikda radiusi ρ bo'lgan

$$z = e^{i\varphi};$$

aylanani olaylik. Jukovskiy funksiyasi yordamida bu aylanani C_w tekislikdagi

$$\begin{aligned} u &= \cos \varphi, \\ v &= 0 \end{aligned}$$

chiziqqa akslanadi.

Ravshanki, bu chiziq C_w tekislikdagi $[-1,1] \in R$ kesmani ifodalaydi. Demak, Jukovskiy funksiyasi C_z tekislikdagi $\rho = 1$ radiusli aylanani C_w tekislikdagi $[-1,1]$ kesmaga akslantiradi.

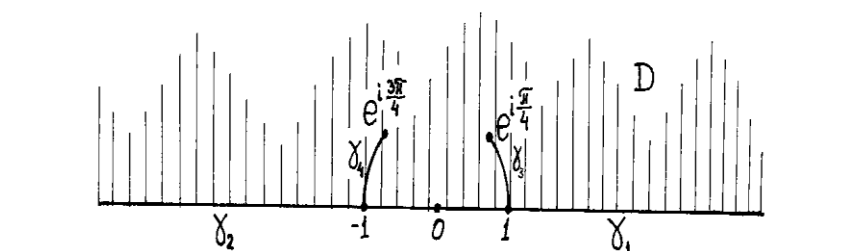
Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Jukovskiy funksiyasidan foydalanib ushbu

$$D = \{Im z > 0, z \notin \{z=1, 0 \leq arg z \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq arg z \leq \pi\}\}$$

to'plamning aksini toping.

Yechish: Bu masalani yechish uchun birinchi navbatda D sohaning chizmasini chizib olamiz (1-chizma) va (2) formulalardan foydalanamiz.



1-chizma

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases}$$

Ma'lumki sohaning saqlanish prinsipiga $w(\partial D) = \partial D$ ko'ra bo'ladi.

$$\gamma_1 = [0, +\infty), \gamma_2 = (-\infty, 0], \gamma_3 = \{r = 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\}, \gamma_4 = \{r = 1, \frac{3\pi}{4} < \varphi < \pi\}$$

desak, $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ bo'ladi va (2) formulalardan foydalansak,

$$w(\gamma_1) = [1, +\infty), w(\gamma_2) = (-\infty, -1], w(\gamma_3) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], w(\gamma_3) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right],$$

ekanligini topamiz.

$$\partial D = w(\gamma_1) \cup w(\gamma_2) \cup w(\gamma_3) \cup w(\gamma_4) = (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty).$$

Demak, $G = w(D) = \{w \notin (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}], w \notin [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)\}$.

2-misol. Jukovski funktsiyasi yordamida

$$l = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{5\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4}\}$$

yoyning aksini toping. Ravshanki,

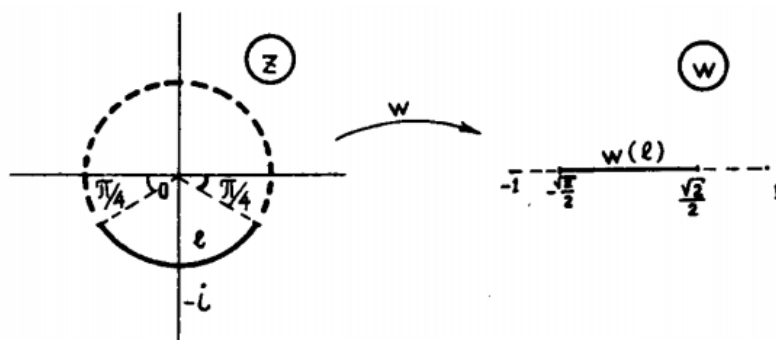
$$l = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \frac{5\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4} = r = 1, \frac{5\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}\}.$$

(2) munosabatga ko'ra

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi = \cos \varphi,$$

$$v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi = 0.$$

bo'ladi. Agar $\frac{5\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{4}$ bo'lganda $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo'lishini e'tiborga olsak, $w(l) = \{\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}, v = 0\} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ekanini topamiz.



3-misol. Jukovski funktsiyasi

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

yordamida $l = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \frac{3\pi}{4}\}$ nurning aksini toping.

Avvalo l ni quyidagicha yozib olamiz:

$$l = \{\varphi = \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r < \infty\}.$$

So'ng

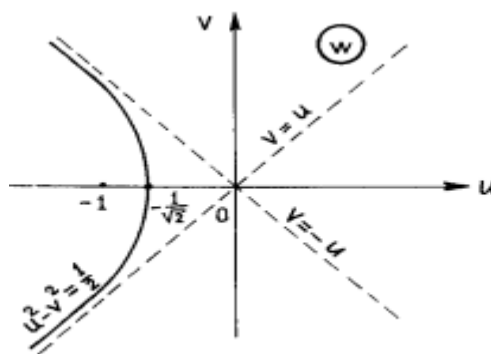
$$w = u + iv \quad (z = re^{i\varphi})$$

deb, (2) munosabatlardan topamiz:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Ravshanki, bu chiziqning tenglamasi $w(l) = \left\{u^2 - v^2 = \frac{1}{2}, u < 0\right\}$ giperbola bo'lagidir. (3-chizma).



3-chizma

Mustaqil yechish uchun misollar

Jukovskiy funksiyasidan foydalanib quyidagi to'plamlarning aksini toping:

1. $|z| = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$. 2. $|z| = 2, \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$. 3. $|z| > 2, z \in [2, +\infty)$.

4. $|z| < \frac{1}{2}, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4}$. 5. $|z| > 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$. 6. $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$.

7. $\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0$. 8. $|z| < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z < 0$. 9. $|z| > 2, \operatorname{Im} z > 0$.

Jukovskiy funksiyasini quyidagi sohalarda bir yaproqlikka tekshiring:

10. $|z| > 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}$. 11. $\operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2$. 12. $\operatorname{Im} z < (\operatorname{Re} z)^2$.

Jukovskiy funksiyasi yordamida quyidagi to'plamlarning aksini toping:

13. $\arg z = \frac{\pi}{4}$. 14. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, z \neq [0, i]$. 15. $|z| < 1, z \neq [0, 1]$.

16. $|z| < 1, \frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4}$. 17. $|z| > 1, \operatorname{Im} z < 0$. 18. $R < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$.

§ 10. Darajali, ko'rsatkichli va ko'p qiymatli funksiyalar

1. Darajali funksiya. Ushbu

$$w = z^n \quad (1)$$

ko'rinishidagi funksiya *darajali funksiya (akslantirish)* deyiladi, bunda n -natural son.

Bu funksiya butun kompleks tekislik C_z da aniqlangan bo'lib uning hosilasi

$$w' = n \cdot z^{n-1}$$

ga teng.

Demak, (1) funksiya butun tekislik C da golomorf, $n > 1$ va $z \neq 0$ bo'lganda uning yordamida bajariladigan akslantirish $C \setminus \{0\}$ to'plamining har bir nuqtasida konform akslantirish bo'ladi.

2. Darajali funksiya yordamida bajariladigan akslantirishlar.
 C_z va C_w tekisliklarda qutb koordinatalarini kiritamiz:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (r = |z|, \varphi = \arg z)$$

$$w = \rho e^{i\psi}, \quad (\rho = |w|, \psi = \arg w)$$

Natijada (1) akslantirish ushbu

$$\rho e^{i\psi} = r^n e^{i\varphi n}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Undan esa,

$$\rho = r^n, \psi = n\varphi$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$w = z^n$$

akslantirish qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \psi = n\varphi \end{cases} \quad (2)$$

akslantirishga o'tadi. Binobarin, (1) akslantirishni o'rganish davomida (2) akslantirishni o'rganishga to'g'ri keladi.

(2) akslantirishdan topamiz:

1) $r = \text{const}$ bo'lganda $\rho = \text{const}$ bo'ladi. Demak, (1) akslantirish C_z tekislikdagi markazi $z=0$ nuqtada bo'lgan aylanalarni C_w tekislikdagi markazi $w=0$ nuqtada bo'lgan aylanalarga akslantiradi.

2) $\varphi = \text{const}$ bo'lganda $\psi = \text{const}$ bo'ladi. Demak, (1) akslantirish C_z tekislikdagi $z=0$ nuqtadan chiqqan nurlarni, C_w tekislikdagi $w=0$ nuqtadan chiqqan nurlarga akslantiradi.

Ayni paytda (1) akslantirish $\varphi = 0$ nurni, $\psi = 0$ nurga, C_z tekislikdagi $\varphi = \alpha$ nurni esa, C_w tekislikdagi $\psi = n\alpha$ nurga akslantiradi.

Yuqorida keltirilgan tasdiqlardan

$$w = z^n$$

akslantirish C_z tekislikdagi

$$D = \{z \in C_z : 0 < \arg z < \alpha\}, \quad (\alpha < \frac{2\pi}{n})$$

sohani C_w tekislikdagi $w(D) = \{w \in C_w : 0 < \arg w < n\alpha\}$ sohaga akslantirishi kelib chiqadi.

3. Darajali funksiyaga teskari funksiya orqali akslantirishlar.

Darajali $w = (z - a)^n$ ($n > 1, a \neq \infty$) funksiyani qaraymiz. Bu akslantirish kengaytirilgan kompleks $\bar{C}$ tekislikni o'zini-o'ziga shunday akslantiradiki, C_w tekislikdagi har bir w nuqta C_z tekisligida n ta turli asllarga ega bo'ladi. Bu xossadan $w=0$ va $w=\infty$ nuqtalar mustasno, chunki bu nuqtalarning asllari n karrali a va ∞ nuqtalardan iborat. $w \in C \setminus \{0\}$ ning asllari $w = (z - a)^n$ tenglamani z ga nisbatan yechish orqali hosil qilinadi.

$$z = a + \sqrt[n]{w} = a + \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\text{Arg} w}{n} + i \sin \frac{\text{Arg} w}{n} \right).$$

Ravshanki, bu n ta nuqtalar markazi a nuqtada yotuvchi radiusi $\sqrt[n]{|w|}$ dan iborat aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning uchlarida joylashadi. $w = (z - a)^n$ akslantirish $z = a$ va $z = \infty$ nuqtalardan tashqari $\bar{C}$ tekislikning barcha nuqtalarida konformdir. Lekin uchi $z = a$ va $z = \infty$ da yotuvchi burchaklar bunday akslantirishda n marta oshadi.

$|w| = |z - a|^n$ va $\text{Arg} w = n \text{Arg}(z - a)$ bo'lganligidan markazi $z = a$ nuqtada, radiusi r bo'lgan har bir aylanaga musbat yo'nalishda bir marta o'tilganda w nuqta $|w| = r^n$ aylanani musbat yo'nalishda n marta o'tadi. Shu formulalardan a nuqtadan chiquvchi

$$\text{Arg}(z - a) = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

nurning aksi $w=0$ nuqtadan chiquvchi

$$\text{Arg} w = n\varphi_0 + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

nur ekangligi kelib chiqadi. Bundan esa $w = (z - a)^n$ funksiyaning a nuqtadan chiquvchi kengligi ψ , $0 < \psi < \frac{2\pi}{n}$ burchakni 0 nuqtadan chiquvchi kengligi $n\psi$ bo'lgan $0 < n\psi < 2\pi$ burchakka bir yaproqli va konform akslantirishini olamiz.

$w = (z - a)^n$ funksiyaga teskari $z = a + \sqrt[n]{w}$ funksiya yuqorida keltirilgan akslantirishlanga teskari akslantirishlarni amalga oshiradi.

3. Ko'rsatkichli funksiya va uning xossalari. 1-ta'rif. Ushbu

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning limiti **e^z funksiya** deyiladi.

Demak,

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Odatda

$$w = e^z$$

funksiya ko'rsatkichli funksiya deyiladi.

Endi $w = e^z$ funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Ko'rsatkichli $w = e^z$ funksiya butun kompleks tekislikda golomorf funksiya bo'ladi.

2-xossa. $w = e^z$ funksiya kompleks C tekislikning har bir nuqtasida hosilaga ega va

$$w' = (e^z)' = e^z$$

bo'ladi.

3-xossa. Ko'rsatkichli funksiya uchun ushbu

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

formula o'rinli bo'ladi.

4-xossa. Ko'rsatkichli funksiya

$$w(z) = e^z$$

davriy funksiya bo'lib, uning davri $T = 2\pi i$ ga teng.

Bizga quyidagi 3 ta darajali qator berilgan bo'lsin:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (3)$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad (4)$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (5)$$

Qatorlar nazariyasidan ma'lumki, ushbu darajali qatorlar har birining yaqinlashish radiuslari cheksizga tengdir. Demak, bu qatorlarning har biri butun kompleks tekislikning har bir nuqtasida absolyut yaqinlashuvchi. Shunday qilib, (3), (4) va (5) qatorlarning yig'indilari butun kompleks tekislikda analitik funksiyalardan iboratdir.

Matematik analizdan ma'lumki, agar (3), (4) va (5) qatorlardagi z - kompleks o'zgaruvchi o'rniga x - haqiqiy o'zgaruvchini qo'ysak, u holda ularning yig'indilari mos ravishda e^x , $\cos x$ va $\sin x$ ga teng bo'ladi. Shuning uchun z kompleks o'zgaruvchining barcha qiymatlari uchun ham bu qatorlarning yig'indilarini mos ravishda e^z , $\cos z$ va $\sin z$ deb belgilaymiz.

e^x , $\cos x$ va $\sin x$ funksiyalar haqiqiy analizda qanday xossalarga ega bo'lsa, e^z , $\cos z$ va $\sin z$ funksiyalar ham xuddi shunday xossalarga ega. Haqiqatdan ham $\forall z, t \in \mathbb{C}$ uchun

$$e^z e^t = e^{z+t} \quad (6)$$

tenglik o'rinli ekanligini isbotlaymiz. (3) qator butun $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda absolyut yaqinlashuvchi. Shuning uchun bunday qatorlarni hadlab ko'paytirish mumkin:

$$e^z e^t = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right) = 1 + \frac{z+t}{1!} + \frac{(z+t)^2}{2!} + \dots \stackrel{(1)}{=} e^{z+t}.$$

Bu ifoda qatorlarni hadlab ko'paytirishdan hosil bo'ladi. Agar (6) da $t = -z$ deb olsak, u holda $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Demak, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$. U holda

$$e^{z-t} = e^z e^{-t} = \frac{e^z}{e^t} \quad (7)$$

formula o'rinli bo'ladi. e^x , $\cos x$ va $\sin x$ funksiyalar haqiqiy o'qda bir-biri bilan bog'lanmagan, lekin kompleks tekislikda ular bir-biri bilan quyidagicha ajoyib bog'lanishga ega:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (8)$$

Isbot. Bu formulani isbotlash uchun (3) yoyilmada z ni iz bilan almashtirib, i qatnashmagan hadlarni alohida, qatnashgan hadlarni alohida guruhlaymiz va (4), (5) yoyilmalardan foydalanamiz:

$$e^{iz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots) + i(1 - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots) = \cos z + i \sin z.$$

Agar shu formulada z ni $-z$ bilan almashtirsak, $e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z)$ hosil bo'ladi. Bu yerdan (4) va (5) formulalardan kelib chiqadigan $\cos z$ funksiyaning juft, $\sin z$ funksiyaning toq funksiya ekanligiga asosan

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (9)$$

bo'ladi. Δ

4. Ko'p qiymatli funksiyalar. Ushbu

$$e^w = z \quad (10)$$

tenglamaning yechimiga z ning *logarifmi* deyiladi va $w = \operatorname{Ln} z$ kabi belgilanadi. Bu funksiyaning yaxshiroq tushunish uchun quyidagicha almashtirishlar kiritamiz:

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = u + iv \Rightarrow e^{u+iv} = re^{i(\varphi+2\pi k)}$$

Bulardan

$$\begin{cases} e^u = r, \\ v = \varphi + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \ln r = \ln |z|, \\ v = \varphi + 2\pi k \arg + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (11)$$

kelib chiqadi. Shuningdek,

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k) \quad (12)$$

tenglikdan ko'rinadiki, logarifmik funksiya cheksiz ko'p qiymatlidir. Agar bu tenglikda k ni fiksirlasak, hosil bo'lgan funksiya $(\operatorname{Ln} z)_k$ bilan belgilanadi va unga logarifmik funksiyaning k -bir tarmoqli qiymati deyiladi. $k=0$ da

$$(\operatorname{Ln} z)_0 = \ln |z| + i \arg z = \ln z$$

deb belgilanib, cheksiz ko'p qiymatli funksiyaning asosiy tarmog'i deb ataladi. Endi quyidagi sohalarni qaraymiz:

$$\Pi_k = \{w \in \mathbb{C} : 2\pi k < \operatorname{Im} w < 2\pi(k+1)\}, G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Bizga ma'lumki, $z = e^w : \pi_k \rightarrow G$ funksiya har bir π_k ni G ga konform akslantiradi. Lekin $w = (\operatorname{Ln} z)_k : G \rightarrow \pi_k$ funksiya G ni fiksirlangan tarmoqqa o'tkazadi.

5. Kompleks sonni kompleks darajaga ko'tarish. Aytaylik, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ va $a \in \mathbb{C}$ kompleks sonlar berilgan bo'lib, z^a ni aniqlash kerak bo'lsin. Bu ifodani ta'rifga ko'ra, quyidagi tenglik bilan ifodalaymiz:

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k))}, k \in \mathbb{Z}.$$

1-misol. Quyidagi i^i darajani hisoblang.

$$i^i = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k} = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right) = 0 + 1 \cdot i = i, k \in \mathbb{Z}.$$

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $w = z^3$ darajali funksiya yordamida C_z tekislikdagi $E = \{z \in \mathbb{C}: \arg z = \frac{\pi}{4}\}$ to'plamning C_w tekislikdagi aksini toping.

Berilgan E to'plamni

$$E = \{z \in \mathbb{C}: \arg z = \frac{\pi}{4}\} = \{\varphi = \frac{\pi}{4}, 0 < r < \infty\}$$

deb

$$w(E) = \{w \in \mathbb{C}: \mu = \frac{3\pi}{4}, 0 < \rho < +\infty\} = \{w \in \mathbb{C}: \arg w = \frac{3\pi}{4}\}$$

bo'lishini topamiz.

2-misol. Ushbu $w = z^4$ darajali funksiya yordamida C_z tekislikdagi

$$E = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$$

sohaning C_w tekislikdagi aksini toping.

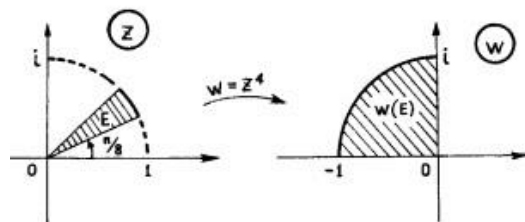
Berilgan E sohani

$$E = \{0 \leq r < 1, \frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{4}\}$$

deb,

$$w(E) = \{0 \leq \rho < 1, \frac{\pi}{2} < \mu < \pi\} = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1, \frac{\pi}{2} < \arg w < \pi\}$$

bo'lishini topamiz:



1-chizma

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi D to'plamning berilgan akslantirish yordamidagi aksini toping.

1. $D = \{Re z = 2\}$, $w = e^{2z}$, 2. $D = \{Im z = 3\}$, $w = e^{2z}$,

3. $D = \{\arg z = \frac{\pi}{3}\}$, $w=e^{4z}$, 4. $D = \{Im z > 1\}$, $w=e^{2z}$,

5. $D = \{|z| > 2, \frac{5\pi}{4} < argz < \frac{3\pi}{2}\}$, $w=e^{2z}$.

Quyidagi to'plamlarning $w=e^z$ akslantirish yordamida aksini toping.

6. $Re z = 0$, 7. $Im z = 0$, 8. $argz = \alpha, (0 < \alpha < \pi)$, 9. $|z| = r, \frac{\pi}{4} < argz < \frac{3\pi}{4}$,

10. $|z| < 1, \frac{5\pi}{4} < argz < \frac{3\pi}{2}$, 11. $|z| < 2, 0 < argz < \frac{\pi}{2}$.

Quyidagi to'plamlarning e^z akslantirish yordamidagi aksini toping.

12. $0 < Re z < \pi, Im z < 0$, 13. $-\pi < Re z < 0, Im z > 0$,

14. $Re z > 0, \frac{\pi}{2} < Im z < \pi$, 15. $Re z < 0, -\frac{\pi}{2} < Im z < 0$, 16. $Im z = 2Re z + 1$,

17. $Re z < Im z < Re z + 2\pi$, 18. $1 < Re z < 4, \frac{\pi}{2} < Im z < \pi$.

§ 11. Trigonometrik, giperbolik funksiyalar va ularning xossalari

1. Trigonometrik va giperbolik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar quyidagicha aniqlanadilar:

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (1)$$

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (2)$$

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

formulalarda z o'rniga iz ni qo'ysak, $chz = \cos iz, shz = -i \sin iz$ bog'lanishlar kelib chiqadi. Bu yerdan $\cos iz = chz, \sin iz = ish z$ yoki $iz = \eta$ deb olsak, u holda

$$\sin \eta = ish z, \cos \eta = chz \quad (3)$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

(3) formulalardan kelib chiqadiki, doiraviy trigonometrik funksiyalar o'rtasidagi biror ayniyatdan giperbolik trigonometrik funksiyalar uchun mos ayniyatni keltirib chiqarish uchun $\sin z$ ni $ish z$ ga, $\cos z$ ni chz ga almashtirish kifoya bo'lar ekan.

Masalan, doiraviy trigonometriyaning asosiy ayniyati $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ dan unga mos giperbolik trigonometriyaning ayniyatini hosil qilish uchun $\sin z$ ni $ishz$ ga, $\cos z$ ni chz ga almashtiramiz. Yuqoridagi almashtirishlardan $ch^2 z - sh^2 z = 1$ kelib chiqadi. Bu giperbolik ayniyat trigonometriyaning asosiy ayniyatidan iborat.

2. Trigonometrik funksiyalarning xossalari. Trigonometrik va giperbolik funksiyalarning quyidagi asosiy xossalarini keltiramiz:

1) $\cos z$ va $\sin z$ funksiyalar $\mathbb{C}$ kompleks tekislikda golomorf va ularning hosilalari

$$(\cos z)' = \sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

bo'ladi.

2) $tgz = \frac{\sin z}{\cos z}$ funksiya $\left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ to'plamda, $ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}$ funksiya esa $\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \}$ to'plamda golomorf bo'ladi.

3) $\sin z$, tgz va $ctgz$ toq funksiyalar, $\cos z$ funksiya esa juft funksiya bo'ladi.

4) Trigonometrik funksiyalar davriy bo'lib, $\cos z$ va $\sin z$ ning davri 2π ga, tgz va $ctgz$ ning davri π ga teng.

5) Trigonometrik funksiyalar yordamida bajariladigan akslantirishlar bir nechta (ma'lum) akslantirishlarning kombinatsiyasi natijasida bajariladi. Masalan, $w = \sin z$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirish

$$w_1 = iz, w_2 = e^{w_1}, w_3 = \frac{1}{i} w_2$$

Shuningdek, $w = tgz$ funksiya yordamida bajariladigan akslantirishlar ushbu

$$w_1 = 2iz, w_2 = e^{w_1}$$

akslantirishlar kombinatsiyasidan iborat bo'ladi:

$$w = tgz = -i \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}.$$

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar
1-misol. Ushbu

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$$

tenglikning o'rinli bo'lishini isbotlang.

Yechish: Ma'lumki

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Unda

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}),$$

$$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})$$

bo'lib, bu tengliklarni hadma-had qo'shsak,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

bo'ladi.

2-misol. Ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}$ kompleks son uchun ushbu

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Eyler formulasini isbotlang.

Yechish: Trigonometrik funksiyalarni ta'rifiga ko'ra

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

bo'lib, bu tengliklardan

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}$$

ekani kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi ayniyatlarni isbotlang:

1. $ch^2 z - sh^2 z = 1$, 2. $ch(z_1 + z_2) = ch z_1 * ch z_2 + sh z_1 * sh z_2$.
3. $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} * \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$, 4. $sh \left(z + \frac{\pi i}{2} \right) = ichz$,
5. $ch \left(z + \frac{\pi i}{2} \right) = ish z$, 6. $\cos(iz) = ch z$, 7. $ch(iz) = \cos z$, 8. $sh(z + i\pi) = -sh z$,
9. $ch(z + i\pi) = -ch z$, 10. $sh \left(1 + \frac{i\pi}{2} \right) = ich z$.

Quyidagi ifodalarning barcha qiymatlarini toping:

11. $\ln 5$, 12. $\ln(1 + i\sqrt{3})$, 13. $(-3 + 4i)^{1+i}$, 14. $\arcsin 1$, 15. $\arccos 1$,
16. $\arccos i$, 17. $\arctg(1 + i)$, 18. $\arccos \frac{3i}{4}$.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Chiziqli funksiyalar va ularning xossalarini tushuntiring.
2. Kasr-chiziqli funksiyalar va uning xossalarini tushuntiring.
3. Jukovskiy funksiyasi ta'rifini bering va xossalarini keltiring.
4. Darajali funksiyaning ta'rifini bering va xossalarini keltiring.
5. Ko'rsatkichli funksiyaning ta'rifini bering va xossalarini keltiring.
6. Ko'p qiymatli funksiyalar ta'rifini bering va xossalarini keltiring.
7. Kompleks sonni kompleks darajaga ko'tarishni tushuntiring.
8. Trigonometrik va giperbolik funksiyalar ta'rifini bering va xossalarini keltiring.

IV BOB. KOSHI INTEGRALI

§ 12. Kompleks argumentli funksiyalarning integrali

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali. Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralining ta'rifini beramiz. Tekislikdagi Γ to'g'rilanuvchi chiziqda $w = f(z)$ bir qiymatli funksiya berilgan bo'lsin. Γ chiziqning boshlang'ich α nuqtasidan oxirgi β nuqtasiga qarab uzluksiz harakat qilinganda ketma-ket uchraydigan $\forall \alpha = z_0, z_1, \dots, z_n = \beta$ nuqtalarni olamiz va quyidagi integral yig'indini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \quad (1)$$

Γ chiziqning z_k va z_{k+1} nuqtalarini tutashtiruvchi qismini S_k , uning uzunligini esa dS_k bilan belgilaymiz.

1-ta'rif. Agar $\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0$ da (1) yig'indi $\{z_k\}_{k=0}^n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan holda aniq chekli limitga intilsa, u holda $f(z)$ funksiya Γ **chiziq bo'yicha integrallanuvchi** deyiladi. Bu limitning qiymatiga $f(z)$ funksiyaning Γ **chiziq bo'yicha integrali** deb ataladi va u

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\substack{\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

kabi belgilanadi.

2. Integralning mavjudlik sharti. 1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya Γ to'g'rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\int_{\Gamma} f(z)dz$ integral mavjuddir.

Isbot. Dastlab quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$z_k = x_k + iy_k, f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + iv_k, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

U holda (1) yig'indi quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \end{aligned} \quad (2)$$

Bu (2) ifodaning haqiqiy qismi va mavhum qismining koeffisienti haqiqiy analizda o'rganilgan $\int_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ko'rinishdagi

ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning integral yig'indilaridir. Agar $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar Γ to'g'rilanuvchi chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bunday integral mavjuddir. Teorema shartiga ko'ra $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar to'g'rilanuvchi Γ chiziqda uzluksiz bo'lganligi uchun bu yerdan $\max_{0 \leq k \leq n-1} dS_k \rightarrow 0$ da (2) tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'indining mos ravishda aniq chekli $\int_{\Gamma} udx - vdy$ va $\int_{\Gamma} vdx + udy$ limitlarga intilishi kelib chiqadi. Demak, (2) ning chap tomoni ham aniq chekli limitga ega va bu limit quyidagiga teng:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (udx - vdy) + i \int_{\Gamma} vdx + udy. \quad (3)$$

1-teorema isbot bo'ldi. $\triangleright$

3. Integralni hisoblash. (3) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy). \quad (4)$$

Bu integralni hisoblash maqsadida Γ chiziqni silliq va $z = z(t)$, ($a \leq t \leq b$) tenglamaga ega desak, (4) dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= \int_a^b \{u[z(t)] + iv[z(t)]\} \{x'(t) + iy'(t)\} dt = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}\{f[z(t)]z'(t)\}dt + i \int_a^b \operatorname{Im}\{f[z(t)]z'(t)\}dt. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) formulaga ko'ra kompleks funksiya integralini hisoblash masalasi haqiqiy funksiyalarning odatdagi aniq integrallarini hisoblashga keltirilar ekan.

1-misol. $\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a}$ integral hisoblansin. Bu yerda $|z-a|=R$ aylana

soat strelkasiga teskari yo'nalishida o'tiladi.

Yechish. Aylana silliq chiziq bo'lib, uning parametrik tenglamasi $z = a + Re^{it}$, ($0 \leq t \leq 2\pi$) dan iborat. $dz = z'(t)dt = iRe^{it}dt$ bo'lganligidan (5) ga asosan

$$\int_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

4. Integralning asosiy xossalari. Quyida keltiriladigan xossalarning barchasidagi integrallarni mavjud deb hisoblaymiz. Quyidagi oltita xossa integral ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

1-xossa. Agar Γ chiziqni musbat va manfiy yo'nalishlarda o'tishdan hosil bo'lgan chiziqlarni mos ravishda Γ^+ va Γ^- desak, u holda $\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_{\Gamma^+} f(z)dz$.

2-xossa. Ixtiyoriy kompleks o'zgarmas α uchun $\int_{\Gamma} \alpha f(z)dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z)dz$.

3-xossa. Agar Γ chiziq bo'ylab musbat yo'nalishda harakat qilganda u ketma-ket uchraydigan $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ chiziqlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz.$$

4-xossa.

$$\int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)]dz = \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz.$$

5-xossa. Agar Γ chiziqda $|f(z)| \leq M$, $M = \text{const}$ tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq M d\Gamma$$

tengsizlik o'rinli, bunda $d\Gamma$ — Γ chiziqning uzunligi.

Isbot. $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |z_{k+1} - z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leq M d\Gamma$. Bu

tengsizlikda $\max_k ds_k \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, 5-xossa kelib chiqadi.

6-xossa. 5-xossa quyidagi yanada aniqroq tengsizlikdan ham kelib chiqadi:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \lim_{\max_k ds_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |z_{k+1} - z_k|.$$

Bu xossa $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)(z_{k+1} - z_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k)| |z_{k+1} - z_k|$ tengsizlikdan kelib

chiqadi.

Kompleks analizda sohaning chegarasi bo'yicha olingan integrallar muhim rol o'ynaydi. Faraz qilaylik, D soha chegarasi chekli sondagi yopiq to'g'rilanuvchi Jordan chiziqlaridan iborat bo'lsin.

2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning chegarasi ∂D da uzluksiz bo'lsa, u holda ∂D bo'yicha musbat yo'nalishda $f(z)$ funksiyadan olingan integral deb, ∂D ni tashkil etuvchi barcha chiziqlar bo'yicha $f(z)$ dan olingan integrallarning yig'indisiga aytiladi:

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Gamma_k} f(z) dz,$$

bu yerda Γ_k -chiziqlardagi integrallash yo'nalish shunaqaki, shu yo'nalish bo'ylab harakat qilganda soha chap tomonda qoladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya chekli va bir bog'lamli G sohada analitik bo'lsa, u holda G sohada yotuvchi ixtiyoriy yopiq bo'lakli-silliqlik l chiziq bo'yicha $f(z)$ funksiyadan olingan integral 0 ga teng, ya'ni

$$\int_l f(z) dz = 0.$$

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $I_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$ integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$, $\rho > 0$ aylanadan iborat (yo'nalish soat strekcasiga qarama-qarshi olingan).

Yechish: γ aylananing tenglamasini quyidagi $z = z(t) = a + \rho e^{it}$ ($0 \leq t < 2\pi$) ko'rinishda yozib olamiz. Unda $dz = d(a + \rho e^{it}) = i\rho e^{it} dt$ bo'lib, (5) formulaga ko'ra

$$I_n = \int_{\gamma} (z-a)^n dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt$$

bo'ladi.

Agar $n \neq -1$ bo'lsa,

$$I_n = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = i\rho^{n+1} \frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

bo'ladi.

Agar $n = -1$ bo'lsa,

$$I_{-1} = i \int_0^{2\pi} e^{it0} dt = 2\pi i$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, n \neq -1, \\ 2\pi i, n = -1. \end{cases}$$

2-misol. Ushbu $\int_{\gamma} x dz$ integralni hisoblang, bunda γ egri chiziq $\{z \in \mathbb{C} : |z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ dan iborat (chiziqning boshi $z=1$ nuqtada).

Yechish: Avvalo γ egri chiziqni quyidagicha

$$\int_{\gamma} x dz = \int_0^{\pi} \cos t d(e^{it})$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi aniq integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos t d(e^{it}) &= \int_0^{\pi} \cos t d(\cos t + i \sin t) = \int_0^{\pi} \cos t d(\cos t) + i \int_0^{\pi} \cos t d(\sin t) = \frac{\cos^2 t}{2} \Big|_0^{\pi} + \\ &+ i \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = i \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{i}{4} (2t - \sin 2t) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $\int_{\gamma} z dz$ integralni hisoblang, bunda γ chiziq boshi $a \in \mathbb{C}$ nuqtada oxiri $b \in \mathbb{C}$ nuqtada bo'lgan egri chiziq.

Quyidagi integrallarni hisoblang:

2. $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$, bunda γ boshi 0 va oxiri $2+i$ nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi.

3. $\int_{\gamma} x dz$, γ : $z = 2 + i$ nuqtaning radius vektori,

4. $\int_{\gamma} x dz$, γ : $|z - a| = R$,

5. $\int_{\gamma} |z| dz$, γ : boshi $(-1;0)$, oxiri $(1;0)$ nuqtada bo'lgan kesma.

6. $\int_{\gamma} |z| dz$, γ : boshi $(-1;0)$, oxiri $(1;0)$ nuqtaga qarab yo'nalgan

yuqori yarim birlik aylana.

Agar γ boshi $z_1 = -2$ nuqtada, oxiri $z_2 = 2$ nuqtada bo'lgan $\{|z| = 2, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ aylana bo'lagi bo'lsa, quyidagi integrallarni hisoblang:

7. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, 8. $\int_{\gamma} |z| dz$, 9. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, 10. $\int_{\gamma} z |z| dz$.

Quyidagi integrallarni hisoblang, bunda γ boshi $z_1 = 1$ nuqtada, oxiri $z_2 = i$ nuqtada bo'lgan kesma:

$$11. \int_{\gamma} \bar{z} dz, 12. \int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz, 13. \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Boshi $a \in C$ oxiri $b \in C$ nuqtada bo'lgan γ to'g'ri chiziqli kesmasi bo'yicha quyidagi integrallarni ta'rif yordamida hisoblang.

$$12. \int_{\gamma} (3z+1) dz, a = 1+i, b = 1-i. 13. \int_{\gamma} (z-i) dz, a = 1+i, b = 1+2i.$$

$$14. \int_{\gamma} (z+i) dz, a = 1+i, b = i. 15. \int_{\gamma} (3z-1) dz, a = 1+i, b = -1-i.$$

$$16. \int_{\gamma} (z+2i) dz, a = 2i, b = 1+i. 17. \int_{\gamma} (3z-2) dz, a = 2, b = -1-i.$$

$$18. \int_{\gamma} (2z-3i) dz, a = -1-i, b = i.$$

§ 13. Koshi teoremasi

1-teorema (Koshining integral teoremasi). Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya kompleks tekislik S dagi bir bog'lamli D sohada holomorf bo'lsin. U holda ixtiyoriy to'g'rilanuvchi yopiq egri chiziqli $\gamma \subset D$ uchun

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

2-teorema. $D \subset \mathbb{C}$ soha bir bog'lamli, chegarasi to'g'rilanuvchi chiziqli iborat bo'lgan soha bo'lib, $f(z)$ funksiya D da holomorf, $\bar{D}$ da uzluksiz, ya'ni $f(z) \in O(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsin. U holda

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

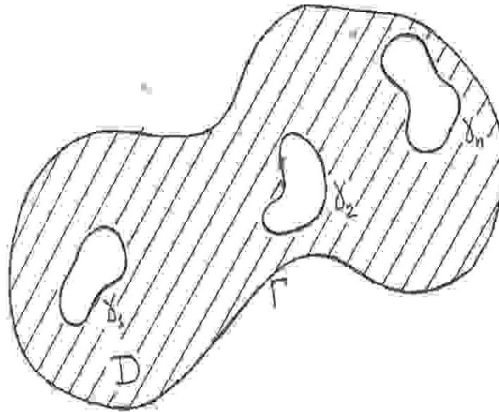
3-teorema (Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasi). Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha chegarasi $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ to'g'rilanuvchi chiziqlardan tashkil topgan ko'p bog'lamli soha bo'lsin (1-chizma). Agar $f(z) \in O(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\Gamma \cup \gamma_1^- \cup \dots \cup \gamma_n^-} f(z) dz = 0$$

tenglik o'rinlidir.

Bu tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz \quad (1)$$

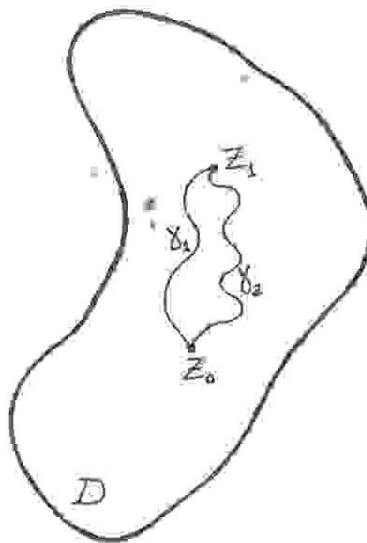


1-chizma

1-natija. Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ bir bog'lamli soha bo'lib, γ_1, γ_2 chiziqlarning har biri ($\gamma_1 \subset D, \gamma_2 \subset D$) boshi z_0 va oxiri z_1 nuqtada bo'lgan chiziqlar bo'lsin (2-chizma). Agar $f(z) \in O(D)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad (2)$$

bo'ladi.



2-chizma

(2) tenglik, qarayotgan integralning z_0 va z_1 nuqtalarigagina bog'liq bo'lib, integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligini bildiradi. Shuni e'tiborga olib, (2) integralni

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz \quad (3)$$

kabi belgilash ham mumkin.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu

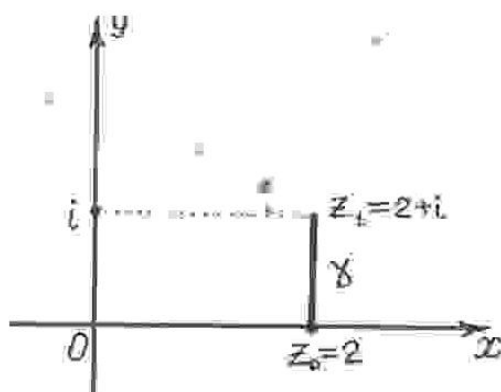
$$\int_2^{2+i} z^2 dz$$

integralni hisoblang.

Yechish: Ravshanki, $f(z) = z^2 \in O(\mathbb{C})$. Binobarin, berilgan integral $z_0 = 2$, $z_1 = 2+i$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo'lga bog'liq bo'lmaydi. Shundan foydalanib integrallash chizig'i γ sifatida

$$\gamma = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

to'g'ri chiziq kesmasini olamiz:



3-chizma

Bu γ chiziqda

$$z = 2 + iy, dz = i dy$$

bo'lishidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \int_2^{2+i} z^2 dz &= \int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^1 (2 + iy)^2 \cdot i dy = i \int_0^1 (4 + 4iy - y^2) dy = \\ &= i(4y + 2iy^2 - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^1 = -2 + \frac{11}{3}i. \triangleright \end{aligned}$$

2-misol. Ushbu

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} \quad (z \neq 0)$$

integralning qiymati $z_0 = 1$ va $z_1 = 2$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo'lga bog'liq bo'ladimi (yo'l koordinata boshidan o'tmaydi deb faraz qilinadi)?

Yechish: Ravshanki,

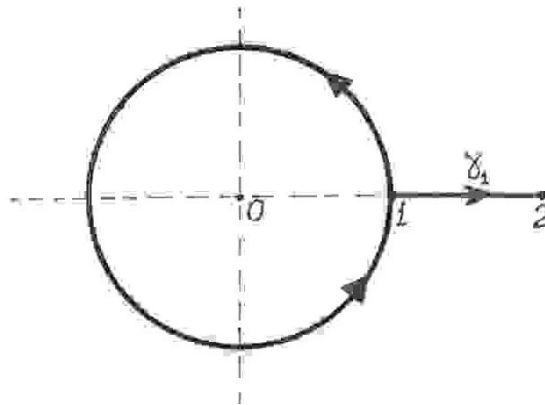
$$f(z) = \frac{1}{z}$$

funksiya $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohada golomorf. Ayni paytda bu bir bog'lamli soha emas. Demak, Koshining integral teoremasidan foydalanib bo'lmaydi. $z_0 = 1$ va $z_1 = 2$ nuqtalarni birlashtiruvchi ikkita γ_1 hamda γ_2 chiziqlarni

$$\gamma_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 \leq x \leq 2, y = 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \gamma_1$$

deb olamiz (4- chizma).



4-chizma

γ_1 chiziqda $z = x, dz = dx$ bo'lib,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2.$$

$|z|=1$ aylanada $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ bo'lib,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi \int_0^1 \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\pi i + \ln 2$$

bo'ladi. Demak, berilgan integral integrallash yo'liga bog'liq ekan.

3-misol. Ushbu integralni hisoblang: $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz$, bunda, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{3}{2}\}$.

Yechish: Agar $D \subset \mathbb{C}$ soha deb quyidagi $D = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\right\}$ soha

olinsa unda, birinchidan, $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$ funksiya golomorf bo'ladi,

ikkinchidan, qarayotgan yopiq chiziq γ shu sohaga tegishli bo'ladi:

$\gamma \subset D$, $2i \notin D$. Unda $\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz = 0$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi integrallarni Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanmasdan hisoblang:

$$1. \oint_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z+4)^3} dz$$

$$3. \int_0^1 z \cos z dz$$

$$2. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}+i} z \sin z dz$$

Quyidagi funksiyalar berilgan sohalarda boshlang'ich funksiyaga ega emasligini ko'rsating.

$$5. f(z) = \frac{1}{z}; D = \{0 < |z| < \infty\} \quad 6. f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}; D = \{0 < |z| < 1\}$$

$$7. f(z) = \frac{1}{z^2+1}; D = \{1 < |z| < \infty\} \quad 8. f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}; D = \{0 < |z| < 1\}$$

9. Agar integrallash yo'li $\pm i$ nuqtalardan o'tmasa u holda ushbu tenglikning o'rinli bo'lishini isbotlang:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$10. \{z \neq \pm i\} \text{ sohada } \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} \text{ integralning qiymati } \arctg z \text{ funksiyaning}$$

qiymatlar to'plami bilan ustma-ust tushishini, ya'ni $\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctg z$

tenglikning o'rinli bo'lishini isbotlang.

Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

11. Agar $f(z)$ funksiya $U = \{|z-a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in U$ uchun $|f(z)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in U$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \leq M |z_2 - z_1|$$

bo'ladi.

12. Agar $f(z)$ funksiya $U = \{|z-a| < R\}$ doirada golomorf bo'lib, $\forall z \in U$ uchun

$\operatorname{Re} f(z) \geq M > 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\forall z_1, z_2 \in U$ nuqtalar uchun

$$\left| \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \right| \geq M |z_2 - z_1|$$

bo'ladi.

Quyidagi integrallarni hisoblang:

13. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, γ chiziq $z_0 = -i$ nuqtadan $z_1 = i$ nuqtaga qarab yo'nalgan $y^2 = x + 1$ parabolaning yoyi.

14. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, γ chiziq $z_0 = -i$ nuqtadan $z_1 = i$ nuqtaga qarab yo'nalgan $\{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ aylananing yoyi.

15. $\int_{\gamma} \ln(z+1)dz$, bunda, γ chiziq $z_0 = -1-i$ nuqtadan $z_1 = -1+i$ nuqtaga qarab yo'nalgan va $(-\infty, -1]$ nurni kesmaydigan ixtiyoriy to'g'rilanuvchi egri chiziq.

§ 14. Boshlang'ich funksiya tushunchasi

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ soha va bu sohada aniqlangan $f(z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar D sohada shunday golomorf $F(z)$ funksiya aniqlangan bo'lib, sohaning barcha nuqtalari uchun $F'(z) = f(z)$ tenglik bajarilsa, $F(z)$ funksiyaga D sohada $f(z)$ funksiyaning **boshlang'ich funksiyasi** deyiladi.

Agar z_0 nuqtani tayinlab, z_1 ni esa z o'zgaruvchi sifatida qaralsa, quyidagi integral z o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z)dz.$$

1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda $F(z)$ funksiya ham D sohada golomorf bo'lib, $F'(z) = f(z)$ ($z \in D$)

bo'ladi, shuningdek, umumiy holda boshlang'ich funksiyalarni $F(z) + c$ ko'rinishda belgilaymiz.

Bu teoremadan ko'rinadiki, bir bog'lamli sohada golomorf funksiya $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyasi mavjuddir.

2-teorema. Agar $F(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_{z_0}^z f(z)dz = F(z) - F(z_0) = F(z) \Big|_{z_0}^z \quad (1)$$

formula (Nyuton-Leybnits formulasi) o‘rinli bo‘ladi, bunda z_0 va z nuqtalar D sohaga tegishli ixtiyoriy nuqtalar.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko‘rsatmalar

1-misol. Agar γ egri chiziqli yuzasi S ga teng bo‘lgan sohani chegaralovchi yopiq chiziqli bo‘lsa, u holda $\frac{1}{i} \oint_{\gamma} x dz = S$ tenglikning o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Yechish: $\oint$ belgi yopiq kontur γ bo‘yicha olingan integralni bildiradi. Ravshanki, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x$ uchun $u(x, y) = x$ va $v(x, y) = 0$ bo‘ladi.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

formuladan foydalanib topamiz,

$$\int_{\gamma} x dz = \int_{\gamma} x dx + i \int_{\gamma} x dy$$

bu tenglikning o‘ng tomonidagi har bir egri chiziqli integralga, Grin formulasini qo‘llasak natijada

$$\oint_{\gamma} x dz = \iint_{(S)} 0 dx dy + i \iint_{(S)} dx dy = i \iint_{(S)} dx dy = iS$$

kelib chiqadi.

2-misol. Ushbu $\int_{\gamma} x dz$ integralni hisoblang. Bunda γ egri chiziqli $\{z \in C: |z| = 1, (0 \leq \arg z \leq \pi)\}$ dan iborat. Chiziqli boshi $z=1$ nuqtada.

Yechish: Avvalo γ egri chiziqli quyidagicha $z=e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$ parametrik ko‘rinishida yozib olamiz. Unda $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt$

formulaga ko‘ra $\int_{\gamma} x dz = \int_0^{\pi} \cos t d(e^{it})$ bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos t d(e^{it}) &= \int_0^{\pi} \cos t d(\cos t + i \sin t) = \\ &= \int_0^{\pi} \cos t d(\cos t) + i \int_0^{\pi} \cos t d(\sin t) = \frac{\cos^2 t}{2} \Big|_0^{\pi} + i \left[\cos t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \right] = \\ &= i \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = i \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = i \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = i \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi integrallarni hisoblang:

1. $\int_{\gamma} \operatorname{Im} z dz$, bunda γ boshi 0 va oxiri $2+i$ nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi.

2. $\int_{\gamma} x dz$, $\gamma: z = 2 + i$ nuqtaning radius vektori.

3. $\int_{\gamma} x dz$, $\gamma: |z - a| = R$;

4. $\int_{\gamma} |z| dz$, bunda γ boshi $(-1;0)$ va oxiri $(1;0)$ nuqtada bo'lgan kesma.

5. $\int_{\gamma} |z| dz$, bunda $\gamma: (-1;0)$ nuqtadan $(1;0)$ nuqtaga qarab yo'nalgan yuqori yarim birlik aylana.

Agar γ boshi $z_1 = -2$ nuqtada oxiri $z_2 = 2$ nuqtada bo'lgan $\{ |z|=2, \operatorname{Im} z < 0 \}$ bo'lgan aylana bo'lgan bo'lsa, quyidagi integrallarni hisoblang:

6. $\int_{\gamma} |z| dz$, 7. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, 8. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, 9. $\int_{\gamma} z \bar{z} dz$.

Quyidagi integrallarni hisoblang:

10. $\int_{|z|=1} z \bar{z} dz$, 11. $\int_{|z-1|=1} \operatorname{Re} z dz$, 12. $\int_{|z|=1} \ln z dz$, 13. $\int_{|z|=2} \operatorname{Im} z^2 dz$,

14. $\int_{\gamma} \bar{z} dz$, $\gamma: x = \cos t, y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$),

15. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-4}$, $\gamma: x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ – ellips.

§ 15. Koshining integral formulasi

Mazkur bobning 13-paragrafida Koshi teoremasini o'rgangan edik. Ushbu paragrafda esa Koshi teoremasidan foydalanib kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida muhim bo'lgan Koshining integral formulasini keltiramiz.

Kompleks sonlar tekisligi C_z da chegaralangan D sohani qaraylik. Uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) chiziqdan iborat. Bu musbat egri chiziq musbat yo'nalishda olingan bo'lsin.

Aytaylik,

$$\bar{D} = D \cup \partial D$$

to'plamda $f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. D sohada ixtiyoriy z nuqta olib, uning shunday

$$B_\rho = \{t: |t-z| < \rho: \rho > 0\}$$

atrofini qaraymizki, $\overline{B_\rho} \subset D$ bo'lsin. Bu sohaning chegarasi

$$\partial B_\rho = \{t: |t-z| = \rho, \rho > 0\}$$

bo'ladi. Endi chegarasi $\gamma = \partial D \cup \partial \overline{B_\rho}$ bo'lgani ushbu $D_\beta = D \setminus \overline{B_\rho}$ sohani qaraymiz.

Ravshanki, bu sohada $\frac{f(t)}{t-z}$ funksiya t o'zgaruvchining funksiyasi sifatida golomorf bo'lib, uning chegarasida uzluksiz bo'ladi. Unda Koshi teoremasiga binoan $\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z} dt = 0$, ya'ni

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt + \int_{B_\rho^-} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0 \quad (2)$$

bo'ladi. Agar $\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = - \int_{B_\rho^-} \frac{f(t)}{t-z} dt$ ekanini e'tiborga olsak, unda (2)

tenglikdan

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{B_\rho} \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki, $\int_{\partial B_\rho} \frac{dt}{t-z}$ integralda ∂B_ρ aylana uchun $t = z + \rho \cdot$

$e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) bo'lganligi sababli $\int_{\partial B_\rho} \frac{dt}{t-z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi$ bo'lib,

$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{dt}{t-z} = 1$ bo'ladi. Bu integralning har ikki tomonini $f(z)$ ga

ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z) \quad (4)$$

so'ng ushbu $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z)$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirmani (3) va

(4) tengliklardan foydalanib, quyidagini yozish mumkin:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \quad (5)$$

shartga ko'ra $f(z)$ funksiya z nuqtada ($z \in D$) golomorf. Binobarin, funksiya shu nuqtada uzluksiz. Unda $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ katta son topiladiki, $\rho < \delta$ tengsizlikni qanoatlantruvchi B_ρ aylananing ixtiyoriy nuqtasi uchun

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho} |f(t) - f(z)| |dt| < \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_{\partial B_\rho} |dt| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \cdot 2\pi \rho = \varepsilon. \end{aligned}$$

Demak,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) \right| = \varepsilon \quad (6)$$

shunday qilib, ρ nolga intila borganda (5) ayirmaning moduli yetarlicha kichik bo'lar ekan.

Ayni paytda, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt$ ifoda ρ ga bog'liq emas. Unda (6)

munosabatdan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) &= 0 \text{ ya'ni} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt &= f(z) \end{aligned} \quad (7)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi. $\triangleright$

Yuqoridagi teoremaning shartlari o'rinli bo'lganda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D \end{cases} \quad (8)$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Odatda, (8) formula *Koshining integral formulasi* deyiladi. Koshining integral formulasi $f(z)$ golomorf

funksiyaning D sohadagi qiymatlarini uning chegarasi ∂D dagi qiymatlari orqali ifodalaydi.

Faraz qilaylik, ixtiyoriy yopiq γ egri chiziqda uzluksiz $f^*(t)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. U holda ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(t)}{t-z} dt$$

integralga *Koshi tipidagi integral* deyiladi.

2-teorema. *Koshi tipidagi integral $\mathbb{C} \setminus \gamma$ sohada $f(z)$ funksiyasini aniqlab, ushbu funksiya quyidagi xossalarga ega:*

- a) $f^*(t)$ funksiya $\mathbb{C} \setminus \gamma$ sohada golomorf,
- b) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$,
- c) $f(z)$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi $f^{(n)}(z)$ mavjud va

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(t)}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

1-natija. *Golomorf funksiya istalgan tartibli hosilaga egadir.*

Endi Koshining integral teoremasini xususiy holda, chegarasi aylanadan iborat soha uchun keltiramiz.

Komleks tekislik C_z da ushbu

$$D = \{z \in C_z : |z - z_0| < r, r > 0\}$$

doirani ($z \in C_z$) qaraylik. Ravshanki, bu doiraning chegarasi

$$\partial D = \{z \in C_z : |z - z_0| < r, r > 0\}$$

aylana bo'ladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\bar{D} = D \cup \partial D$ to'plamda berilgan bo'lsin.

3-teorema. *Agar $f(z)$ funksiya D doirada golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa u holda*

$$f(z_0) = \int_0^{2\pi} f(z_0 - re^{i\varphi}) d\varphi \quad (9)$$

Isbot. Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z_0} dt \quad (10)$$

bo'ladi.

Ravshanki, markazi $z_0 \in C_z$ nuqtada radiusi r bo'lgan ∂D aylanada

$$t = z_0 + re^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

bo'lib, $dt = ire^{i\varphi}$ bo'ladi. Unda

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 - re^{i\varphi}) \cdot ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} f(z_0 - re^{i\varphi}) d\varphi$$

bo'ladi.

(9) va (10) munosabatlardan ushbu kelib chiqadi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Bu teorema o'rta qiymat haqidagi teorema deb yuritiladi.

1-misol. Ushbu

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$$

integralni hisoblang, bunda

$$\gamma = \{z = x + iy \in C_z : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

yopiq chiziqdan iborat.

Yechish. Ravshanki,

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Demak,

$$\gamma = \{z \in C_z : |z + 3i| = 3\}.$$

bu aylana bilan chegaralangan sohani D doira deylik:

$$D = \{z \in C_z : |z + 3i| < 3\}.$$

Agar

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$$

deyilsa, unda berilgan integral quyidagicha

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz$$

bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $\bar{D}$ da holomorff bo'lgani uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = f(-2i).$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz = -2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \frac{\sin(-2i)}{-2i - 2i} = \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} 2.$$

Demak,

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{sh} 2.$$

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu: $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz$ integralni hisoblang, bunda $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+i|=3\}$ aylanadan iborat.

Yechish: Ravshanki, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+i|=3\}$ soha hamda $f(z)=\sin z$ funksiya uchun quyidagi teorema shartlari bajariladi. (8) formulaga ko'ra

$$2\pi i f(a) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \text{bo'lib,} \quad \text{bundan}$$

$$\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z-(-i)} dz = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} (e - e^{-1}) = 2\pi \operatorname{sh} 1 \text{ tenglikka ega bo'lamiz.}$$

2-misol. Ushbu $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9}$ integralni hisoblang, bunda γ egri chiziq $\mathbb{C}$ tekislikning $\pm 3i$ nuqtalaridan o'tmaydigan yopiq chiziq.

Yechish: Faraz qilaylik, γ yopiq chiziq bilan chegaralangan D to'plam bo'lsin.

$+3i \in D$, $-3i \notin D$ bo'lsin. Bu holda avvalo integral ostidagi funktsiyani

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{\frac{1}{(z+3i)}}{(z-3i)}$$

ko'rinishida yozib olamiz. Unda $f(z) = \frac{1}{z+3i}$, $a=3i$ uchun (8) formulaga asosan

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+9} = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-3i} dz = 2\pi i f(3i) = \frac{2\pi i}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi integralni hisoblang, bunda γ egri chiziq $\mathbb{C}$ tekislikning $\pm 2i$ nuqtalaridan o'tmaydigan ixtiyoriy yopiq chiziq:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2+4}$$

2. Quyidagi integralni hisoblang, bunda γ chiziq $\mathbb{C}$ tekislikdagi $z=-3$ nuqtani o'z ichiga oladigan ixtiyoriy yopiq kontur:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{2z}}{(z+3)^4} dz$$

Quyidagi integrallarni hisoblang:

$$3. \oint_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2i} dz$$

$$5. \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$$

$$4. \oint_{|z-2i|=2} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$$

$$6. \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z} dz$$

7. Quyidagi integralni hisoblang, bunda γ chiziq $z_0=0$ $z_{1,2} = \pm 1$ va nuqtalarni o'z ichiga oladigan ixtiyoriy yopiq kontur:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$$

8. Quyidagi integralni hisoblang, bunda γ bilan chegaralangan soha a nuqtani o'z ichida saqlaydi:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z-a)^3}$$

Quyidagi integralni hisoblang, bunda γ bilan chegaralangan soha $\{|z| \leq a\}$ doirani o'z ichida saqlaydi:

$$9. \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} \quad 10. \oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz \quad 11. \oint_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$$

($|a| < r < |b|$; $n=1,2,\dots$)

12. Agar $\gamma: |z|=2$ aylana bo'lib $a>0$ uchun $Lna=lna$ shart bajarilsa, quyidagi integralni hisoblang:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^2 Ln \frac{z+1}{z-1} dz$$

13. Agar $\gamma: |z-1|=1$ aylana bo'lib $a>0$ uchun $Lna=lna$ shart bajarilsa va $z=1+i$ integrallashning boshlang'ich nuqtasi bo'lsa, u holda ushbu integralni hisoblang:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} z^2 Ln \frac{z+1}{z-1} dz$$

14. Agar $D = \{|z| < R\}$ bo'lib $f(z) \in O(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsa, u holda quyidagi integralni hisoblang:

$$\iint_{r < |z| < R} f(z) dx dy$$

15. Quyidagi integralni hisoblang:

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$$

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Kompleks o'zgaruvchili funksiya integralini tushuntiring.
2. Integralning mavjudlik shartini tushuntiring.
3. Integralni hisoblashni tushuntiring.
4. Integralning asosiy xossalarini keltiring.
5. Bir bog'lamli soha uchun Koshi teoremasini keltiring va isbotlang.
6. Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasini keltiring va isbotlang.
7. Boshlang'ich funksiya ta'rifini keltiring va xossalarini ayting.
8. Koshining integral formulasi keltiring va xossalarini ayting.

V BOB. KOMLEKS ANALIZDA QATORLAR NAZARIYASI

§ 16. Kompleks sonlar tekislikda sonli va funksional qatorlar

Matematik analiz kursida hadlar haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan sonli qatorlarni, shuningdek, hadlari haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalardan iborat bo'lgan funksional qatorlarni batafsil o'rgangan edik.

Endi hadlari kompleks sonlar hamda kompleks o'zgaruvchili funksiyalar bo'lgan qatorlarni qaraymiz. Bu holda ham qatorlarning yaqinlashuvchiligi, uzoqlashuvchiligi, yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari, tekis yaqinlashuvchilik, hadlab differensiallash va integrallash kabi masalalar o'rganiladi. Bu yerda keltirish lozim bo'lgan ma'lumotlar avvaligilariga o'xshash bo'lganligi uchun biz quyida hadlari kompleks sonlar hamda kompleks o'zgaruvchili funksiyalar bo'lgan qatorlarga doir asosiy tushuncha va tasdiqlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

1. Sonli qatorlar. Biror

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan ushbu

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

ifoda *qator (sonli qator)* deyiladi va $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

bunda $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ kompleks sonlar qatorning *hadlari* deyiladi. (1) qator hadlaridan tashkil topgan quyidagi

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3$$

.....

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

.....

yig'indilar (1) qatorning qisman yig'indilari deyiladi.

1-ta’rif. Agar (1) qatorning qisman yig‘indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

bo‘lsa, u holda (1) **yaqinlashuvchi qator** deyiladi, S esa qator yig‘indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

kabi yoziladi.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik,

$$z_n = x_n + iy_n \quad (x_n \in R, y_n \in R, n = 1, 2, \dots)$$

bo‘lsin. U holda

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n (x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^n x_k + i \sum_{k=1}^n y_k$$

bo‘ladi.

1-teorema. Ushbu

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots;$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots$$

qatorlarning yaqinlashuvchi bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

bo‘ladi.

Bu teoremadan matematik analiz kursidan o‘rganilgan qatorlar va ular haqidagi ma’lumotlar hadlari kompleks sonlardan iborat bo‘lgan qatorlar uchun ham o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Jumladan quyidagi tasdiqlar o‘rinli bo‘ladi:

1) Agar

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} az_n = az_1 + az_2 + az_3 + \dots + az_n + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $a \cdot S$ ga teng bo'ladi, bunda a – o'zgarmas kompleks son.

2) Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n + \dots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S_1 va S_2 bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + \xi_n)$$

$$= (z_1 + \xi_1) + (z_2 + \xi_2) + (z_3 + \xi_3) + \dots + (z_n + \xi_n) + \dots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S_1 + S_2$ ga teng bo'ladi.

3) Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (2)$$

qator berilgan bo'lsin.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| + \dots \quad (3)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U

holda $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Shuningdek quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

2-teorema (Koshi). *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, $\forall n > n_0$ va $m = 1, 2, 3, \dots$ bo'lganda

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Xususan, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$|z_{n+1}| < \varepsilon$$

bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = 0$$

bo'ladi. Bu (1) qator yaqinlashuvchiligining zaruriy shartini ifodalaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Bu qatorning umumiy hadi

$$z_n = \frac{e^{in}}{n} = \frac{\cos n + i \sin n}{n} = \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

qatorlar yaqinlashuvchi. 2-teoremadan foydalanib berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz.

2. Funktsional ketma-ketliklar va qatorlar. $u_k(z)$ funksiyalar ($k=1, 2, \dots, n, \dots$) $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lsin.

E to'plamda z_0 nuqtani olib, $\{u_n(z_0)\}$ kompleks sonlar ketma-ketligini qaraymiz.

Agar bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{u_k(z)\}$ funksional ketma-ketlik z_0 nuqtada yaqinlashuvchi, z_0 nuqta esa *yaqinlashish nuqtasi* deyiladi.

$\{u_k(z)\}$ funksional ketma-ketlikning barcha yaqinlashish nuqtalardan iborat to'plam $\{u_k(z)\}$ funksional ketma-ketlikning *yaqinlashish to'plami* deyiladi.

Aytaylik, $M \subset C_z$ to'plam $\{u_k(z)\}$ funksional ketma-ketlikning yaqinlashish to'plami bo'lsin. Ravshanki, bu holda, har bir $z \in M$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_k(z)\}$$

mavjud bo'lib, u z o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. Uni $\{u_n(z)\}$ funksional ketma-ketlikning *limit funksiyasi* deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_k(z)\} = u(z)$$

Faraz qilaylik, $E \subset C_z$ to'plamda

$$u_1(z), u_2(z), u_3(z), \dots, u_n(z), \dots$$

funksional ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

ifoda *funksional qator* deyiladi va $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (4)$$

Bu funksional qator hadlaridan tuzilgan quyidagi

$$S_1(z) = u_1(z)$$

$$S_2(z) = u_1(z) + u_2(z)$$

$$S_3(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z)$$

.....

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z)$$

yig'indilar (4) funksional qatorning *qisman yig'indilari* deyiladi.

2-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\{S_n(z)\}$ funksional ketma-ketlik E to'plamda ($E \subset C_z$) yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$$

bo'lsa, u holda (4) funksional qator E da yaqinlashuvchi, $S(z)$ esa uning *yig'indisi* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilsaki, $\forall n > n_0$ va $\forall z \in E$ uchun

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ funksional qator E to'plamda $S(z)$ yig'indiga tekis yaqinlashadi deyiladi.

3-teorema (Veyershtrass alomati). Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \dots + u_n(z) + \dots$$

funksional qatorning har bir $u_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) hadi $M \subset C_z$ to'plamda

$$|u_n(z)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

tengsizliklarni qanoatlantirib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$ qatorni yaqinlashuvchanlikka tekshiring.

Yechish: Bu qator uchun $z_n = e^{in} = \cos n + i \sin n \Rightarrow |z_n| = 1$ bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1 \neq 0$ bo'ladi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi. (Qator yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilmaydi.)

2-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$ funksional qatorning yaqinlashish to'plamini toping.

Yechish: Bu qatorning umumiy hadini quyidagicha yozib olamiz:

$$u_n(z) = \frac{\sin nz}{n^2} = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2in^2} = \frac{e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}}{2in^2} = \frac{e^{inx}e^{-ny} - e^{-inx}e^{ny}}{2in^2}.$$

Agar $y \neq 0$ bo'lsa, unda $|u_n(z)| = \left| \frac{\sin nz}{n} \right| \geq \frac{1}{2n} |e^{-ny}| - |e^{ny}| = \frac{1}{2n^2} |e^{-ny} - e^{ny}|$

bo'lib, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(z)| = \infty$ bo'ladi. Demak, $z = x + iy$, $y \neq 0$ nuqtalarda berilgan funksional qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $y = 0$ bo'lsa, $|u_n(z)| = \frac{\sin nz}{n^2}$ bo'lib, berilgan qator ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ qatorga aylanadi. Ravshanki, bu qatorning hadlari uchun $\frac{\sin nx}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sonli qator yaqinlashuvchi. Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $|z_n| < M n^{-\alpha} (n > n_0), \alpha > 1, M < \infty$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(1 - |\frac{z_{n+1}}{z_n}|)) = a > 1$,
3. $|z_n| < M \frac{1}{n(\ln n)^a}, (n > n_0) \alpha > 1, M < \infty$,
4. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $|\arg z_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $n=1, 2, \dots$ bo'lsa, u holda berilgan qatorning absolut yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.
5. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $0 < \alpha < \arg z_n < \pi - \alpha, n = 1, 2, \dots$ bo'lsa, u holda berilgan qatorning absolut yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

Quyidagi misollarda shartlar bajarilganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlang:

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b^n = 0$, 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |b_n - b_{n+1}|$ qator yaqinlashuvchi,
8. $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ bo'lsa, $\left\{ \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right\}$ ketma-ketlik chegaralangan.

Quyidagi qatorlarni yaqinlashuvchanlikka tekshiring:

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$, 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}} (\alpha \neq 2\pi k, k = 0, 1, 2, \dots)$.

Quyidagi funksional qatorlarning berilgan to'plamda absolut yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n, |z| < 1, -\infty < \alpha < \infty$, 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, |z| < e$.

Quyidagi funksional qatorlarning berilgan to'plamda yaqinlashishini ko'rsating:

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n^2}, D=\{|z| \geq 1\}, 14. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nz}, D=\{|z| \leq \rho < \frac{1}{2}\},$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{2^n}, D=\{Imz \leq \delta < \ln 2\}.$$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1})$ funksional qatorning $D=\{|z| < 1\}$ doirada tekis yaqinlashmasligini isbotlang.

§ 17. Kompleks sonlar tekislikda darajali qatorlar. Abel teoremasi

1-ta'rif. *Ushbu*

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (1)$$

ko'rinishdagi qatorlarga kompleks hadli darajali qator deyiladi, bunda $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ va a berilgan kompleks sonlar, z – kompleks o'zgaruvchi.

Xususiyl holda, agar (1) da $a=0$ bo'lsa, u holda

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (2)$$

ko'rinishdagi darajali qator hosil bo'ladi.

Darajali kompleks qator kompleks hadli funksional qatorning umumiy hadi $u_n(z) = c_n z^n$ bo'lgan xususiyl holdan iboratdir.

2-ta'rif. (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha z nuqtalar to'plamiga (1) darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Aniqlanishidan (1) va (2) ko'rinishdagi istalgan darajali qatorlarning yaqinlashish sohalari mos ravishda $z=a$ va $z=0$ nuqtani o'zida saqlaydi. Yaqinlashish sohasi faqat bitta nuqtadan masalan, 0 nuqtadan iborat darajali qator mavjudmi yoki yo'qmi degan savol tug'iladi. Bu savolning javobi musbatdir, ya'ni bunday darajali qatorlar mavjud. Masalan,

$$1 + z + 2^2 z^2 + \dots + n^n z^n + \dots \quad (3)$$

Haqiqatan ham, agar $\forall z_0 \neq 0$ kompleks son bo'lsa, u holda barcha $n > \frac{2}{|z_0|}$ lar uchun $|n^n z_0^n| = (n|z_0|)^n > 2^n$ tengsizlik bajariladi. Bundan qaralayotgan (3) qatorning $\forall z_0 \neq 0$ nuqtada uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, chunki uning umumiy hadi nolga intilmaydi: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n z_0^n = \infty$.

1-teorema (Abelning birinchi teoremasi). Agar (2) qator biror $z = z_0 \neq 0$ kompleks qiymatda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda z ning $|z| < |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy qiymatida (2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Geometrik nuqtai nazardan bu teoremani quyidagicha ifodalash mumkin: agar (2) qator biror $z = z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u markazi nol nuqtadan iborat va z_0 nuqtadan o'tuvchi aylananing har bir ichki z nuqtasida absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga muvofiq (2) qator biror $z = z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchidir, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ bo'ladi. Bu ketma-ketlik chegaralangan ham bo'ladi, ya'ni shunday $M > 0$ son topiladiki, $n \in \mathbb{N}$ son uchun

$$|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| = |c_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n < M q^n, \quad (4)$$

bunda $q = \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right) < 1$.

Ikkinchi tomondan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadan iborat $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun (4) va Veyershtass alomatiga ko'ra har bir $|z| < |z_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi z nuqtada (2) qatorning absolyut yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi. *Teorema isbot bo'ldi.* ▸

Bu teorema asosida darajali qatorlar yaqinlashish sohasining tuzilishini aniqlash mumkin.

Yuqorida yaqinlashish sohasi faqat 0 nuqtadan iborat (2) ko'rinishdagi (3) darajali qatorni qaradik. Yana shunaqa darajali qatorlar ham mavjudki, ularning yaqinlashish sohasi butun kompleks tekislikdan iborat bo'ladi. Masalan,

$$1 + z + \frac{1}{2^2} z^2 + \dots + \frac{1}{n^n} z^n + \dots \quad (5)$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ uchun $\left| \frac{1}{n^n} z^n \right| < \left(\frac{1}{2} \right)^n, \forall n > 2|z|$. Bu tengsizlik va Veyershtass alomatiga asosan (5) qator $\forall z \in \mathbb{C}$ nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi faraz qilamizki, (2) darajali qator biror $z \neq 0$ nuqtada

yaqinlashuvchi bo‘lib, boshqa bir nuqtada uzoqlashuvchi bo‘lsin. Masalan, ushbu tasdiqni

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (6)$$

qator qanoatlantiradi. Chunki, (6) darajali qator $z = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lib, $z = 2$ nuqtada uzoqlashuvchidir.

Bunday qatorlar yaqinlashish sohasining tuzilishini Abelning birinchi teoremasi yordamida aniqlash mumkin. Buning natijasida biz yuqorida qaragan (6) qatorning xususiyatlariga ega bo‘lgan har bir (2) darajali qator uchun markazi 0 nuqtada joylashgan biror R , $0 < R < \infty$, radiusli doira mavjud bo‘lib, uning har bir ichki nuqtasida (2) qator absolyut yaqinlashuvchi, har bir tashqi nuqtasida esa (2) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Agar biz yaqinlashish sohasi faqat $\{0\}$ nuqtadan iborat qatorlarni markazi 0 nuqta radiusi $R=0$ dan iborat doirada yaqinlashuvchi va yaqinlashish sohasi butun kompleks tekislikdan iborat qatorlarni esa markazi 0 nuqtada radiusi $R=\infty$ dan iborat doirada yaqinlashuvchi deb qabul qilsak, u holda quyidagi teoreмага ega bo‘lamiz.

2-teorema. *Har bir (2) ko‘rinishdagi qator uchun markazi 0 nuqtadagi biror R , $0 \leq R \leq \infty$ radiusli doira mavjudki, bu doiraning har bir ichki nuqtasida (2) qator absolyut yaqinlashuvchi va uning har bir tashqi nuqtasida (2) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.*

Bu doira (2) qatorning yaqinlashish doirasi, uning radiusi esa (2) qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko‘rsatmalar

1-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish: Ravshanki, darajali qatorning yaqinlashish sohasini toppish uchun uning yaqinlashish radiusini toppish lozim. Berilgan qatorning yaqinlashish radiusini formuladan foydalanib topamiz:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} = 1.$$

Demak, darajali qatorning yaqinlashish sohasi $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ birlik doiradan iborat ekan. Berilgan qatorning chegarasi $|z|=1$ nuqtada ham yaqinlashuvchidir.

2-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ qatorni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini tekshiring.

Yechish: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$ ga teng. Qator $|z| \leq 1$ yaqinlashuvchi bo'lib, chegara $|z|=1$ ning har bir nuqtasida uzoqlashuvchidir.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos i)^n z^n$ darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+8}}{3n+8}$ darajali qatorning yig'indisini toping.

3. Ushbu $f(z) = ze^{-z}$ funksiyani $a=1$ nuqtada Teylor qatorga yoying.

4. $f(z) = \sin^2 z$ funksiyani Teylor qatoriga yoying.

5. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ darajali qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sin nz}$ qatorning yaqinlashish radiusini toping.

8. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n-1}}{3n-1}$ darajali qatorning yig'indisini toping.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ qatorning yaqinlashish radiusini toping.

10. Ushbu $f(z) = ze^{-z}$ funksiyani $a=1$ nuqtada Teylor qatoriga yoying.

11. Ushbu $f(z) = \sin^2 z$ funksiyani $a=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

12. Ushbu $f(z) = \frac{z^2}{(9z+1)^2}$ funksiyani $a=2$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish sohasini toping:

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! z^n}{(n!)^2}$, 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)^n z^n}{2^n}$, 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$.

§ 18. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi. Koshi-Adamar formulasi

Faraz qilaylik,

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

manfiy mas sonlar ketma-ketligi bo'lsin.

1. Agar (1) ketma-ketlik chegaralanmagan bo'lsa, u holda uning yuqori limiti deb ∞ ni qabul qilamiz.

2. Agar (1) ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, ya'ni $\forall n=1,2,\dots$ uchun $a_n \leq A$ bo'lsa, u holda u $[0, A]$ kesmada joylashib, Bolsano-Veyershtass teoremasiga ko'ra hech bo'lmaganda bitta limitik nuqtaga ega bo'ladi. Bu ketma – ketlik barcha limitik nuqtalari to'plamini E bilan belgilamiz. Agar E chekli sondagi nuqtalar to'plamidan iborat bo'lsa, u holda ularning hamma limitik nuqtalaridan o'ngroqda joylashganiga mos keluvchi sonni (1) ketma-ketlikning yuqori limiti deb ataymiz. Agar E to'plam cheksiz bo'lsa, u holda bu hol uchun ham isbotlash mumkinki, barcha limitik nuqtalardan o'ngroqda joylashgan limit A_0 nuqta mavjud bo'ladi. Shu nuqtaga mos keluvchi sonni (1) ketma-ketlikning yuqori limiti deb ataymiz. Shunday qilib, istalgan holda ham (1) ketma-ketlikning $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ yuqori limiti mavjud va u $0 \leq l \leq \infty$ tengsizliklarni qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik bizga kompleks hadli

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (2)$$

darajali qator berilgan bo'lsin. Uning koeffitsiyentlaridan foydalanib

$$|c_0|, |c_1|, \sqrt{|c_2|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \quad (3)$$

manfiy mas sonli qatorni tuzamiz.

1-teorema (Koshi -Adamar). (2) qatorning yaqinlashish radiusi

$$R = \frac{1}{l}, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (4)$$

ga teng.

Odatda (4) formula *Koshi –Adamar formulasi* deyiladi.

Isbot. Isbotni quyidagi uch hol uchun alohida alohida bajaramiz:

$$1. \quad l = \infty, R = 0; \quad 2. \quad l = 0, R = \infty; \quad 3. \quad 0 < l < \infty, R = \frac{1}{l}.$$

1-hol. Faraz qilaylik $l = \infty (R = 0)$ bo'lsin, ya'ni (2) ketma-ketlik chegaralanmagan. (2) qator $z = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi va $z \neq 0$

nuqtalarda uzoqlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. (2) qatorning $z=0$ nuqtada yaqinlashuvchanligi yuqorida ta'kidlanganidek ravshan. Faraz qilaylik (2) qator biror $z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin. Qator yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ tenglik bajariladi.

Bu yerdan $\{c_n z_0^n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligi, ya'ni $\exists M > 0$ son mavjud bo'lib, $\forall n=1,2,\dots$ uchun $|c_n z_0^n| < M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Oxirgi tengsizlikni $z_0 \neq 0$ ekanligidan foydalanib $|c_n| < \frac{M}{|z_0|^n}$ yoki

$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\sqrt[n]{M}}{|z_0|} = M_1 > 0$ ko'rinishda tasvirlab, ko'ramizki, $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ ketma-

ketlik chegaralangan ekanligini hosil qilamiz. Bu esa $l = \infty$ ga ziddir, ya'ni farazimiz noto'g'ri va shuning uchun ushbu holda (2) qator $\forall z_0 \neq 0$ nuqtada uzoqlashuvchi ekan. Bu esa bizga kerakli tasdiqdir.

2-hol. $l=0$ bo'lsin. Bu holda biz (2) qator kompleks tekislikning ixtiyoriy nuqtasida yaqinlashuvchi ekanligini isbotlashimiz lozim. Bizga ma'lumki, (2) ko'rinishdagi ixtiyoriy qator $z=0$ nuqtada yaqinlashuvchi. Shuning uchun (2) qatorning istalgan $\forall z_0 \neq 0$ nuqtada yaqinlashishini ko'rsatish kifoya. $l=0$ bo'lsa, u holda (2) ketma-ketlik uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 natural son

topilib, $\forall n > n_0$ larda $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = \frac{1}{2|z_0|}$

deb olsak, u holda

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_0|}, \sqrt[n]{|c_n|} |z_0| < \frac{1}{2} \Rightarrow |c_n z_0^n| < \frac{1}{2^n}, \forall n > n_0$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va Veyershtrass alomatidan (2) qatorning z_0 nuqtada absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-hol. Faraz qilaylik $0 < l < \infty$ bo'lsin. Bu holda biz $R = \frac{1}{l}$ ekanligini isbotlashimiz lozim. Buning uchun (2) qatorning dastlab $\forall z_1: |z_1| < \frac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida absolyut yaqinlashuvchi ekanligini, so'ngra $\forall z_2: |z_2| > \frac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida esa uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kifoya. 1) l yuqori limit bo'lganligi uchun $\forall \varepsilon > 0$

olinganda ham shunday n_0 nomer topiladiki, $\forall n > n_0$ uchun $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar $\varepsilon = \frac{1 - l|z_1|}{2|z_1|} > 0$ deb olsak, u holda

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{l|z_1| + 1}{2|z_1|} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|}|z_1| < \frac{l|z_1| + 1}{2} = q < 1$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va Veyershtrass alomatiga muvofiq (2) qator z_1 nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi (2) qatorning $\forall z_2 : |z_2| > \frac{1}{l}$ nuqtalar to'plamida esa uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. l limit nuqta bo'lganligi uchun $\forall \varepsilon > 0$ son va n natural sonning cheksiz ko'p qiymatlari uchun $\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = \frac{l|z_2| - 1}{|z_2|} > 0$ bo'lsa, u

holda $\sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{|z_2|}$ yoki $\sqrt[n]{|c_n|}|z_2| > 1$ tengsizlik $n \in \mathbb{N}$ ning cheksiz ko'p qiymatlarida bajariladi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_2^n \neq 0$. Demak, $z = z_2$ nuqtada (2) qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi. Shuning uchun (2) qator $z = z_2$ nuqtada uzoqlashuvchidir. *Koshi –Adamar teoremasi to'la isbot bo'ladi.*

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} (\sin in) z^n$ darajali qatorning yaqinlashish sohasi va yaqinlashish radiusini toping.

Yechish: Berilgan qatorning n -koeffitsiyentini quyidagicha yozib olamiz: $c_n = \sin in = \frac{e^{-n} - e^n}{2i}$, unda $c_n = \frac{e^n - e^{-n}}{2i} = \frac{e^n}{2i}(1 - e^{-2n})$ bo'lib, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = \frac{1}{e}$ bo'ladi, undan yaqinlashish sohasi $U = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{e} \right\}$ bo'ladi.

2-misol. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} |2 + (-1)^n|^n z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusini toping.

Yechish: (4) formuladan foydalanib berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + (-1)^n}} = \frac{1}{3}.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi darajali qatorlarni yaqinlashish radiusi va yaqinlashish sohasining toping:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^{\alpha}$, α -ixtiyoriy son. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(1+in)}$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(i+2)z^n}{2^n}$.

5. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n) e^n$ darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

6. Ushbu darajali qatorning yigindisini toping: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{2n+1}$.

7. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ darajali qatorni Koshi-Adamar formulasidan foydalanib yaqinlashish radiusini toping.

8. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin in) z^n$ darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

9. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi R ($0 \leq R \leq \infty$) bo'lsa, u holda quyidagi qatorning yaqinlashish radiusi R ni toping: $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$.

10. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bo'lsa, u holda quyidagi qatorning yaqinlashish radiusi R ni toping: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{nk}$.

11. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ va $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ darajali qatorlarning yaqinlashish radiuslari mos ravishda r_1 va r_2 bo'lsa, u holda qatorning yaqinlashish radiusi R ni toping: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$.

12. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish sohasining chegarasida yaqinlashuvchanlikka tekshiring: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1}$.

13. Quyidagi tasdiqni o‘rinli ekanligini isbotlang (Abelning 2-teoremasi). Agar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ qator yaqinlashsa, u holda ushbu

$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ($0 \leq r \leq 1$) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$ qatorning yaqinlashish radiusini toping.

15. Quyidagi qatorning yaqinlashish radiusini toping: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

§ 19. Golomorf funksiya xossalari

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ soha va uning $a \in D$ limit nuqtasi berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif (Riman). Agar $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida $\mathbb{C}$ -differensiallanuvchi bo‘lsa, bu funksiya a nuqtada **golomorf** deyiladi.

2-ta’rif (Koshi). Agar $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo‘lib, bu atrofda yotuvchi ixtiyoriy yopiq egri chiziq bo‘yicha integrali 0 teng bo‘lsa, ushbu funksiya a nuqtada **golomorf** deyiladi.

3-ta’rif (Veyershtrass). Agar $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida yaqinlashuvchi qatorga yoyilsa, ushbu funksiya a nuqtada **golomorf** deyiladi.

Endi golomorf funksiyalarni quyidagi xossalarini keltiramiz:

1⁰) Agar $f(z)$ funksiya berilgan D sohada golomorf bo‘lsa, uning hosilasi ham bu sohada golomorf bo‘ladi.

Bu xossani isbotlash uchun $a \in D$ nuqtaning biror $V = \{z: |z - a| < r\} \subset \subset D$ atrofini qaraymiz. Shartga ko‘ra $f(z)$ funksiya berilgan D sohada golomorf, bundan ushbu funksiyaning V doiraning yopig‘ida golomorfligi kelib chiqadi. Oldingi paragrafga ko‘ra $f(z)$ funksiya V doirada darajali qatorga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (1)$$

Qatorlarni hadlab differensiallash xossasidan, $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = f'(z)$ funksiyaning hosilasi mavjudligi kelib chiqadi. Bundan xossani natijasi kelib chiqadi.

Shuningdek, bu xossani umumlashtirib, golomorf funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasi mavjudligini ko'rsata olamiz.

2⁰) Agar $f(z)$ funksiya $V = \{z: |z-a| < r\} \subset\subset D$ ochiq doirada (1) kabi darajali qatorga yoyilsa, u holda uning koeffitsiyentlari quyidagicha aniqlanadi:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

Bu xossaning isbotida (1) ning o'rniga $z=a$ nuqtani qo'yib $f(a)=c_0$ ni aniqlaymiz. Keyin (1) ni hadlab differensiallasak,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots$$

ifodani olamiz hamda yana bu tenglikka $z=a$ nuqtani qo'ysak, $f'(a)=c_1$ hosil bo'ladi. Differensiallashni induksiya metodi orqali n marta differensiallasak:

$$f^{(n)}(z) = n! c_n + c'_1(z-a) + c'_2(z-a)^2 + \dots$$

tenglikni olamiz va bu yerda ham $z=a$ nuqtani qo'ysak, $f^{(n)}(a)=c_n n!$ munosabatni olamiz. Bundan (2) tenglikni hosil qilamiz.

Endi Koshi teoremasiga teskari bo'lgan teoremani keltiramiz:

1-teorema (Morera). Agar $f(z)$ funksiya D sohada uzluksiz va bu sohada kompakt yotuvchi ixtiyoriy γ egri chiziq bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lsa, u holda bu funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun $\forall a \in D$ nuqtaning $V = \{z: |z-a| < r\} \subset\subset D$ atrofini qaraymiz. Yuqoridagi 2-xossadan

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta$$

funksiya V da golomorf va har bir $z \in V$ nuqtada $F'(z) = f(z)$ bo'ladi. 1-xossadan kelib chiqadiki, $f(z)$ funksiya V da golomorf bo'ladi. Demak, $f(z)$ funksiyaning D sohaning har bir nuqtasi uchun golomorfligini ko'rsatsak, teoremamiz to'la isbot bo'ladi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Golomorf funksiya xossalarni xulosalash uchun quyidagi izohlarni keltiramiz:

1-izoh. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ darajali qator $U = \{|z| < 1\}$ ochiq doirada yaqinlashadi, shuningdek, doiraning chegarasi $\{|z| = 1\}$ aylanada bu qator uzoqlashadi, lekin bu qatorni funksiyasi $f(z) = \frac{1}{1-z}$ yopiq $\bar{U} = \{|z| \leq 1\}$ doirada golomorf bo'ladi.

2-izoh. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ qator $\{|z| = 1\}$ aylananing barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Ya'ni haqiqiy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sonli qator yaqinlashuvchidir. Bu qatorning yig'indisi bo'lgan $f(z)$ funksiya $z=1$ nuqtada golomorf bo'lmasligi mumkin, lekin uning hosilasi $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ bu nuqtada hosil bo'lgan haqiqiy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sonli qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu izohlar yuqorida keltirilgan golomorf funksiyalar xossalariga istisno holatlarni hosil qiladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $\int_1^2 \frac{dz}{z}$ integralni hisoblang.

Yechish: Integralning qiymati $z_0=1$ va $z_1=2$ nuqtalarni birlashtiruvchi yo'lga bog'liq bo'ladimi?

Ravshanki, $f(z) = \frac{1}{z}$ funksiya $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sohada golomorf. Ayni paytda bu bir bog'lamli soha emas. Demak Koshining integral formulasidan foydalanib bo'lmaydi. $z_0=1$ va $z_1=2$ nuqtani birlashtiruvchi ikkita α va β chiziqlarni olamiz

α chiziqda $z=x$, $dz=dx$ bo'lib, $\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ bo'ladi. $|z|=1$ aylanada $z=e^{i\alpha}$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) $dz=ie^{i\alpha} d\alpha$ bo'lib,

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} + \int_1^2 \frac{dx}{x} = 2\pi i + \ln 2$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi integrallarni hisoblang:

1. $\int_{\partial D} \frac{(2z-1)\cos z}{z-1} dz, D=\{|z|\leq 2\}$. 2. $\int_{\partial D} \frac{\cos z}{z^3} dz, D=\{|z|\leq 1\}$. 3. $\int_{\partial D} z^2 \sin \frac{1}{z} dz, D=\{|z|\leq 1\}$.
4. $\int_{\partial D} \left(1 + \frac{1}{e^z}\right) dz, D=\{|z-3i|\leq 2\}$. 5. $\int_{\partial D} z^3 \sin \frac{1}{z} dz, D=\{|z|\leq 2\}$.
6. $\int_{\partial D} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3} dz, D=\{x^2+4y^2\leq 4\}$. 7. $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^4+z^2+1} dz, D=\{|z-1|\leq 1\}$.
8. $\int_{\partial D} \frac{z \sin(z+1)}{z-1} dz, D=\{|z|\leq 2\}$. 9. $\int_{\partial D} \frac{z^3 e^z}{z+1} dz, D=\{|z|\leq 2\}$. 10. $\int_{\partial D} \sin \frac{1}{z} dz, D=\{|z|\leq 4\}$.
11. $\int_{\partial D} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{z+1} dz, D=\{|z|\geq 4\}$. 12. $\int_{\partial D} \sin \frac{1}{z-1} dz, D=\{|z-1|\geq 1\}$.
13. $\int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2 \frac{1}{z}}{(z-1)(z-2)} dz, D=\{|z-2|\leq 1/2\}$. 14. $\int_{\partial D} \sin^2 \frac{1}{z} dz, D=\{|z|\leq 2\}$.
15. $\int_{\partial D} \frac{\sin^2 z}{(z+1)^3} dz, D=\left\{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\leq 2^{\frac{3}{2}}\right\}$.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Kompleks hadli sonli qatorlar deganda nimani tushunasiz?
2. Kompleks hadli funksional ketma-ketliklar va qatorlar ta'rifini bering, xossalarini keltiring.
3. Kompleks sonlar tekislikda darajali qatorlar deganda nimani tushunasiz? Abel teoremlarini keltiring.
4. Darajali qatorlarning yaqinlashish radiusi, Koshi-Adamar formulasini keltiring.
5. Golomorf funksiya ta'riflarini keltiring.
7. Golomorf funksiya xossalarini ayting.

VI BOB. KOMLEKS ANALIZDA TEYLOR QATORLARI

§ 20. Kompleks sonlar tekislikda Teylor qatorlari

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ soha va bu sohada kompakt yotuvchi $U = \{|z - a| < R\} \subset\subset D$ ochiq doira berilgan bo'lsin.

1-teorema (Teylor). Agar $f(z)$ funksiya U doirada golomorf bo'lsa, u holda bu funksiya

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (1)$$

ko'rinishida qatorga yoyiladi.

Isbot. Kompakt U doirada konsentrik joylashadigan U_r ochiq doirani tanlaymiz: $\exists r < R$, $U_r = \{|z - a| < r\}$. Teorema shartiga ko'ra $f(z)$ funksiya bu U_r doiraning yopig'ida golomorf bo'ladi. $\forall z \in U_r$ uchun Koshining integral formulasidan,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2)$$

munosabat o'rinli. Shuningdek,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad (4)$$

kabi qatorga yoyiladi. $\forall z \in U_r$ ligidan $\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| < 1$ va

$$\left|\frac{z - a}{\zeta - a}\right| = \frac{|z - a|}{|\zeta - a|} = \frac{|z - a|}{r} = q < 1$$

shart bajariladi. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sonli qator yaqinlashuvchi, bundan (4) qator

$\forall \zeta \in \partial U_r$ uchun tekis yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. (2) dan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right) (\zeta - z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

bundan

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

(5) koeffitsiyentlari formula bilan hisoblanadigan (1) qator yaqinlashuvchi. *Teorema isbot bo'ldi.*

2-teorema. Agar

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n + \dots \quad (6)$$

darajali qator $\{|z| < R\}$ doirada yaqinlashib, unda $|f(z)| < M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda

$$|C_n| \leq \frac{M}{R^n}, (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Koshi tengsizligi o'rinli bo'ladi.

Isbot. Darajali (6) qator koeffitsiyentlari C_n uchun integral formulalardan foydalansak,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, (n = 0, 1, 2, \dots), \forall \rho: 0 < \rho < R.$$

Bu koeffitsiyentlarni baholab, $\exists M > 0, |C_n| < M \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{|d\xi|}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}$ ni olamiz.

Oxirgi tengsizlik ixtiyoriy $\rho < R$ uchun o'rinli bo'lganligidan unda $\rho \rightarrow R$ da limitga o'tsak,

$$|C_n| \leq MR^n$$

ga ega bo'lamiz. Koshi tengsizligi, ya'ni 2-teorema isbot bo'ldi.

Shunday qilib, sohada (nuqtada) golomorflik va analitiklik tushunchalari o'zaro ekvivalent ekan.

3-teorema (Liuvill). Agar $f(z)$ funksiya butun kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da golomorf bo'lib, $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R^n} = 0$ shart bajarilsa, u holda u darajasi $n-1$ dan oshmaydigan ko'phaddir, bunda $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$.

Isbot. Hosilalar uchun Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \forall z: |z| < R. \quad (8)$$

Teorema shartiga binoan shunaqa $\{R_k\}$ ketma-ketlik mavjudki,

$$k \rightarrow \infty, R_k \rightarrow \infty, M(R_k) = o(R_k^n). \quad (9)$$

(9) munosabatda $R = R_k$ deb olib, uning o'ng tomonini modul jihatdan baholaymiz:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \max_{|\xi|=R_k} |f(\xi)| \frac{1}{(R_k - |z|)^{n+1}} 2\pi R_k = \frac{o(R_k^n)}{R_k^{n+1}} = o(1).$$

Demak, $f^{(n)}(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. $f^{(n)}(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$$\int_{z_0}^z f^{(n)}(\xi) d\xi + C$$

bo'lib, bu yerdan

$$f^{(n-1)}(z) = C_1 = \text{const}$$

va

$$f^{(n-2)}(z) = C_1 z + C_2, \dots, \\ f(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_n.$$

Teorema isbot bo'ldi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $f(z) = ze^{-z}$ funksiyaning $a=1$ nuqtada Teylor qatoriga yoying.

Yechish: Avvalo berilgan funksiyaning

$$f(z) = |1 + (z-1)| e^{-(z-1)-1} = |1 + (z-1)| e^{-1} e^{-(z-1)}$$

ko'rinishida yozib olamiz. So'ng (5) munosabatdan foydalanib,

$$e^{-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!}$$

bo'lishini topamiz. Natijada, bu funksiyaning Teylor qatori

$$f(z) = ze^z = |1 + (z-1)| e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)(z-1)^{n-1}}{en!}$$

kabi bo'ladi.

2-misol. Ushbu $f(z) = \sin^2 z$ funksiyaning $a=0$ nuqtada Teylor qatoriga yoying.

Yechish: Ravshanki, $\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$. Endi $\cos 2z$ ni Teylor qatoriga yoyilishidan foydalanib,

$$\cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$$

bo'lishini topamiz. Natijada,

$$f(z) = \sin^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$$

bo'ladi. Bu berilgan funksiyaning $a=0$ nuqtadagi Teylor qatoridir.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarda $f(z)$ funksiyaning $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasini birinchi uchta noldan farqli hadini toping

1. $f(z)=tgz$, 2. $f(z)=\frac{z}{arctgz}$, 3. $f(z)=e^{zcosz}$,

Quyidagi $(1+z)^\alpha$ funksiyaning Teylor qatori yoyilmasidan foydalanib, ushbu tengliklarni hisoblang:

4. $\sqrt{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$, 5. $\sqrt{1-z^2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-2)!z^{2n}}{2^{2n-1}n!(n-1)!}$.

Quyidagi misollardagi ratsional funksiyalarni $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying:

6. $f(z)=\frac{1}{1+z+z^2}$, 7. $f(z)=\frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}$.

Quyidagi misollarda $f(z)$ funksiyaning $z=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasining birinchi 4 ta hadini toping va qatorning yaqinlashish radiusini toping:

8. $f(z)=e^{-zcosz}$, 9. $f(z)=\sqrt{cosz}$, 10. $f(z)=e^z \ln(1+z)$.

Quyidagi misollarda berilgan $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yozing va qatorning yaqinlashish radiusini R toping:

11. $f(z)=\frac{1}{3-z}$, $a=0$, 12. $f(z)=e^{iz}$, $a=0$, 13. $f(z)=\int_0^z e^{3z} dz$, $a=0$,

14. $f(z)=cos2z$, $a=1$, 15. $f(z)=cos^2z$.

§ 21. Golomorf funksiya nollari

1. Golomorf funksiyasining nollari. Golomorf funksiyaning nollari haqidagi xossani keltirishdan avval ba'zi bir tushunchalar va tasdiqlarni bayon etamiz.

Faraz qilaylik, biror $f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislik $\bar{C}$ da berilgan bo'lib, $a \in \bar{C}$ bo'lsin.

Agar

$$f(a) = 0$$

bo'lsa, a kompleks son $f(z)$ funksiyaning *noli* deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu funksiyaning a nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (1)$$

Agar $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, u holda

$$f(a) = c_0 = 0$$

bo'lib, (1) formula ushbu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (1) formulada

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0 \quad (2)$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. U holda (1) tenglikdan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots = \\ &= (z-a)^m [c_m + c_{m+1} (z-a) + \dots] \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$c_i = \frac{f^{(i)}(z)}{i!}.$$

Yuqoridagi (2) munosabatni e'tiborga olib,

$$f^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m-1)$$

bo'lishini topamiz. Bu holda $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli deyiladi.

Shunday qilib, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'lsa, u holda

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

bo'lib,

$$g(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + c_{m+2}(z-a)^2 + \dots$$

($g(a) \neq 0$) funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

ifodalanib, $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lsa, $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

$f(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiya ushbu

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} \quad (3)$$

qatorga yoyiladi.

$z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin.

Ravshanki, bu holda

$$c_0 = f(\infty) = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga keladi.

Aytaylik, (4) formulada

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi. U holda (4) formuladan

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} = c_m \frac{1}{z^m} + c_{m+1} \frac{1}{z^{m+1}} + c_{m+2} \frac{1}{z^{m+2}} + \dots = \\ &= \frac{1}{z^m} \left(c_m + c_{m+1} \frac{1}{z} + c_{m+2} \frac{1}{z^2} + \dots \right) = \frac{1}{z^m} \varphi(z) \end{aligned}$$

bo'lishini topamiz. Bu yerda

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1} \frac{1}{z} + c_{m+2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

funksiya uchun

$$\varphi(\infty) = c_m \neq 0$$

bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'ladi.

Aksincha, agar $f(z)$ funksiya quyidagicha

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^m}$$

ifodalanib, $\varphi(z)$ funksiya $z = \infty$ nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $z = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'ladi.

Endi golomorf funksiyaning nollari haqidagi xossani keltiramiz.

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf bo'lib, shu $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsin $f(a) = 0$. U holda $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida nolga teng: $f(z) = 0$, yoki a nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa noli bo'lmaydi.

Isbot. Shartga ko'ra $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf. Unda funksiya $z = a$ nuqta atrofida qatorga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (5)$$

Aytaylik, (5) da barcha c_n lar nolga teng bo'lsin:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots c_{m-1} = 0.$$

Ravshanki, bu holda funksiya $z = a$ nuqta atrofida $f(z) = 0$ bo'ladi.

Endi (5) da

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$$

bo'lib,

$$c_m \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda $z = a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali noli bo'lib, u quyidagicha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

ifodalanadi. Bu yerda $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada golomorf va $g(a) \neq 0$. Ayni paytda $g(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada uzluksiz ham bo'ladi. Unda $g(a) \neq 0$ bo'lganligi sababli $z = a$ nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $g(z) \neq 0$ bo'ladi. Binobarin, shu atrofda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadan boshqa nollari bo'lmaydi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Bu xossa golomorf funksiya nollari yakkaalangan bo'lishini bildiradi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$ funksiya uchun $a = 0$ nuqta nechanchi tartibli nol bo'ladi?

Yechish: Ma'lumki, e^{z^2} funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$f(z) = z^2(e^{z^2} - 1) = z^2 \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots - 1 \right) = z^4 \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots \right) = z^4 \varphi(z),$$

bunda $\varphi(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots$. Ravshanki, $\varphi(z) \in O(0)$, $\varphi(0) = 1 \neq 0$. Demak,

$a = 0$ son berilgan funksiyaning 4-tartibli noli bo'lar ekan.

2-misol. Ushbu $f(z) = \frac{z^2 + 9}{z^4}$ funksiyaning nollarini toping va ularning tartibini aniqlang.

Yechish: Ravshanki, bu funksiya $a_1 = 3i$, $a_2 = -3i$, $a_3 = \infty$ nuqtalarda nolga aylanadi va $f'(3i) \neq 0$, $f'(-3i) \neq 0$ bo'lgani uchun $3i$ va $-3i$ sonlar berilgan funksiyaning oddiy nollari bo'ladi.

Endi funksiyaning $a_3 = \infty$ nolining tartibini aniqlaymiz. Ravshanki,

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^2} + 9}{\left(\frac{1}{z}\right)^4} = z^2 + 9z^4$$

funksiyaning $z = 0$ dagi nolining tartibi 2 ga teng.

Demak, $z = \infty$ nuqta berilgan funksiyaning 2-tartibli noli bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi qatorlarni yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsating:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\ln n}$.

Quyidagi qatorlarni yaqinlashuvchanlikka tekshiring:

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$, 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2i)^n}$, 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}$, 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sin n}$.

Quyidagi funksional qatorlarni yaqinlashuvchi sohasini toping:

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{2^n} + 1}$, 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n} \right)$, 10. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{z \ln n}$.

11. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz}$ funksional qatorning tekis yaqinlashish sohasini toping.

12. Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| \leq 1$ darajali qator yig'indisini toping.

13. Ushbu $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$ funksiyani $a=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

Quyidagi funksional qatorlarni yaqinlashuvchi radiusini toping:

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$, 15. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$.

§ 22. Yagonalik teoremasi. Veyershtass teoremasi

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}_z$ soha berilgan bo'lsin.

1-teorema (yagonalik teoremasi). Faraz qilaylik $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada golomorf bo'lsin. Agar bu funksiyalar D sohaga tegishli va hech bo'lmaganda bitta limit nuqta $z_0 \in D$ ga ega bo'lgan E to'plamda ($E \subset D$) bir-biriga teng $f(z)=g(z)$, ($z \in E$) bo'lsa, u holda $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalar D sohada aynan bir-biriga teng bo'ladi:

$$f(z)=g(z), (z \in D).$$

Isbot. Modomiki, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi ekan, unda bu to'plamga tegishli turli $z_1, z_2, \dots, z_n \in E$ nuqtalardan tuzilgan va z_0 nuqtaga intiluvchi $\forall z \in E$ da $f(z)=g(z)$ bo'lgani uchun $f(z_n)=g(z_n)$ bo'ladi.

Endi $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalarni z_0 nuqtaning

$$U = \{z: |z - z_0| < r\} \subset \subset D$$

atrofida (shuningdek, $r < d$, d esa z_0 nuqtadan ∂D gacha bo'lgan masofa) Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

$z_k \rightarrow z_0$ bo'lganligi tufayli k ning biror qiymatidan boshlab keyingi z_k lar U doiraga tegishli bo'ladi. Shuning uchun $f(z_k)=g(z_k)$ bo'lib, teorema shartidan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \quad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikda $z_k \rightarrow z_0$ limitga o'tib

$$a_0 = b_0 \quad (2)$$

bo'lishini topamiz.

Bu (2) tenglikni e'tiborga olib, (1) ning har ikkala tomonini $z - z_0$ ga bo'lsak, unda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z_k - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z_k - z_0)^{k-1} \quad (3)$$

hosil bo'ladi. Keyingi tenglikda $z_k \rightarrow z_0$ da limitga o'tib

$$a_1 = b_1 \quad (4)$$

bo'lishini topamiz. Bu (4) tenglikni e'tiborga olib, (3) ning har ikkala tomonini $z_k - z_0$ ga bo'lsak, unda

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k (z_k - z_0)^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k (z_k - z_0)^{k-2}$$

hosil bo'ladi. So'ng $z_k \rightarrow z_0$ da limitga o'tib, $a_2 = b_2$ bo'lishini topamiz. Bu jarayonni induksiya Metodi kabi davom ettirib, $a_m = b_m$, $m \in \mathbb{N}$ bo'lishini topamiz. Shunday qilib,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

lar uchun $a_k = b_k$, $k \in \mathbb{N}$ bo'ladi. Demak, U doirada $f(z) = g(z)$ bo'ladi.

▷

2-teorema (Veyershtrass). *Agar*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (5)$$

funksional qatorning har bir $f_n(z)$ hadi D sohada golomorf bo'lib, bu D sohada yotuvchi ixtiyoriy G yopiq to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(z) \quad (6)$$

funksiya D sohada golomorf bo'ladi.

Isbot. D sohada ixtiyoriy z_0 nuqtani olib, uning shunday $U = \{z : |z - z_0| < r\} \subset \subset D$ atrofni qaraymizki, $\bar{U} \subset D$ bo'lsin.

Shartga ko'ra (5) qator $\bar{U}$ da tekis yaqinlashuvchi. Demak, qator U da ham tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

$f_n(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lgani uchun u (5) qatorning har biri U da ham golomorf bo'ladi. Binobarin, $f_n(z)$ funksiya U da uzluksiz. Unda qator yig'indisi $S(z)$ funksiya ham U da uzluksiz bo'ladi.

Endi U da yotuvchi yopiq silliq $\gamma \subset U$ chiziqni olaylik. (6) qatorni γ chiziq bo'yicha hadlab integrallab topamiz:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (7)$$

Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0 \quad (8)$$

bo'ladi.

(7) va (8) dan $\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Morera teoremasidan foydalanib $f(z)$ funksiyani U da golomorf bo'lishini topamiz. Qaralayotgan z_0 nuqta D sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligidan $f(z)$ funksiyani D sohada golomorf bo'lishi kelib chiqadi. *Teorema isbot bo'ldi.*

1-natija. Yuqorida keltirilgan Veyershtass teoremasining sharti bajarilganda

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

qatorni istalgan marta hadlab differensiallash mumkin bo'lib,

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Yagonalik teoremasidan kelib chiqadiki, biror to'plamda golomorf va aynan nolga aylanmaydigan $f(z)$ funksiya D sohaning biror qism to'plamida yoki qandaydir yoyda, hattoki bu sohada uning ichki nuqtasiga yaqinlashadigan nuqtalar ketma-ketligida nolga aylanmaydi.

Bunga misol qilib oddiygina funksiyaning qaraymizki, agar bu funksiya nollarining cheksiz ketma-ketligi uning golomorflik sohasining chegaraviy nuqtasiga yaqinlashsa: $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ funksiya

nuqtalari $z=0$ nuqtaga yaqinlashadigan $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ketma-ketlikda nolga aylanadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$, $z=0$ nuqtada golomorf bo'lgan va $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $f(z)$ funksiya mavjudmi?

1. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, 2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, 3. $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$, 4. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$.

Quyidagi ketma-ketliklarda $n \in \mathbb{N}$ lar uchun birlik doirada golomorf bo'lgan $f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$ shartlarni qanoatlantiruvchi $f(z)$ funksiya mavjudmi?

5. $a_n = (-1)^n$, 6. $a_n = \frac{n+1}{n}$, 7. $a_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$, 8. $a_{2k} = a_{2k+1} = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$.

9. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya D sohaning yopig'ida golomorf ixtiyoriy tanlangan $f(z)=a$ tenglamaning chekli sondagi yechimlarigina D sohada yotishini isbotlang.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Teylor teoremasi keltiring va uni isbotlang.
2. Liuvill teoremasi keltiring va uni isbotlang.
3. Golomorf funksiyaning nollarini tavsiflang.
4. Yagonalik teoremasi keltiring va uni isbotlang.
5. Veyershtass teoremasi keltiring va uni isbotlang.

VI BOB. LORAN QATORLARI

§ 23. Loran qatorlari

1. Loran teoremasi. 1-teorema (Loran). Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya biror $r < |z-a| < R$ ($a \neq \infty$) halqada golomorf bo'lsin. U holda shu funksiyaning shu halqada yaqinlashuvchi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (1)$$

qatorga yoyish mumkin, bu yerda C_n kompleks sonlar bo'lib,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}, r < \rho < R \quad (2)$$

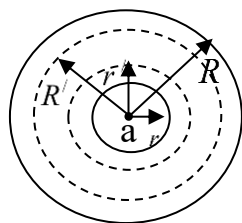
formula orqali ifodalanib, Loran koeffitsiyentlari deb aytiladi.

Koeffitsiyentlari (2) formula bilan ifodalanuvchi (1) qator $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqta atrofidagi Loran qatori deb aytiladi.

Isbot. Berilgan $r < |z-a| < R$ halqaning ichida yotuvchi $K_1: r' < |z-a| < R'$ halqani chizamiz. $f(z)$ funksiya $\bar{K}_1$ halqada golomorf. Ko'p bog'lamli soha $\left(\bar{K}_1\right)$ uchun Koshining integral formulasiga ko'ra $\forall z \in K_1$ uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \quad (3)$$

(3) qatorning har bir hadini darajali qatorga yoyamiz. Birinchi integralning yadrosini quyidagi qatorga yoyamiz:



$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1-\frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \quad (4)$$

yoyilma qatorda o'rinligini topish uchun $\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ yoyilmaning $\{|z| < 1\}$ doirada o'rinli bo'lib, har qanday $\{|z| \leq \rho < 1\}$ doirada tekis yaqinlashishidan foydalanamiz: $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{R'} = q < 1, \quad \forall z \in K'$ va barcha $\xi: |\xi-a|=R'$ bo'lganligi uchun (4) yoyilma o'rinli va o'zining yig'indisiga ξ ga nisbatan tekis yaqinlashadi. (3) formula ikkinchi

integrali yadrosini esa (4) qatorda z va ξ larni bir-biri bilan almashtirish natijasida hosil qilinadigan

$$\frac{1}{\xi - z} = -\frac{1}{z - \xi} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}} \quad (5)$$

qatorga yoyamiz. $\left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| = \frac{r'}{|z - a|} = q' < 1$ bo'lganligi uchun yuqorida keltirilgan sababga ko'ra (5) yoyilma $\forall z \in K'$ va $\forall \xi: |\xi - a| = r'$ uchun o'rinli va o'z yig'indisiga ξ ga nisbatan tekis yaqinlashadi. (4) va (5) qatorlarni uzluksiz $f(\xi)$ funksiyaga ko'paytirsak, ularning tekis yaqinlashishi saqlanadi. Shuning uchun hosil bo'lgan qatorlarni (3) ifodaning mos ravishda birinchi va ikkinchi integrallariga qo'yib, integrallar ostida hosil bo'lgan qatorlarni hadlab integrallasak (bunday amalni bajarish mumkinligini asoslang!), quyidagi munosabatni olamiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^{-n-1}, \quad \forall z \in K',$$

bu yerda

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=R'} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \quad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=r'} f(\xi) (\xi - a)^n d\xi \quad (7)$$

(6) va (7) koeffitsientlarni shunday ifodalaymizki, natijada ular bitta formula yordamida yozilsin. Buning uchun integrallash chizig'ining umumiy radiusi ρ ni ixtiyoriy, lekin $r' < \rho < R'$ shartni qanoatlantiruvchi qilib tanlaymiz. Murakkab kontur uchun Koshining integral teoremasiga binoan (6) va (7) formulalarda integrallash chiziqlari sifatida $|\xi - a| = \rho$ aylanani olish mumkin, chunki bunday integrallarning qiymati aylana radiusidan bog'liq emas. Ikkinchi tomondan $n = -1, -2, \dots$ uchun $C_n = b_{-n-1}$ deb olsak, (6) va (7) koeffitsiyentlar quyidagi yagona formula bilan ifodalanadi:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \quad (8)$$

U holda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} (z - a)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n-1} (z - a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - a)^n,$$

$\forall z \in K'$ 1-teorema isbot bo'ldi.

2. Loran qatorining regulyar va asosiy qismlari. Agar

$a \neq \infty$ bo'lib, $f(z)$ funksiya a nuqta atrofidagi Loran qatorining ko'rinishi $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ bo'lsa, u holda uning $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ qismi Loran qatorining to'g'ri qismi yoki regulyar qismi deyiladi. Bu qism $|z-a| < R$ doirada yaqinlashuvchi bo'ladi va darajali qatorlarning xossalariga binoan uning yig'indisi $f_1(z)$ shu doirada golomorf funksiya iboratdir. Loran qatorining

$$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \left(\frac{1}{z-a} \right)^n$$

qismi uning *asosiy qismi* deyiladi. Bu qism Loran qatori yig'indisi $f(z)$ funksiya $z = a$ nuqtada qanday maxsuslikka ega bo'lsa, xuddi shunday maxsuslikka ega bo'lgan uning eng sodda qismidir. Darajali qator xossalaridan biriga asosan $|z-a| > r$ to'plamda, ya'ni $|z-a| \leq r$ doiraning tashqarisida $f_2(z)$ golomorf funksiya iborat bo'ladi.

$a = \infty$ nuqta atrofida $f(z)$ funksiyaning Loran qatori deb $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ ga aytiladi, agar u ∞ atrofidagi biror $R < |z| < \infty$ halqada yaqinlashuvchi bo'lsa. Bu holda Loran qatorining to'g'ri, ya'ni regulyar qismi $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n}$ dan, asosiy qismi esa $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ dan iborat bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 1}$ Loran qatorining yaqinlashish nuqtalari to'plamini toping.

Yechish: Bu qatorning koeffitsiyentlari

$$c_n = \frac{1}{n^2 + 1}, \quad c_{-n} = \frac{1}{(-n)^2 + 1} = \frac{1}{n^2 + 1}$$

bo'lib, Koshi-Adamar formulasidan

$$R=1, \quad r=1.$$

bo'ladi. Bu holda berilgan Loran qatorining yaqinlashish sohasi $\{r < |z| < R\}$ to'plam – bo'sh to'plam bo'ladi. $|z| < 1$ da

$$\left| \frac{z_n}{n^2 + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + 1}$$

bo'lganligi sababli berilgan qator yaqinlashuvchi (absolut) bo'ladi, shuningdek, ushbu qatorning yaqinlashish sohasi $\{|z|=1\}$ aylana bo'ladi.

2-misol. Ushbu $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ funksiyani $V = \{0 < |z| < \infty\}$ halqada z ning darajalari bo'yicha Loran qatoriga yoying.

Yechish: Dastlab, $e^{\frac{1}{z}}$ funksiyani qatorga yoyamiz:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

Bu qator $\{|z| > 0\}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$f(z) = z^3 \left(1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+3)!}.$$

Bu berilgan funksiya z ning darajalari bo'yicha yoyilmasidir.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi Loran qatorlarini yaqinlashish nuqtalar to'plamini toping:

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 1}$, 2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}$.

Quyidagi funksiyalarni berilgan nuqtalarda Loran qatoriga yoying:

6. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 1$. 7. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = \infty$. 8. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$, $z_0 = 1$.

9. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $z_0 = 0$. 10. $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}$, $z_0 = -1$.

Quyidagi Loran qatorlarining yaqinlashish radiusini toping:

11. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 1}$, 12. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n$, 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}$, 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n}$, 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}$.

§ 24. Funksiyani Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligi. Maxsus nuqtalar va Loran qatorlari orasidagi bog'lanishlar

1. Funksiyani Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligi. 1-tasdiq. Agar biror $r < |z-a| < R$ halqada

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

ifodalansa, u holda $c_n = b_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Funksiyaning Loran qatori haqidagi teorema isbotidan Loran qatorining $r < |z-a| < R$ halqaning ichkarisida, ya'ni halqa ichidagi har bir yopiq to'plamda, tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Shuning uchun bu qatorlarni $(z-a)^{-m-1}$ ($\forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ga ko'paytirib, hosil bo'lgan qatorlarni $|z-a| = \rho$ aylana bo'yicha hadlab integrallasak,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz \quad (1)$$

ga ega bo'lamiz. (1) dagi integralni aylananing parametrik tenglamasi $z = a + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ dan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1} dz = i \int_0^{2\pi} \rho^{n-m} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = i \rho^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 2\pi i, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

Demak, (1) dan $2\pi i c_m = 2\pi i b_m$, $c_m = b_m$ ni hosil qilamiz. *1-tasdiq isbot bo'ldi.*

2. Maxsus nuqtalar va Loran qatorlari orasidagi bog'lanishlar. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya

$$K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$$

sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf bo'lib, a nuqta shu funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin. $f(z)$ funksiya K da Loran qatori

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (2)$$

ga yoyiladi. Qaralayotgan funksiyaning Loran qatori (4) ga nisbatan quyidagi uchta holni qaraymiz:

a)(2) qatorda $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadlari qatnashmagan hol;

b)(2) qatorda $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadlaridan chekli sondagisi qatnashgan hol;

c)(2) qatorda $z-a$ ayirmaning cheksiz ko'p manfiy darajali hadlari qatnashgan hol.

Mana shu hollarga qarab $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtalarining turlarini aniqlash mumkin bo'ladi.

1-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran

qatoriga yoyilmasi (1) da $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlari qatnashmasligi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda $z \rightarrow 0$ da $f(z)$ funksiyaning chekli limiti mavjud bo'ladi:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (A - \text{chekli}).$$

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyaning xossasiga binoan a nuqtaning o'yilgan

$$\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < R\}$$

atrofida $f(z)$ funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday o'zgarmas $M > 0$ topiladiki,

$$|f(z)| \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Ushbu

$$0 < \rho < R$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ρ sonini olaylik. Unda Koshi tengsizliklariga ko'ra $f(z)$ funksiyaning Loran qatori koeffitsiyentlari uchun

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3)$$

bo'ladi.

Agar $n = -1, -2, -3, \dots$ bo'lib, $\rho \rightarrow 0$ da $0 < \rho < R$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{M}{\rho^n} = 0$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (5) munosabatdan

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = c_{-n} = \dots = 0$$

bo'lishini topamiz. Bu esa (2) Loran qatoriga $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlari bo'lmasligini bildiradi. Boshqacha aytganda bu holda (2) Loran qatorining bosh qismi aynan 0 ga teng bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (2) da $z - a$ ayirmaning manfiy darajaga qatnashgan hadlari bo'lmasin, ya'ni Loran qatorining bosh qismi aynan 0 ga teng bo'lsin. Bu holda $f(z)$ funksiyaning Loran qatori ushbu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \dots \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi. *Teorema isbot bo'ldi.*

2-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uchun bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lishi uchun a nuqtaning biror o'yilgan atrofi $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < R\}$ da $f(z)$ funksiyaning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli. Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan 1-teoremaning isboti kabidir.

Faraz qilaylik, a nuqtaning $f(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu holda $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiya chekli limitga ega bo'ladi. Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

deb olinsa, funksiyaning a nuqtadagi maxsusligi bartaraf etiladi. Maxsus nuqtaning bartaraf etiladigan deb nomlanishiga boisi ham shundadir.

3-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmai (1) da $z - a$ ayirmaning manfiy bo'lmagan darajali hadlaridan chekli sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriylik. a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsin. unda $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

bo'ladi.

Bu holda a nuqtaning o'yilgan $U = \{0 < |z - a| < r\}$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(z)$ golomorf funksiya bo'lib,

$$f(z) \neq 0 \quad (z \in U)$$

bo'ladi. U sohada ushbu

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya U sohada golomorf bo'ladi.

Ikkinchi tomondan

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$$

bo'ladi. demak, $z = a$ nuqtada $\varphi(z)$ funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi ekan.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0 = \varphi(a)$$

deyilsa, unda $\varphi(z)$ funksiya $\{z \in \mathbb{C}: |z - a| < r\}$ doirada golomorf bo'lib qoladi.

$z = a$ nuqta $\varphi(z)$ funksiyaning noli bo'lgani uchun uni

$$\varphi(z) = (z - a)^n \cdot \psi(z)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\psi(z)$ funksiya a nuqtada golomorf funksiya bo'lib, $\psi(z) \neq 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, qarayotgan U atrofda

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{\psi(z)} \quad (5)$$

bo'lishini topamiz.

Endi $\frac{1}{\psi(z)}$ funksiyaning a nuqta atrofida $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ da Teylor qatoriga yoyamiz:

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z - a) + \dots + c_0(z - a)^n + \dots, \quad (6)$$

bunda

$$c_{-n} = \frac{1}{\psi(a)} \neq 0.$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$f(z) = c_{-n}(z - a)^{-n} + c_{-n+1}(z - a)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lganda, uning Loran qatori bosh qismi hadlarining soni chekli bo'lar ekan.

Yetarliligi. Aytaylik, a nuqtaning biror o'yilgan atrofi, $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$ da $f(z)$ funksiyaning Loran qatoridagi $z - a$ ayirmaning manfiy darajali hadlarining soni chekli bo'lsin:

$$f(z) = c_{-n}(z - a)^{-n} + c_{-n+1}(z - a)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n \quad (c_{-n} \neq 0) \quad (7)$$

Ravshanki, $f(z)$ va $(z - a)^n \cdot f(z) = \psi(z)$ funksiyalar $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$ da golomorf bo'ladi.

Yuqoridagi (9) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\psi(z) = (z - a)^n \cdot f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z - a) + c_{-n+2}(z - a)^2 + \dots$$

Bundan esa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = c_{-n} \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

bo'lishini topamiz. Bu esa a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi ekanini bildiradi. *Teorema isbot bo'ldi.*

4-teorema. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} \quad (\varphi(z) \neq 0)$$

funksiya a nuqta atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Aytaylik a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiya a nuqta atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lishi yuqorida keltirilgan teoremaning isbotlash jarayonida ko'rsatilgan edi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik,

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

a nuqtaning atrofida golomorf bo'lib, $\varphi(a) = 0$ bo'lsin. Modomiki, $\varphi(z) \neq 0$

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < r\}$$

topiladiki, bu atrofda $\varphi(z) \neq 0$ bo'ladi. Demak, shu atrofda

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$$

funksiya golomorf, a nuqta esa uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Ayni paytda

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\varphi(z)} = \infty$$

bo'ladi. bu esa a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb nuqtasi ekanini bildiradi. *Teorema isbot bo'ldi.*

Bu teorema funksiyaning qutb nuqtalari bilan uning nollari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

1-ta'rif. *Ushbu*

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiyaning a nuqtadagi nolining tartibi f(z) funksiyaning a nuqtadagi qutb nuqtasi tartibi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\varphi(z) = \frac{(z-2)^3}{z}$$

funksiyaning qaraylik. Ravshanki, $z = 2$ nuqta bu funksiyaning 3-tartibli noli. $z = 2$ nuqta

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)^3}$$

funksiyaning 3-tartibli qutb nuqtasi bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan 4-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. *f(z) funksiyaning a qutb nuqtasining tartibi*

$$f(z) = c_{-n}(z-a)^{-n} + c_{-n+1}(z-a)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

yoyilmadagi n songa teng bo'ladi.

2.O'ta (muhim) maxsus nuqta. 5-teorema. *f(z) funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning o'ta muhim maxsus nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (2) da $z-a$ ayirmaning darajali hadlaridan cheksiz ko'p sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.*

Bu teoremaning isboti 3- va 4- teoremlardan kelib chiqadi. Funksiyaning o'ta maxsus nuqta atrofidagi xarakterini quyidagi teorema ifodalaydi.

6-teorema (Soxotskiy). *Agar $a \in \mathbb{C}$ nuqta f(z) funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi bo'lsa, u holda har qanday A soni ($A \in \bar{\mathbb{C}}$) olinganda ham, a ga yaqinlashuvchi shunday $\{z_n\}$ ketma-ketlik ($z_n \rightarrow a$) topiladiki,*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $A = \infty$ bo'lsin. bu holda a ga yaqinlashuvchi har qanday $\{z_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham ($z_n \rightarrow a$)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$$

bo'lishini ko'rsatish kerak.

Shartga ko'ra a nuqta $f(z)$ funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi. Unda 2-teoremaga ko'ra a nuqtaning shunday o'yilgan atrofi

$$U_{r_1}(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r_1\}$$

topiladiki, bu atrofda $f(z)$ funksiya chegaralanmagan bo'ladi:

$$|f(z_1)| > 1$$

bo'ladi.

Endi a nuqtaning ushbu

$$U_{r_2}(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2} \right\}$$

atrofini olamiz. Ravshanki, $U_{r_2}(a) \subset U_{r_1}(a)$ bo'ladi.

Qaralayotgan $f(z)$ funksiya bu atrofda ham chegaralanmaganligi uchun, shunday $z_2 \in U_{r_2}(a)$ nuqta topiladiki,

$$|f(z_2)| > 2$$

bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettira borib, n ta qadamdan keyin, a nuqtaning

$$U_{r_n}(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \frac{|z_1 - a|}{2^{n-1}} \right\}$$

atrofda kelamizki, $z_n \in U_{r_n}(a)$ uchun

$$|f(z_n)| > n \quad (8)$$

bo'ladi.

Shu mulohazani davom ettiraverish natijasida $\{z_n\}$ ketma-ketlik hosil bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da $z_n \rightarrow a$ bo'ladi. unda (8) munosabatdan

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, $A \neq \infty$ bo'lsin. Agar a nuqtaning ixtiyoriy kichik

$$U_\delta(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \delta\}$$

atrofida z nuqta topilsaki, $f(z) = A$ bo'lsa, u holda bunday z nuqtalardan tuzilgan $\{z_n\}$ ketma-ketlik uchun $z_n \rightarrow a$ bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z_n) = A$$

bo'ladi.

Agar a nuqtaning ixtiyoriy kichik $U_\delta(a)$ atrofida $f(z) = A$ bo'ladigan nuqtalar bo'lmasa, u holda, ravshanki, bu atrofda

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

funksiya golomorf bo'ladi.

Modomiki, $z = a$ nuqta $\varphi(z)$ funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi ekan, unda yuqoridagi isbot etilganiga ko'ra, a nuqtaga yaqinlashuvchi shunday $\{z_n\}$ ketma-ketlik topiladiki,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \infty$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{\varphi(z)} \right) = A.$$

Soxotskiy teoremasi isbot bo'ldi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ funksiyaga $1 < |z| < 2$ halqada Loran qatoriga yoyilsin. Berilgan funksiyani oddiy kasrlarga yoyamiz:

$$f(z) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z+2)} \right).$$

Oddiy kasrlarning har birini Loran qatoriga yoyamiz:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z} \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n, \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1; \quad (9)$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2 \left(1 - \left(-\frac{z}{2} \right) \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad \left| -\frac{z}{2} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 2 \quad (10)$$

(9) va (10) dan $f(z)$ funksiya Loran qatori $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ bo'lib, bu yerda

$$C_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1}}, & n = 0, 1, \dots \\ \frac{1}{3}, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$ funksiyani $\{1 \leq |z| \leq 2\}$ halqada Loran qatoriga yoying.

2. Ushbu $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ funksiyani $z_0 = i$ halqada Loran qatoriga yoying.

3. Ushbu $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^3}$ funksiyani $z_0 = 0$ halqada Loran qatoriga yoying.

4. Ushbu $f(z) = 2\sin^2 z + \cos \frac{1}{z}$ funksiyani $z_0 = 0$ halqada Loran qatoriga yoying.

5. Ushbu $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ funksiyani berilgan $a=0$ va $-\frac{2}{3} \in V$ halqada $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha Loran qatorga yoying.

6. Ushbu $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ funksiyani berilgan $V = \{0 \leq |z+1| \leq 3\}$ halqada va $a=-1$ da $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha Loran qatorga yoying.

7. Ushbu $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ funksiyani berilgan $V = \{0 \leq |z-2| \leq \infty\}$ va $a=2$ va halqada $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha Loran qatorga yoying.

8. Ushbu $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 2i}$ funksiyani berilgan $-1 \in V$ halqada va $a=1$ da $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha Loran qatorga yoying.

Quyidagi funksiyalarni berilgan nuqtalarning atrofida Loran qatoriga yoyish mumkinmi?

9. $f(z) = \cos \frac{1}{z}$, $z = \infty$; 10. $f(z) = th \frac{1}{z}$, $z = 0$; 11. $f(z) = \frac{z}{\sin z - 1}$, $z = \infty$;

12. $f(z) = \sec \frac{1}{z-1}$, $z = 0$.

13. Faraz qilaylik, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ Loran qatori $\{r \leq |z-a| \leq R\}$ yopiq halqada yaqinlashsin bu qatorning koeffitsiyentlari uchun ushbu $|c_n| \leq M \left(\frac{1}{r^n} + \frac{1}{R^n} \right)$, $n \in \mathbb{Z}$ tengsizlikni o'rinli bo'lishini isbotlang.

14. Faraz qilaylik, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ va $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ Loran qatori $\{r \leq |z-a| \leq R\}$ yopiq halqada mos ravishda $f(z)$ va $g(z)$ yig'indiga ega bo'lsin. U holda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ Loran qatori o'sha halqada $f(z)g(z)$ yig'indiga ega bo'lishini isbotlang.

15. Funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligi haqidagi teoremani isbotlang.

§ 25. Maxsus nuqtalar va ularning turlari

1. **Maxsus nuqtalar.** Biz avvalgi boblarda golomorf funksiyalar va ularni xossalarini o'rgandik. Agar $a \in C$ nuqtada $f(z)$ funksiyaning

golomorf bo'lishi sharti bajarilmasa, u holda funktsiyani shu nuqta atrofida o'rganiladi.

Odatda, bunday nuqta $f(z)$ funktsiyaning maxsus nuqtasi deb qaraladi.

1-ta'rif. Agar $f(z)$ funktsiya ushbu

$$\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - a| < r\}$$

sohada (a nuqtaning o'yilgan a atrofida) golomorf bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funktsiyaning maxsus nuqtasi deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z + i}$$

funktsiyani qaraylik. Ravshanki, bu funktsiya

$$\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z + i| < r\}$$

sohada (halqada) golomorf. Binobarin, $a = -i$ nuqta berilgan funktsiyaning yakkaangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

2-tarif. Agar $f(z)$ funktsiya ushbu

$$\{z \in \mathbb{C}: R < |z| < +\infty\}$$

sohada golomorf bo'lsa, u holda $a = \infty$ nuqta $f(z)$ funktsiyaning **yakkaangan maxsus nuqtasi** deyiladi.

2-misol. Ushbu $f(z) = e^z$ funktsiyani qaraylik. Bu funktsiya

$$\{z \in \mathbb{C}: R < |z| < +\infty\}$$

sohada golomorf. Demak, $a = +\infty$ nuqta berilgan $f(z) = e^z$ funktsiyaning yakkaangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Funktsiyaning yakkaalanmagan maxsus nuqtalari ham bo'ladi.

Masalan: Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}} \quad (1)$$

funktsiyani qaraylik. Ravshanki,

$$a=0 \text{ hamda } a_n = \frac{1}{n} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots)$$

nuqtalar (1) funktsiyaning maxsus nuqtalari bo'ladi. Bunda $a=0$ maxsus nuqta berilgan funktsiyaning yakkaangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Darhaqiqat, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lganligi sababli, $a=0$ nuqtaning har qanday o'yilgan atrofi

$$U_\delta(a) = \{0 < |z| < \delta\}$$

da funktsiyaning maxsus nuqtalari bo'ladi. Demak, $a=0$ berilgan funktsiyaning yakkaalanmagan maxsus nuqtasi ekan.

2. Yakkalangan maxsus nuqtalarining turlari. Aytaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda $f(z)$ funksiya

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$$

sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf.

$f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow a$ dagi limitining xarakteriga qarab yakkalangan maxsus nuqtalar turlarga ajraladi.

3-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (A\text{-chekli})$$

bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning **bartaraf qilinadigan (chetlanishi mumkin bo'lgan) maxsus nuqtasi** deyiladi.

3-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $\mathbb{C} \setminus \{z=0\}$ da golomorf bo'lib, $a=0$ nuqta uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Ayni paytda

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Demak, a nuqta berilgan funksiyaning bartaraf qilinadigan maxsus nuqtasi bo'ladi.

4-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning **qutb maxsus nuqtasi** deyiladi.

4-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $\mathbb{C} \setminus \{z = -1\}$ da golomorf bo'lib, $a = -1$ nuqta uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Bu funksiya uchun

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z+1} = \infty$$

bo'lganligi sababli $a = -1$ berilgan funksiyaning qutb nuqtasi bo'ladi.

5-ta'rif. Agar $z \rightarrow a$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning o'ta (muhim) maxsus nuqtasi deyiladi.

5-misol. Ushbu

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C \setminus \{z=0\}$ da holomorf bo'lib, $z=0$ nuqta uning *yakkalangan maxsus nuqtasi* deyiladi.

Qaralayotgan funksiyaning $z \rightarrow 0$ da limiti mavjud emas. Haqiqattan ham, agar $z=x$ bo'lib 0 ga intilsa, unda

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

bo'ladi, va demak, $z = x \rightarrow 0$ da limiti mavjud emas.

Agar $z = iy$ ifoda 0 ga intilsa, unda

$$e^{\frac{1}{z}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$$

bo'lishini e'tiborga olib, $z = iy \rightarrow 0$ da $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiyaning limiti mavjud emasligini topamiz. Demak, $z = 0$ nuqta berilgan funksiyaning o'ta maxsus nuqtasi bo'ladi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va turini aniqlang.

Yechish: $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ funksiya uchun avvalo $\cos z$ funksiyaning $z=0$ nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz: $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$

U holda $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$ bo'ladi, keyingi tengsizlikda $z \rightarrow \infty$ hadlab limitga o'tib topamiz: $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}$.

Demak, $z=0$ berilgan funksiyaning bartaraf qilishi mumkin bo'lgan maxsus nuqtasi ekan.

2-misol. $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini toping va turini aniqlang.

Yechish: $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$ funksiya $\{0 \leq |z - \pi i| \leq \infty\}$ golomorf bo'lib, $z = \pi i$ nuqta golomorf bo'lmaydi πi nuqta maxsus nuqta bo'ladi $\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{z}{e^z + 1} = \infty$ bo'lishidan πi nuqta maxsus nuqta bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$ funksiyaning maxsus nuqtasini aniqlang.
2. Ushbu $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ funksiya uchun $z=0$ nuqta qanday maxsus nuqta bo'ladi.
3. Ushbu $f(z) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{\sin^2(z-1)}$ funksiyaning $z=1$ nuqtadagi qutb tartibini aniqlang.
4. Ushbu $f(z) = z \left(e^{\frac{1}{z}} - 1 \right)$ funksiyaning barcha yakka maxsus nuqtalarini toping va uning xarakteristikasini aniqlang.
5. Ushbu $f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}$ funksiyaning maxsus nuqtasini aniqlang.
6. Ushbu $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ funksiya uchun $z=0$ nuqta qanday maxsus nuqta bo'ladi.
7. Ushbu $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi qutb tartibini aniqlang?
8. Ushbu $f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$ funksiyaning barcha yakka maxsus nuqtalarini toping va uning xarakteristikasini aniqlang.
9. Ushbu $f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$ funksiya uchun $z = -i$ nuqtaning o'ta maxsus nuqta bo'lishini ko'rsating.
10. Ushbu $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 - 4)^2 (z-1)^3}$ funksiyaning $z=2$ va $z=1$ nuqtadagi qutbning tartibini aniqlang.
11. Ushbu $f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$ funksiya uchun $z = -i$ nuqtaning o'ta maxsus nuqta bo'lishini ko'rsating.
12. Ushbu $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 - 4)^2 (z-1)^3}$ funksiyaning $z=2$ va $z=1$ nuqtadagi qutbning tartibini aniqlang.

13. Ushbu $f(z) = \sin \frac{\pi}{z^2 + 1}$ funksiya uchun $z = -i$ nuqtaning o'ta maxsus nuqta bo'lishini ko'rsating.

14. Ushbu $f(z) = \frac{z}{\sin^3 z}$ funksiyaning $a = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ nuqtadagi qutbning tartibini aniqlang.

15. Ushbu $f(z) = \frac{\ln(1+z^3)}{z^2}$ funksiya $z=0$ nuqtada bartaraf qiladigan maxsus nuqta ekanligini ko'rsating.

16. Ushbu $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}$ funksiya $z = \frac{\pi}{2}$ nuqtada bartaraf qiladigan maxsus nuqta ekanligini ko'rsating.

Nazorat imtihonlari uchun namunaviy savollar

1. Loran teoremasini keltiring va uni isbotlang.
2. Loran qatorining regulyar va asosiy qismlarini ta'riflang.
3. Maxsus nuqtalar va ularni klassifikatsiyalang.
4. Yakkalangan maxsus nuqtalarni klassifikatsiyalang.
5. Funksiyani Loran qatoriga yoyilmasining yagonaligini isbotlang.
6. Maxsus nuqtalar va Loran qatorlari orasidagi bog'lanishlar tavsiflang.
7. O'ta (muhim) maxsus nuqtani ta'riflang.
8. Soxotskiy teoremasini keltiring va isbotlang.

VII BOB. CHEGIRMALAR NAZARIYASI. BA'ZI TUSHUNCHALAR

§ 26. Chegirmalar va ularni hisoblash

1. Chegirma tushunchasi. 1-lemma. Agar $f(z)$ funksiya biror $K: r < |z-a| < R$ halqada golomorf bo'lsa, u holda $\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$, $r < \rho < R$, integralning qiymati ρ dan bog'liq emas.

Isbot. Haqiqatan ham, lemmaning isboti uchun $\forall \rho_1 < \rho_2: r < \rho_1 < \rho_2 < R$ larni olib, $\int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz = \int_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz$ tenglikni ko'rsatish kifoya. Buning uchun ichki radiusi ρ_1 , tashqi radiusi ρ_2 dan iborat $K_1: \rho_1 < |z-a| < \rho_2$ halqani olamiz. $\bar{K}_1 \subset K$ munosabatdan $f(z)$ funksiya $\bar{K}_1$ yopiq halqada golomorf ekanligini olamiz. Shuning uchun murakkab kontur uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\int_{\partial K_1} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz = \int_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz.$$

1-lemma isbot bo'ldi.

1-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya uchun $z=a \neq \infty$ nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning $z=a$ nuqtadagi qoldig'i deb

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz \quad (1)$$

ga aytiladi, bu yerda ρ yetarlicha kichik musbat son.

2-ta'rif. $f(z)$ funksiyaning $z=\infty$ nuqtadagi qoldig'i deb

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)dz \quad (2)$$

ga aytiladi, bu yerda R yetarlicha katta ixtiyoriy musbat son.

1-lemmaga ko'ra (1) va (2) integrallarning qiymatlari ρ va R dan bog'liq emas. Agar $a \neq \infty$ nuqtada $f(z)$ funksiya golomorf bo'lsa, u holda $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$. Lekin $a = \infty$ bo'lib, $f(z)$ funksiya $z = \infty$ da golomorf bo'lsa hamki, $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$ bo'lishi mumkin. Masalan, $f(z) = \frac{1}{z}; z = \infty$ uchun golomorflik nuqtasi bo'lsa ham (chunki, $f(\infty) = 0$ deb aniqlash

mumkin) $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = -1 \neq 0$.

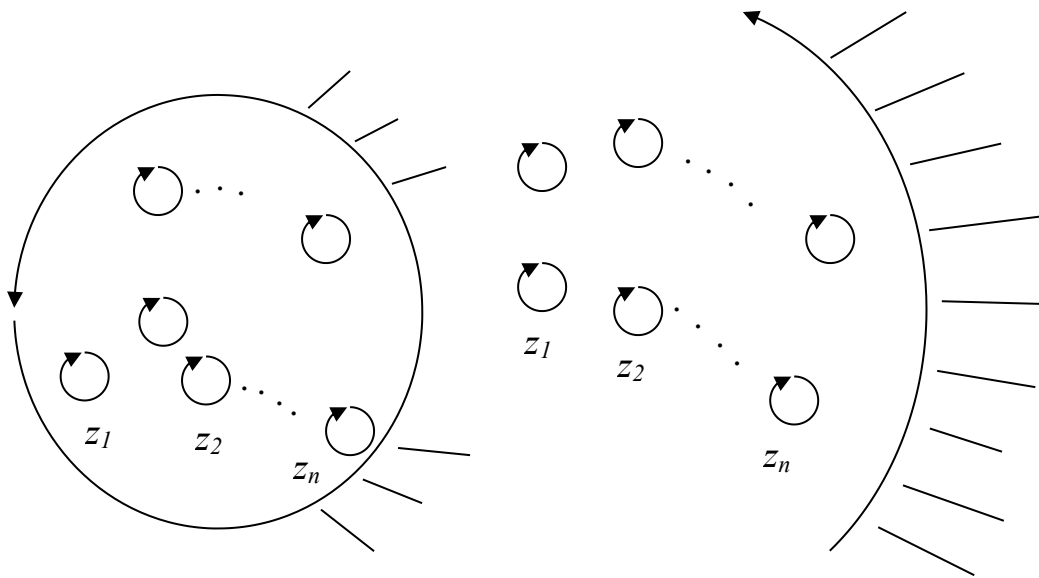
2. Chegirma nazariyasining asosiy teoremasi. 2-teorema.

Agar $f(z)$ funksiya chekli bog'lamli chegerasi chekli sondagi bo'lakli silliq yopiq Jordan chiziqlaridan iborat G sohaning yakkalangan maxsus $z_1, z_2, \dots, z_n \in G$ nuqtalaridan tashqari yopiq $\bar{G}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3)$$

Bunda $\infty \notin \partial G$, agar $\infty \in G$ bo'lsa, u holda bu nuqta ham z_k nuqtalar qatoriga qo'shiladi.

Isbot. Agar $z_k \neq \infty$ bo'lsa, $U_\varepsilon(z_k) = \{z \mid |z - z_k| < \varepsilon\}$; $z = \infty$ bo'lsa, $U'_\varepsilon(\infty) = \left\{z \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ deb olib, ε ni shu qadar kichik qilib tanlaymizki, barcha $U_\varepsilon(z_k), U'_\varepsilon(\infty)$ atroflar o'zaro va ∂G bilan kesishmay, o'z chegaralari bilan birgalikda G soha ichida joylashsin. U holda (1-chizmaga qarang) $G_\varepsilon = G \setminus \left\{\bigcup_{k=1}^n \bar{U}_\varepsilon(z_k)\right\}$ yoki $\infty \in G$ bo'lsa, $G_\varepsilon = G \setminus \left\{\bigcup_{k=1}^n \bar{U}_\varepsilon(z_k) \cup \bar{U}_\varepsilon(\infty)\right\}$ belgilashni olsak, G_ε -chegaralangan chekli bog'lamli soha bo'lib, $f(z)$ funksiya $\bar{G}_\varepsilon$ da golomorf bo'ladi.



1-chizma

Murakkab konturlar uchun Koshining integral teoremasiga muvofiq,

$$\int_{\partial G_\varepsilon} f(z) dz = 0$$

yoki

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\partial U_\varepsilon(z_k)} f(z)dz + A \int_{\partial U'_\varepsilon(\infty)} f(z)dz, \quad (4)$$

o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $A = \begin{cases} 1, \infty \in G \\ 0, \infty \notin G \end{cases}$. (1) va (2) formulalarga ko‘ra

$$\int_{\partial U_\varepsilon(z_k)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_k} f(z), \quad \int_{\partial U'_\varepsilon(\infty)} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z). \quad (5)$$

Agar (5) qiymatlarni (4) ga qo‘ysak, (3) formulani olamiz. 1-teorema isbotlandi.

3. Qoldiqlarni hisoblash formulalari. 2-teorema. Agar $F(z) = f(z)/g(z)$ va $f(z), g(z)$ funksiyalar $a \neq \infty$ nuqtada golomorf bo‘lib, shu nuqta $g(z)$ funksiya uchun n -tartibli nol bo‘lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n F(z)] \right\}. \quad (6)$$

Isbot. n -tartibli nol ta’rifiga ko‘ra $g(z) = (z-a)^n g_1(z)$ ifodalanib, $g_1(z)$ $z=a$ nuqtada golomorf va $g_1(a) \neq 0$. U holda

$$F(z) = f(z)/[(z-a)^n g_1(z)] = \varphi(z)/(z-a)^n.$$

Bu yerda $\varphi(z) = f(z)/g_1(z)$ $z=a$ nuqtada golomorfdir. Qoldiq ta’rifi va Koshining hosilalar uchun integral formulasiga binoan

$$\operatorname{res}_{z=a} F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} F(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \quad (7)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Agar $\varphi(z) = (z-a)^n F(z)$, $z \neq a$ ni nazarga olsak, (7) dan (6) formulaning o‘rinli ekanligini olamiz.

Bu formula chekli qutb maxsus nuqtalardagi qoldiqni hisoblash uchun qo‘llaniladi.

Agar $n=1$ bo‘lsa, u holda (6) formuladan

$$\operatorname{res}_{z=a} F(z) = f(a)/g'(a) \quad (8)$$

ni olamiz.

Agar $z=a$ muhim maxsus nuqta yoki $a=\infty$ bo‘lsa, u holda bunday nuqtalarda qoldiqni hisoblash uchun quyidagi teorema qo‘llaniladi. Bu teoremadan $z=a$ chekli qutb bo‘lganda ham foydalanish mumkin.

3-teorema. Agar $z=a \neq \infty$ yakkalangan maxsus nuqta bo‘lib, $f(z)$ funksiyaning shu nuqta atrofidagi Loran qatori $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ berilgan bo‘lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} \quad (9)$$

Agar $a = \infty$ nuqta atrofidagi Loran qatori $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ berilgan bo'lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} \quad (10)$$

Isbot. (9) formulani isbotlaymiz.

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^n dz = c_{-1}$$

(hadlab integrallash mumkinligi Loran qatorining ixtiyoriy $|z-a|=\rho$, $r < \rho < R$ aylanada tekis yaqinlashishidan kelib chiqadi). (9) formula isbot bo'ldi. (10) formulani ham shunga o'xshash isbotlash mumkin. *3-teorema isbot bo'ldi.*

1-misol. $I = \int_{|z|=4} \frac{z \cos \frac{1}{z-1}}{z^2 + 4} dz$ integralni hisoblang.

Yechish. Qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra

$$I = 2\pi i [\operatorname{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2i} f(z) + \operatorname{res}_{z=1} f(z)] = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i,$$

chunki agar $f(z)$ funksiya $z = \infty$ da golomorf bo'lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z [f(\infty) - f(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(0 - \frac{z \cos \frac{1}{z-1}}{z^2 + 4} \right) = -1.$$

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasini hisoblang.

Yechish: $f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ berilgan funksiyaning z ning darajalari bo'yicha Loran qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z} = z^2 \left[\frac{\pi}{z} - \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^5}{5!} - \dots \right] = \pi z - \frac{\pi^3}{6} \frac{1}{z} + \frac{\pi^5}{5!} \frac{1}{z^3} - \dots$$

Demak, $c_{-1} = -\frac{\pi^3}{6}$ va funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z \rightarrow \infty} z^2 \sin \frac{\pi}{z} = \frac{\pi^3}{6} \text{ bo'ladi.}$$

2-misol. $\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$, $z=a$ nuqtani k -tartibli qutb bo'lishidan uni $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-a)^k}$ ko'rinishida ifodalash mumkin bu yerda $\phi(z)$ funksiya a nuqtadagi golomorf va $\phi(a) \neq 0$. Xuddi $z=a$ nuqta $\frac{f(z)}{f'(z)}$ funksiyasi uchun 1-tartibli qutb bo'lishini va $\operatorname{res}_{z=a} f(z) \frac{1}{f'(z)} = \lim_{x \rightarrow z \rightarrow a} (z-a) \frac{f(z)}{f'(z)} = -k$ bo'lishini ko'ramiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Ushbu $f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasini toping.

2. Quyidagi $f(z) = \frac{z^3 + 1}{(z+2)^2(z-3)}$ funksiyaning $z=3$ nuqtadagi chegirmasini toping.

3. Ushbu $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ funksiyaning barcha chekli maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini toping.

4. Ushbu $\operatorname{res}_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z}}$ chegirmani Loran qatorining c_{-1} koeffitsiyentini aniqlash yordamida yeching.

5. Ushbu $f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^6 - 1}$ funksiyaning $z = \infty$ nuqtadagi chegirmasini toping.

6. $\operatorname{res}_{z \rightarrow 0} \frac{z}{chz - 1 - \frac{z^2}{2}}$ chegirmani hisoblang.

7. Agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyasi uchun k -tartibli qutb bo'lsa, $\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]$ ni toping.

8. Ushbu $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalaridagi chegaralarini toping.

9. Ixtiyoriy juft $f(z)$ funksiya uchun $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ tenglikni bajarilishini ko'rsating.

10. Ixtiyoriy juft $f(z)$ funksiya uchun $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=-a} f(z)$ tenglikni bajarilishini ko'rsating.

11. Quyidagi $f(z) = \operatorname{tg} z$ funksiyaning $z = \frac{\pi}{2}$ nuqtadagi chegirmasini toping.

12. Ushbu $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 9)z^2}$ funksiyaning barcha maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini toping.

13. $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$ chegirmani hisoblang.

14. Agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n -tartibli noli bo'lib $g(z)$ funksiya a nuqtada golomorf bo'lsa, u holda $\operatorname{res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \right]$ ni toping.

15. Quyidagi $f(z) = \sin \frac{4}{z-1}$ funksiyaning $z=1$ nuqtadagi chegirmasini toping.

§ 27. Chegirmalar nazariyasining ba'zi tadbiqlari

1. Berilgan chekli oraliq bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash. Faraz qilaylik chekli $[a, b]$ oraliqda haqiqiy $f(x)$ funksiya berilgan bo'lib, $\int_a^b f(x)dx$ Riman integralini hisoblash talab qilinsin.

Buning uchun shunday bo'laklari silliq yuqori yarim tekislikda yotuvchi C qo'shimcha chiziq olamizki, $C \cup [a, b]$ chiziq biror chegaralangan bir bog'lamli D sohaning chegarasidan iborat bo'lsin. $f(z)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadan $\bar{D}$ sohaga shunday davom ettiramizki, natijada $f(z)$ yakkalangan maxsus $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ nuqtalardan tashqari $\bar{D}$ da golomorf bo'lsin. Shu soha va $f(z)$ funksiya uchun qoldiqlar nazariyasining asosiy teoremasini qo'llasak, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \quad (1)$$

munosabatni olamiz. Bu yerdan

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (2)$$

Agar $\int_C f(z)dz$ integralni bevosita hisoblash yoki $\int_a^b f(x)dx$ integral bilan ifodalash imkoniyati mavjud bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash masalasi yechiladi.

2. Berilgan cheksiz interval bo'yicha haqiqiy funksiya integralini hisoblash. Agar (a, b) interval cheksiz bo'lsa, u holda kengayib boruvchi qo'shimcha shunaqa bo'lakli silliq chiziqlar oilasini olish lozimki, limitga o'tgan taqdirda (a, b) interval hosil bo'lgan sohalar chegarasining bir qismi sifatida paydo bo'lsin. Agar $(a, b) = (-\infty, \infty)$ bo'lsa, u holda (2) ga o'xshash

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \quad (3)$$

ni olamiz. Agar bu yerda $\tilde{N}_R$ - o markazli R radiusli yuqori yarim aylana bo'lsa va $f(z) = F(z)e^{i\lambda z}$ ko'rinishga ega bo'lsa, u holda berilgan integralni hisoblash uchun $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z)e^{i\lambda z} dz$ ni hisoblash kifoya. Ko'p

hollarda $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z)e^{i\lambda z} dz = 0$ ($\lambda > 0$) munosabatni ko'rsatish uchun

quyidagi Jordan lemmasidan foydalaniladi.

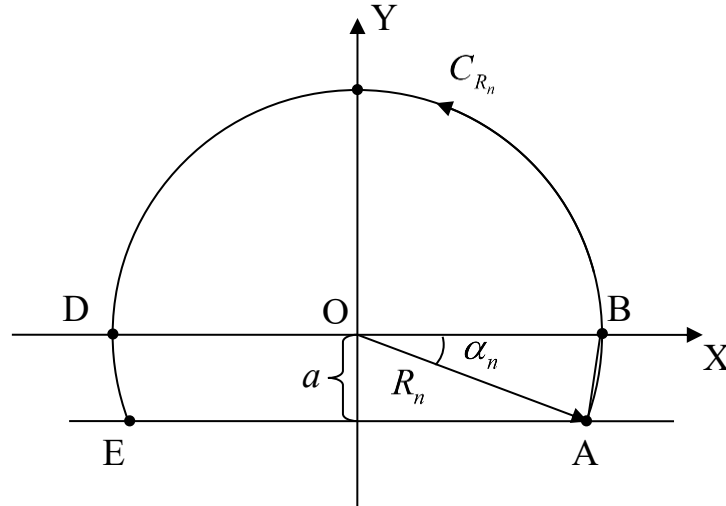
1-lemma(Jordan). Agar $g(z)$ funksiya $C_{R_n} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > -a$ aylana yoylarida $n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty, R_n \rightarrow \infty)$ da nolga $\arg z$ ga nisbatan tekis intilsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunaqa $n_0(\varepsilon)$ nomer topilib, $\forall n > n_0$ uchun $|g(z)| < \varepsilon, \forall z \in C_{R_n}$ bo'lsa, u holda $\forall \lambda > 0$ uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} g(z)e^{i\lambda z} dz = 0$ bo'ladi.

Isbot. Quyidagi 1-chizmadan ko'rinadiki,

$$\sin \alpha_n = \frac{a}{R_n}; \alpha_n = \arcsin \frac{a}{R_n}. \arcsin z = z + \underline{O}(z^3) (z \rightarrow 0)$$

yoyilmadan foydalanib, $\alpha_n = \frac{a}{R_n} + \underline{O}\left[\left(\frac{a}{R_n}\right)^3\right] (n \rightarrow \infty)$ ga ega bo'lamiz.

Bu yerdan $\alpha_n R_n = a + \underline{O}\left(\frac{a^3}{R_n^2}\right) (n \rightarrow \infty)$ kelib chiqadi.



1-chizma

Bu yerdagi oxirgi ikki munosabatlardan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n R_n = a \quad (5)$$

larni hosil qilamiz. Lemma shartiga ko'ra

$$M_n(g) = \max_{z \in C_{R_n}} |g(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (6)$$

Yana 1-chizmadan foydalanib, $\forall z = x + iy \in \overset{\cup}{AB}$ uchun

$$|e^{i\lambda z}| = e^{\operatorname{Re}(i\lambda z)} = e^{-\lambda y} \leq e^{\lambda a} \quad (7)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu yerdan, (5) va (6) dan

$$\left| \int_{AB} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \int_{AB} |g(z)| |e^{i\lambda z}| |dz| \leq M_n(g) e^{\lambda a} \alpha_n R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (8)$$

ni olamiz. Shunga o'xshash

$$\left| \int_{DE} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (9)$$

Agar $\forall z \in \check{BC}$ bo'lsa, u holda $z = R_n e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ va

$$|e^{i\lambda z}| = e^{\operatorname{Re}(i\lambda R_n e^{i\varphi})} = e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \leq e^{-\lambda R_n \frac{2}{\pi} \varphi} \quad (10)$$

(ma'lumki, $\forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ uchun $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$). Lemma sharti va (10) tengsizlikdan foydalanib,

$$\left| \int_{BC} |g(z)| |e^{i\lambda z}| |dz| \right| \leq M_n(g) R_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi} d\varphi = M_n(g) R_n \left(-\frac{\pi}{2\lambda R_n} \right) e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= M_n(g) \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n}) \rightarrow 0 \quad (11)$$

bahoni hosil qilamiz. Shunga o'xshash

$$\int_{\bar{DC}} |g(z)| e^{i\lambda z} |dz| = \int_{CD} |g(z)| e^{i\lambda z} |dz| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (12)$$

ni olish mumkin. Jordan lemmasining isboti (8), (9), (11) va (12) munosabatlardan kelib chiqadi. Agar $a \leq 0$ bo'lsa, u holda lemaning isboti yanada osonlashadi, chunki isbotda $\bar{AB}$ va $\bar{DE}$ yo'ylar qatnashmaydi. *1-lemma isbot bo'ldi.*

Jordan lemmasini aylanalar yo'ylari oilasi uchun quyidagicha bayon qilish mumkin.

2-lemma (Jordan). Agar $g(z)$ funksiya $C_R: |z| = R, \operatorname{Im} z > -a$ aylanalar yo'ylari oilasida $R \rightarrow \infty$ da $\arg z$ ga nisbatan nolga tekis yaqinlashsa, u holda $\forall \lambda > 0$ uchun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

bo'ldi.

1-misol. Xosmas $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 90} dx$ integral hisoblang.

Yuqorida bayon qilingan fikrlarga binoan yetarlicha katta $R > 0$ uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$\int_{-R}^R \frac{(x+3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 90} dx + \int_{C_R} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90}. \quad (13)$$

Endi $f(z) = \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90}$ funksiyaning maxsus nuqtalarini topamiz:

$$z^2 - 6z + 90 = 0, \quad z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 90} = 3 \pm 9i.$$

Bu yerdan $f(z)$ funksiyaning yuqori yarim tekislikda bitta $3+9i$ dan iborat qutb maxsus nuqtaga ega ekanligi kelib chiqadi. $g(z) = \frac{z+3}{z^2 - 6z + 90}$ funksiya $R \rightarrow \infty$ da $C_R: |z| = R$ aylanalar oilasida nolga $\arg z$ ga nisbatan tekis yaqinlashuvchi.

Haqiqattan ham,

$$|g(z)| = \frac{|z+3|}{|(z-3+9i)(z-3-9i)|} \leq \frac{|z|+3}{(|z|-\sqrt{90})^2} = \frac{R+3}{(R-\sqrt{90})^2} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad \forall z \in C_R \quad \text{Jordan}$$

lemmasiga ko'ra ($\lambda = 1$) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2 - 6z + 90} dz = 0$. Agar (13) tenglikda

$a_1 = 3+9i$ ni qo'yib, $R \rightarrow \infty$ limitga o'tsak va oddiy $z = 3+9i$ qutbda qoldiqni hisoblash formulasidan foydalansak, u holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)e^{ix}}{x^2-6x+90} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=3+9i} \frac{(z+3)e^{iz}}{z^2-6z+90} = 2\pi i \frac{(6+9i)e^{i(3+9i)}}{2(3+9i)-6} = \frac{\pi e^{-9}}{9} (6+9i)e^{3i}$$

qiymatni hosil qilamiz.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^3+4z} dz$ integralni hisoblang.

Yechish: Bu holda integral ostidagi funksiya integrallash konturi $\{|z|=3\}$ aylananing ichki sohasi $D=\{z \leq 3\}$ doiradan iborat $f(z)$ funksiyani

$$f(z) = \frac{1}{z^3+4z} = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z+2i)(z-2i)}$$

ko'rinishida yozib ildizlar 1-tartibli qutb nuqtalari ekanligini aniqlaymiz.

$$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^3+4z} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^3 \operatorname{res}_{z=a_n} \frac{1}{z^3+4z}$$

bo'ladi chegirmalarini hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=a_1} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z^3+4z} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res}_{z=a_2} f(z) = \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{z(z-2i)} = -\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{res}_{z=a_3} f(z) = \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{z^3+4z} = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{z(z+2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Natijada, $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z^3+4z} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) = 0$ bo'lishini ko'ramiz.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi integrallarni chegirmalar yordamida hisoblang:

1. $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3+4z}$, 2. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)} dz$, 3. $\oint_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$, 4. $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$, 5. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz$.

Quyidagi integrallarni bosh qiymatini toping:

6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1-x^4} dx$, 7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx$, 8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x-1)(x^4+1)} dx$, 9. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx$, 10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-t}$.

Quyidagi integrallarni Jordan lemmalaridan foydalanib hisoblang ($a > 0$):

11. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx$, 12. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$, 13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 2x}{x^2-4x+5} dx$, 14. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+10} dx$,

15. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9} dx$.

§ 28. Geometrik prinsiplar

1. Argument prinsipi. Aytaylik, $f(z)$ funksiya $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$ sohada golomorf bo'lsin. Ushbu

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z) \quad (1)$$

munosabatni qaraylik. Odatda, bu munosabat $f(z)$ funksiyaning *logarifmik hosilasi* deyiladi.

Faraz qilaylik, $z=0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n -tartibli (karrali) noli bo'lsin. Unda $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z=a$ nuqtada golomorf va $\varphi(a) \neq 0$ bo'ladi, bundan (1) ning chap tomonini quyidagicha ifodalaymiz:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\left((z-a)^n \varphi(z)\right)'}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1} \varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Bu tenglikdan $\frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ funksiya a nuqtada golomorf va $z=a$

da uning qiymati n ga teng bo'ladi. Shuning uchun bu funksiya a nuqtaning biror atrofida Teylor qatoriga yoyiladi:

$$\frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = n + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Shunday qilib, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$ bo'ladi.

Demak, $f(z)$ ning n -tartibli noli bo'lgan $z=a$ nuqta uning logarifmik hosilasi $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ning 1-tartibli qutb nuqtasi bo'ladi, ya'ni

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = n \quad (2)$$

Odatda, $\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)}$ ni $f(z)$ funksiyaning p -tartibli qutb nuqtasi bo'lsin.

Unda $f(z) = (z-a)^{-p} \varphi(z)$ bo'lib, $\varphi(z)$ funksiya $z=a$ da golomorf, $\varphi(a) \neq 0$. Bu holda

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{p}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \text{ bo'lib,}$$

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p. \quad (3)$$

Demak, $z=a$ nuqta $f(z)$ ning p -tartibli qutb nuqtasi bo'lsa, u holda $f(z)$ ning $z=a$ nuqtasidagi logarifmik chegirmasi qutb tartibining qarama-qarshi ishora bilan olingan qiymatiga teng.

Bizga $D \subset \mathbb{C}$ va bu sohada kompakt yotuvchi $G \subset\subset D$ sohalar berilgan bo'lsin.

1-teorema. D sohada berilgan $f(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $f(z)$ funksiyaning D sohada qutb nuqtalaridan boshqa maxsus nuqtalari bo'lmasin;

b) G – bir bog'lamli soha;

c) G sohaning chegarasi ∂G da $f(z)$ funksiyaning nollari hamda qutb nuqtalari bo'lmasin.

U holda

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (4)$$

bo'ladi, bunda N soni $f(z)$ ning G dagi barcha nollarining soni, $P - G$ dagi barcha qutb nuqtalari soni, ∂G – orientirlangan chegara.

Isbot. $f(z)$ funksiya G sohada chekli sondagi $a_1, a_2, \dots, a_n$ nollarga ega bo'ladi. Aks holda, ya'ni nollar cheksiz ko'p bo'lsa, unda ular $a_0 \in G$ limit nuqtaga ega bo'lib, $f(a_0) = 0$ bo'ladi va yagonalik teoremasiga ko'ra G sohada $f(z) \equiv 0$ bo'ladi.

(4) da integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtalari $f(z)$ funksiyaning G sohadagi nollari hamda qutb nuqtalaridan iborat. Bu nuqtalar teorema shartiga ko'ra ∂G ga tegishli emas. Chegirmalar haqidagi Koshi teoremasiga binoan:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{f'(z)}{f(z)}$$

bo'ladi, bu yerda b_k qutb nuqtalar. (2) va (3) $\Rightarrow \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = h_k$,

$\operatorname{res}_{z=b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -P_k$ bo'lishini topamiz $\Rightarrow$ (4). *Teorema isbotlandi.*

∂G egri chiziqda $\forall z_0$ nuqtani olib, uni integrallash egri chizig'idagi boshlang'ich va oxirgi nuqta deb qaraymiz. z_0 nuqtadan boshlab musbat yo'nalish bo'yicha harakatlanib z_0 nuqtaga qaytib kelganda $\operatorname{Ln} f(z)$ funksiyaning qiymati uzluksiz o'zgara borib, uning z_0 nuqtadagi dastlabki qiymati va ushbu nuqtadagi keying qiymati turlicha bo'ladi.

Bu holda $f(z_0)$ bir xil bo'lganda ham $\text{Arg}f(z_0)$ ning qiymatlari har xil bo'ladi.

$\text{Arg}f(z_0)$ ning z_0 nuqtadagi dastlabki qiymati φ_0 , keyingisi φ_1 bo'lsin. (2) tenglikdan va $\text{Ln}f(z) = \ln|f(z)| + i\text{Arg}f(z)$ dan foydalanib quyidagiga kelamiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\ln|f(z_0)| + i\varphi_1] - [\ln|f(z_0)| + i\varphi_0] = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi}, \quad (3)$$

bu yerda $\varphi_1 - \varphi_0$ – argument orttirmasi, u $\Delta_{\partial G} \arg f(z)$ kabi belgilanadi. U vaqtda quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta_{\partial G} \arg f(z) \quad (4)$$

(1), (3) va (4) munosabatlardan quyidagini xulosalaymiz:

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z). \quad (5)$$

Argument prinsipi: $f(z)$ funksiyaning G sohadagi barcha nollari soni N dan barcha qutb nuqtalari soni P ning ayirmasi oreintirlangan ∂G chegarani aylanib chiqishdagi argument orttirmasining 2π ga bo'linganiga teng.

2-teorema (Rushe). Faraz qilaylik, $f(z)$ va $g(z)$ funksiyalari chegaralangan bir bog'lamli G sohaning yopig'i $\bar{G}$ da golomorf bo'lsin. Agar $\forall z \in \partial G$ da

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (6)$$

bo'lsa, u holda G sohada $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning nollari soni bir-biriga teng bo'ladi.

Isbot. $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning chegarasi ∂G da nollarga ega bo'lmaydi. Haqiqattan ham (6) ga ko'ra $\forall z \in \partial G$ da

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0,$$

$$|f(z)| + |g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \Rightarrow f(z) \neq 0, f(z) + g(z) \neq 0.$$

Aytaylik, $f(z)$ va $f(z) + g(z)$ funksiyalarning G sohadagi nollarining soni mos ravishda N_f va N_{f+g} bo'lsin.

Argument prinsipida $f(z)$ funksiya G sohada qutb nuqtalariga ega bo'lmasa, $N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z)$ bo'ladi. Bundan

$$N_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z), N_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg(f(z) + g(z)) \quad (7)$$

bo'ladi. Ma'lumki, $z \in \partial G$ da

$$f(z) + g(z) = f(z) \cdot \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta_{\partial G} \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_{\partial G} \arg f(z) + \Delta_{\partial G} \arg g(z) \quad (8)$$

bo'ladi.

Ushbu $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ funksiyani qaraylik, (6) dan foydalanib, $z \in \partial G$ da

$$|w - 1| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

munosabat o'rinli, ya'ni z nuqta yopiq kontur ∂G bo'ylab aylanib chiqqanda w vektorning uchi $|w - 1| < 1$ doirada joylashgan yopiq kontur $w(\partial G)$ bo'yicha harakatlanib, $w = 0$ nuqtaning atrofini biror marta ham aylana olmaydi. Shuning uchun ham $\Delta_{\partial G} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$ bo'ladi. (7) va (8) lardan $N_{f+g} = N_f$ kelib chiqadi.

2. Sohani saqlash prinsipi. Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lsin.

3-teorema. Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, $f(z) \neq \text{const}$ bo'lsa, u holda D sohaning obrazi $D^* = f(D)$ ham soha bo'ladi.

Isbot. Bu teoremani isbotlashda sohaning aksi ham soha bo'lishini ko'rstaish uchun ikkita shartni bajarilishini tekshiramiz. Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, bu funksiya D ni D^* ga aqlantirsin.

1) $D^* = f(D)$ – ochiq to'plam bo'lishini ko'rsatamiz:

Aytaylik, w_0 nuqta D^* to'plamning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, $z_0 \in D$ nuqta esa uning proobrazlaridan biri bo'lsin: $f(z_0) = w_0$. U holda D sohada z_0 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, $V_1(z_0) = \{|z - z_0| < \varepsilon\} \subset \subset D$ bu atrofning mavjudligi D sohaning ochiqligini ko'rsatadi.

2) Shartga ko'ra D soha, ya'ni $\forall z_1, z_2 \in D$ nuqtalarni birlashtiruvchi va D da yotuvchi uzluksiz $z = z_0(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ egri chiziqni $w_1, w_2 \in D^*$ nuqtalarni birlashtiruvchi va D^* ga tegishli $w = f(z(t))$ uzluksiz egri chiziqqa akslantiradi. *Teorema isbotlandi.*

3.Modulning maksimum prinsipi. Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lsin.

4-teorema. Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo'lib, uning moduli $|f(z)|$ biror $z_0 \in D$ nuqtada maksimumga erishsa, u holda $f(z)$ funksiya D da o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, D sohada $f(z) \neq \text{const}$ bo'lib, u D sohani D^* sohaga tegishli bo'ladi. U holda z_0 nuqtaning obrazi $K = \{ |w - w_0| < \varepsilon \}$ bilan D^* sohaga tegishli bo'ladi. Bu K atrofda $\exists w_1$ nuqtani olamizki, $|w_1| > |w_0|$ bo'lsin. $w(z_1)$ ning proobrazi z_1 nuqta ($f(z_1) = w_1$) $U = \{ |z - z_0| < r \}$ ochiq doira Ichida joylashgan bo'lib, $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ bo'ladi. Bu esa $f(z)$ funksiyaning moduli $|f(z)|$ ning z_0 nuqtada maksimumga erishishiga ziddiyat hosil bo'ladi. Bundan $f(z) \equiv \text{const}$ bo'lishi kelib chiqadi. *Teorema isbotlandi.*

Modulning maksimum prinsipini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

5-teorema. Agar $f(z) \in O(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsa, u holda $|f(z)|$ funksiya o'zining maksimum qiymatiga D sohaning chegarasida erishadi.

Namunaviy misollardan yechimlar va ko'rsatmalar

1-misol. Ushbu $z + \lambda - e^z = 0$, $\lambda > 1$ tenglamaning $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0\}$ yarim tekislikda yagona (haqiqiy) ildizga ega bo'lishini ko'rsating.

Yechish: Avvalo quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Re } z \leq 0\}, \quad l = \{z = iy : -R \leq y \leq R\}.$$

So'ng ushbu $\Gamma_R = \gamma_R \cup l$ yopiq chiziqni olamiz. Agar

$$f(z) = z + \lambda, g(z) = -e^z$$

deyilsa, unda berilgan tenglama ushbu

$$f(z) + g(z) = 0$$

ko'rinishini oladi.

Ravshanki, $\forall z \in l$ uchun

$$|f(z)| = |\lambda + iy| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geq \lambda > 1, |g(z)| = |-e^{iy}| = 1;$$

$\forall z \in \gamma_R$ uchun $R > \lambda + 1$ bo'lganda

$$|f(z)| = |z + \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1, |g(z)| = |-e^{x+iy}| = e^x \leq 1$$

bo'ladi. Rushe teoremasiga ko'ra Γ_R yopiq chiziq bilan chegaralangan sohada (yarim doiraning ichida)

$$f(z) = \lambda + z = 0, \quad f(z) + g(z) = \lambda + z - e^z = 0$$

tenglamaning ildizlari soni teng bo'ladi. Demak, berilgan tenglama $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ yarim tekislikda yagona ildizga ega. Endi bu ildizning haqiqiy ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$x + \lambda - e^x = 0$$

tenglama $(-\infty, 0)$ oraliqda ildizga egaligini ko'rsatish kifoya. $\varphi(x) = x + \lambda - e^x$ deb belgilasak, bu funksiya $(-\infty, 0)$ oraliqda uzluksiz va chetki nuqtalarda turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi: $\varphi(0) = \lambda - 1 > 0$ va $\varphi(-\infty) = -\infty$. Demak, $\varphi(x) = 0$ tenglama $(-\infty, 0)$ oraliqda ildizga ega.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi parametrik tenglamalar yordamida berilgan chiziqlarning $z_0 = 0$ nuqtaga nisbatan indeksini hisoblang ($0 \leq t < 2\pi$):

1. $z = \rho e^{-2it}$, 2. $z = 1 + i \sin^2 t$, 3. $z = 2 \cos t - i \sin t$, 4. $z = \frac{1}{2} \cos t + i \sin t$.

Quyidagi tenglamalarni birlik doiraning yopig'i $D = \{|z| \leq 1\}$ dagi ildizlar sonini toping:

5. $z^4 - 3z + 1$, 6. $2z^4 - 5z + 2$, 7. $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$, 8. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$,
9. $e^z - 2z = 1$.

10. $\rho \geq 0$ soni har qanday kichik qilib olinganda ham, yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $F_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n}$ funksiyaning barcha nollari $\{|z| \leq \rho\}$ doirada yotishini ko'rsating.

11. Agar $0 \leq \rho \leq 1$, yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $p_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$ ko'phadni $\{|z| \leq \rho\}$ doirada ildizga ega emasligini ko'rsating.

Quyidagi ko'phadlarning kompleks tekislikdagi ildizlar sonini toping:

12. $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$, 13. $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$,
14. $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$, 15. $z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3 = 0$.

§ 29. Analitik davom ettirish tushunchasi

Aytaylik, bizga $D \subset \mathbb{C}$ va $E \subset D$ bo'lsin. Shuningdek, $f(z) \in O(D)$ funksiya ham berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\exists F(z) \in O(D)$ va $F(z)|_E = f(z)$ bo'lsa, unda $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning E dan D sohaga golomorf (analitik) davomi deyiladi.

1-teorema (analitik davom ettirish prinsipi). Agar E to'plam D sohaga tegishli bo'lgan a limit nuqtaga ega bo'lsa, unda E to'plamdan D sohaga analitik davom yagona bo'ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, analitik davomlar bir nechta bo'lsin. Ulardan ikkitasini olib, ularni $F_1(z)$ va $F_2(z)$ ko'rinishida olaylik. Shartga ko'ra, $F_1(z), F_2(z) \in O(D)$ bo'ladi. Shuningdek, $\forall z \in E$ uchun

$$F_1(z) = f(z), F_2(z) = f(z)$$

bo'ladi, bundan $F_1(z) = F_2(z)$ bo'ladi. Bular yagonalik teoremasi shartlarini to'la bajariladi. Bu teoremaga muvofiq, $F_1(z) \equiv F_2(z)$ munosabat bajariladi. Bu esa analitik davomning yagonaligini isbotlaydi. *Teorema isbotlandi.*

1-misol. Quyidagi funktsiyani berilgan analitik davom ettirishni qaraymiz:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Koshi-Adamar formulasidan: $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1$ - yaqinlashish radiusi,

$E = \{z : |z| < 1\}$ - yaqinlashish sohasi bo'ladi. Bu funktsiyani $E = \{z : |z| < 1\}$ birlik doirada $F(z) = \frac{1}{1-z}$ deb olsak, bu funktsiya $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sohada holomorf bo'ladi. Shuningdek, $F(z)|_E = f(z)$ bo'ladi, ya'ni $f(z)$ funktsiya $F(z)$ analitik davomi bo'lar ekan.

2-teorema. $f(z) \in O(D)$ funktsiyani $G \subset D$ sohaga analitik davom ettilishi uchun biror $a \in D$ limit nuqtada Teylor qatorining yaqinlashish radiusi $U_a \setminus D \neq \emptyset$ munosabatning o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. Faraz qilaylik, $f(z)$ funktsiya D sohadan G sohaga analitik davom etsin. $D \setminus G \neq \emptyset$ va $\forall a \in D \setminus G$ bo'lsin. Shuningdek, $f(z)$ funktsiyani a nuqtaning biror $U_a \subset G$ atrofida Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots$$

Teorema isbot bo'ldi.

Yetarliligi. $U_a \setminus D \neq \emptyset$ munosabatdan $f(z)$ funktsiya D sohadan G sohaga analitik davom etishi kelib chiqadi. *Teorema to'liq isbot bo'ladi.*

Na'munaviy misollardan yechimlar

1-misol. Bizga $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ soha va bu sohada aniqlangan

$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \in O(D)$, shuningdek, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < \sqrt{2}\}$ soha va bu

sohada aniqlangan $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \in O(D)$ funksiyalar berilgan

bo'lsin. $f_1(z)$ funksiyani quyidagicha ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \left[\frac{z-i}{1-i} = q < 1, |z-i| < \sqrt{2} \right] = \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} = f_2(z). \end{aligned}$$

Demak,

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) \in O(D_1 \cup D_2), z \in D_1, \\ f_2(z) \in O(D_1 \cup D_2), z \in D_2 \end{cases}$$

funksiya $f_1(z)$ ning D_1 dan D_2 ga yoki $f_2(z)$ ning D_2 dan D_1 ga analitik davomi bo'ladi.

2-misol. Analitik davom ettirib bo'lmaydigan funksiyalarga misol. Ushbu

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

qator bilan berilgan funksiya $D = \{|z| < 1\}$ birlik doiradadan tashqariga davom etmaydi. Birlik aylananing har bir nuqtasi bu qator uchun maxsus nuqta bo'ladi. Funksiyaning $z=1$ maxsus nuqtasini limit nuqtasini tekshirib ko'ramiz:

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} f(z) = +\infty.$$

Endi funksiya argumentining o'rniga z^2 ni qo'yib,

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = f(z) - z^2$$

munosabatni olamiz. Bundan $f(z) = z^2 + f(z^2)$ munosabat kelib chiqadi, bunda $z = -1$ nuqtaning maxsusligi kelib chiqadi. Keyingi bosqichda funksiya argumentining o'rniga z^4 ni qo'yib,

$$f(z^4) = 1 + z^8 + z^{16} + \dots = f(z) - z^2 - z^4$$

munosabatni olamiz. Bundan $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$ munosabat kelib chiqadi, bunda $z = \pm i$ ning maxsus nuqtaligi kelib chiqadi. Bu jarayonni

shu tarzda davom ettirish natijasida $\{|z|=1\}$ dagi nuqtalar $f(z)$ ning maxsus nuqtasi bo'lishini aniqlaymiz. Bu esa $f(z)$ funksiyani birlik doiraning tashqarisiga analitik davom ettirib bo'lmashligini bildiradi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ funksiya $z=a$ ($|a|<1$) nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoyilgan. a parametrning qanday qiymatlarida $f(z)$ funksiya analitik davom ettirishida qatorga yoyilishga imkon beradi?

2. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ qatorning yig'indisi $z = -\frac{1}{2}$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoyiladi. Qanday sohada $f(z)$ shunday qilib davom etadi?

$$3. f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n} \text{ funksiya katta sohada}$$

$$\ln 2 = \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2 \cdot 2^2} - \frac{(1-z)^3}{3 \cdot 2^2} - \dots$$

qator orqali davom ettirishini ko'rsating.

4. $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ va $f_2(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$ darajali qatorlar umumiy yaqinlashish sohasiga ega bo'lmaydi. Shunga qaramasdan, $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funksiyalar alohida-alohida analitik davom etishini ko'rsating.

5. $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$ va $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-a)^n z^n}{(1-z)^{n+1}}$ kabi aniqlangan qatorlar alohida-alohida analitik davom etishini ko'rsating.

§ 30. Riman teoremasi

1. Riman teoremasi. 1-teorema (Riman). Kengaytirilgan $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi D soha quyidagi shartlarni bajarsin:

a) D – bir bog'lamli soha bo'lsin.

b) D sohaning chegarasi ikkita nuqtadan kam bo'lmasin.

U holda D sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi birlik doiraga o'tkazuvchi konform akslantirish mavjud.

2. Simmetriya prinsipi. Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha chegarasining biror qismi haqiqiy o'qdag γ intervaldan iborat bo'lsin.

2-teorema (Riman-Shvarts). Aytaylik, $f(z) \in O(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsin. Agar $f(z)$ funksiya γ intervalda haqiqiy qiymatlarini qabul qilsa, unda uni $D \cup \gamma \cup D^*$ sohaga analitik davom ettirish mumkin. Analitik davom ushbu

$$F(z) = \begin{cases} f(z), z \in D \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, z \in D^* \end{cases} \quad (1)$$

funksiya yordamida bajariladi.

Isbot. $f(z) \in O(D)$ bo'lgan $f(z)$ ga ko'ra tuzilgan ushbu

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}, z \in D^* \quad (2)$$

funksiya D^* sohaning har bir z nuqtasida $f_1'(z)$ hosilaga ega. Ma'lumki, $z \in D^*$ va $z + \Delta z \in D^*$ bo'lganda, $\bar{z} \in D$, $\bar{z} + \Delta \bar{z} \in D$ bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{f_1(z + \Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f_1(\bar{z} + \Delta \bar{z})} - \overline{f_1(\bar{z})}}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z} + \Delta \bar{z})} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z}$$

$\Delta z \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, $f_1'(z) = \overline{f_1'(\bar{z})}$ bo'ladi. Demak, $f_1(z) \in O(D)$ (1) bilan aniqlangan $F(z)$ funksiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada uzluksiz $x \in \gamma$ uchun $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x)$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)}$ bo'ladi.

$$f(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow f_1(z)|_{x \in \gamma} = f(z)|_{x \in \gamma}.$$

Demak, $F(z)$ funksiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada golomorf va u $f(z)$ ning analitik davomi bo'ladi. *Teorema isbotlandi.*

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan $f(z)$ funksiya uchun yuqoridagi teoremani shartlarini qanoatlantirishi talab qilamiz:

1) $w = f(z)$ funksiya haqiqiy o'qdagi γ intervalni $\text{Im } w > 0$ haqiqiy o'qdagi G sohaga konform akslantirsin.

2) $w = f(z)$ funksiya haqiqiy o'qdagi γ intervalni $\text{Im } w > 0$ haqiqiy o'qdagi G soha chegarasining bir qismi bo'lgan intervalga konform akslantirsin.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

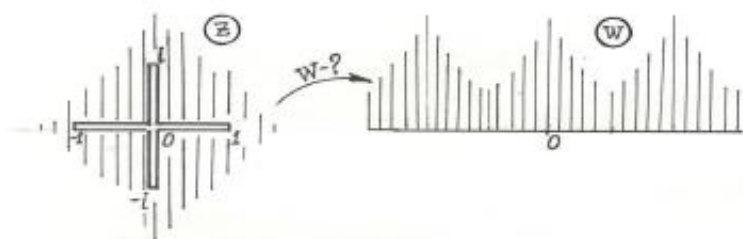
1-natija (simmetriya prinsipi). (1) ifoda bilan aniqlangan $w = F(z)$ funksiya $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi $G_0 = G \cup \gamma \cup G^*$ sohaga konform akslantiradi. Bunda, G^* soha G sohaning $\text{Im } w = 0$ haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan sohasini ifodalaydi.

Na'munaviy misollardan yechimlar

1-misol. Ushbu

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1;1], z \notin [-i;i]\}$$

sohani yuqori yarimtekislikka $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ konform akslantiruvchi $w = f(z)$ funksiyani toping.



1-rasm

Yechish: Quyidagi

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, z \notin [0;1]\}$$

sohada $w_1 = z^2$ funksiyani qaraymiz. Ravshanki, bu akslantirish D_1 sohada konform bo'ladi.

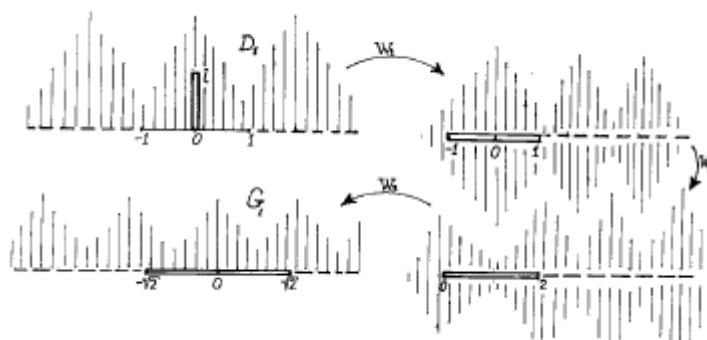
Endi D_1 sohani yuqori yarimtekislikka akslantiramiz. Bu quyidagi

$$w_1 = z^2,$$

$$w_2 = w_1 + 1,$$

$$w_3 = \sqrt{w_2} \quad (\sqrt{-1} = i)$$

akslantirishlarni ketma-ket bajarish natijasida sodir bo'ladi. Yuqoridagi akslantirishlarning bajarilish jarayonini chizmada quyidagicha tasvirlaymiz:



2-rasm

Shunday qilib, D_1 soha ushbu

$$w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{z^2 + 1}, \sqrt{-1} = i$$

funksiya yordamida

$$G_1 = \{w_3 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

yuqori yarim tekislikka konform akslanar ekan. Endi simmetriya prinsipidan foydalanib, D sohani

$$w_3 = \sqrt{z^2 + 1}, \sqrt{-1} = i$$

funksiya yordamida

$$G = \{w_3 \in \mathbb{C} : w_3 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

sohaga konform akslantiramiz. Bu sohani yuqori yarim tekislikka

$$\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$$

konform akslantirish quyidagi

$$w_4 = \frac{\sqrt{2} + w_3}{\sqrt{2} - w_3}, w = \sqrt{w_4}, (\sqrt{-1} = i)$$

akslantirishlarni ketma-ket bajarilishi natijasida amalga oshiriladi.

Demak, berilgan D sohani yuqori yarim tekislikka conform akslantiruvchi funksiya

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + w_3}{\sqrt{2} - w_3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{2} - \sqrt{z^2 + 1}}} (\sqrt{-1} = i)$$

bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Simmetriya prinsipidan foydalanib, $D = \{|z| < 1\}$ birlik doiraning berilgan funksiya yordamidagi aksini toping:

1. $w = \frac{z}{\sqrt[20]{(1+z^{20})^2}}$, 2. $w = \frac{z}{\sqrt[19]{(1+z^{19})^2}}$, 3. $w = \frac{z}{\sqrt[18]{(1+z^{18})^2}}$, 4. $w = \frac{z}{\sqrt[17]{(1+z^{17})^2}}$,
5. $w = \frac{z}{\sqrt[n]{(1+z^n)^2}}$.

Simmetriya prinsipidan foydalanib, berilgan sohalarni $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ yuqori yarim tekislikka conform akslantiruvchi funksiyani analitik ifodasini quring:

6. $z \notin [-1; 2]$, $z \notin [-i; i]$; 7. $z \notin [-2; 1]$, $z \notin [-i; i]$; 8. $z \notin [-1; 1]$, $z \notin [-i; 2i]$;
9. $z \notin [-1; 1]$, $z \notin [-2i; i]$; 10. $z \notin [-1; 1]$, $z \notin [-i; 0]$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sadullayev A., Xudoyberganov G., Mansurov X.T., Vorisov A.K. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami (Kompleks analiz) 3-qism. Toshkent, “O‘zbekiston”, 2000.
2. To‘ychiyev T.T., Tishabayev J.K., Jumaboyev D.X., Kitmanov A.M. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanidan mustaqil ishlar, T. “Mumtoz so‘z”, 2018.
3. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T. Kompleks analiz. Toshkent, “Universitet”, 1998.
4. Sirojiddinov S.X., Salohitdinov M.S., Maqsudov S. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Москва, УРСС, 2015.
6. Волковский И.И., Лунс Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Москва, «ФИЗМАТЛИТ», 2002.
7. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Москва, «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2015.
8. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. Москва, «Лаборатория знаний», 2016.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, Москва, «Наука», 1973.
10. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. Москва, «Наука», 1972.

B.E.HUSENOV

**FUNKSIYALAR NAZARIYASI (KOMPLEKS
O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR NAZARIYASI)**

1-QISM

O‘quv qo‘llanma

<i>Muharrir:</i>	<i>A. Qalandarov</i>
<i>Texnik muharrir:</i>	<i>G. Samiyeva</i>
<i>Musahhih:</i>	<i>Sh. Qahhorov</i>
<i>Sahifalovchi:</i>	<i>M. Bafoyeva</i>

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 24.02.2025. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog‘ozi. Bosma tobog‘i 10,2. Adadi 100. Buyurtma №102

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45