CHIRCHIK STATE
PEDAGOGICAL INSTITUTE
TASHKENT REGION, UZBEKISTAN

CLUSTER OF PEDAGOGICAL EDUCATION: Problems and Solutions

JUNE 25-26, 2021

CHDPI
CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Indexed in

Google Scholar

01 Pedagogical education cluster: necessity, need, result

02 Continuing education in sustainable development: innovation and integration

03 The concept of future teacher: the requirements of adaptation to life situations

04 Modern requirements for the content of education: based on international assessment programs (PISA, PIRLS)

International Online Conference

Building 2A, Istikbol Street,
Chirchik, Tashkent region,
Uzbekistan
chirchikcluster@gmail.com

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLI

TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA INSITUTI

PEDAGOGIK TA'LIM KLASTERI: MUAMMO VA YECHIMLAR

Xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya

2021-yil, 25-26 iyun

International Scientific-Practical Conference

PEDAGOGICAL EDUCATION CLUSTER: PROBLEMS AND SOLUTIONS

June 25-26, 2021

Международная научно-практическая конференция

КЛАСТЕР ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ

25-26 июня, 2021 г

Chirchiq – 2021

Mundarija ***Contents*** ***Содержание***

$A(z)$ – АНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ХАРДИ СИНФИ.

Беҳзод Эркин ўғли Ҳусенов
Бухоро давлат университети таянч докторанти
husenovbehzod@mail.com

Аннотация: Мақолада $A(z)$ – аналитик функциялар учун Харди синфи киритилган. Рисс теоремасининг аналоги исботланган ва Харди синфига тегишли бўлган функцияга мисол келтирилган.

Калит сўзлар: Бельтрами тенгламаси, $A(z)$ – аналитик функция, лемниската, Харди синфи, Харди фазоси.

КЛАСС ХАРДИ ДЛЯ $A(z)$ – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

Аннотация: В статье приводятся класс Харди для $A(z)$ – аналитических функций. Доказано аналог теоремы Рисса и приведено примера принадлежающие функцию класса Харди.

Ключевые слова: Уравнения Бельтрами, $A(z)$ – аналитическая функция, лемниската, класс Харди, пространство Харди.

THE HARDY CLASS FOR $A(z)$ – ANALYTIC FUNCTIONS

Annotation: The article proved by Hardy class for $A(z)$ – analytic functions. Is given an analog of the theorem Riss and an example of a function belonging to the Hardy class.

Keywords: Beltrami equations, $A(z)$ – analytic function, lemniscate, Hardy class, Hardy space.

Пусть $A(z)$ – некоторая непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{C}$. Введем оператор: $\partial_A = \partial - \overline{A(z)} \cdot \overline{\partial}$, где ∂ – оператор дифференцирование по z, а $\overline{\partial}$ – оператор дифференцирование по $\overline{z}$.

Определение 1. [3] Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция в области D. Если для любого $z \in D$ она удовлетворяет уравнение Белтьрами:

$$\overline{\partial_A} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - A\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

то $f(z)$ называется $A(z)$ – аналитической функцией в области D, где $|A| \le c < 1,\ c = const.$

Определение 2. $f(z)$ $A(z)$ – аналитическая функция является принадлежной к классу Харди H_A^p, если функция ограниченная в лемнискате

$$L(a;r) = \{|\psi(z;a)| = \left| z - a + \overline{\int_{\gamma(z;a)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < r\},$$

то есть

$$0 < \rho < r,\ \lim_{\rho \to r} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(z;a)|=r} |f(z)|^p \left| dz + A d\bar{z} \right| < \infty. \qquad (2)$$

где $\gamma(z;a)$ – гладкая кривая, соединяющая точки $z;a \in D$.

Пространство Харди H_A^p для $A(z)$ – аналитических функций при $0 < p \le 1$ – это класс функций которая конечная норма в лемнискате $L(a;r)$:

$$\|f\|_{H_A^p} = \sup_{0<\rho<r} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p \left| dz + A d\bar{z} \right| < \infty,$$

при $p > 1$ конечная норма выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^p} = \sup_{0<\rho<r} \left(\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p \left| dz + A d\bar{z} \right| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Далее, при $0 < q < p$ очевидно выражения:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^q \left| dz + A d\bar{z} \right| < 1 + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p \left| dz + A d\bar{z} \right|,$$

отсюда следует, что если $f(z)$ принадлежит классу H_A^p, то она принадлежит также классу H_A^q, то есть $H_A^p \subset H_A^q$ при $0 < q < p$.

Обозначим через H_A^∞ класс функций, $A(z)$ – аналитических и ограниченных в лемнискате $L(a;r)$. Для $f \in H_A^\infty$ условия нормы выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^\infty} = \sup_{|\psi(z;a)|<r} |f(z)| < \infty.$$

Следовательно, при $1 < q < p < \infty$, имеет $H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q \subset H_A^1$.

Если $f \in H_A^\infty$, то f принадлежит всем пространствам $H_A^p : H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q$, где $0 < q < p < \infty$.

Для классы H_A^p приведём аналог теорема Ф. Рисс.

Теорема. Если f функция принадлежить класса H_A^p, то каково бы ни было множество M положительной меры на границы лемнискате $\partial L(a;r)$:

$$\lim_{\rho\to r}\int_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)|^p\left|dz+Ad\overline{z}\right|=\int_M|f(\zeta)|^p\left|d\zeta+Ad\overline{\zeta}\right| \qquad (3)$$

и

$$\lim_{\rho\to r}\int_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)-f(\zeta)|^p\left|d\zeta+Ad\overline{\zeta}\right|=0, \qquad (4)$$

где $M\subset\partial L(a;r)$, $\rho<r$ −радиус.

Доказательства. Доказательства этой теоремы сводится к доказателству соотношения (3) для функции класса H_A^2.

Итак, пусть $\gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\psi^n(z;a)$ − функция из класса H_A^2. Тогда при всех $\rho<r$ имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{|\psi(z;a)|=\rho}|\gamma(z)|^2\left|dz+Ad\overline{z}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n} \qquad (5)$$

($f(x)\in L^2$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)$ сходится и $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)$ − равенство Парсеваля, где $a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx dx$ и $b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx dx$ − коэффициенты Фурье функции $f(x)$.) и в силу (2) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2 \qquad (6)$$

сходится.

Пусть $0<\lambda<1$, тогда функция $\gamma(z)-\gamma(\lambda z)$, очевидно, принадлежить классу H_A^2 и следовательно, имеет место равенство Парселвая

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{|\psi(z;a)|=\rho}|\gamma(z)-\gamma(\lambda z)|^2\left|dz+Ad\overline{z}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\rho^{2n}(1-\lambda^n)^2, \qquad (7)$$

переходя к пределу по $\rho\to r$, на освании равенства Фату (Лемма Фату: Если для функции $f_n(x)$ вместо условий $|f_n(x)|\le\varphi(x)$ выполняются условия

$f_n(x)\geq 0,$ то вместо $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx \geq \int\limits_E f(x)dx,$ где E – измеримое множество.) получаем:

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}\left|\gamma(z)-\gamma(\lambda z)\right|^2\left|dz+Ad\bar{z}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left|\alpha_n\right|^2(1-\lambda^n)^2. \qquad (8)$$

И так как сумма ряда в правой части (8) стремится к нулю, т. е. соотношение (4) справедливо для функции H_A^2.

Замечание. Как видно, из равенства (4), для того чтобы функция $\gamma(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\psi^n(z;a)$ принадлежала классу H_A^2, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|\alpha_n\right|^2$.

Пользуясь, равенством (2) и обозначая

$$\gamma(z)=\left(f(z)\right)^{\frac{p}{2}}, \qquad (9)$$

мы можем функцию $f(z)$ класса H_A^p представить виде

$$f(z)=b(z)\left(\gamma(z)\right)^{\frac{2}{p}}, \qquad (10)$$

где $\gamma(z)$ – функция класса H_A^2.

Введём сокращённие обозначения: $b(z)=b,\ b(\zeta)=b_\rho,\ \gamma(\zeta)=\gamma_\rho.$

Докажем соотношение (3).

Представим интеграл $\int\limits_M\left(\left|f(z)\right|^p-\left|f(\zeta)\right|^p\right)\left|dz+Ad\bar{z}\right|$ в виде

$$\int\limits_M\left(\left|f(z)\right|^p-\left|f(\zeta)\right|^p\right)\left|dz+Ad\bar{z}\right|=\int\limits_M\left(\left|b\right|^p\left|\gamma\right|^2-\left|b_\rho\right|^p\left|\gamma_\rho\right|^2\right)\left|dz+Ad\bar{z}\right|=$$

$$=\int\limits_M\left(\left|b\right|^p-\left|b_\rho\right|^p\right)\left|\gamma\right|^2\left|dz+Ad\bar{z}\right|+\int\limits_M\left|b_\rho\right|^p\left(\left|\gamma\right|^2-\left|\gamma_\rho\right|^2\right)\left|dz+Ad\bar{z}\right|.$$

Так как $\left|\left|b\right|^p-\left|b_\rho\right|^p\right|<1,$ то по теореме Лебега

$$\lim_{\rho\to r}\int\limits_M\left(\left|b\right|^p-\left|b_\rho\right|^p\right)\left|\gamma\right|^2\left|dz+Ad\bar{z}\right|=\int\limits_M\left(\left|b\right|^p-\left|b_\rho\right|^p\right)\left|\gamma\right|^2\left|dz+Ad\bar{z}\right|=0 \quad\Rightarrow$$

$$\left|\int\limits_M\left|b\right|^p\left(\left|\gamma\right|^2-\left|\gamma_\rho\right|^2\right)\left|dz+Ad\bar{z}\right|\right|\leq\int\limits_M\left|\left|\gamma\right|^2-\left|\gamma_\rho\right|^2\right|\left|dz+Ad\bar{z}\right|\leq\int\limits_M\left|\gamma^2-\gamma_\rho{}^2\right|\left|dz+Ad\bar{z}\right|\leq$$

$$\leq \sqrt{\iint_M \left|\gamma^2 - \gamma_\rho{}^2\right| \left(dz + Ad\bar{z}\right) \iint_M \left|\gamma^2 + \gamma_\rho{}^2\right| \left(dz + Ad\bar{z}\right)} \leq 2\sqrt{2\sum_{n=0}^{\infty} \left|\alpha_n\right|^2} \sqrt{\iint_M \left|\gamma^2 - \gamma_\rho{}^2\right| \left(dz + Ad\bar{z}\right)}$$

и применяя уже доказанное для $\gamma(z)$ соотношение (4), получаем: $\lim\limits_{\rho\to r} \int_M \left|b_\rho\right|^p \left(\left|\gamma\right|^2 - \left|\gamma_\rho\right|^2\right)\left|dz + Ad\bar{z}\right| = 0$. Соотношение (3) доказано.

Классическая теорема доказано в [2].

Пример. Пример неограниченной функции, принадлежащем всем классом H_A^p. Рассмотрим неограниченную $A(z)-$аналитическую в лемнискате функцию $f(z) = \ln\dfrac{1}{1-\psi(z;a)}$. Так как

$$\left|\ln\frac{1}{1-\psi(z;a)}\right| \leq \left|\ln\left|1-\psi(z;a)\right|\right| + \left|\arg(1-\psi(z;a))\right| < \left|\ln\left|1-\psi(z;a)\right|\right| + \pi$$

и $\left|a+b\right|^p \leq 2^p\left|a\right|^p + 2^p\left|b\right|^p$, то

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial L(a;\rho)} \left|\ln\frac{1}{1-\psi(z;a)}\right|^q \left|dz + Ad\bar{z}\right| < 2^p \cdot \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial L(a;\rho)} \left|\ln\left|1-\psi(z;a)\right|\right|^p \left|dz + Ad\bar{z}\right| + (2\pi\rho)^p$$

Далее, при $\rho > \dfrac{1}{2}$, $e > \left|1-\psi(z;a)\right| \geq 2\sqrt{\rho} > \dfrac{2\sqrt{\rho}}{\pi} \geq \dfrac{2}{\pi}\left|\psi(z;a)\right|$,

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{\substack{|\psi(z;a)|=\rho \\ \operatorname{Im}\psi(z;a)>0}} \left|\ln 1-\psi(z;a)\right|^p \left|dz + Ad\bar{z}\right| \leq 1 + \frac{1}{\pi\rho}\int_{\substack{|\psi(z;a)|=\rho \\ \operatorname{Im}\psi(z;a)>0}} \left(\ln\frac{1}{\left|1-\psi(z;a)\right|}\right)^p \left|dz + Ad\bar{z}\right| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\pi\rho}\int_{\substack{|\psi(z;a)|=\rho \\ \operatorname{Im}\psi(z;a)>0}} \left(\ln\frac{1}{\frac{2}{\pi}\psi(z;a)}\right)^p \left|dz + Ad\bar{z}\right|,$$

т. е.

$$\left\|f\right\|_{H_A^p} \leq 2^p + (2\pi)^p + \frac{2^p}{\pi\rho}\int_{\substack{|\psi(z;a)|=\rho \\ \operatorname{Im}\psi(z;a)>0}} \left(\ln\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left|\psi(z;a)\right|}\right)^p \left|dz + Ad\bar{z}\right| < \infty.$$

REFERENCES

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций, Москва, Гостехиздат, 1950, 336 с.

2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p, Москва, Мир, 1984, 370 с.

3. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 9. Issue 3. 2016, 374-383 p.