

CHIRCHIK STATE  
PEDAGOGICAL INSTITUTE  
TASHKENT REGION, UZBEKISTAN

CLUSTER OF  
PEDAGOGICAL  
EDUCATION:  
**Problems and  
Solutions**  
JUNE 25-26, 2021

*Indexed in*

Google  
Scholar



- 01** Pedagogical education cluster: necessity, need, result
- 02** Continuing education in sustainable development: innovation and integration
- 03** The concept of future teacher: the requirements of adaptation to life situations
- 04** Modern requirements for the content of education: based on international assessment programs (PISA, PIRLS)

International Online Conference

Building 2A, Istikbol Street,  
Chirchik, Tashkent region,  
Uzbekistan  
[chirchikcluster@gmail.com](mailto:chirchikcluster@gmail.com)

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS  
TA'LIM VAZIRLI**  
**TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA  
INSITUTI**

**PEDAGOGIK TA'LIM KLASTERI: MUAMMO VA YECHIMLAR**

**Xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya**

**2021-yil, 25-26 iyun**

**International Scientific-Practical Conference**

**PEDAGOGICAL EDUCATION CLUSTER: PROBLEMS AND  
SOLUTIONS**

**June 25-26, 2021**

**Международная научно-практическая конференция**

**КЛАСТЕР ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ: ПРОБЛЕМЫ И  
РЕШЕНИЯ**

**25-26 июня, 2021 г**

**Chirchiq – 2021**

*Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar*  
*Pedagogical Education Cluster: Problems and Solutions*  
*Кластер педагогического образования: проблемы и решения*

<i>Mundarija</i>	<i>Contents</i>	<i>Содержание</i>
195.	Шернаев, А. Ў. (2021). ГЕОГРАФИЯНИ ЎҚИТИШДА ГЛОБУС ВА ХАРИТАЛАРНИНГ ЎРНИ. <i>Педагогик таълим кластери: муаммо ва ечимлар</i> , 974-979.	
196.	Шарипов, М. Л. (2021). ИНТЕЛЛЕКТУАЛ ИНСОН КАПИТАЛИНИНГ МОЎЖИЯТИ ВА УНИНГ ЎЗИГА ХОС ХУСУСИЯТЛАРИ. <i>Педагогик таълим кластери: муаммо ва ечимлар</i> , 980-984.	
197.	Шерматова, У. С. (2021). ТАРИХИЙ, АДАБИЙ-БАДИИЙ МАНБАЛАРДА ВАТАНПАРВАРЛИК ТАРБИЯСИ ТАЛҚИНИ. <i>Педагогик таълим кластери: муаммо ва ечимлар</i> , 985-993.	
198.	Shofqorov, A. M., & Tadjibayeva, D. S. (2021). ONA TILI DARSLARINI TASHKIL ETISHDA INTERFAOL METODLARNING AMALIY AHAMIYATI. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 994-998.	
199.	Шокаримова, К. А. (2021). ДУХОВНО-НРАВСТВЕННОЕ ВОСПИТАНИЕ МОЛОДЕЖИ. <i>Кластер педагогического образования: проблемы и решения</i> , 999-1002.	
200.	Shofqorov, A. M., & Murodova, F. J. (2021). "SO'ZNING TARKIBIY QISMLARI" MAVZUSINI O'QITISHDA INTERFAOL USULLARDAN FOYDALANISH. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1003-1005.	
201.	Шукурллаев, Ж. М., & Сафуллаева, А. И. (2021). ВОЛЕЙБОЛ ЎЙИНИНИНГ ЖИСМОНИЙ ТАРБИЯ ТИЗИМИДАГИ ЎРНИ. <i>Педагогик таълим кластери: муаммо ва ечимлар</i> , 1006-1009.	
202.	Shofqorov, A. M., & Karabayeva, J. A. (2021). DARSLARDA INNOVATSION O'YINLARNING AHAMIYATI. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1010-1012.	
203.	Ergasheva, D. O., & Ramazonovich, R. B. (2021). BIOLOGIYA FANLARINI O'QITISHDA YANGI ZAMONAVIY TEXNOLOGIYALARDAN FOYDALANISH. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1013-1015.	
204.	Курбонов, Ш. Ш., & Рамазонов, Б. Р. (2021). ЎСИБ КЕЛАЁТГАН ЁШ АВЛОДГА ЎСИМЛИКЛАР УРУҒЛАРИ ТЎҒРИСИДА МАЪЛУМОТ БЕРИШ ВА УЛАРНИ ЭКИН ЭКИШГА ЎРГАТИШ. <i>Педагогик таълим кластери: муаммо ва ечимлар</i> , 1016-1020.	
205.	Quchqarova, D. S. (2021). KVADRAT FUNKSIYAGA KELADIGAN TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1021-1023.	
206.	Ғаффоров, Я. Х. (2021). ТАРИХ ЎҚИТИШДА ЯНГИ ПЕДАГОГИК ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИДАН ФОЙДАЛАНИШ. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1024-1030.	
207.	Хусенов, Б. Э. (2021). КЛАСС ХАРДИ ДЛЯ А(z) - АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. <i>Кластер педагогического образования: проблемы и решения</i> , 1031-1036.	
208.	Zaripov, E. E. (2021). O'ZBEKISTONDAGI YOSHLARNING BUGUNGI KUNDAGI TAFAKKURINING RIVOJLANISHIGA TELERADIOKANALLARDAGI KO'RSATUV VA ESHITTIRISHLARNING TA'SIRI. <i>Pedagogik ta'lim klasteri: muammo va yechimlar</i> , 1037-1041.	

## **$A(z)$ – АНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ХАРДИ СИНФИ.**

**Беҳзод Эркин ўғли Хусенов**

Бухоро давлат университети таянч докторанти

[husenovbehzod@mail.com](mailto:husenovbehzod@mail.com)

**Аннотация:** Мақолада  $A(z)$ –аналитик функциялар учун Харди синфи киритилган. Рисс теоремасининг аналогли исботланган ва Харди синфига тегишли бўлган функцияга мисол келтирилган.

**Калит сўзлар:** Бельтрами тенгламаси,  $A(z)$ –аналитик функция, лемниската, Харди синфи, Харди фазоси.

## **КЛАСС ХАРДИ ДЛЯ $A(z)$ – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.**

**Аннотация:** В статье приводятся класс Харди для  $A(z)$ –аналитических функций. Доказано аналог теоремы Рисса и приведено примера принадлежащие функцию класса Харди.

**Ключевые слова:** Уравнения Бельтрами,  $A(z)$ –аналитическая функция, лемниската, класс Харди, пространство Харди.

## **THE HARDY CLASS FOR $A(z)$ – ANALYTIC FUNCTIONS**

**Annotation:** The article proved by Hardy class for  $A(z)$ –analytic functions. Is given an analog of the theorem Riss and an example of a function belonging to the Hardy class.

**Keywords:** Beltrami equations,  $A(z)$ –analytic function, lemniscate, Hardy class, Hardy space.

Пусть  $A(z)$  – некоторая непрерывная функция в области  $D \subset \mathbb{C}$ . Введем оператор:  $\partial_A = \partial - \overline{A(z)} \cdot \bar{\partial}$ , где  $\partial$  – оператор дифференцирование по  $z$ , а  $\bar{\partial}$  – оператор дифференцирование по  $\bar{z}$ .

**Определение 1.** [3] Пусть  $f(z)$  – дифференцируемая функция в области  $D$ . Если для любого  $z \in D$  она удовлетворяет уравнение Белтьрами:

$$\overline{\partial_A} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

то  $f(z)$  называется  $A(z)$  – аналитической функцией в области  $D$ , где  $|A| \leq c < 1, c = const$ .

**Определение 2.**  $f(z) = A(z)$  – аналитическая функция является принадлежащей к классу Харди  $H_A^p$ , если функция ограниченная в лемнискате

$$L(a; r) = \{|\psi(z; a)| = \left| z - a + \int_{\gamma(z; a)} \overline{A(\tau)} d\tau \right| < r\},$$

то есть

$$0 < \rho < r, \lim_{\rho \rightarrow r} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(z; a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| < \infty. \quad (2)$$

где  $\gamma(z; a)$  – гладкая кривая, соединяющая точки  $z; a \in D$ .

Пространство Харди  $H_A^p$  для  $A(z)$  – аналитических функций при  $0 < p \leq 1$  – это класс функций которая конечная норма в лемнискате  $L(a; r)$ :

$$\|f\|_{H_A^p} = \sup_{0 < \rho < r} \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| < \infty,$$

при  $p > 1$  конечная норма выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^p} = \sup_{0 < \rho < r} \left( \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Далее, при  $0 < q < p$  очевидно выражения:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} |f(z)|^q |dz + Ad\bar{z}| < 1 + \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}|,$$

отсюда следует, что если  $f(z)$  принадлежит классу  $H_A^p$ , то она принадлежит также классу  $H_A^q$ , то есть  $H_A^p \subset H_A^q$  при  $0 < q < p$ .

Обозначим через  $H_A^\infty$  класс функций,  $A(z)$  – аналитических и ограниченных в лемнискате  $L(a; r)$ . Для  $f \in H_A^\infty$  условия нормы выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^\infty} = \sup_{|\psi(z; a)| < r} |f(z)| < \infty.$$

Следовательно, при  $1 < q < p < \infty$ , имеет  $H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q \subset H_A^1$ .

Если  $f \in H_A^\infty$ , то  $f$  принадлежит всем пространствам  $H_A^p : H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q$ , где  $0 < q < p < \infty$ .

Для классы  $H_A^p$  приведём аналог теорема Ф. Рисс.

**Теорема.** Если  $f$  функция принадлежит класса  $H_A^p$ , то каково бы ни было множество  $M$  положительной меры на границы лемнискаты  $\partial L(a;r)$ :

$$\lim_{\rho \rightarrow r} \int_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| = \int_M |f(\zeta)|^p |d\zeta + Ad\bar{\zeta}| \quad (3)$$

и

$$\lim_{\rho \rightarrow r} \int_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z) - f(\zeta)|^p |d\zeta + Ad\bar{\zeta}| = 0, \quad (4)$$

где  $M \subset \partial L(a;r)$ ,  $\rho < r$  – радиус.

**Доказательства.** Доказательства этой теоремы сводится к доказательству соотношения (3) для функции класса  $H_A^2$ .

Итак, пусть  $\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi^n(z;a)$  – функция из класса  $H_A^2$ . Тогда при всех  $\rho < r$  имеет место равенство Парсевая

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(z;a)|=\rho} |\gamma(z)|^2 |dz + Ad\bar{z}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2n} \quad (5)$$

$(f(x) \in L^2)$ , ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$  сходится и

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$  – равенство Парсевая, где

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$  и  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$  – коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ .) и в силу (2) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad (6)$$

сходится.

Пусть  $0 < \lambda < 1$ , тогда функция  $\gamma(z) - \gamma(\lambda z)$ , очевидно, принадлежит классу  $H_A^2$  и следовательно, имеет место равенство Парселвая

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(z;a)|=\rho} |\gamma(z) - \gamma(\lambda z)|^2 |dz + Ad\bar{z}| = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \rho^{2n} (1 - \lambda^n)^2, \quad (7)$$

переходя к пределу по  $\rho \rightarrow r$ , на освании равенства Фату (Лемма Фату: Если для функции  $f_n(x)$  вместо условий  $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$  выполняются условия

$f_n(x) \geq 0$ , то вместо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx \geq \int_E f(x) dx$ , где  $E$  – измеримое множество.)

получаем:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\psi(z;a)=\rho} |\gamma(z) - \gamma(\lambda z)|^2 |dz + Ad\bar{z}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 (1 - \lambda^n)^2. \quad (8)$$

И так как сумма ряда в правой части (8) стремится к нулю, т. е. соотношение (4) справедливо для функции  $H_A^2$ .

**Замечание.** Как видно, из равенства (4), для того чтобы функция  $\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \psi^n(z;a)$  принадлежала классу  $H_A^2$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2$ .

Пользуясь, равенством (2) и обозначая

$$\gamma(z) = (f(z))^{\frac{p}{2}}, \quad (9)$$

мы можем функцию  $f(z)$  класса  $H_A^p$  представить виде

$$f(z) = b(z)(\gamma(z))^{\frac{2}{p}}, \quad (10)$$

где  $\gamma(z)$  – функция класса  $H_A^2$ .

Введём сокращённые обозначения:  $b(z) = b$ ,  $b(\zeta) = b_\rho$ ,  $\gamma(\zeta) = \gamma_\rho$ .

Докажем соотношение (3).

Представим интеграл  $\int_M (|f(z)|^p - |f(\zeta)|^p) |dz + Ad\bar{z}|$  в виде

$$\begin{aligned} \int_M (|f(z)|^p - |f(\zeta)|^p) |dz + Ad\bar{z}| &= \int_M (|b|^p |\gamma|^2 - |b_\rho|^p |\gamma_\rho|^2) |dz + Ad\bar{z}| = \\ &= \int_M (|b|^p - |b_\rho|^p) |\gamma|^2 |dz + Ad\bar{z}| + \int_M |b_\rho|^p (|\gamma|^2 - |\gamma_\rho|^2) |dz + Ad\bar{z}|. \end{aligned}$$

Так как  $\left| |b|^p - |b_\rho|^p \right| < 1$ , то по теореме Лебега

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow r} \int_M (|b|^p - |b_\rho|^p) |\gamma|^2 |dz + Ad\bar{z}| &= \int_M (|b|^p - |b_\rho|^p) |\gamma|^2 |dz + Ad\bar{z}| = 0 \Rightarrow \\ \left| \int_M |b|^p (|\gamma|^2 - |\gamma_\rho|^2) |dz + Ad\bar{z}| \right| &\leq \int_M |\gamma|^2 - |\gamma_\rho|^2 |dz + Ad\bar{z}| \leq \int_M |\gamma^2 - \gamma_\rho^2| |dz + Ad\bar{z}| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{\int_M |\gamma^2 - \gamma_\rho^2| (dz + Ad\bar{z})} \int_M |\gamma^2 + \gamma_\rho^2| (dz + Ad\bar{z}) \leq 2 \sqrt{2 \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2} \sqrt{\int_M |\gamma^2 - \gamma_\rho^2| (dz + Ad\bar{z})}$$

и применяя уже доказанное для  $\gamma(z)$  соотношение (4), получаем:

$$\lim_{\rho \rightarrow r} \int_M |b_\rho|^p \left( |\gamma|^2 - |\gamma_\rho|^2 \right) |dz + Ad\bar{z}| = 0. \text{ Соотношение (3) доказано.}$$

Классическая теорема доказано в [2].

**Пример.** Пример неограниченной функции, принадлежащем всем классом  $H_A^p$ . Рассмотрим неограниченную  $A(z)$  – аналитическую в лемнискате функцию  $f(z) = \ln \frac{1}{1 - \psi(z; a)}$ . Так как

$$\left| \ln \frac{1}{1 - \psi(z; a)} \right| \leq |\ln |1 - \psi(z; a)|| + |\arg(1 - \psi(z; a))| < |\ln |1 - \psi(z; a)|| + \pi$$

и  $|a + b|^p \leq 2^p |a|^p + 2^p |b|^p$ , то

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} \left| \ln \frac{1}{1 - \psi(z; a)} \right|^q |dz + Ad\bar{z}| < 2^p \cdot \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial L(a; \rho)} |\ln |1 - \psi(z; a)||^p |dz + Ad\bar{z}| + (2\pi\rho)^i$$

Далее, при  $\rho > \frac{1}{2}$ ,  $e > |1 - \psi(z; a)| \geq 2\sqrt{\rho} > \frac{2\sqrt{\rho}}{\pi} \geq \frac{2}{\pi} |\psi(z; a)|$ ,

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\substack{|\psi(z; a)| = \rho \\ \operatorname{Im} \psi(z; a) > 0}} |\ln |1 - \psi(z; a)||^p |dz + Ad\bar{z}| \leq 1 + \frac{1}{\pi\rho} \int_{\substack{|\psi(z; a)| = \rho \\ \operatorname{Im} \psi(z; a) > 0}} \left( \ln \frac{1}{|1 - \psi(z; a)|} \right)^p |dz + Ad\bar{z}| \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{\pi\rho} \int_{\substack{|\psi(z; a)| = \rho \\ \operatorname{Im} \psi(z; a) > 0}} \left( \ln \frac{1}{\frac{2}{\pi} |\psi(z; a)|} \right)^p |dz + Ad\bar{z}|,$$

т. е.

$$\|f\|_{H_A^p} \leq 2^p + (2\pi)^p + \frac{2^p}{\pi\rho} \int_{\substack{|\psi(z; a)| = \rho \\ \operatorname{Im} \psi(z; a) > 0}} \left( \ln \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\pi} |\psi(z; a)|} \right)^p |dz + Ad\bar{z}| < \infty.$$



#### REFERENCES

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций, Москва, Гостехиздат, 1950, 336 с.
2. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ , Москва, Мир, 1984, 370 с.
3. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 9. Issue 3. 2016, 374-383 p.