BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

ISSN 2181-6875

4

2019

# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

- **ANIQ VA TABIIY FANLAR**

**Маматкаримов О.О., Икрамов Р.Ғ., Қахаров С.С., Абдукаримов А.А.** Юқори сезгир бўёқли қуёш элементлари (dssc)ни тайёрлаш технологияси ва ишлаш принципи.....................................3
**Илиев Х.М., Усмонов Ж.И., Абдуллаев Х.Х.** Кремнийли фотоэлементларнинг спектрал сезгирлик соҳасини бинар элементар ячейкалар ёрдамида кенгайтириш......................................5
**Расулов Т.Х., Мустафоева З.Э.** О точечном спектре одной диагонализируемой $3\times3$-операторной матрицы ....................................................................................11
**Равшанов С.С., Қодиров О.Ш., Рамазонов Р.Р., Мусаев Х.П., Нурматов И.Р., Турдиев Б.Х.** Буғдой донларини навли ун тортишга тайёрлашда қўлланиладиган сувларнинг аномал физик-кимёвий хусусиятлари ва уни активлаштириш методларининг таҳлили.........................................17
**Жалолов О.И., Хаятов Х.У.** Верхняя оценка для нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы в пространстве $\overline{L}_p^{(m)}(K_n)$ ..........................................................................25
**Жумаев Ж., Хабибов Ф.Ю., Мерожев И.З.** Теоретические исследование параметров первичного дробления мысцеллы в окончательных дистилляторах ..........................................30
**Самиев К.А.** Определение оптимальные толщины изоляции для наружных стен жилых зданий для узбекистана на основе различных материалов и источников энергии ..................................34
**Тураева У.Ф., Тураев Ш.Ф., Тураев А.Ф.** Особенности солнечных теплоэнергетических установок ..........................................................................................................38
**Усмонов Б.З.** Обобщение задачи трикоми для одного класса уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа с разрывными условиями склеивания....................................42
**Дилмуродов Э.Б., Неъматова Ш.Б.** О собственных значений обобщенной модели фридрихса с трехмерным значением на нецелочисленной решетки .....................................................................48
**Назаров Ф.Х.** Численное исследование капель втурбулентной струе .........................................54
**Наврузов Д.П., Каримов Р.С., Фармонов Н.К.** Численное моделирование обтекания плоской пластины на основе спаларта – аллмараса моделей ....................................................................59
**Нуриддинов Ж.З.** Эквивалентная система интегральных уравнений для одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения теплопроводности ....................................................63
**Fayziyeva D.H.** Hot potatoes dasturi imkoniyatlaridan samarali foydalanish usullari ..........................67
**Atoyev D.D., Xayriyev U.N.** Volterraning ikkinchi tur tenglamalarini sonli yechish...............................71
**Хусенов Б.Э.** Класс Харди и теорема Голузина-Крылова для $A(z)$–аналитических функций.......................................................................................................................76
**Saidova R.M., Fayziyeva X.A.** Fizika fanidan laboratoriya ishlarini crocodile physics dasturi yordamida tashkillashtirishning ahamiyatli tomonlari ...........................................................................85
**Bo'ronova G.Y., Nosirova Sh.E.** Mobil ilova va mobil platformalarni yaratishda react native dasturidan foydalanishning muhim afzalliklari........................................................................................................88
**Ergashev A.A., Eshonqulov H.I., Xusenov M.Z.** Bilimlarni tasvirlashda freymli modellardan foydalanish ..........................................................................................................................92
**Rahmonov A.A.** Recovering of a stationary external force by distributions .........................................96

- **TILSHUNOSLIK**

**Раупова Л.Р.** Диалогик дискурсда интенциал мазмун....................................................................101
**Ҳайдаров А.А.** Фонетик ўзгаришли сўзларда коннотатив маънонинг ифодаланиши.................107
**Nazarova S.A.** So'z birikmasi tarkibiy qismlarining bog'lanishi va birikish omillari ............................113
**Йўлдошева Д.** Синтактик хусусият синтактик омил билан баҳоланиши зарур...........................117
**Саидова М.Р., Убайдова Д.А.** Развитие орфоэпических навыков у студентов - узбеков на занятиях русского языка.......................................................................................................122
**Данияров Б.Х.** Ўзбек тили изоҳли луғатларида лексик синонимлар тавсифи ва уни такомиллаштириш вазифалари.........................................................................................................125
**Тоғаев Т.М.** "Оғиз жуфтламоқ" ибораси ҳақида..............................................................................133
**Махмараимова Ш.Т.** Аппроксимация – ноаниқлик/аниқлик категориясини ифодаловчи номинацияда метафорик талқин.......................................................................................................136

**УДК: 517.5**

# $A(z)-$ АНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ХАРДИ СИНФИ ВА ГОЛУЗИН-КРЫЛОВ ТЕОРЕМАСИ

# КЛАСС ХАРДИ И ТЕОРЕМА ГОЛУЗИНА-КРЫЛОВА ДЛЯ $A(z)-$АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

# HARDY CLASS AND GOLUSIN-KRYLOV THEOREM FOR $A(z)-$ ANALYTIC FUNCTION

**Хусенов Бехзод Эркин угли**
*преподователь кафедры математики БухГУ*

**Таянч сўзлар:** Шилов чегараси, голоморф функция, сўндирувчи функция, $A(z)-$ аналитик функция, $A(z)-$ антианалитик функция, Белтьрами тенгламаси, $m$ марта дифференциалланувчи функциялар синфи, қавариқ соҳа, лемниската, $A(z)-$ аналитик функция учун ядроси, Харди синфи, Харди фазоси.

**Ключевые слова:** Граница Шилова, голоморфная функция, гасящая функция, $A(z)-$ аналитическая функция, $A(z)-$ антианалитическая функция, уравнения Бельтрами, класс $m$ раз непрерывно дифференцируемых функций, выпуклая область, лемниската, ядро Коши для $A(z)-$аналитической функции, класс Харди, пространство Харди.

**Key words:** Shilov border, holomorphic function, —blanking function, - $A(z)-$ analytic function, $A(z)-$ antianalitic function, Beltrami equations, class $m$ times continuosly differentiable functions, convex domain, lemniscate, Cauchi core for $A(z)-$ analytic function, Hardy class, Hardy space.

*Мақолада $A(z)-$ аналитик функциялар ўрганилган. $A(z)-$ аналитик функциялар учун Харди синфи киритилган, Голузин-Крылов теоремасининг аналоги исботланган ва $A(z)-$ аналитик функциялар учун Карлеман формуласи келтирилган.*

*В статье исследуются $A(z)-$аналитические функции. Приводятся класс Харди для $A(z)-$аналитических функций, доказывается аналог теоремы Голузина-Крылова и приведено формула Карлемана для $A(z)-$аналитических функций.*

*The article explores $A(z)-$ analytic functions. The Hardy class is given for $A(z)-$ analytic functions, is proved an analog of the theorem Goluzin-Krylov and Carleman's formula is given for $A(z)-$ analytic functions.*

**Введение.** Интегральное представления голоморфных функций играет важную роль в классической теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе (в последнем случае наряду с интегрированием по всей $\partial D$ границе области $D$ часто встречается интегрирование по границе Шилова $S=S(D)$ ). Он решает классическую задачу. Которие задатся следующим образом: восстановить голоморфную функцию в $D$ по её значениям на некотором множестве $M\subset\partial D$, не содержащем $S$. Конечно, $M$ должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций (например, для тех из них, которые непрерывны на $\overline{D}$ или входят в класс Харди $H^p(D),\ p\geq 1$).

Первый результат в направлении решения такой задачи получил Т. Карлеман в 1926 год [3] для области $D\subset C^1$ для одного специального вида. Его идею введения «гасящей» функции в интегральную формулу Коши развили Г. М. Голузин и В.И. Крылов в 1933 год [4] применительно к односвязным плоским областям. Их метод предусматривал построение некоторой вспомогательной голоморфной функции, зависящей от множества $M$, что было возможно для односвязных областей $D\subset C^1$, но, вообще говоря, уже невозможно для многосвязных областей в $C^1$ или для областей в $C^n,\ n>1.$ Другой метод, основанный на аппроксимации ядра интегрального представления, предложил М. М. Лаврентьев в 1956 год [5]. Оказалось, что этот метод успешно работает в отмеченных случаях, когда неприменим подход Голузина-Крылова. Физиками-теоретиками В. А. Фоком и Ф. М. Куни для областей специального вида получена при $n=1$ самая простая формула Карлемана [1, стр. 18-19].

Академик А. Садуллаев и его ученики опубликовали в 2016 году статью о классе $A(z)-$аналитических функций. Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}-A(z)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \qquad (1)$$

Имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$ в общем случае предполагается, что она измерима и

$$|A(z)|\leq c<1$$

почти всюду в рассматриваемой области $D\subset C.$ В основной литературе решение уравнения (1) принято называть $A(z)-$аналитическими функциями.

В случае $|A(z)|<1$ почти всюду $D$ гомеоморфные решение не меняют ориентацию, а в случае $|A(z)|>1$ почти всюду $D$ меняют. Эти случаи уравнения Бельтрами различаются лишь формально. Интерес представляет ситуация, когда одновременно существуют подобласти $D$, в которых почти всюду выполнено $|A(z)|<1$ и побласти $D$, в которых почти всюду $|A(z)|>1$. В этом случае говорится, что уравнений Бельтрами имеет *переменный тип.* Его решения описывают со складками, сборками и т. п. Задача исследования уравнений Бельтрами переменного типа ставилась Л. И. Волковыским [6].

Изучение уравнения (1) в общем случае было связано с изучением классического уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}-A^*(z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

с комплексной дилатацией

$$A^*(z)=\begin{cases} A(z) & при\ \ |A(z)|\leq 1, \\ \dfrac{1}{\overline{A}(z)} & при\ \ |A(z)|>1. \end{cases}$$

Это уравнение называем в дальнейшем уварнением, *ассоциированным* с уравнением (1). Очевидно, $|A(z)|<1$ п. в. в $D$, причем в классическом случае уравнение Бельтрами и ассоциированное уравнение совпадает с самим уравнением, так как $A(z)=A^*(z)$. Связ между уравнениями Бельтрами переменного типа и ассоциированными уравнениями Бельтрами впервые отмечена Э.Х.Якубовым [15].

В работе Ю. Сребро и Э. Х. Якубова [17] была установлена локальная теорема существования и единственности гомеоморфных решений вырождающихся уравнений Бельтрами, записанная в геометрических терминах.

В работе Д. А. Ковтонюка, И. В. Петкова, В. И. Рязанова, Р. Р. Салимова [13] доказано существование регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельрами в произвольных жордановых областях и псевдорегулярных, а также многозначных решений в произвольных конечносвязных областях, ограниченных попарно непересекающимся жордановыми кривими. Дальнейшее развитие в этом направлении получено А. Н. Кондрашовым в работе [14], где доказано теорема о локальном существовании решений ассоциированного уравнения в окрестности дуги вырождения, записанная в геометрических терминах.

Одной из фундаментальных работ в теории уравнений Бельтрами является монография В. Гутлянского, В. Рязтанова, Ю. Сребро и Э. Якубова [17], в которой рассматривается геометрический подход к исследованию уранения Бельтрами.

**Теорема 1.1** ([16]). *Для любой измеримой на плоскости $C^1$ функции*

$$A(z): \ \| A(z)\|_\infty < 1$$

*существует единственное гомеоморфное решение $X(z)$ уравнения (1) такое, что $X$ оставляет неподвижными точки $0, 1, \infty$.*

Отметим, что если функция $A(z) \ \ (|A(z)| \le c < 1)$ определена только в области $D \subset \square$, то её можно продолжать на всю плоскость $C^1$, полагая $A(z) \equiv 0$ вне $D$, так что теорема 1.1 верна для любой области $D \subset C^1$.

**Теорема 1.2** ([18]). *Множество всех обобщенных решений уравнения (1) исчерпывается формулой*

$$f(z) = \Phi[\chi(z)],$$

*где $\chi(z)$ - гомеоморфное решение из теоремы 1.1, а $\Phi(\zeta)$ - голоморфная функция от $\zeta$ в $\chi(D)$. Более того, голоморфная функция*

$$\Phi = f \circ \chi^{-1}$$

*наследует особенности $f(z)$ с сохранением типов.*

Из теоремы 1.2 вытекает, что $A(z)-$аналитическая функция $f(z)$ осуществляет внутреннее отображение, т. е. она переводит открытое множество в открытое. Отсюда вытекает справедливость принципа максимума: для любой ограниченной области $D \subset C^1$ максимум модуля достигается только на границе,

$$|f(z)| < \max_{z\in\partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

Если функция не обращается в нуль, то верен и принцип минимума:

$$|f(z)| > \min_{z\in\partial D} |f(z)|, \ \ z \in D.$$

**Теорема 1.3** ([9]). *Если функция $A(z)$ принадлежит классу $m$ раз непрерывно дифференцируемых функций: $A(z) \in C^m(D)$, то всякое решение $f(z)$ уравнения (1) тоже принадлежит, как минимум, этому же классу, т. е. $f(z) \in C^m(D)$.*

Целью данной статьи является исследование $A(z)-$ аналитических функций в одном частном случае, когда функция $A(z)$ является антианалитической функцией в рассматриваемой области. В разделе 3 вводятся класс Харди для $A(z)-$аналитических функций, в разделе 4 доказывается аналоги теоремы Голузина-Крылова для $A(z)-$ аналитических функций.

**2. Основные фундаментальные теоремы теории $A(z)-$ аналитических функций.** Изучение $A(z)-$аналитических функций инициировано их применениями в задачах томографии. Так, в цикле работ А. Л. Бухгейма и С. Г. Казанцева ([8]) задача Радона интерпретируется при помощи краевых задач для бесконечномерного аналога уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

где $f(z)-$ функция комплексного аргумента $z$ со значениями в некотором банаховом пространстве $X$ и $A-$ линейно непрывный оператор:

$$A:\ X \to X,\ \ \|A\| < 1.$$

Если $A-$ линейно непрывный оператор, то $A(z)-$ аналитические функции в конечномерном или бесконечномерном пространствах, применяются в теории эллиптических уравнений (см. работы [3, 7]). В упомнянутых работах $A(z)$ является константой, $A(z) = const.$

Пусть $A(z)-$ антианалитическая, $\partial A = 0$, в области $D \subset C^1$ и такая, что

$$|A(z)| \le c < 1,\ \ \forall z \in D.$$

Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (1) класс $A(z)-$ аналитических функций $f(z) \in O_A(D)$ характеризуется тем, что

$$\bar{D}_A f(z) = 0.$$

Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из теоремы 1.3 вытекает, что

$$O_A(D) \subset C^\infty(D).$$

**Теорема 2.1** (аналог теоремы Коши, см. [11]). *Если* $f(z) \in O_A(D) \bigcap C(\bar{D})$, *где* $D \subset C^1 -$ *область со спрямляемой границе* $\partial D$, *то*

$$\int_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0.$$

В изучении $A(z)-$аналитических функций, когда функция $A(z)-$аналитическая, большую роль играет ядро

$$K(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z - \zeta + \overline{\overline{\int_{\gamma(\zeta;z)} A(\tau)d\tau}}} \qquad (2),$$

где $\gamma(\zeta;z)-$ гладкая кривая, соединяющая точки $\zeta, z \in D$. Так как область $D-$ односвязная и $\bar{A}(z)-$ голоморфная функция, то интеграл

$$I(z) = \int_{\gamma(\zeta;z)} \bar{A}(\tau)d\tau$$

не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z) = \bar{A}(z)$. Если, кроме того, область $D \subset C^1$ выпуклая, то имеет место.

**Теорема 2.2** (см. [18]). $K(z;\zeta)$ *является* $A(z)-$ *аналитической функцией вне точки* $z = \zeta$ *, т.е.*

$$K \in O_A(D \setminus \{\zeta\}).$$

*Более того, в точке* $z=\zeta$ *функция* $K(z;\zeta)$ *имеет полюс первого порядка.*

**Замечание 2.1.** *Если область* $D\subset C^1$ *не яляется выпуклой, лишь односвязной , то хотя функция*

$$\psi(z;\zeta)=z-\zeta+\overline{\int_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}$$

*однозначно определена в области* $D$, *но априори она может иметь другие изолированные нули* $\zeta:\psi(z;\zeta)=0,\ z\in P=\{\zeta;\zeta_1;\zeta_2;...\}$. *Однако* $\psi\in O_A(D), \psi(z;\zeta)\neq 0$ *при* $z\notin P$, *и* $K(z;\zeta)$ *является* $A(z)-$ *аналитической функцией в* $D\setminus P$ *с простыми полюсами в точках* $\zeta;\zeta_1;\zeta_2;...$ ([18]). *В связи с этим ниже мы рассматриваем класс* $A(z)-$ *аналитических функций только в выпуклых областяй* $D\subset C^1$.

**Теорема 2.3** (формула Коши, см. [11]). *Пусть* $D\subset C^1$ *- выпуклая область и* $G\subset D$ *- произвольная подобласть с кусочно гладкой границей* $\partial G$. *Тогда для любой функции* $f(z)\in O_A(D)\bigcap C(\overline{G})$ *имеет место формула*

$$f(z)=\int_{\partial G}K(\zeta;z)f(z)(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}),\ z\in G. \qquad (3)$$

**Теорема 2.4** (аналог теоремы Вейерштрасса, см. [18]). *Если ряд из* $A(z)-$ *аналитических в области* $D$ *функций*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z),\ f_n(z)\in O_A(D), \qquad (4)$$

*Сходится равномерно на любом компактном подмножестве этой области, то*

1. $f(z)\in O_A(D)$;
2. *ряд (2.3) можно почленно дифференцировать по* $z$:

$$\partial f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\partial f_n(z),\ \ \overline{\partial}f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\partial}f_n(z),\ \ D_Af(z)=\sum_{n=1}^{\infty}D_Af_n(z); \qquad (5)$$

3. *ряди (2.4) сходятся равномерно на любом компактном подмножестве* $D$.

Здесь уместно отметить, что от того, что функциональный ряд из произвольных (не обязательно из $A(z)-$аналитических) функций сходится равномерна, то сходится ряд из дифференциалов.

Теперь мы вкратце остановимся на степенных рядах в классе $A(z)-$ аналитических функций, когда $A(z)-$ антианалитическая в некоторой выпуклой области $D\subset C^1$. В этом случае функция $\psi(z;\zeta)$ имеет вид

$$\psi(z;\zeta)=z-\zeta+\overline{\int_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\in O_A(D),$$

и согласно теореме 1.2 она осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество

$$L(\zeta;r)=\left\{z\in D:|\psi(z;\zeta)|=\left|z-\zeta+\overline{\int_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right|<r\right\},\ r>0,$$

для достаточно маленьких $r$ компактно принадлежит $D$ и содержит точку $\zeta$ . Это множества называется $A(z)-$ *лемнискатой* с центром в точке $\zeta$ и обозначается ка $L(\zeta;r)$. Она является односвязной областью (см. [18]).

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов $A(z)-$аналитических функций будуть ряди

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z;a),\ a \in D,\ c_j = const. \qquad (6)$$

Областью сходимости ряда (6) будет лемниската $L(\zeta;r)=\{|\psi(z;\zeta)|<R\}$, где радиус сходимости $R$ находится по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R}=\lim_{j\to\infty}\sqrt[j]{|c_j|}.$$

Покажем, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно внутри

$$|\psi(z;a)|=|z-a+\overline{\int_{\gamma(a;z)} A(\tau)d\tau}|<R.$$

Пусть $r<R$. Для $|\psi(z;a)|=\dfrac{R+r}{2}$ ряд (6) сходится и поэтому существует $n_0$, такое что для $n\geq n_0$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{|c_n|}\leq\frac{2}{R+r}.$$

Тогда для таких $n\geq n_0$ и для $|\psi(z;a)|\leq r$ имеем

$$|c_n\psi(z;a)^n|\leq|c_n||\psi(z;a)|^n\leq(\frac{2r}{r+R})^n.$$

Поэтому ряд (6) мажорируется сходящимся числовым рядом и он абсолютно и равномерно сходится в $\{|\psi(z;a)|\leq r\}$ ([см. 20]). Имеет место обратное утверждение.

**Теорема 2.5** (см. [18]). *Если* $f(z)\in O_A(L(a;r))$, *где* $L(a;r)=\{\zeta\in D:|\psi(\zeta;a)|<r\}\subset D-$ *лемниската, то в* $L(a;r)$ *функция* $f(z)$ *разлагается в ряд Тейлора:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\psi^k(z;a). \qquad (7)$$

*Коэффициенты ряда определяются по формулам*

$$c_k=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k}|_{z=a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a;\rho)}\frac{f(\zeta)}{[\psi(\zeta;a)]^{k+1}}(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}),\ 0<\rho<r,\ k=0,1,...$$

Для полноты изложения приведем разложение $A(z)-$аналитических функций в ряд Лорана.

**Теорема 2.6** (см. [18]). *Пусть функция* $f(z)$ $A(z)-$ *аналитических функций в кольце из лемнискат:*

$$f(z)\in O_A(L(a;R)\setminus L(a;r)),\ r<R.$$

Тогда в этом кольце $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\psi^k(z;a), \qquad (8)$$

где коэффициенты ряда определяется по формулам

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a;\rho)}\frac{f(\zeta)}{[\psi(\zeta;a)]^{k+1}}(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}),\ r<\rho<R,\ k=0;\pm1;\pm2;...$$

Ряд (2.7) сходится равномерно и абсолютно внутри кольца

$$L(a;R)\setminus L(a;r)=\{z\in D: r<|\psi(z;a)|<R\}.$$

**3. Класс Харди для** $A(z)-$**аналитических функций.** Функция $f(z)$ называется принадлежащей к классу Харди $H^p(D),\ p\in N$, если функция $f(z)$ регулярная и ограниченная в единичном круге $|z|<1$, то есть

$$z = re^{i\varphi},\ 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ \exists T > 0,\ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi \le T.$$

Пространсво Харди $H^p$ при $0 < p < \infty$ - это класс функций в единичном круге $|z|<1$ в комлексной плоскости, удовлетворяющих следующему условию

$$|f|_{H^p} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad ([2]).$$

Теперь вводим класс Харди для $A(z)-$аналитических функций.

**Определение 3.1.** Функция $f(z)$ называется **принадлежащей к классу Харди для** $A(z)-$**аналитических функций** $H_A^p(D),\ p \in N,$ если функция $f(z)$ удовлетворяет во множестве $L(a;r)$ условию:

$$\exists T > 0,\ \int_{\partial L(a;r)} |f(z)|^p |dz + A(z)d\bar{z}| \le T,\ p > 1.$$

Пространсво Харди $H_A^p$ при $0 < p < \infty$ $-$ это класс функций в лемнискате $L(a;r)$ удовлетворяющих следующему условию:

$$|f|_{H_A^p} = \sup_{0<R<r} \left(\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial L(a;r)} |f(z)|^p |dz + A(z)d\bar{z}|\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Обозначим $f \in H_A^p(L(a;r)) \Rightarrow f \in O_A(L(a;r))$ и $f \in H^p(L(a;r)),\ p \ge 1.$

4. **Теорема Голузина - Крылова для** $A(z)-$ **аналитических функций.** Пусть дана лемниската $L(a;r)$. Для функция $f \in H_A(L(a;r)),\ p = 1$ имеет место интегралная формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L(a;r)} \frac{f(z)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta})}{\zeta - z + \int_{\gamma(z;\zeta)} \overline{A(\tau)d\tau}},\ z \in L(a;r). \qquad (9)$$

На границе $\partial L(a;r)$ рассмотрим измеримое множество $M$ положительной меры Лебега. Ставится задача восстановления $f(z)$ $A(z)-$ аналитических функций в $L(a;r)$ по граничным значениям не на всей границе $\partial L(a;r)$, как в (9), а только на $M \subset \partial L(a;r).$ Для этой цели нужно сконструировать вспомогательную функцию $\varphi(z) \in H_A^\infty L(a;r),$ удовлетворяющую двум условиям:

1) $|\varphi(\zeta)| = 1$ почти всюду на $\partial L(a;r) \setminus M,$
2) $|\varphi(\zeta)| > 1$ в $L(a;r).$

Покажем, аналог теоремы Голузина - Крылова для $A(z)-$аналитической функции. Если функция $A(z)$ антианалитическая в лемнискате, то выполняется следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Если* $f \in H_A(L(a;r))$ *и множество* $M \subset \partial L(a;r)$ *положительной меры Лебега, то для любой точки* $z \in L(a;r)$ *верна формула Карлемана*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{m\to\infty} \int_M f(\zeta) \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m \frac{d\zeta + A d\bar{\zeta}}{\zeta - z + \int_{\gamma(\zeta;z)} \overline{A(\tau)d\tau}}, \qquad (10)$$

*сходимая равномерно на компактах в* $L(a;r).$

**Доказательство.** Функция $f\varphi^m$ принадлежит классу Харди для $A(z)-$ аналитической функции $H_A(L(a;r))$, здесь $m-$ целое положительное число. По формуле Коши (9)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a;r)}\frac{f(z)(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta})}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau},\ z\in L(a;r),$$

далее разделим область интегрирования $\partial L(a;r)$ на два $M$ и $\partial L(a;r)\setminus M$, разделим $\varphi^m(z)$ в правую часть уравнения и введем его в интегрел:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_M\frac{f(z)(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta})}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L(a;r)\setminus M}\frac{f(z)(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta})}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}. \qquad (11)$$

Теперь оценим интегрируюещую функцию $f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m$. Основываясь на принцип максимума модуля, наша функция $f(\zeta)$ достигает своего максимального значения на границе $\partial L(a;r)$:

$$\max_{\zeta\in\partial D}|f(\zeta)|=B.$$

Теперь на основе свойства вспомогательной функции $\varphi(z)$: $\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right|\le q<1.$ Из этого, $\left|f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\right|\le B\cdot q^m\underset{m\to\infty}{\to}0.$ Отсюда следует, если переходим во втором интеграла на предел в интегральной формуле Коши, он равеняется нулю и тогда

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\bar{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}+\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D|M} f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\bar{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\bar{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}+0=\frac{1}{2\pi i}\lim_{m\to\infty}\int_M f(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m\frac{d\zeta+Ad\bar{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(z;\zeta)}\overline{A(\tau)}d\tau}.$$

*Теорема доказано.*

## ЛИТЕРАТУРА

**1. Айзенберг Л. А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск. 1990. – С. 248.
**2. Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – С. 628.
**3. Carleman T.** Les fonctions qussianalytiques. Paris, 1926. – P. 116.
**4. Голузин Г. М., Крылов В. И.** Обобщенная формула Карлемана и её приложение к аналитическому продолжению функций, Мат. сб. Т. 40. №2. 1933. – С. 144–149.
**5. Лавреньтев М. М.** О задаче Коши для уравнения Лапласа, // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1956. – С. 819-842.
**6. Волковыский Л.И.** Некоторые вопросу теории квазиконформных отображений. – Ленинграңд: Наука, 1970. – С. 128–134.
**7. Бухгейм А. Л.** Формулы обрашчения в обратных задачах. – Москва: Наука, 1991.
**8. Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г.** Эллиптическая система типа Белтрами и задача томография, Докл. АН СССР, 1990, 315, № 1. – С. 15–19.

**9. Векуа И. Н.** Обобщенние аналитические функции. – Москва: Наука, 1988.
**10. Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х.** Некоторые вопросу теории квазиконформнах задач механики двухскоростных сред, Изд. НУУз. Ташкент. – 2012.
**11. Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.** Теорема Коши для $A(z)-$ аналитических функций, Узб. Мат. жур. 2014, № 1. – С. 15–18.
**12. Жабборов Н. М., Отабоев Т. У.** Аналог интегралной формулы Коши для $A(z)-$ аналитических функций, Узб. Мат. жур. 2016. № 4. – С. 50–59.
**13. Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.** Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Белтрами, 2013. 25. № 4. – С. 101–124.
**14. Кондрашов А. Н.** Уравнения Белтрами, вырождающиеся на дуге, 2014. 24. № 5. – С. 24–39.
**15. Якубов Э. Х.** О решениях уравнения Белтрами с вырождением. Докл. АН СССР. 1978. 243, № 5. – С. 1148–1149.
**16. Alfors L.** Lectures on quasiconformal mappings, Springer, Toronto-New York-London. – 1966.
**17. Gutlyanski V., Ryazanov V., Serebro U., Yakubov E.** The Beltrami equation. A geometric approach, Springer – Berlin. 2011.
**18. Sadullayev A., Jabborov N. M.** On a class of A – analytic functions, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. Volume 9. Issue 3. 2016. – P. 374–383.
**19. Jabborov N. M.** Morer's theorem and functional series in the class of A – analytic functions, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2018. 9. № 3. – P. 374–383.
**20. Жабборов Н. М., Отабоев Т. У., Хурсанов Ш. Я.** Неравенство Шварца и формула Шварца для $A(z)-$ аналитических функций, СМФН. 2018. Том 64. № 4. – С. 637 – 649.