ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИЗА

Материалы республиканской

научной конференции

4-5 октябрь 2019 года

ТАҲЛИЛНИНГ ДОЛЗАРБ МУАММОЛАРИ ВА ТАТБИҚЛАРИ

Республика илмий анжумани материаллари

4-5 октябрь 2019 йил

October 4-5, 2019.

ACTUAL PROBLEMS AND APPLICATIONS OF ANALYSIS.

Materials of the republican scientific conference

Қарши – 2019

СЕКЦИЯ-2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Теперь предположим что D выпуклый область.

Теорема 2. Функция $k(z,z_0) := \frac{1}{2\pi}\ln|\psi(z_0,z)|-$ является фундаментальным решением задачи Дирихле для А-субгармонических функции т.е.

$$\iint_D \ln|\psi(z,z_0)|\Delta_A\varphi(z)\,dz\wedge d\bar{z} = \frac{2\pi\varphi(z_0)}{1-|A(z_0)|^2}, \forall\varphi\in F(D)$$

или $\Delta_A k(z,z_0) = \frac{\delta_{z_0}(z)}{1-|A(z_0)|^2}$.

Теорема 3. Для потенциала $U^\mu(z) := \int_D k(z,w)\,d\mu(w), \operatorname{supp}\mu \subset\subset D$ имеет место равенство

$$\Delta_A U^\mu = \frac{1}{1-|A|^2}d\mu$$

т.е.

$$\Delta_A U^\mu(\varphi) = \int_D \frac{\varphi(z)}{1-|A(z)|^2}d\mu(z), \forall\varphi\in F(D).$$

Теорема 4. Если неравенства

$$U^\mu(z)\big|_{\operatorname{supp}\mu} \le M$$

то оно выполняется следующий неравенства в D

$$U^\mu(z)\big|_D \le \frac{M}{1-C}$$

Теорема 5. Если потенциал $U^\mu(z)$ меры μ непрерывен на $\operatorname{supp}\mu$, то он непрерывен в D. Кроме того если потенциал $U^\mu(z)$ удовлетворяет условия Гёльдера на $\operatorname{supp}\mu$ т.е. $\exists M>0$ и $\exists\gamma\in(0;1]$

$$\left|U^\mu(z)-U^\mu(w)\right| \le M|z-w|^\gamma, \forall z,w\in \operatorname{supp}\mu$$

то оно выполняется всюду в D по одинокого степен γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Векуа И.Н.** Обобщенные аналитические функции, М., «Наука», 1988, 512 с.
2. **Sadullaev A., Jabborov N.M.** On a class of A-analytic functions, Siberian Federal University, Maths&Physics, 2016 y 9(3), c. 374-383.
3. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ, М. Наука, 1976г.
4. **Садуллаев А.** Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium academic publishing. 2012
5. **Хурсанов.Ш.Я.** A(z)-гармонической функции. ВЕСТНИК НУУз 2017 2/2 ст. 5-8

ТЕОРЕМЫ М. М. ЛАВРЕНТЬЕВА ДЛЯ *A(Z)* – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Хусенов Б.Э.
Бухарского государственного университет
e-mail: husenovbehzod@mail.ru

Пусть выпуклая область $\Omega\subset\mathbb{C}$. Известно, если $z=x+iy$, то $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y})$. Пусть $D_A=\frac{\partial}{\partial z}-\overline{A(z)}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\overline{D_A}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-A(z)\frac{\partial}{\partial z}$ для функция $|A|\le c<1$, $c=const$.

Определение 1.[4] Если дифферецируемая функция $f:\Omega\to\mathbb{C},\ f\in C^1(\Omega)$ удовлетворяетсяследущая равенства:

$\overline{D_A}f(z)=\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}-A(z)\dfrac{\partial f}{\partial z}=0,$ (1) то функция $f(z)$ называется **функция** $A(z)-$ **аналитическая** и обозначим $f\in O_A(\Omega)$, где $|A|\le c<1,\ c=const,\ A(z)-$ антианалитическая $\dfrac{\partial A}{\partial z}=0.$ Равенство (1) называется **уравнения Белтрами.** Если в область Ω: $D_Af(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}-\overline{A(z)}\dfrac{\partial f}{\partial\bar z}=0,$ то $f(z)$ называется $A(z)-$ **антианалитическая функция.**

Определение 2.[4] Следующая форма множества в область Ω: $L(a;r)=\{|\psi(z;a)|=|z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}|<r\}$ называется **лемниската,** где $a\in\Omega,\ r>0.$

Определение 3.[3] Пусть функция f регулярная и ограниченная в лемнискате $L(a;r)$. Функция f удовлетворяется следущая неравенства:

$\exists T>0,\ \int\limits_{\partial L(a;r)}|f(z)|^p\,|dz+A(z)d\bar z|\le T,\ 0<p<\infty,$ называется **принадлежащей к классу Харди** $H_A^p(L(a;r)),p\in N.$,

Пространство Харди H_A^p при $0<p<\infty$ -это класс функций в лемнискате $L(a;r)$ удовлетворяющих следующему условию:

$$\|f\|_{H_A^p}=\sup_{0<R<r}\Big(\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial L(a;r)}|f(z)|^p\,|dz+A(z)d\bar z|\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Функция f одновременно $f\in O_A(L(a;r))$ и $f\in H^p(L(a;r)),p\ge1$ обозначим $f\in H_A^p(L(a;r))$.

Пусть во множестве $\partial L(a;r)/M$ с ядром Коши $\dfrac{1}{2\pi i(\zeta-z+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau})}$ (здес $z\in L(a;r)$ фиксированна) аппроксимирована $A(z)-$аналитическим функциями $g_{z,m}(\zeta)\in H_A^\infty(L(a;r))$. Эти функции ортогональны рассматриваемым $A(z)-$аналитическим функциям $f\in H_A(L(a;r))$ и интегрировании по $\partial L(a;r)$, где если $(f;g)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial L(a;r)}f(\zeta)g(\bar z)(1-|A(z)|^2)dz\wedge d\bar z=0,$ то функции f и g называется **ортогональная функция.** Кроме того,

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\partial L(a;r)/M}f(\zeta)\Big(\frac{1}{2\pi i(\zeta-z+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau})}-g_{z,m}(\zeta)\Big)\frac{d\zeta+Ad\bar\zeta}{\zeta-z+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}}=0,\qquad(2)$$

где обозначим произволъной $\gamma(\zeta;z)$ путем ведущим от точки ζ до точки z. Мы приходим к следующей формуле:

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_M f(\zeta)\Big(\frac{1}{2\pi i(\zeta-z+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau})}-g_{z,m}(\zeta)\Big)\frac{d\zeta+Ad\bar\zeta}{\zeta-z+\overline{\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}}\qquad(3)$$

В формуле (3) в качестве параметра под знаком интеграла входит z.

Теперь строим аналог функция Карлемана. Эта идея получения аналог формулы Карлемана с аппроксимацией ядра может быть описана с помощъю введенного

М.М.Лаврентъвым аналог понятия Карлемана $A(z)$ – аналитическая. Функция двух комплексных ζ, z и положителъного переменного α, которую обозначим $G(z;\zeta;\alpha)$ називается аналогичная функцией Карлемана $A(z)$ – аналитическое множество M в лемнискате $L(a;r)$ если:

1) $G(z;\zeta;\alpha)=\dfrac{1}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)d\tau}}+\widetilde{G}(z;\zeta;\alpha)$, где $\widetilde{G}$ по ζ является функцией класса $H_A^{\infty}(L(a;r))$;

2) $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial L(a;r)/M}|G(z;\zeta;\alpha)\|\dfrac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)d\tau}}|\leq|C(z)|\alpha$, где постаянная $C(z)$ зависит от z.

Примером аналог функции Карлемана является ядро в аналог формуле Карлемана (метод Голузин-Крылов).

$$G(z;\zeta;\alpha)=[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}]^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)d\tau}}.$$

И вообще, если дана аналогная функция Карлемана $A(z)$ – аналитическая G, то верна и аналогичная формула Карлемана для $A(z)$ – аналитическая функции.

$$f(z)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{M}f(\zeta)G(z;\zeta;\alpha)(d\zeta+Ad\overline{\zeta}). \qquad (4)$$

Очевидно, что аналог формулы (3) и (4) эквивалентны.

Покажем, случаю аналог теореме М.М.Лаврентъева $A(z)$ – аналитической функции. Если функция $A(z)$ антианалитическая в лемнискате $L(a;r)$, то выполняется следующее утверждение.

Теорема. Пустъ лемниската $L(a;r)$ и M – подмножество $\partial L(a;r)$. Тогда существует для функции f из класса $H_A(L(a;r))$ аналог формула Карлемана (3):

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{M}f(\zeta)(\frac{1}{2\pi i(\zeta-z+\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)d\tau})}-g_{z,m}(\zeta))\frac{d\zeta+Ad\overline{\zeta}}{\zeta-z+\int\limits_{\gamma(\zeta;z)}\overline{A(\tau)d\tau}}$$

которая строимся с помощъю цепочки интегралов и разложений в ряды.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Айзенберг Л.А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе, Новосибирск, 1990, 248 с.

[2]. *Лаврентъев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физике и анализе, М:Наука, 1980, 286 с.

[3]. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, М:Наука, 1966, 628 с

[4]. *Sadullayev A., Jabborov N.M.* On a class of A-analytic functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 9.Issue 3. 2016, 374-383 p.