ДОНИШГОҲИ МИЛЛИИ ТОҶИКИСТОН
ФАКУЛТЕТИ МЕХАНИКАЮ МАТЕМАТИКА
КАФЕДРАИ МАТЕМАТИКАИ ҲИСОББАРОРӢ ВА МЕХАНИКА

ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

МАВОДДИ
КОНФЕРЕНСИЯИ БАЙНАЛМИЛАЛИИ ИЛМӢ-НАЗАРИЯВӢ БАХШИДА БА «БИСТСОЛАИ ОМӮЗИШ ВА РУШДИ ФАНҲОИ ТАБИАТШИНОСӢ, ДАҚИҚ ВА РИЁЗӢ ДАР СОҲАИ ИЛМУ МАОРИФ» ВА 80-СОЛАГИИ ПРОФЕССОР БОЙМУРОД АЛИЕВ

МАТЕРИАЛЫ
МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ «ДВАДЦАТИЛЕТИЮ ИЗУЧЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ, ТОЧНЫХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК В СФЕРЕ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ» И 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА БОЙМУРОДА АЛИЕВА

МАСЪАЛАҲОИ МУОСИРИ МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА ВА ИНФОРМАТИКА

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Душанбе – 2025

Сведения об авторе. Хуромонов Хуромон Мамадамонович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Международного университета туризма и предпринимательство Таджикистана. Телефон: +992 50-101-91-62. E-mail: khuromon@mail.ru

Information about author. Khuromonov Khuromon Mamadamonovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan. Phone: +992 50-101-91-62. E-mail: khuromon@mail.ru

УДК 517

УСЛОВИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ДЛЯ *A*(*Z*)-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хусенов Б.Э., Мухаммадова М.Ф.

Бухарский государственный университет

b.e.husenov@buxdu.uz

Класс *A*(*z*)-аналитических функций. Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{C}$ антианалитическую функцию $A(z),$ причем $|A(z)| \leq c$ для всех $z \in D,$ где $c < 1.$ Функция $f(z)$ называется $A(z)-$*аналитической* в области $D,$ если для любого $z \in D$ выполняется следующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1}$$

Класс всех $A(z)-$аналитических функций, заданных в области D, обозначим через $O_A(D).$

Рассмотрим в области D функция $\psi(z,a) = z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ является $A(z)-$аналитической функцией, где $\gamma(a,z)-$ гладкая кривая или касательная путь, соединяющая точки $a, z \in D.$ Множество

$$L(a,r) = \left\{ |\psi(z,a)| = \left| z - a + \overline{\int_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau} \right| < r \right\},$$

представляет собой открытое множество в $D.$ Для достаточно малых r оно компактно принадлежить $L(a,r) \subset\subset D$ и содержит точку $a.$ Это множество называется $A(z)-$*лемнискатой,* с центром в точке a и обозначается как $L(a,r).$ Этая лемниската является односвязным множеством (см. [1]).

Предположим, что область $D \subset \mathbb{C}$ $-$выпуклая и $\xi \in D$ фиксированная её точка. Рассмотрим ядро

$$K(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \overline{A}(\tau)d\tau}}, \tag{2}$$

где $\gamma(\xi,z)-$гладкая кривая, соединяющая точки $\xi, z \in D.$ Так как область $D-$ односвязная и функция $\overline{A}(z)-$голоморфная, то интеграл $I(z) = \int_{\gamma(\xi,z)} \overline{A}(\tau)d\tau$ не зависит от пути интегрирования и совпадает с первообразной, $I'(z) = \overline{A}(z)$ (см. [1]).

Существование граничные значении и класс Харди для $A(z)$-аналитических функций. Теперь введем класс Харди для $A(z)-$аналитических функций. Пусть $L(a,r)\subset\subset D$ и $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)$.

Определение 1 (см. [2]). *Классом Харди* $H_A^p, \quad p>0$ *для* $A(z)-$*аналитических функций называют множество всех функций* $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)$ *таких, что средние*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}\left|f(z)\right|^p\left|dz+A(z)d\bar{z}\right| \tag{3}$$

равномерно ограничены для $\rho<r,\ \sup\limits_{\rho<r}\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}\left|f(z)\right|^p\left|dz+A(z)d\bar{z}\right|<\infty.$

Определим понятия угловых и радиальных пределов $A(z)-$аналитических функций в лемнискате $L\left(a,r\right)\subset\subset D$. Радиальные пределы функции $f\left(z\right)$ в некоторой точке $\zeta\in\partial L\left(a,r\right)$ обозначаются как $f^*\left(\zeta\right)$, а угловые пределы обозначаются как $f_S^*\left(\zeta\right)$ (см. [2]).

В классическом случае, для круга $U=\left\{|w|<1\right\}\subset\mathbb{C}_w$ предел по радиусу $\tau_\zeta=\left\{w=t\zeta\right\}$, где $0\le t\le1,\ \zeta\in\partial U$ функции $\varphi(w),\ \varphi^*\left(\zeta\right)=\lim\limits_{w\to\zeta,\ w\in\tau_\zeta}\varphi(w)$ называется радиальным пределом, а предел по углу $S\subset U$, выходящий из точки $\zeta\in\partial U$, называется угловым пределом, $\varphi_S^*\left(\zeta\right)=\lim\limits_{w\to\zeta,\ w\in S}\varphi(w)$. Так как лемниската $L(a,r)$ является односвязной областью, с вещественно аналитической границей, то по теореме Римана существует конформное отображение $\chi(z):U\to L(a,r)$, которое конформно в некоторой окрестности замыкания $\bar{U}$. Пусть χ отображает граничную точку $\lambda\in\partial U$ в граничную точку $\zeta\in\partial L(a,r)$. По свойствам конформного отображения кривая $\gamma_\zeta=\chi\left(\tau_\lambda\right)$ обладает тем свойством, что она соединяет точки a,ζ и перпендикулярна ко всем линиям уровней $\partial L\left(a,\rho\right)=\left\{|\psi(a,z)|=\rho\right\},\ 0<\rho\le r$. В теории $A(z)-$аналитических функций кривая γ_ζ играет роль радиального направления, а образ угла $\chi\left(S\right)$ играет роль углового множества в точке $\zeta\in\partial L(a,r)$. Этот криволинейный угол мы опять обозначим через $S=S_\zeta$. Предел $\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\gamma_\zeta}f(z)=f^*\left(\zeta\right)$ называется радиальным пределом, а $f_S^*\left(\zeta\right)=\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in S_\zeta}f(z)-$ угловым пределом функции $f\left(z\right)$ в точке $\zeta\in\partial L\left(a,r\right)$ (см. [2]).

Теорема 1 (см. [2], аналог теоремы Фату). *Если* $f(z)\in H_A^1\left(L(a,r)\right)$, *то угловой предел*

$$f_S^*\left(\zeta\right)=\lim\limits_{z\to\zeta,\, z\in S}f(z)$$

существует и конечен для почти всех $\zeta\in\partial L(a,r)$, *кроме, быть может, точек некоторого множество меры нуль.*

Теперь покажем выполнении условию Липшица для $A(z)-$аналитических функций.

Утверждение 1 (см. [3]). *Если функция* $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)\mathrm{I}\ C\left(\overline{L}(a,r)\right)$ *комплексную условию Липшица для* $A(z)-$ *аналитической функции:*

$$\exists E>0, \left|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)\right|\le E\left|\psi(\zeta_1,\zeta_2)\right|^k. \qquad (4)$$

Условия непрерывности интеграла типа Коши для *A*(*z*)-аналитических функций. Пусть $L(a,r)\subset\subset D.$ Рассмотрим задачу об аналитическом продолжении интегралов типа Коши для $A(z)-$ аналитических функций

$$f(z)=\int\limits_{\partial L(a,r)} f^*(\zeta)K(\zeta,z)\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right). \qquad (5)$$

Из свойств граничных значений $A(z)-$ аналитических функций следует, что почти во всех точках $\zeta\in\partial L(a,r),$ в которых существуют угловые граничные значения интеграла типа Коши для $A(z)-$ аналитических функций (5), существует и особый интеграл

$$\int\limits_{\partial L(a,r)} \left(f^*(\zeta)-f(z)\right)K(\zeta,z)\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), \qquad (6)$$

причём имеет место равенство

$$F(z)=f(z)+\int\limits_{\partial L(a,r)} \left(f^*(\zeta)-f(z)\right)K(\zeta,z)\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right), \qquad (7)$$

Это утверждение распространяется и на общий случай интеграла типа Коши для $A(z)-$ аналитических функций (5), если, например потребовать дополнительно, что особый интеграл

$$\Phi(\xi)=\int\limits_{\partial L(a,r)} \left|f^*(\zeta)-f(\xi)\right|\left|K(\zeta,\xi)\right|\left|d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right| \qquad (8)$$

существует и ограничен на $\left|\psi(a,\xi)\right|=\rho,$ где $0<\rho<r.$ А именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Интеграл типа Коши для* $A(z)-$ *аналитических функций* (5) *представляет непрерывную функцию в* $L(a,r),$ *если функция* $f^*(\zeta)$ *непрерывна на* $\partial L(a,r);$ *особый интеграл*

$$\varphi(\xi)=\int\limits_{\partial L(a,r)} \left(f^*(\zeta)-f(\xi)\right)K(\zeta,\xi)\left(d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right) \qquad (9)$$

существует и является функцией, непрерывной на $\partial L(a,\rho);$ *особый интеграл* (8) *ограничен на* $\partial L(a,\rho).$

Как следствия теоремы 2 приведем два утверждения, которые являются важными.

Теорема 3. *Интеграл типа Коши* (5) *представляет непрерывную функцию в замыкание* $\overline{L}(a,r)$ *и функция* $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$s(\zeta_1,\zeta_2)<c_1\left|\psi(\zeta_1,\zeta_2)\right|^\beta \quad (0<\beta\le 1), \qquad (10)$$

$$\left|f^*(\zeta_1)-f^*(\zeta_2)\right|<c_2\left|\psi(\zeta_1,\zeta_2)\right|^\alpha \quad (1-\beta<\alpha\le 1). \qquad (11)$$

Здесь $s(\zeta_1,\zeta_2)-$длина не большей из двух дуг граница $\partial L(a,r)$ с концами ζ_1 и ζ_2, где ζ_1 и ζ_2-любые различные между собой точки на $\partial L(a,r)$, а c_1 и c_2 обозначают положительные числа (постоянные).

Следствие 2. *Если функция* $f(z)\in O_A(L(a,r))$ *удовлетворяет на* $\partial L(a,r)$ *условию Липшица*

$$\left|f^*(\zeta_1)-f^*(\zeta_2)\right|<c_2\left|\psi(\zeta_1,\zeta_2)\right|, \tag{12}$$

то интеграл типа Коши (5) *представляет непрерывную функцию в замыкание* $\overline{L}(a,r)$.

Литература

1. Sadullayev A. On a class of *A*-analytic functions / A. Sadullayev, N.M. Jabborov // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2016. – Vol. 9. – №3. – P. 374-383.
2. Zhabborov N.M. Existence of boundary values of Hardy class functions H_A^1, / N.M. Zhabborov, Sh.Y. Khursanov, B.E. Husenov // Bulleten of NUUz. – 2022. – Vol. 5. – №2. – P. 79-90.
3. Жабборов Н.М. Аналог теорема Фату для *A*(*z*)-аналитических функций / Н.М. Жабборов, Б.Э. Хусенов // Известия ВУЗов. Математика. – 2023. – №7. – С. 13-22.

Аннотация. *В статье исследуется аналитическое продолжение и условия непрерывности интеграла типа Коши для* $A(z)$ *аналитических функций, когда* $A(z)$ *есть антианалитическая функция.*

Ключевые слова: $A(z)$*-аналитическая функция, класс Харди,* $A(z)$*-лемниската, интегралов типа Коши для* $A(z)$*-аналитических функций.*

ШАРТҲОИ БЕФОСИЛАГИИ ИНТЕГРАЛИ НАВЪИ КОШИ БАРОИ A(Z) – ФУНКСИЯҲОИ АНАЛИТИКӢ

Ҳусенов Б.Э., Муҳаммадова М.Ф.

Донишгоҳи давлатии Бухоро

Аннотатия. *Дар мақола давомдиҳии аналитикӣ ва шартҳои бефосилагии интеграли навъи Коши барои функсияҳои* $A(z)$*-аналитикӣ омӯхта мешавад, вақте ки* $A(z)$*-функсияи антианалитикӣ мебошад.*

Калидвожаҳо: *функсияи* $A(z)$*-аналитикӣ, синфи Харди,* $A(z)$*-лемнискат, интегралҳои навъи Коши барои функсияҳои* $A(z)$*-аналитикӣ.*

CONTINUITY CONDITIONS OF CAUCHY TYPE INTEGRAL FOR A(Z)-ANALYTICAL FUNCTIONS

Khusenov B.E., Mukhammadova M.F.

Bukhara State University

Abstract. *In this paper we study the analytic continuation of Cauchy-type integrals and the continuity conditions of the Cauchy-type integral for* $A(z)$*-analytic functions when* $A(z)$*- is an antianalytic function.*

Key words: $A(z)$*-analytic function, Hardy class,* $A(z)$*-lemniscate, Cauchy-type integrals for* $A(z)$*-analytic functions.*

Сведения об авторах. Хусенов Бехзод Эркин угли – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Бухарского государственного университета. Телефон: +998934565585. E-mail: b.e.husenov@buxdu.uz

Мухаммадова Мастура Фарход кизи – магистр кафедры математического анализа Бухарского государственного университета. Телефон: +998953660830. E-mail: masturamuhammadova@mail.ru

Маълумот дар бораи муаллифон. Ҳусенов Беҳзод Эркин уғли – номзади илмҳои физикаю математика, дотсенти кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бухоро. Телефон: +998934565585. E-mail: b.e.husenov@buxdu.uz

Муҳаммадова Мастура Фарҳод қизи – магистри кафедраи таҳлили математикии Донишгоҳи давлатии Бухоро. Телефон: +998953660830. E-mail: masturamuhammadova@mail.ru

Information about authors. Khusenov Behzod Erkin ugli – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of Mathematical Analysis of Bukhara State University. Phone: +998934565585. E-mail: b.e.husenov@buxdu.uz
Mukhammadova Mastura Farkhod kizi – master of the Department of Mathematical Analysis of Bukhara State University. Phone: +998953660830. E-mail: masturamuhammadova@mail.ru

УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ И КРИВЫХ

Шабозов М.Ш., Абдукаримзода М.К.
Таджикский национальный университет

Постановка экстремальной задачи. Пусть функция $\boldsymbol{f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ определена и интегрируема вдоль кривой $\boldsymbol{\Gamma \subset R^m}$ и

$$J(f;\Gamma) := \int_{\Gamma} f(M)dt = \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_m)dt. \quad (1)$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \ (0 \le t \le L), \quad (2)$$

а функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$ от переменной t. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определённого интеграла:

$$J(f;\Gamma) = \int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big)dt. \quad (3)$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)\big) \quad (4)$$

для приближённого вычисления интеграла (3) задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов

$$T = \{t_k\colon\ 0 \le t_1 < \cdots < t_N \le L\},$$

где $p_1, p_2, \dots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$|R_N(f;\Gamma)| := |R_N(f;\Gamma;P,T)| = |J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)|.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) = \sup\{\, |R_N(f;\Gamma;P,T)| \colon f \in \mathfrak{M}\}.$$

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ