Министерство Высшего и среднего специального образования
Республики Узбекистан
Бухарский государственный университет

Б.Э. ХУСЕНОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(для естественных направлений)

Учебное пособие

издательство «Дурдона»
Бухара – 2020

УДК 51(075.8)
22.1я73
Х 98
Хусенов Б.Э.
Высшая математика [Текст] : учебное-методическое пособие / Б.Э. Хусенов. - Бухара : "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona nashriyoti, 2020. - 192 с.

ББК 22.1я73

В данном учебном пособие даны примеры и задачи для студентов университета естественного направления. Также здесь приведены основные теоремы, свойства, и формулы по каждой теме. Примеры и задачи разделены на две части: в первой части приведены примеры которые решаются на практических занятиях. Во второй части приведены примеры и задачи, которых студенты будут решать самостоятельно.

Рецензенты:

М.И. Пулатова, Бухарский инженерно-технологический институт профессор кафедры «Высшая математика», к.ф.-м.н.

Х.Р. Расулов, Бухарский государственный университет доцент кафедры «Математика», к.ф.-м.н.

Учебное пособие рекомендовано к изданию решением учебно-методического Совета Бухарского государственного университета от 7 июня 2020 года №8.

ISBN 978-9943-6507-9-4

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособие для студентов естественного направления даны примеры и задачи. Также здесь приведены по каждой теме основные теоремы, свойства, и формулы. Примеры и задачи разделены на две части: В первой части приведены примеры которые решаются на практических занятиях. Во второй части приведены примеры и задачи которые студенты будут решать самостоятельно.

В этом учебнике даны основные элементы числовые множества, прямые простые геометрические задачи, векторы, кривые второго порядка, высказывание, комплексные числа, детерминанты, матрицы, системные уравнения, функции и их полная исследования, числовые порядки, применение производной к исследованию функций, интегральное исчисление, функции нескольких переменных, дифференциальная уравнения, числовые ряди, комбинаторные элементы, вероятные теоритические задачи, элементы математической статистики, элементарные математические модели, математика в химии и биологии.

Учебное качество и смысловое содержание обращено на развитие критического мышления и размышления читателя - учащихся составителя выражает свою благодарность.

Модул I. Теория множествы и математическая логика

Параграф 1. Числовые множества

1. Понятия множества. Числовые множества.

Множество. В математике понятия **множество** исполъзуется для описания совокупности предметов или объектов. Множества обычно обозначаются болъшими буквами *A, B, C,...* Тот факт, что объект *a* является элментом множества *A,* записывается так: $a \in A$ и читается «*a* принадлежит множеству *A*», «*a* входит в множество *A*». Запись $a \notin A$ означает, что *a* не является элементом множества *A*.

Например, если через N обозначено множество натуральных чисел, то

$$3 \in N,\ 20 \in N,\ 0 \notin N,\ \frac{3}{2} \notin N\ .$$

Пустое множество не содержит элементов, оно обозначается знаком $\varnothing$.

Числовые множества. В алгебре чаще всего приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называются **числовыми**. Для некоторых часто встречающихся числовых множеств в школьном курсе математики приняты стандартные обозначения: N - множество натуральных чисел, Z - множество целых чисел, R - множество действительных чисел.

Действительные числа избираются точками координатной прямой. **Координатная прямая** – это всякая прямая, на которой выбраны направление, принимаемое за положительное, точка – начало отсчёта и единица измерения – масштабный отрезок, длина которого принимается равной единице. Координатная прямая обычно изображается горизонтально, положительное направление указывается стрелкой, начало отсчёта обозначается *O.* Точка *O* разбивает координатную прямую на два луча, один из которых имеет положительное направление и называется **положительным лучом**, другой – **отрицательным**.

Подмножество. Всякое натуральное число принадлежит множеству целых чисел; любая точка интервала $[a;b]$является точкой отрезка $[a;b]$; любой правильный треугольник является элементом множества всех треугольников.

Если любой элемент множества *A* принадлежит также множеству *B,* то множество *A* называется **подмножеством** множества *B*. Это записывается так: $A \subset B$ или $B \supset A$. В этом случае говорят, что множество *A* содержится в множестве *B* или множество *B* содержит множество *A*. Таким образом, множество N натуральных чисел является подмножеством множества Z целых чисел, т.е. $N \subset Z$; интервал $[a;b]$ является подмножеством отрезка $[a;b]$: $[a;b] \subset [a;b]$.

Если в множестве *A* найдётся хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству *B,* то *A* не являются подмножеством множеству *B*, то *A* не является подмножеством множества B: $A \not\subset B$. Например, отрезок $[a;b]$ не является подмножеством промежутка $(a;b]$, так как $a \in [a;b]$, но $a \notin (a;b]$.

Пересечение множеств. Рассмотрим два множества: $X = \{0,1,3,5\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$.

Числа 1 и 3 и только они принадлежат одновременно обоим множествам X и Y. Составленное из них множество $\{1;3\}$ содержит все общие для множеств X и Y элементы.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A и B и обозначается $A \bigcap B$.

Таким образом, множество $\{1;3\}$ является пересечением рассмотренных множеств X и Y:

$$\{0;1;3;5\} \bigcap \{1;2;3;4\} = \{1;3\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество, и пишут $A \bigcap B = \varnothing$.

Пересечение любого множества A с пустым множеством есть, очевидно, пустое множество: $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.

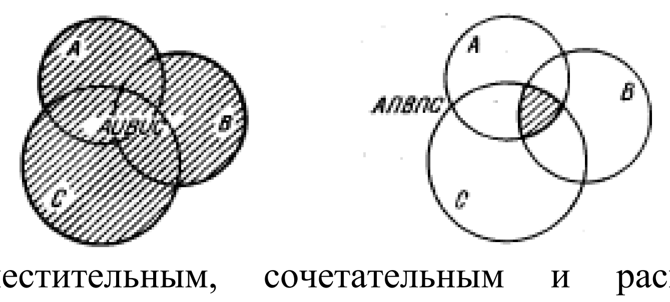
Объединение множеств. Вновь возьмем множества $X = \{0;1;3;5\}$ и $Y = \{1;2;3;4\}$ и наряду с ними рассмотрим множество $\{0;1;2;3;4;5\}$. Это множество содержит все элементы множества X (числа 0;1;3;5) и все элементы множества Y (числа 1;2;3;4) и не содержит никаких других элементов, т.е. множества $\{0;1;2;3;4;5\}$ содержит те и только те элементы, которые принадлежат или множеству X или множеству Y.

Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих или множеству A или множеству B, называется **объединением** множеств A и B и обозначается $A \bigcup B$.

Итак,

$$\{0;1;3;5\} \bigcup \{1;2;3;4;5\} = \{0;1;2;3;4;5\}.$$

Объединение и пересечение множеств обладают многими свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел,

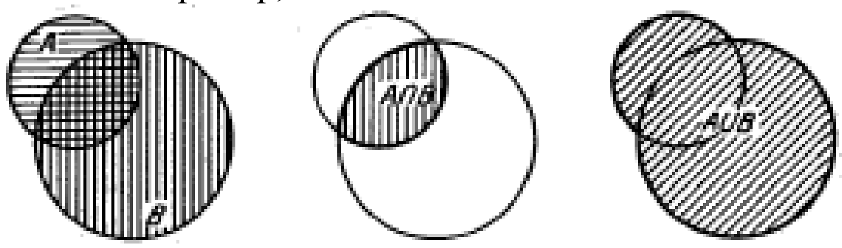


например переместительным, сочетательным и распределительным свойствами (слева записаны равенства для множеств, справа – для чисел):

1. $A \bigcup B = B \bigcup A,$
2. $A \bigcap B = B \bigcap A,$
3. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C),$
4. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C),$
5. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcup C),$
6. $(A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup C,$
7. $A \bigcup A = A,$
8. $A \bigcap A = A.$

2. Круг Эйлера и действия над множествами.

Круг Эйлера. Данные определения пересечения и обьединения множеств хорошо иллютрируются при наглядном изображении множеств на плоскости. Множества схематически изображаются кругами, прямоуголниками. Например,



Для конечного A через $m(A)$ обозначим число его элементов. Число элементов. Число элементов пустого множества, очевидно, равно нулю. Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B). \qquad (1.1)$$

Действительно, пусть множества A и B не пересекаются, т. е. $m(A \bigcap B) = 0.$ Их объединение получается добавлением к элементам одного множества всех элементов другого множества, поэтому

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B).$$

Если же пересечение множеств A и B не пусто, то число их общих элементов равно $m(A \bigcap B)$. Объединение этих множеств образуется добавлением к элементам множества A всех тех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \bigcap B)$. Таким образом,

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B).$$

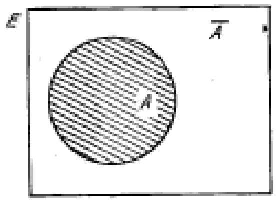
Пример 1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Решение. Пусть $A -$ множество абитуриентов, выдержавших экзамен, $B -$ множество абитуриентов, получивших оценки ниже 5, по условию

$m(A)=210,$ $m(B)=180,$ $m(A\bigcup B)=250.$ Абитуриенты, получившие оценки 3 и 4, образуют множество $A\bigcap B.$ По формуле (1.1) находим

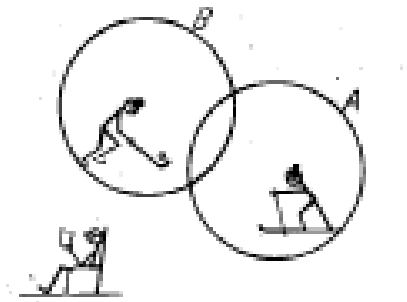
$$m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B)=140.$$

Дополнение. Часто ограничиваются рассмотрением всевозможных подмножеств одного и того же множества, которое в этом случае называют **основным** или универсальным множеством. Обозначим основное множество буквой $E.$ Для любого множества $A,$ принадлещего основному множеству $E,$ справедливы равенства $A\bigcup E=E,$ $A\bigcap E=A.$



Множество элементов основного множества $E,$ не принадлежащих множеству $A,$ называется **дополнением** множества $\bar{A}.$ Объединение множества A и его дополнения $\bar{A}$ есть основное множество: $A\bigcup\bar{A}=E.$ Пересечение множества со своим дополнением пусто: $A\bigcup\bar{A}=\varnothing.$ Дополнение пустого множества есть основное множество: $\varnothing=E,$ а дополнение основного множества пусто: $E=\varnothing.$

Пример 2. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на конках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?



Решение. Множество учеников школы будем считать основным множеством A и B - соответственно множества учеников, умеющих кататься на лыжах и на коньках. Учащиеся, не умеющие кататься ни на лыжах, ни на коньках, составляют множество $\bar{A}\cap\bar{B}.$ По условию $m(\bar{A}\bigcap\bar{B})=60,$ а так как по формуле $\bar{A}\bigcap\bar{B}=\overline{A\bigcup B},$ то и $m(\overline{A\bigcup B})=60.$ Отсюда $m(A\bigcup B)=m(E)-m(\overline{A\bigcup B})=1340.$ Зная $m(A)$ и $m(B),$ по формуле (1.1) находим

$$m(A\bigcup B)=m(A)+m(B)-m(A\bigcap B)=862.$$

Задачи и примеры для аудитории

1. Пусть A – множество делителей числа 15, B – множество простых чисел, меньших 9. Перечислить элементы этих множеств и найти $A \cup B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ (A \cup C) \cap B,\ A \cap B \cap C.$

2. Пусть $A = [-1;1],\ B = (-\infty; 0],\ C = [0; 2].$ Найти следующие множества:

$A \cup C,\ A \cap B,\ A \cup B \cup C,\ (A \cup B) \cap C,\ B \cap C$ и изобразить их на координатной прямой.

3. Найти подмножества X и Y множества E, если для любого подмножества A множества E имеет место равенство $A \cap X = A \cup Y.$

Изобразить на координатной плоскости множество, координаты $(x; y)$ точек которого удовлетворяют условию (4-6):

4. $|x| + |y| = 1.$

5. $|x + y| \le 1$ и $|x - y| \le 1.$

6. $x^2 - 2x + y \le 0.$

7. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

8. В олимпиаде по математике принимало участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. Результаты проверки решений представлены в таблице:

решены задачи	количество решивших	решены задачи	количество решивших
по алгебре	20	по алгебре и геометрии	7
по геометрии	18	по алгебре и тригонометрии	8
по тригонометрии	18	по геометрии и тригонометрии	9

Известно также, что ни одной задачи не решили трое. Сколько учащихся решили все три задачи? Сколько учащихся решили ровно две задачи?

Записать множества A, B и C перечислением их элементов и найти $A \cup B,\ B \cap C,\ (A \cup B) \cap C,\ A \cap B \cap C,$ если (9-10).

9. A – множество делителей числа 12; B – множетво корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0;$ C – множество нечётных чисел x таких, что $3 \le x \le 12.$

10. A – множество чётных чисел $x,\ 3 < x < 10;$ B – множество делителей числа 21; C – множество простых чисел, меньших 12.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Привести примеры числовых множеств A и B таких, что

$a)$ $A \cup B = R, \quad A \cap B = \varnothing;$ $\qquad$ $б)$ $A \cup B = A, \quad A \cap B = B.$

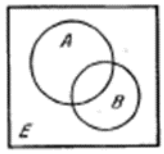
Найти $A \cup B,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cup C,\ A \cap B \cap C,\ (A \cup B) \cap C$ и изобразить эти множества на координатной прямой, если (2-4):

2. $A = [0;3], \quad B = [1;5], \quad C = [-2;0].$

3. $A = (-\infty;1], \quad B = [1;\infty), \quad C = [0;1].$

4. $A = [-3;1], \quad B = [2;\infty), \quad C = (-\infty;-2].$

5. Множества A и B являются подмножествами множества E. Указать круг Эйлер:



$a)$ $A \cup B = R, \quad A \cap B = \varnothing;$ $\quad$ $б)$ $\bar{A} \cup \bar{B}, \quad \bar{A} \cap B;$

$в)$ $A \cap B, \quad \overline{A \cup \bar{B}};$ $\qquad$ $г)$ $\overline{A \cup B}, \quad (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}).$

6. $A-$ подмножество множества натуральных чисел, каждый элемент множества A есть среди них 2, или 5. Найти число элементов в множестве A, если среди них имеется: 70 чисел, кратных 3; 80 чисел, кратных 5; 32 числа, кратных 6; 35 чисел, кратных 10; 38 чисел, кратных 15; и 20 чисел, кратных 30.

7. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт и коробку конфет?

8. В спортивном лагере 65 % ребят умеют играть в футбол, 70 % - в волейбол и 75 % - в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в баскетбол?

9. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы A, B и C. Из 40 школьников, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B – 16, фильм C – 19. Найти, сколько учеников просмотрели все три фильма.

10. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

Параграф 2. Высказывание

1. Понятия высказывания.

Под **высказыванием** понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно **истинно** или **ложно**. Примерами высказываний могут служить следующие утверждения:

1. Ташкент – столица Республики Узбекистан.
2. Число 221 – простое.
3. $13 < 17$.

Утверждения 1, 2 и 4, как известно, истинны. Утверждение 3 – ложно, так как $221 = 13 \cdot 17$.

Таким образом, каждое высказывание или истинно, или ложно; одновременно быть истинным и ложным высказывание не может.

Высказывания могут быть образованы с помощью слов или символов, однако далеко не каждый набор слов или символов (даже осмысленный) является высказыванием.

Например, утверждения:

1. В Бухарский государственный университет поступить легко;

2. $x > 0$;

высказываниями не являются, так как судить об их истинности или ложности невозможно.

Для обозначения высказываний обычно используют заглавные буквы латинского алфавита *A, B, C* и т.д. Например, пишут

$$A \equiv \{6 < 7\},\ B \equiv \{\text{\textit{число} } 6 \text{ \textit{простое}}\}.$$

Это означает, что высказывание *B* заключается в утверждении, что число 6 простое, а высказывание *A* в том, что $6 < 7$. Знак «$\equiv$» заменяет слова «есть высказывание».

Высказывания *A* и *B* является примерами простых высказываний. Из простых высказываний при помощи так называемых логических связок (союзов «и», «или», слов «если…, то…», «тогда и толъко тогда, когда…») можно обрезывать новые высказывания. Например, из высказываний

$A \equiv \{6 < 7\},\ B \equiv \{\text{\textit{число} } 6 \text{ \textit{простое}}\}$

Используя логические связки, можно образовать следующие сложные высказывания:

$C \equiv \{6 < 7 \text{ \textit{или число} } 6 \text{ \textit{простое}}\},$

$D \equiv \{6 < 7 \text{ \textit{и число} } 6 \text{ \textit{простое}}\},$

$E \equiv \{6 < 7 \text{ \textit{тогда и толъко тогда, когда число} } 6 \text{ \textit{простое}}\},$

$F \equiv \{\text{\textit{если} } 6 < 7, \text{ \textit{число} } 6 \text{ \textit{простое}}\}.$

Если высказывание образовано из двух высказываний при помощи союза «или», то говорят, что оно является **суммой (дизъюнкцией)** этих высказываний.

Высказывание, составленное из двух высказываний при помощи слов «тогда т только тогда, когда…», «если…, то…», называют соответственно **эквивалентностью** и **импликацией**.

Из простых высказываний $A \equiv \{6 < 7\},\ B \equiv \{\text{\textit{число} } 6 \text{ \textit{простое}}\}$

При помощи логических связок выше были составлены высказывания *C, D, E* и *F*. Теперь можно сказать, что эти высказывания являются соответственно суммой, произведением, эквивалентностью и импликацией высказываний *A* и *B*.

Сумму любых высказываний *A* и *B* записывают в виде *A*+*B* (или $A \vee B$), произведение в виде *AB* (или $A \wedge B$). Для эквивалентности используют знак $\Leftrightarrow$, т.е. пишут $A \Leftrightarrow B$. Импликацию записывают в виде $A \Rightarrow B$ (читается: «из *A* следует *B*» или «если *A* то *B*»).

Для любых двух высказываний истинность или ложность их суммы, произведения, эквивалентности и импликации определяется следующим образом:

сумма $A+B$ высказываний является истинным высказыванием только тогда, когда по крайней мере одно из слагаемых истинно;

произведение AB высказываний истинно только в том случае, если оба сомножителя истинны;

эквивалентность $A \Leftrightarrow B$ представляет собой ложное высказывание, если одно из высказываний истинно, а другое ложно;

в противном случае, т.е. если оба высказывания истинны или оба ложны, эквивалентность является истинным высказыванием;

импликация $A \Rightarrow B$ есть ложное высказывание только в том случае, если A – истинно, а B – ложно; во всех других случаях, а именно, если

1) A – истинно, B – истинно;
2) A – ложно, B – истинно;
3) A – ложно, B – ложно;

высказывание $A \Rightarrow B$ считается истинным.

Пример 1. Даны два высказывания $A \equiv \{2 = 3\}$ *и* $B \equiv \{2 < 3\}$.

В чем заключаются высказывания $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B$?

Δ. Высказывание $A + B \equiv \{2 = 3 \text{ } или \text{ } 2 < 3\}$ истинно, так как одно из слагаемых является истинным высказыванием. Высказывание $A+B$ можно записать в виде одного верного нестрогого неравенства: $2 \leq 3$. Высказывание $AB \equiv \{2 = 3 \text{ } и \text{ } 2 < 3\}$, очевидно, ложно. Для того чтобы произведений двух высказываний было истинным, нужно чтобы оба высказывания были истинными.

Эквивалентность $A \Leftrightarrow B \equiv \{2 = 3 \text{ } тогда \text{ } и \text{ } только \text{ } тогда, \text{ } когда \text{ } 2 < 3\}$ представляет собой ложное высказывание, так как A – ложно, а B – истинно.

Импликация

$$A \Rightarrow B \equiv \{если \text{ } 2 = 3, \text{ } то \text{ } 2 < 3\}.$$

является истинным высказыванием. В самом деле, импликация $A \Rightarrow B$ согласно определению ложна только тогда, когда A – истинно, а B – ложно.

Δ

2. Высказывание и действия над ним.

Итак, истинность или ложность высказывания, образованного из каких-либо высказываний с помощью операций сложения, умножения, эквивалентности и импликации, зависит только от распределения истинности и ложности между высказываниями, над которыми производятся логические операции. Эту зависимость удобно описывать следующими четырьмя таблицами, которые называют **таблицами истинности логических операций** (буква И означает, что соответствующее высказывание истинно, буква Л – соответствующее высказывание ложно):

Таблица I

A	B	$A+B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Таблица II

A	B	AB
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Таблица III

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таблица IV

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Таблицы истинности логических операций дают возможность определить истинность или ложность любых высказываний, имеющих вид $A+B,\ \ AB,$
$A \Leftrightarrow B,\ A \Rightarrow B.$

Для дальнейшего изложения из всех рассмотренных логических операций особенно важной является импликация $A \Rightarrow B.$ Первый член импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называется **посылкой** или **условием**, второй член B – заключением. Таблица истинности для импликации, в отличии от таблиц I-III, изменяется при перестановке столбцов для A и $B.$ Отметим также, что импликация не полностью соответствует обычному пониманию слов «если…, то…» и «следует». Из третьей и четвёртой строки таблицы IV вытекает, что если A ложно, то, каково бы ни было $B,$ высказывание $A \Rightarrow B$ считается истинным. Таким образом, из неверного утверждения следует все что угодно. Например, утверждения «*если* 6 простое число, *то* 7<6» или «*если* 7<6*, то* существуют ведьмы» являются истинными. Истинным является, и рассмотренное ранее высказывание: «*если* слон – насекомое, *то* Антарктида покрыта тропическими лесами».

Помимо только что рассмотренных четырёх логических операций в математике используется ещё одна простая, но очень важная операция – операция отрицания. Эта операция соответствует логической связке «не». Каждому высказыванию A можно сопоставить утверждение, заключающееся в том, что высказывание A ложно. Такое утверждение, заключающееся в том, что высказывание обозначают через $\overline{A}$ и называют отрицанием $A.$ Например, для высказывания

$$A \equiv \{\text{число 6 не простое}\}$$

отрицание может быть построено так:

$$\overline{A} \equiv \{\text{неверно, что число 6 не простое}\},$$

или

$$\overline{A} \equiv \{\text{число 6 составное}\}.$$

В данном случае исходное высказывание ложно, поэтому его отрицание истинно.

Таблица истинности для отрицания имеет вид:

Таблица V

A	$\bar{A}$
И Л	Л И

Пример 2. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был чёрный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо её цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Δ Рассмотрим высказывания:

$A \equiv \{$машина синего цвета$\}$,

$B \equiv \{$ машина марки «Бьюик»$\}$,

$C \equiv \{$машина чёрного цвета$\}$,

$D \equiv \{$машина марки «Крайслер»$\}$,

$E \equiv \{$машина марки «Форд Мустанг»$\}$.

Так как либо цвет машины, либо марка каждым из соучастников преступления названы верно, то из показаний Брауна следует, что высказывание $A + B$ истинно. Из слов Джонса вытекает истинность высказывание $C + D$. Утверждение Смита означает, что истинно высказывание $\bar{A} + E$.

Так как высказывания $A + B,\ C + D,\ \bar{A} + E$ истинны, то истинно и их произведение

$$P = (A + B)(C + D)(\bar{A} + E).$$

Раскрывая скобки, получим

$$P = (AC + AD + BC + BD)(\bar{A} + E) =$$
$$= AC\bar{A} + ACE + AD\bar{A} + ADE + BC\bar{A} + BCE + BD\bar{A} + BDE.$$

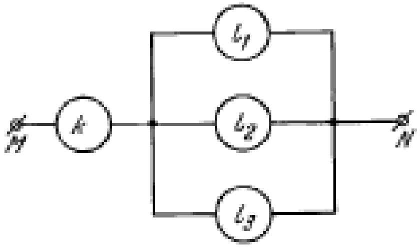
Из условия задачи легко усматривается, что из полученных восьми слагаемых семь (все кроме пятого) являются ложными высказываниями. Поэтому

$$P = Л + Л + Л + Л + BC\bar{A} + Л + Л + Л = BC\bar{A} + Л = BC\bar{A},$$

т. е. высказывание $BC\bar{A}$ истинно, а это означает, что преступники скрылись на чёрном «Бьюике». Δ

Задачи и примеры для аудитории

1. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображенной на рисунке:



Рассмотрим следующие четыре высказывания:

$A \equiv \{$элемент k цепи вышел из строя$\}$,

$B \equiv \{$элемент l_i цепи вышел из строя$\}$ $(1, 2, 3)$.

Замкнута ли цепь, если

а) высказывание $A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$ истинно,

б) высказывание $\overline{A} \wedge (\overline{B}_1 \vee \overline{B}_2 \vee \overline{B}_3)$ истинно?

2. Докажите $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

3. На вопрос, кто из трёх учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

Вернувшись домой, Мегре позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегре. Есть новости?

- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила…

- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

Рассмотрите следующие высказывания:

$A \equiv \{$Франсуа был пьян$\}$,

$B \equiv \{$Этьен убийца$\}$,

$C \equiv \{$Франсуа лжет$\}$,

$D \equiv \{$убийство произошло после полуночи$\}$.

Запишите, используя логические операции, высказывания инспекторов Торранса, Жуссье и Люка. Составьте произведение этих трёх высказываний и упростите его. Что следует из показаний инспекторов? Какой вывод сделал комиссар Мегре?

4. Дано неравенство $kx^2 + l^2 \leq 0$. При каких значениях k истинны следующие утверждения:

а) При любом l неравенство имеет хотя бы решение.

б) Существует l, при котором неравенство имеет хотя бы одно решение?

5. Для каких натуральных значений n истинно и ложно предложение

$$A(n) \equiv \{2^n > 4n^2 + 1\}?$$

6. Докажите $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

7. Докажите $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

8. Докажите $A \vee (B \Leftrightarrow C) = (A \vee B) \Leftrightarrow (A \vee C)$.

9. Докажите $A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C) = (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. По мишени произведено три выстрела. Пусть

$$A_k \equiv \{\text{мишень поражена при } k-\text{м выстреле}\},\ k = 1, 2, 3.$$

Что означают следующие высказывания:

а) $A_1 \vee A_2 \vee A_3$; б) $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$;

в) $(A_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge A_3)$?

2. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление.

На следствии каждый из них сделал два заявления.

Браун. Я не делал этого.
Смит сделал это.

Джонс. Смит не виновен.
Браун сделал это.

Смит. Я не делал этого.
Джонс не делал этого.

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой – дважды сказал правду, третий – один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

3. Рассмотрим два определения легкой контрольной:

1. Контрольная работа называется легкой, если каждую задачу решил хотя бы один ученик.

2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один ученик решил все задачи.

а) Может ли контрольная быть легкой в смысле первого определения и трудной (не легкой) в смысле второго?

б) Может ли работа быть легкой в смысле первого определения и трудной в смысле первого?

4. А множестве всех натуральных чисел заданы три предложения:

$$A \equiv \{\text{число } n^2-2 \text{ кратно } 7\},$$
$$B \equiv \{\text{число } n-2 \text{ кратно } 7\},$$
$$C \equiv \{4n^2-360n+8099<0\}.$$

При каких значениях n из данных трёх предложений два истинные и одно ложное?

5. Даны три предложения, заданные на множестве всех действительных чисел:

$$A \equiv \{x - \text{ целое число}\},$$
$$B \equiv \{x^2-3x - \text{ целое отрицательное число}\},$$
$$C \equiv \{x^2-3x - \text{ целое положительное число}\}.$$

При каких значениях x ложно **одно и только одно** из этих предложений?

10. Докажите $A \wedge (A \vee B) = A$.

11. Докажите $A \vee (A \wedge B) = A$.

12. Докажите $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$.

13. Докажите $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

14. Докажите $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

Параграф 3. Множества комплексных чисел

1. Геометрическое изображение комплексных чисел.

Определения. Комплексным числом называется выражение вида $z=x + iy$, в котором x и y — вещественные числа, а i — некоторый символ, $i^2 = -1$, если при этом приняты условия:

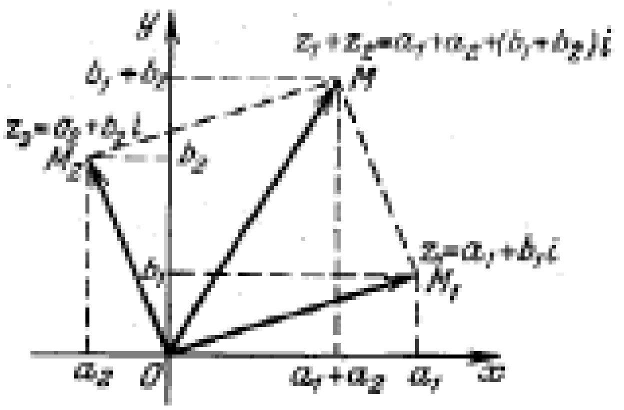
1) $x + 0\,i = x$, $0 + yi = yi$ и $1i = i$, $(-1)i = -\,i$;
2) $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$
3) $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;
4) $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$.
5) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\dfrac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2 + y_1^2}$

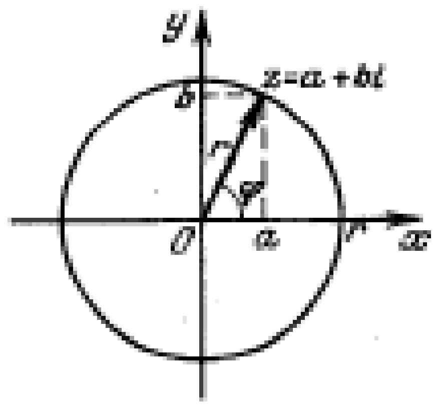
Из условий 1) и 5) получаются степени числа i:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i \text{ и т. д.} \qquad (1)$$

Комплексное число $z=x + iy$, в котором $y \neq 0$, называется мнимым числом. Число i называется мнимой единицей.

Геометрическое изображение комплексных чисел.





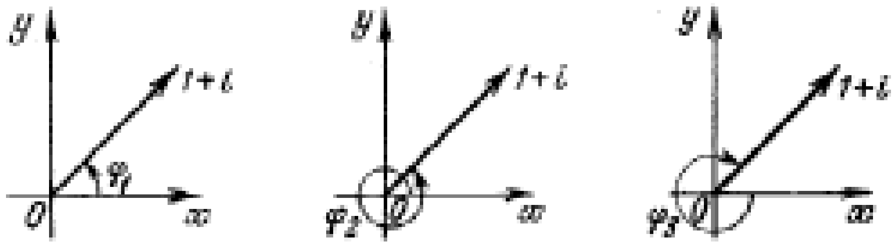
2. Модуль и аргумент комплексных чисел и их свойства. Формула Муавра.

Определение. Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z, причём величина угла считается положительной, если отсчёт ведётся против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчёт производится по часовой стрелке.

Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, но в этом и только своим модулем.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $z = 1 + i$ являются следующие углы: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$, $\varphi_3 = \dfrac{\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{4}$

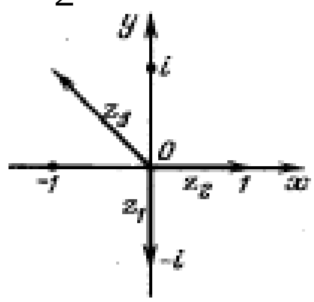
и вообще, каждый из углов $\varphi_k = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, где k – произвольное целое число.



Любые два аргумента комплексного числа отличаются на число, кратное 2π. Например, разность $\varphi_2 - \varphi_3$ аргументов $\varphi_2 = \dfrac{9\pi}{4}$ и $\varphi_3 = -\dfrac{7\pi}{4}$ числа $z = 1 + i$ равна 4π. Для обозначения множества всех аргументов числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg(a + bi)$. Если речь идёт о каком-либо одном из аргументов, то его обычно обозначают буквой φ.

Пример 1. Найти аргументы комплексных чисел: $z_1 = -i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1 + i$.

Построив векторы z_1, z_2, z_3, находим один из аргументов для каждого числа: $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = \dfrac{3\pi}{2}$.



Следовательно,

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \arg z_2 = 2\pi k, \quad \arg z_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

где k – произвольное число.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $z=x + iy$ определяется парой вещественных чисел (x, y) и поэтому изображается точкой $M(x; y)$ плоскости или ее радиус-вектором $r = \overrightarrow{OM}$.

Длина этого вектора $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа, а угол его φ с осью Оx называется аргументом комплексного числа. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \quad (2)$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \quad (3)$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \quad (4)$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad (5)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad (6)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Формулы (5) и (6) называются **формулами Муавра**.

Формула Эйлера: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (7)$$

Логарифм комплексного числа: $$\ln z = \ln r + i\varphi_0 + 2k\pi i, \quad (8)$$

где φ_0 - значение аргумента φ, удовлетворяющее неравенствам $-\pi < \varphi \le \pi$. Выражение $\ln r + i\varphi_0$ называется **главным значением** логарифма.

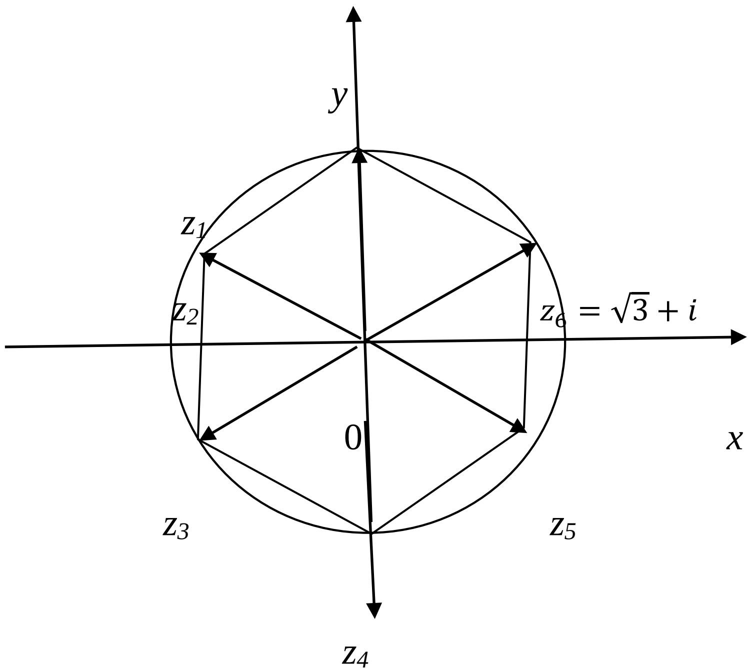
Пример 2. Найти все значения $\sqrt[6]{-64}$.

$\triangle$ Запишем число $\omega = -64$ в тригонометрической форме:

$$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Применяя формулу (6), получаем

$$z_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right); \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$



Следовательно,

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i;$$

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i;$$

$$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i;$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i;$$

$$z_4 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i;$$

$$z_5 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i.$$

Точки, соответствующие числам z_k, расположены в вершинах Правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$.

Задачи и примеры для аудитории

1. Представить комплексное число

$$z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$$

в алгебраической форме.

2. Найти модули и аргументы комплексных чисел

а) $z = \dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$; б) $z = \sin\dfrac{6\pi}{5} + i(1+\cos\dfrac{6\pi}{5})$.

3. Представить число $z = (tg1 - i)^4$ в тригонометрической форме.

4. Представить z в алгебраической и в тригонометрической формах.

а) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$; б) $z = 1 + \cos\dfrac{10\pi}{9} + i\sin\dfrac{10\pi}{9}$.

5. Решить уравнение $z^2 + |z|^2 = 0$.

6. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $|z+1| = |z-i|$; б) $|z|^2 + 3z + 3\overline{z} = 0$.

7. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам, принадлежащим биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

8. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3},$$

найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

9. Решить уравнение $z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$.

10. Записать

$$z = \frac{\sqrt{5+12i} + \sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i} - \sqrt{5-12i}}$$

в алгебраической форме при условии, что действительная часть комплексных чисел $\sqrt{5+12i}$, $\sqrt{5-12i}$ отрицательна.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, если

а) $z_1=2+5i$, $z_2=1-7i$. б) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

2. Записать z в алгебраической форме:

а) $z=\dfrac{-41+63i}{50}-\dfrac{6i+1}{1-7i}$; б) $z=(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i})^3$;

в) $z=\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{i+2}$; г) $z=(2+i)^6$.

3. Найти комплексное число z, удовлетворяющее уравнению

$$(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i,$$

и записать его в алгебраической и в тригонометрической формах.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

4. Решить уравнения:

а) $z^2+\overline{z}=0$; б) $z^2+|z|=0$;

в) $|z|-iz=1-2i$; г) $z^2=\overline{z}^3$.

6. Решить систему уравнения

$$|z+1-i|=|3-z+2i|=|z+i|.$$

7. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z+1-i|=\sqrt{2}; \\ |z|=3. \end{cases}$$

Решений не имеет.

8. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условия:

а) $|z+1-i|=|z-1+i|$; б) $(1-i)\overline{z}=(1+i)z$;

в) $|z+1+2i|\le 0$; г) $\arg z=(2n+1)\pi,\ n\in Z$.

9. Записать z в тригонометрической форме:

а) $z=-\sqrt{3}+i$; б) $z=-1$;

в) $z=-\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}$; г) $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})}$.

10. Найти все значения $\sqrt[n]{\omega}$, если:

а) $\omega = 1, \quad n = 3;$ б) $\omega = -1, \quad n = 4;$

в) $\omega = -4 + \sqrt{48}i, \quad n = 3;$ г) $\omega = 1 + i, \quad n = 8.$

Параграф 4. Детерминанты
1. Детерминанты и их свойства

Детерминант — одно из основных понятий линейной алгебры. Детерминант матрицы является многочленом от элементов квадратной матрицы (то есть такой, у которой количество строк и столбцов равно). В общем случае матрица может быть определена над любым коммутативным кольцом, в этом случае детерминант будет элементом того же кольца. Определитель матрицы *A* обозначается как: *det(A)*, |*A*| или *Δ(A)*.

Определение через разложение по первой строке

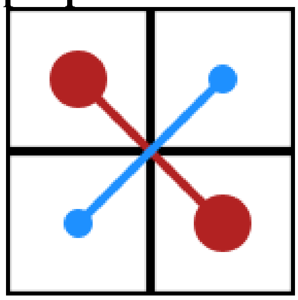


Схема расчета детерминанта матрицы 2×2.

Для матрицы первого порядка **детерминантом** является сам единственный элемент этой матрицы:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}$$

Для матрицы 2×2 детерминант определяется как

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Для матрицы $n\times n$ определитель задаётся рекурсивно:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1,$$

где $\overline{M}_j^1$ — дополнительный минор к элементу a_{1j}. Эта формула называется разложением по строке.

В частности, формула вычисления определителя матрицы 3×3 такова:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Легко доказать, что при транспонировании определитель матрицы не изменяется (иными словами, аналогичное разложение по первому столбцу также справедливо, то есть даёт такой же результат, как и разложение по первой строке):

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \bar{M}_1^i.$$

Также справедливо и аналогичное разложение по любой строке (столбцу):

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \bar{M}_j^i.$$

Обобщением вышеуказанных формул является разложение детерминанта по Лапласу (Теорема Лапласа), дающее возможность вычислять детерминант по любым k строкам (столбцам):

$$\Delta = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M_{j_1+\ldots+j_k}^{i_1+\ldots+i_k} \bar{M}_{j_1+\ldots+j_k}^{i_1+\ldots+i_k}$$

Определение через перестановки

Для матрицы $n \times n$ справедлива формула:

$$\Delta = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} \cdot a_{\alpha_1 1} \ldots a_{\alpha_n n},$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ — перестановка чисел от 1 до n, $N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — число инверсий в перестановке, суммирование идёт по всем возможным перестановкам порядка n. Таким образом, в определитель войдёт $n!$ слагаемых, которые также называют «членами определителя». Важно заметить, что во многих курсах линейной алгебры это определение даётся как основное.

2. Свойства детерминанта

1) Детерминант — кососимметричная полилинейная функция строк (столбцов) матрицы. Поли линейность означает, что определитель линеен по всем строкам (столбцам):

$\Delta\left(\hat{A}_1,\ldots,\alpha\hat{A}_i+\beta\hat{A}_i,\ldots,\hat{A}_n\right)=\alpha\Delta\left(\hat{A}_1,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,\hat{A}_n\right)+\beta\Delta\left(\hat{A}_1,\ldots,\hat{A}'_i,\ldots,\hat{A}_n\right)$, где $\hat{A}_1$ и т. д. — строчки матрицы, $\Delta\left(\ddot{A}_1,\ldots,\ddot{A}_i,\ldots,\ddot{A}_n\right)$ — детерминант такой матрицы.

2) При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) детерминант не изменится.

3) Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то её детерминант равен нулю.

4) Если две (или несколько) строки (столбца) матрицы линейно зависимы, то её детерминант равен нулю.

5) Если переставить две строки (столбца) матрицы, то её детерминант умножается на -1.

6) Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак детерминанта.

7) Если хотя бы одна строка (столбец) матрицы нулевая, то детерминант равен нулю.

8) Сумма произведений всех элементов любой строки на их алгебраические дополнения равна детерминанту.

9) Сумма произведений всех элементов любого ряда на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

10) Детерминант произведения квадратных матриц одинакового порядка равен произведению их детерминанте.

Задачи и примеры для аудитории

Вычислить детерминанты:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

Вычислить детерминанты:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 31 & 45 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Параграф 5. Матрицы

1. Понятие матрицы и действия над ними

Определение. Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$, где $m, n \in N$ — два конечных множества. Назовём матрицей размера $m \times n$ (читается m на n) с элементами из некоторого кольца или поля K отображение вида

$$A : M \times N \to K.$$

Если индекс i пробегает множество M, а j пробегает множество N, то элемент $A(i, j)$ оказывается элементом матрицы, находящемся на пересечении i-той строки и j-ого столбца:

1) i-ая строка матрицы состоит из элементов вида $A(i, j)$, где j пробегает всё множество N;

2) j – ый столбец матрицы состоит из элементов вида $A(i, j)$, где i пробегает всё множество M.

Таким образом, матрица размера $m \times n$ состоит в точности из m строк (по n элементов в каждом) и n столбцов (по m элементов в каждом). В соответствии с этим:

каждую строку матрицы можно интерпретировать как вектор в n-мерном координатном пространстве K^n;

каждый столбец матрицы — как вектор в m-мерном координатном пространстве K^m.

Сама матрица естественным образом интерпретируется как вектор в пространстве K^{mn} имеющим размерность mn. Это позволяет ввести покомпонентное сложение матриц и умножение матрицы на число (см. ниже); то что касается матричного умножения, то оно существенным образом опирается на прямоугольную структуру матрицы.

Если у матрицы количество строк m совпадает с количеством столбцов n, то такая матрица называется **квадратной**, а число $m = n$ называется размером квадратной матрицы или её **порядком**.

Обозначения. Обычно матрицу обозначают заглавной буквой латинского алфавита: пусть

$$A : M \times N \to K,$$

тогда A — матрица, которая интерпретируется как прямоугольный массив элементов поля K вида $a_{ij} = A(i, j)$, где

первый индекс означает индекс строки: $i = \overline{1, m}$;

второй индекс означает индекс столбца: $j = \overline{1, n}$;

таким образом, a_{ij} — элемент матрицы A, находящийся на пересечении i-той строки и j-того столбца. В соответствии с этим принято следующее компактное обозначение для матрицы размера $m \times n$:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\, j=1}^{m,n}$$

или просто:

$$A = \left(a_{ij}\right),$$

если нужно просто указать обозначение для элементов матрицы. Иногда, вместо a_{ij}, пишут a_{ij}, чтобы отделить индексы друг от друга и избежать смешения с произведением двух чисел.

Если необходимо дать развёрнутое представление матрицы в виде таблицы, то используют запись вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Можно встретить как обозначения с круглыми скобками «(…)», так и обозначения с квадратными скобками «[…]». Реже можно встретить обозначения с двойными прямыми линиями "‖…‖").Поскольку матрица состоит из строк и столбцов, для них используются следующие обозначения: $a_{i\cdot} = A_i = \lfloor a_{i1} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{in} \rfloor$ —это i-тая строка матрицы A, а

$$a_{\cdot j} = A^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$ — это j-тый столбец матрицы A.

Таким образом, матрица обладает свойственным представлением — по столбцам:

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & \cdots & A^j & \cdots & A^n \end{bmatrix}$$

и по строкам:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Такое представление позволяет формулировать свойства матриц в терминах строк или в терминах столбцов.

2. Действия над матрицами

Транспонированная матрица. С каждой матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ $m \times n$ связана матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$ вида

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Такая матрица называется **транспонированной матрицей** для A и обозначается так A^T. Транспонированную матрицу можно получить, поменяв строки и столбцы матрицы местами. Матрица $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ при этом преобразовании станет матрицей размерностью $n\times m$.

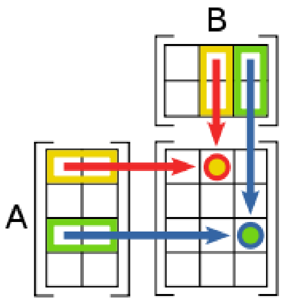
Операции над матрицами. Умножение матрицы A на число λ (обозначение: λA) заключается в построении матрицы B, элементы которой получены путём умножения каждого элемента матрицы A на это число, то есть каждый элемент матрицы B равен

$$b_{ij}=\lambda a_{ij}.$$

Сложение матриц. $A+B$ есть операция нахождения матрицы C, все элементы которой равны по парной сумме всех соответствующих элементов матриц A и B, то есть каждый элемент матрицы C равен

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Умножение матриц. (обозначение: AB, реже со знаком умножения $A\times B$) — есть операция вычисления матрицы C, элементы которой равны сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго.



$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Количество столбцов в матрице A должно совпадать с количеством строк в матрице B. Если матрица A имеет размерность $m\times n$, B — $n\times k$, то размерность их произведения AB = C есть $m\times k$.

Ранг матрицы. Количество линейно независимых строк матрицы называют **строчным рангом** матрицы, а количество линейно независимых столбцов матрицы называют **столбцовым рангом** матрицы. В действительности, оба ранга совпадают. Их общее значение и называется рангом матрицы. Другой эквивалентный данному подход заключается в определении ранга матрицы, как максимального порядка отличного от нуля минора матрицы.

Свойства. Матричные операции. Сложение и вычитание допускается только для матриц одинакового размера.

Существует нулевая матрица Θ такая, что её прибавление к другой матрице A не изменяет A, то есть

$$A+\Theta=A$$

Все элементы нулевой матрицы равны нулю.

Возводить в степень можно только квадратные матрицы.

1) Ассоциативность сложения: A + (B + C) = (A + B) + C.
2) Коммутативность сложения: A + B = B + A.
3) Ассоциативность умножения: A(BC) = (AB)C.
4) Вообще говоря, умножение матриц некоммутативно: $AB \neq BA$. Используя это свойство, вводят коммутатор матриц.
5) Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$A(B + C) = AB + AC;$$
$$(B + C)A = BA + CA.$$

6) С учётом упомянутых выше свойств, матрицы образуют кольцо относительно операций сложения и умножения.
7) Свойства операции транспонирования матриц:

$$(A^T)^T = A$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, если обратная матрица A^{-1} существует.
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$\det A = \det A^T$$

Примеры. Матрица как запись коэффициентов системы линейных уравнений. Систему из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можно представить в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

и тогда всю систему можно записать так:

$$AX = B,$$

где A имеет смысл таблицы коэффициентов a_{ij} системы уравнений.

Если $m = n$ и матрица A невырожденная, то решение этого уравнения состоит в нахождении обратной матрицы A^{-1}, поскольку умножив обе части уравнения на эту матрицу слева

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$A^{-1}A$ — превращается в E (единичную матрицу). И это даёт возможность получить столбец корней уравнений

$$X = A^{-1}B.$$

Все правила, по которым проводятся операции над матрицами, выводятся из операций над системами уравнений.

Квадратная матрица и смежные определения. Если количество строк матрицы равно количеству столбцов, то такая матрица называется квадратной. Для квадратных матриц существует единичная матрица E (аналог единицы для операции умножения чисел) такая, что умножение любой матрицы на неё не влияет на результат, а именно

$$EA = AE = A.$$

У единичной матрицы единицы стоят только по главной диагонали, остальные элементы равны нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для некоторых квадратных матриц можно найти так называемую обратную матрицу. Обратная матрица A^{-1} такова, что если умножить матрицу на неё, то получится единичная матрица:

$$AA^{-1} = E.$$

Обратная матрица существует не всегда. Матрицы, для которых обратная существует, называются невырожденными (или регулярными), а для которых нет — вырожденными (или сингулярными). Матрица не вырождена, если все ее строки (столбцы) линейно независимы как векторы. Максимальное число линейно независимых строк (столбцов) называется рангом матрицы. Детерминантом матрицы называется значение нормированной кососимметрической (анти симметрической) полилинейной формы валентности $(p;0)$ на столбцах матрицы. Квадратная матрица над числовым полем вырождена тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

1. Умножение строки на число отличное от нуля,
2. Прибавление одной строки, умноженной на число, к другой строке,
3. Перестановка местами двух строк.

Элементарные преобразование столбцов матрицы определяются аналогично. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Задачи и примеры для аудитории

Вычислить произведения матриц:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. **6.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$. **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Решить матричные уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Выполнить действия:

$$4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножить матрицы:

2. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & -3 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_n \end{pmatrix}^n$,

где нули обозначают, что все элементы матрицы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Параграф 6. Способы решения систем линейных уравнений.

1. Способы решения систем линейных уравнений.

Система m линейных уравнений с n неизвестными (или, линейная система) в линейной алгебре — это система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2, …, x_n — неизвестные, которые надо определить. a_{11}, a_{12}, …, a_{mn} — коэффициенты системы — и b_1, b_2, … b_m — свободные члены — предполагаются известными. Индексы коэффициентов (a_{ij}) системы обозначают номера уравнения (i) и неизвестного (j), при котором стоит этот коэффициент, соответственно.

Система (1) называется **однородной**, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), иначе — **неоднородной**.

Система (1) называется **квадратной**, если число m уравнений равно числу n неизвестных.

Решение системы (1) — совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему (1) обращает все её уравнения в тождества.

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если у неё нет ни одного решения. Совместная система вида (1) может иметь одно или более решений.

Решения $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$ и $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$ совместной системы вида (1) называются **различными**, если нарушается хотя бы одно из равенств:

$$c_1^{(1)} = c_1^{(2)}, c_2^{(1)} = c_2^{(2)}, \ldots, c_n^{(1)} = c_n^{(2)}.$$

Совместная система вида (1) называется **определённой**, если она имеет единственное решение; если же у неё есть хотя бы два различных решения, то она называется **неопределённой.** Если уравнений больше, чем неизвестных, она называется **переопределённой.**

Матричная форма. Система линейных уравнений может быть представлена в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или: $Ax = B$. Если к матрице A приписать справа столбец свободных членов, то получившаяся матрица называется расширенной.

2. Суть метода Крамера и метода Гаусса

Метод Гаусса. Пусть исходная система выглядит следующим образом

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Матрица A называется основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов. Тогда согласно свойству элементарных преобразований над строками основную матрицу этой системы можно привести к ступенчатому виду (эти же преобразования нужно применять к столбцу свободных членов):

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \dots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} = \beta_2 \\ \qquad \dots \\ \qquad \qquad \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \dots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} = \beta_r \quad , \qquad \alpha_{1j_1}, \dots, \alpha_{rj_r} \neq 0. \\ \qquad \qquad 0 = \beta_{r+1} \\ \qquad \qquad \dots \\ \qquad \qquad 0 = \beta_m \end{cases}$$

При этом будем считать, что базисный минор (ненулевой минор максимального порядка) основной матрицы находится в верхнем левом углу, то есть в него входят только коэффициенты при переменных $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$. Тогда переменные $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ называются **главными переменными.** Все остальные называются **свободными.**

Если хотя бы одно число $\beta_i \neq 0,$ где $i > r,$ то рассматриваемая система несовместна.

Пусть $\beta_i = 0$ для любых $i > r.$ Перенесём свободные переменные за знаки равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент при самом левом x ($\alpha_{ij_i}, i = 1, \dots, r,$ где i — номер строки):

$$\begin{cases} x_{j_1} + \hat{\alpha}_{1j_2}x_{j_2} + \dots + \hat{\alpha}_{1j_r}x_{j_r} = \hat{\beta}_1 - \hat{\alpha}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{1j_n}x_{j_n} \\ \qquad x_{j_2} + \dots + \hat{\alpha}_{2j_r}x_{j_r} = \hat{\beta}_2 - \hat{\alpha}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{2j_n}x_{j_n} \\ \qquad \dots \\ \qquad \qquad x_{j_r} = \beta_r - \hat{\alpha}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \dots - \hat{\alpha}_{rj_n}x_{j_n} \end{cases},$$

где, $i = 1, \dots, r, \quad k = i+1, \dots, n.$

Если свободным переменным системы (2) придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных снизу вверх (то есть от нижнего уравнения к верхнему), то мы получим все решения этой СЛАУ. Так как эта система получена путём элементарных преобразований над исходной системой (1), то по теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях системы (1) и (2) эквивалентны, то есть множества их решений совпадают.

Условие совместности. Упомянутое выше условие $\beta_i = 0$ для всех $i > r$ может быть сформулировано в качестве необходимого и достаточного условия совместности:

Напомним, что рангом совместной системы называется ранг её основной матрицы (либо расширенной, так как они равны).

Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа.

1) На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, до множив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.
2) На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

Метод Гаусса требует порядка $O(n^3)$ действий. Этот метод опирается на:

Простейший случай. В простейшем случае алгоритм выглядит так:

$$
\begin{cases}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 & (1)\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 & (2)\\
\cdots & \\
a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m & (m)
\end{cases}
$$

Прямой ход.

$$
(2)\to(2)-(1)\cdot\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \ :\ a'_{22}\cdot x_2 + a'_{23}\cdot x_3 + \cdots + a'_{2n}\cdot x_n = b'_2
$$

$$
(3)\to(3)-(1)\cdot\left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) \ :\ a'_{32}\cdot x_2 + a'_{33}\cdot x_3 + \cdots + a'_{3n}\cdot x_n = b'_3
$$

$$
\cdots
$$

$$
(m)\to(m)-(1)\cdot\left(\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right) \ :\ a'_{m2}\cdot x_2 + a'_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a'_{mn}\cdot x_n = b'_n
$$

$$
(3)\to(3)-(2)\cdot\left(\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right) \ :\ a''_{33}\cdot x_3 + \cdots + a''_{3n}\cdot x_n = b''_3
$$

$$
\cdots
$$

$$
(m)\to(m)-(m-1)\cdot\left(\frac{a^{(m-2)}_{m,n-1}}{a^{(m-2)}_{m-1,n-1}}\right) \ :\ a^{(m-1)}_{mm}\cdot x_m + \cdots + a^{(m-1)}_{mn}\cdot x_n = b^{(m-1)}_m
$$

Обратный ход. Из последнего ненулевого уравнения выражаем базисную переменную через небазисные и подставляем в предыдущие уравнения. Повторяя эту процедуру для всех базисных переменных, получаем фундаментальное решение.

Пример. Покажем, как методом Гаусса можно решить следующую систему:

$$
\begin{cases}
2x + y - z = 8\\
-3x - y + 2z = -11.\\
-2x + y + 2z = -3
\end{cases}
$$

Обнулим коэффициенты при x во второй и третьей строчках. Для этого вычтем из них первую строчку, умноженную на $-\dfrac{3}{2}$ и -1, соответственно:

$$
\begin{cases}
2x + y - z = 8\\
\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z = 1\\
2y + z = 5
\end{cases}
$$

Теперь обнулим коэффициент при yв третьей строке, вычтя из неё вторую строку, умноженную на 4:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ \dfrac{1}{2} y + \dfrac{1}{2} z = 1 \\ -z = 1 \end{cases}.$$

В результате мы привели исходную систему к треугольному виду, тем самым закончив первый этап алгоритма. На втором этапе разрешим полученные уравнения в обратном порядке. Имеем:

$z = -1$ из третьего;

$y = 3$ из второго, подставив полученное z

$x = 2$ из первого, подставив полученные z и y.

Таким образом исходная система решена.

Метод Крамера. Для системы n линейных уравнений с n неизвестными (над произвольным полем)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с определителем матрицы системы Δ, отличным от нуля, решение записывается в виде

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i-ый столбец матрицы системы заменяется столбцом свободных членов).
В другой форме правило Крамера формулируется так: для любых коэффициентов c_1, c_2, …, c_n справедливо равенство:

$$(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \cdot \Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 \end{vmatrix}$$

В этой форме формула Крамера справедлива без предположения, что Δ отлично от нуля, не нужно даже, чтобы коэффициенты системы были бы элементами целостного кольца (определитель системы может быть даже делителем нуля в кольце коэффициентов). Можно также считать, что либо наборы $b_1,b_2,...,b_n$ и $x_1,x_2,...,x_n$, либо набор $c_1,c_2,...,c_n$ состоят не из элементов кольца коэффициентов системы, а какого-нибудь модуля над этим кольцом.

Система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Детерминанты:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110 \end{cases}$$

Детерминанты:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = 1350, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = -1270.$$

$$x_1 = -\frac{760}{5} = -152, \;\; x_2 = \frac{1350}{5} = 270, \;\; x_3 = -\frac{1270}{5} = -254$$

Задачи и примеры для аудитории

Решить системы уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 3x+y+z=6 \\ 2x+y+2z=6. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+3y-6z=0 \\ 3x+3y-5z=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x+2y-4z=19 \\ 5x+3y-3z=15 \\ 5x-3y+3z=15. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-3y+z-t=2 \\ 4x-y+3z+t=4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x+3y+11z+5t=2 \\ x+y+5z+2t=1 \\ x+y+3z+2t=-3 \\ x+y+3z+4t=-3. \end{cases}$

Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

7. $\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20 \\ x+3y+2z+t=11 \\ 2x+10y+9z+7t=40 \\ 3x+8y+9z+2t=37. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 3x+4y+z+2t=-3 \\ 3x+5y+3z+2t=-6 \\ 6x+8y+z+5t=-8 \\ 3x+5y+3z+7t=-8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x+9y+4z+2t=2 \\ 2x-2y+z+t=6 \\ 5x+6y+3z+2t=3 \\ 2x+3y+z+t=0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ 5x+6y+7z+8t=2 \\ 9x+4y+z-2t=3 \\ 2x-6y++5z+2t=4. \end{cases}$

Примеры и задачи для самостоятельных работ

Решить системы уравнений методом Гаусса:

1. $\begin{cases} 5x+y-7z=0 \\ 5x-2z=3 \\ 3x-y+2z=3 \\ 3x+2y-10z=-3. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x+4y+z=1 \\ 4x+6y-z=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+4t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y - 2z = 4. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t = -1 \\ 7x - 4y + 2z - 15t = -32 \\ x - 2y - 4z + 9t = 5 \\ x - y + 2z - 6t = -8. \end{cases}$

Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

7. $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t = -4 \\ 9x - y + 4z - t = 13 \\ 3x + 4y + 2z - 2t = 1 \\ 3x - 9y + 2t = 11. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 7x + 9y + 4z + 2t = 2 \\ 2x - 2y + z + t = 6 \\ 5x + 6y + 3z + 2t = 3 \\ 2x + 3y + z + 2t = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = -3 \\ 3x + 5y + 3z + 5t = -6 \\ 6x + 8y + 3z + 5t = -8 \\ 3x + 5y + 3z + 7t = -8. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t = -4 \\ 9x - y + 4z - t = 13 \\ 3x + 4y + 2z - 2t = 1 \\ 3x - 9y + 2t = 11. \end{cases}$

Модул II. Элементы аналитическая геометрия

Параграф 7. Простые задачи геометрии на плоскости

1. Расстояние между двумя точками, деление отрезка на данном отношение.

Расстояние между двумя точками.

1°. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на оси:

$$d = |x_2 - x_1|.$$

2°. Расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении.

1°. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : BM = \lambda$ определяются по формулам: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

2°. В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

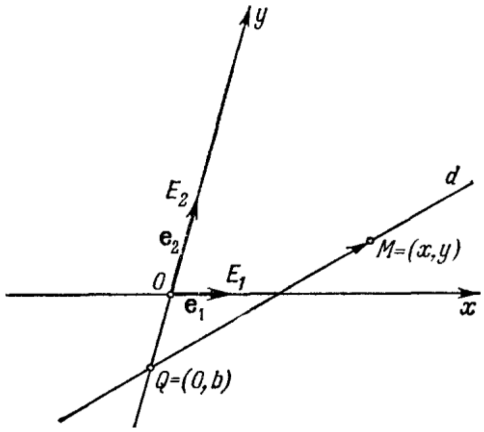
2. Уравнение прямой и уравнения плоскости

Уравнение прямой.

1°. Уравнения прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B – коэффициенты, C – свободный член.



2°. Если прямая в пространстве задается двумя своим точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3°. Параметрическая уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

где a, b, c – коэффициенты, $M(x_0; y_0; z_0)$ – заданная точка, t – параметр.

Если прямая d дана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то для определения её расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ надо сначала привести уравнение прямой к нормальному виду, т. е. умножить обе его части на $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. В результате получается формула

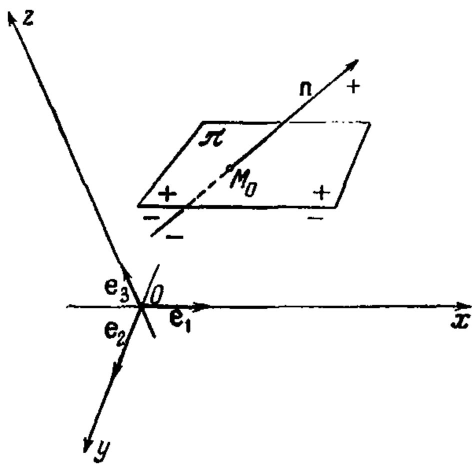
$$\rho(M_0; d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если прямая d дана своим уравнением $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, то для определения её расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$:

$$\rho(M_1; d) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Уравнения плоскости

Всякое уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, которому удовлетворяют все точки данной плоскости (и только они), называется уравнением этой плоскости. В котором хотя бы один из коэффициентов A, B, D отличен от нуля. Вектор $\vec{n} = \{A,\ B,\ D\}$ перпендикулярен к плоскости.



Отношение прямой и плоскости

1°. Прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ тогда и только тогда параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ когда $Aa+Bb+Cc=0$.

2°. Если, кроме того, выполнено условие $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то (и только в этом случае) прямая лежит в плоскости.

Задачи и примеры для аудитории

1. Построить на числовой оси точки A(- 5), B(+4) и C(-2) и найти величины AB, BC и AC отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC = AC$.

3. Выполнить предыдущее упражнение для точек A(+1), B(-4) и C(+5).

4. Построить треугольник с вершинами A(-4; 2), B(0; -1) и C(3; 3) и определить его периметр и углы.

5. На числовой оси построить точки A(-1), B(-3) и C(-2) и найти величины AB, BC и CA отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC + CA = 0$.

6. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки A(-2; 3) на $3\sqrt{5}$ единиц.

7. Построить точки A(-2; 1) и B(3; 6) и найти точку M(x; y), делящую AB в отношении AM : MB = 3:2.

7. Построить прямые, данные следующими уравнениями:

$$y=3x+1;\quad y=x-2;\quad y=-5x+3,\quad y=-2x-1;\quad y=4x;\quad y=5.$$

8. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $P(2;-8)$ и $Q(-1;7)$.

9. Проходит на плоскость $4x-y+3z+1=0$ через одну из следующих точек $A(-1;6;3)$, $B(3;-2;-5)$, $C(0;4;1)$, $D(2;0;5)$, $E(2;7;0)$, $F(0;1;0)$.

10. Вычислить расстояние плоскости $15x-10y+6z-190=0$ от начала координат.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Доказать, что треугольник с вершинами A(-3;-2), B(0;-1) и C(-2;5) прямоугольный.

2. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки A(-2; 5).

3. Даны точки A(-2; 1) и B(3; 6). Разделить отрезок AB в отношении AM : MB = -3:2.

4. На плоскости построить точки A(-7; 0) и B(0; 1) и точки A_1 и B_1, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1.

5. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки A(-1; 2) на $2\sqrt{6}$ единиц.

6. Построить точки A(-3; 2) и B(4; 7) и найти точку M(x; y), делящую AB в отношении AM : MB = 5:2.

7. Построить прямые, данные следующими уравнениями:

$$y=-2x-1;\ \ y=-x+2;\ \ y=2x-3,\ \ y=2x+1;\ \ \ y=3x;\ \ \ y=-5.$$

8. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $P(1;-9)$ и $Q(-2;6)$.

9. Проходит на плоскость $x-y+2z-1=0$ через одну из следующих точек $A(1;1;\frac{1}{2})$, $B(-5;4;6)$, $C(3;5;0)$, $D(2;1;0)$, $E(-2;6;3)$, $F(-3;7;2)$.

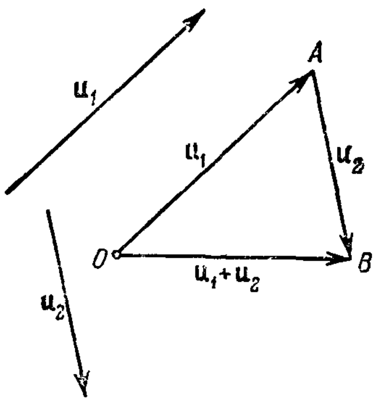
10. Вычислить расстояние плоскости $2x-2y+z-10=0$ от $A(1;2;3)$.

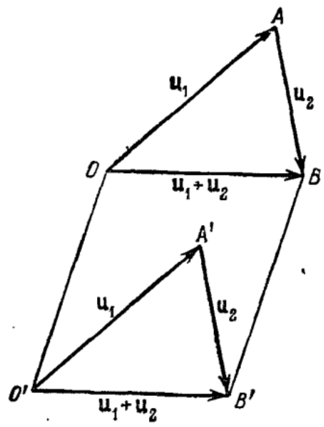
Параграф 8. Векторы

1. Линейные операции над векторами. Коллинеарные и компланарные векторы.

Линейные операции над векторами. Пусть даны свободные векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Прилагаем вектор $\vec{u}_1$ к какой-нибудь точке O, получаем $\vec{u}_1=\overrightarrow{OA}$; прилагаем $\vec{u}_2$ к точке A; получаем $\vec{u}_2=\overrightarrow{AB}$. По определению вектор $\vec{u}_3=\overrightarrow{OB}$ называется *суммой* векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, т. е.

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$





Замечание 1. Единственный элемент произвола, содержащийся в этом определении, есть выбор точки O – точки приложения и вектора $\vec{u}_1$. Прилагая вектор их $\vec{u}_1$ к какой-нибудь другой точке O' получим вектор $\overrightarrow{O'A'}=\overrightarrow{OA}=\vec{u}_1$; построим вектор $\overrightarrow{A'B'}=\vec{u}_2$; вектор $\overrightarrow{O'B'}=\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{A'B'}$, очевидно, равен вектору $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$: он получается из $\overrightarrow{OB}$ сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO'}$.

Если дан вектор $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, то на прямой $d=OA$, проходящей через точки O и $A,$ можно построить вектор $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}.$

Всякий вектор, равный вектору $\overrightarrow{OA'},$ также обозначаем через $\vec{u}.$

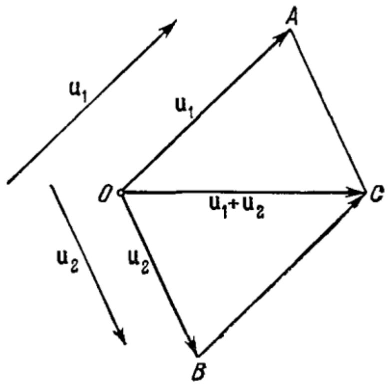
Очевидно, $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$ для любого вектора $\vec{u}.$ Если рассматривать свободные векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ как сдвиги пространства, то нулевой 0 есть тождественное преобразование (нулевой сдвиг) пространства, а свободный вектор $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ есть сдвиг, получаемый в результате последовательного осуществления сначала сдвига их $\vec{u}_1$ потом сдвига $\vec{u}_2.$

Свободный вектор — $\vec{u}$ при любом и есть сдвиг, противоположный сдвигу $\vec{u}$ (так что $\vec{u} + (-\vec{u})$ есть нулевой сдвиг 0).

Замечание 2. Следующие формулы, очевидно, верны для любого вектора $\vec{u}$:

$$0 + \vec{u} = \vec{u} + 0 = \vec{u},$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = 0.$$



Замечание 3. Как ясно из рисования, при $\vec{u}_2 \neq 0, \vec{u}_2 \neq -\vec{u}_1$ предыдущее определение суммы двух векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ можно сформулировать и так: приложим оба вектора $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ к одной и той же точке $O,$ так что

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{u}_2 = \overrightarrow{OB}.$$

Тогда $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ есть вектор $\overrightarrow{OC} -$ диагональ параллелограмма, построенного на сторонах $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2.$

Так как этот параллелограмм и его диагональ ОС не зависят от того, а каком порядке даны векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ то сложение векторов коммутативно:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1.$$

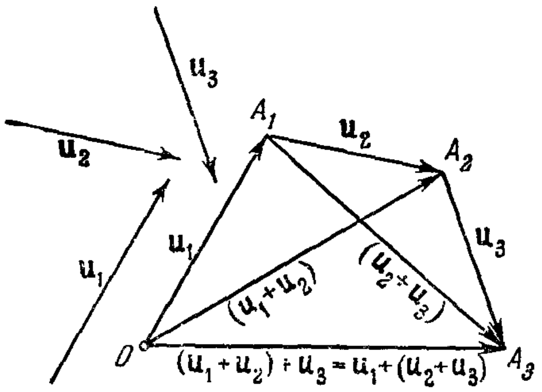
Докажем, что сложение векторов ассоциативно, т. е. что для любых трех векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ имеем

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3 = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3).$$

В самом деле, если $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \vec{u}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}$ (рисования), то

$$\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}, \quad \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{OA_3},$$
$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}, \quad (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3 = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_3},$$

т. е. и $\vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$, и $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3$ есть вектор $\overrightarrow{OA_3}$, так называемый замыкающий вектор последовательности трех векторов $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{u}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{u}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}$.



Ассоциативность сложения векторов позволяет говорить о сумме трех векторов $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, понимая под этим вектор

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3) = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \vec{u}_3.$$

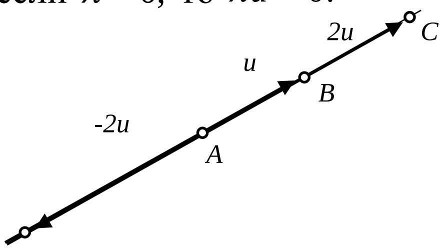
По индукции может быть определена и сумма любого числа векторов

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_n,$$

причем из ассоциативности следует, что, например, в случае четырех векторов имеем

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 = \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4) = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + \vec{u}_4.$$

Умножение вектора $\vec{u}$ на число λ состоит в следующем. Если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, то $\lambda\vec{u}$ есть всякий вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$, лежащему на прямой AB, и определенный условием, что его отношение к вектору $\overrightarrow{AB}$ равно λ (рисования); если $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{u} = 0$.



Из этого определения следует, в частности, что для любого вектора $\vec{u}$ имеем

$$0 \cdot \vec{u} = 0, \;\; 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \;\; (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}. \qquad (2)$$

Для любых двух чисел λ_1 и λ_2 и любого вектора $\vec{u}$ имеют место формулы:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} = \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{u}, \qquad (3)$$
$$(\lambda_1\lambda_2)\vec{u} = \lambda_1(\lambda_2\vec{u}). \qquad (4)$$

Наконец, для любых двух векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ и любого числа λ имеем

$$\lambda(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=\lambda\vec{u}_1+\lambda\vec{u}_2. \qquad (5)$$

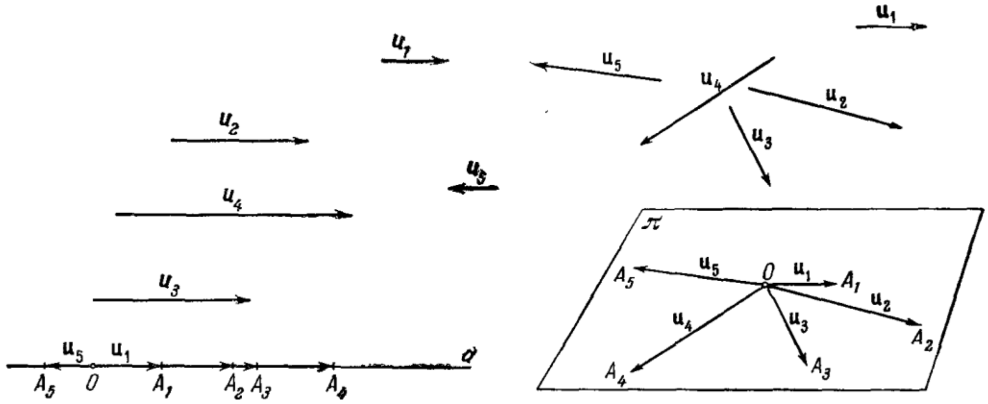
Геометрическое доказательство всех этих формул может быть представлено читателю в виде упражнения (более канительного — разбор всех возможных случаев, — чем трудного).

Выражение

$$\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+...+\lambda\vec{u}_n, \qquad (6)$$

где $\vec{u}_1,\,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n$ − векторы, а $\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_n$ − какие-нибудь вещественные числа, называется линейной комбинацией векторов $\vec{u}_1,\,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2...,\lambda_n$. При $n=1$ получаем просто вектор вида $\lambda_1\vec{u}_1$.

Коллинеарные и компланарные векторы. Несколько векторов называются коллинеарными (соответственно компланарными) между собою, если все они, будучи приложенными к одной и той же точке, оказываются лежащими на одной прямой d. (рисования) (соответственно в одной плоскости π (рисования)). В этом случае говорят также, что рассматриваемые векторы коллинеарные прямой d (компланарны плоскости π).



Следующие утверждения являются непосредственными следствиями этого определения:

1. Нулевой вектор коллинеарном всякому вектору.

2. Если. несколько векторов коллинеарные между собою, то они и подавно между собою компланарны.

3. Каждый вектор коллинеарной самому себе.

4. Всякие два вектора между собою компланарны.

Векторы $\overrightarrow{A_1B_1},\,\overrightarrow{A_2B_2},...,\overrightarrow{A_nB_n}$ коллинеарные (компланарны) тогда и только тогда, когда несущие их прямые параллельны одной и той же прямой (одной и той же плоскости).

Пусть $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ − два коллинеарных вектора. Прилагая их к одной какой-нибудь точке O, получаем векторы $\vec{u}_1=\overrightarrow{OA_1}$ и $\vec{u}_2=\overrightarrow{OA_2}$ лежащие на одной прямой. Пусть по крайней мере один из данных векторов, например $\vec{u}_1$, отличен от пуля. Тогда, как мы знаем из первой главы, определено вещественное число $\lambda = \vec{u}_2 : \vec{u}_1$, называемое отношением вектора $\vec{u}_2$ к вектору $\vec{u}_1$; модуль этого числа равен отношению отрезка $\overrightarrow{OA_2}$ к отрезку $\overrightarrow{OA_1}$:

$\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA_1}}$, а знак берется положительный, если векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ направлены в одну и ту же сторону, и отрицательный, если они направлены в противоположные стороны; если $\vec{u}_2 = 0$, то $\lambda = 0$.

Если $\lambda = \vec{u}_2 : \vec{u}_1$, то по самому определению умножения вектора на число имеем $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.

Обратно, из того же определения следует, что всякий вектор вида $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$, где $\lambda -$ какое-нибудь вещественное число, коллинеарную вектору $\vec{u}_1$. Мы показали следующую теорему:

5. Пусть $\vec{u}_1 -$какой-нибудь ненулевой вектор. Тогда все векторы вида $\lambda \vec{u}_1$, где $\lambda -$любое вещественное число, и только векторы этого вида коллинеарную вектору $\vec{u}_1$.

Подчеркнем особо: отношение $\vec{u}_2 : \vec{u}_1$ между двумя векторами определено тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарные и когда по крайней мере один из них отличен от нуля. Если отношение $\vec{u}_2 : \vec{u}_1$ равно числу λ, то это значит, что $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.

Прежде чем идти дальше, докажем следующие две теоремы:

6. Пусть на плоскости даны две прямые d_1 и d_2, пересекающиеся в некоторой точке O. Тогда любой вектор $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ есть сумма своих проекций $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ на эти прямые (проекции берутся на каждую из двух прямых вдоль другой прямой).

7. Пусть через точку О пространства проходят три прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда любой вектор $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ есть сумма своих проекций $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ на эти прямые, причем проекции берутся на каждую прямую вдоль плоскости, несущей две другие прямые.

Можно ограничиться случаем, когда вектор $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ не лежит ни в одной из плоскостей, несущих две какие-нибудь из наших трех прямых. Тогда проекции вектора $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ на каждую прямую (вдоль плоскости, несущей две другие прямые) образуют три ребра $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$ параллелепипеда с диагональю $\overrightarrow{OA}$ (рисования) и

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}.$$

8. **Основная теорема.** Пусть в плоскости даны два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тогда каждый вектор $\vec{u}$ есть линейная комбинация

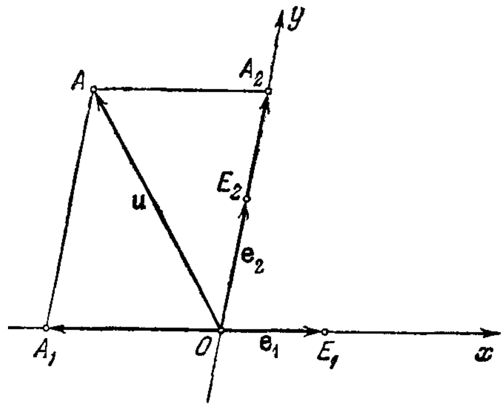
$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \qquad (7)$$

векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и коэффициенты x_1 и x_2 определены однозначно, как алгебраические значения проекций вектора $\vec{u}$ на оси, несущие соответственно единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (проекция на каждую ось берется вдоль другой оси).

Пусть в пространстве даны три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3.$ Тогда каждый вектор и есть линейная комбинация

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \qquad (8)$$

векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,$ в которой коэффициенты x_1, x_2, x_3 определены однозначно, как алгебраические значения проекций вектора $\vec{u}$ на оси, определенные единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (проекция на каждую ось берётся вдоль плоскости, определенной двумя другими осями).



Основное определение. Любая пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на плоскости и любая тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в пространстве, данных в определенном порядке), называется базисом множества (или многообразия) всех векторов, лежащих соответственно в плоскости или в пространстве; сами векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются базисными или единичными векторами. Однозначно определенные коэффициенты x_1, x_2 (соответственно x_1, x_2, x_3) в представлениях

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \qquad (9)$$

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \qquad (10)$$

называются координатами вектора $\vec{u}$ относительно данного базиса (x_1 – первая, x_2 – вторая, x_3 – третья координата).

Отсюда и из определения координат вектора следует:

При умножении вектора на данное число λ на это же число λ умножаются $\vec{u}$ координаты вектора. Каждая координата суммы, двух векторов есть сумма соответствующих координат слагаемых векторов.

Если $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,\ \vec{v} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2,$ то

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2,$$

$$\lambda\vec{u} = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda x_2)\vec{e}_2.$$

2. Скалярное и векторное произведение двух векторов.

Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ называется число $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = |\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|\cos\varphi. \qquad (11)$$

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор полагается равным нулю. Из этого определения сразу вытекают следующие свойства скалярного произведения:

1. $(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = (\vec{u}_2;\vec{u}_1) -$ свойство переместительности.

2. $(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ перпендикулярны между собою.

3. $(\vec{u};\vec{u}) = |\vec{u}|^2$ – скалярное произведение вектора на самого себя («скалярный квадрат вектора») равно квадрату его длины; скалярный квадрат равен нулю для нулевого вектора и положителен для всякого вектора, отличного от нулевого.

В пространстве для

$$\vec{u}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{u}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$$

получаем (совершенно так же)

$$(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (12)$$

Эти формулы очень важны и имеют многочисленные применения.

В частности, они позволяют определить угол φ между двумя векторами $\vec{u}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{u}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$ по координатам этих векторов: для этого достаточно переписать формулу (11) в виде

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{u}_1;\vec{u}_2)}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|}$$

и подставить в нее значение длины векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ и их скалярного произведения (12). Получаем

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (13)$$

(корни в знаменателе берутся положительные).

Векторное произведение двух векторов. Определение. Векторным произведением, вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$ называется вектор $\vec{n},$ модуль которого равен произведению модулей векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{n}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\varphi;$ этот вектор перпендикулярен к плоскости л, в которой лежат векторы $\vec{u}$ и $\vec{v},$ если их отложить от одной точки; он направлен так, что упорядоченная тройка векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}$ имеет положительную ориентацию. Векторное произведение вектора $\vec{u}$ на вектор $\vec{v}$ обозначается через $[\vec{u};\vec{v}]$.

Установим некоторые свойства векторного произведения.

1. Векторное произведение $[\vec{u};\vec{v}]$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарные.

2. (Антикоммутативность). $[\vec{u};\vec{v}] = -[\vec{v};\vec{u}]$.

3. При умножении какого-либо из векторов u или v на произвольное вещественное число λ на это же число λ умножается и векторное произведение: $[\lambda\vec{u};\vec{v}]=[\vec{u};\lambda\vec{v}]=\lambda[\vec{u};\vec{v}]$.

Эти свойства являются непосредственными следствиями определения вектора $[\vec{u};\vec{v}]$.

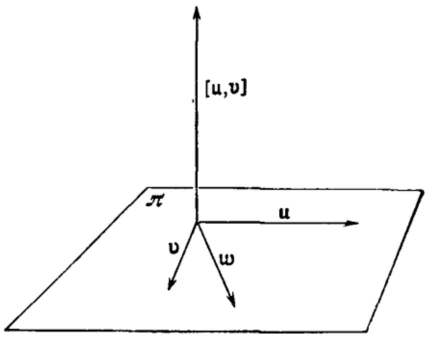
Имеет место и

4. (Дистрибутивность).

$$\begin{cases}[(\vec{u}'+\vec{u}'');\vec{v}]=[\vec{u}';\vec{v}]+[\vec{u}'';\vec{v}],\\ [\vec{u};(\vec{v}'+\vec{v}'')]=[\vec{u};\vec{v}']+[\vec{u};\vec{v}''].\end{cases} \qquad (14)$$

5. Скалярное произведение вектора $[\vec{u};\vec{v}]$ на какой-нибудь вектор $\vec{w}$ равняется объему ориентированного параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$:

$$([\vec{u},\ \vec{v}],\ \vec{w})=(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}). \qquad (15)$$



Формула (15) может служить определением функции $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$, которая при таком подходе к ней называется **смешанным произведением** трех векторов $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$.

Пусть теперь — в какой-нибудь прямоугольной системе координат $Oxyz$ – имеем

$$\vec{u}=\{x_1;y_1;z_1\},$$
$$\vec{v}=\{x_2;y_2;z_2\},$$
$$\vec{w}=\{x_3;y_3;z_3\}.$$

Тогда векторное произведение $[\vec{u},\vec{v}]$ может быть записан в координатное виде:

$$[\vec{u},\ \vec{v}]=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Смешанные произведение $[\vec{u},\ \vec{v}]$ может быть записан в координатное виде:

$$(\vec{u},\ \vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Задачи и примеры для аудитории

1. Векторы $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. В трапеции $ABCD$ отношение основания $\overrightarrow{AD}$ к основанию $\overrightarrow{BC}$ равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC}=\vec{a},\ \overrightarrow{BD}=\vec{b},$ выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

3. В треугольнике ABC проведены медианы $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

4. Показать, что, каковы бы ни были три вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ и три числа $\alpha,\beta,\ \gamma,$ векторы $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b},\ \gamma\vec{b}-\alpha\vec{c},\ \beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ компланарны.

5. В треугольнике ABC даны длины его сторон $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5,\ \left|\overrightarrow{CA}\right|=6,\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=7.$ Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

6. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\{-14;2;5\}$ на прямую с направляющим вектором $\{2;-2;1\}$.

7. Определить внутренние углы треугольника с вершинами $A(1;2;3)$, $B(3;0;4)$, $C(2;1;3)$.

8. Даны два вектора $\vec{a}=\{8;4;1\},\ \vec{b}=\{2;2;1\},\ \vec{c}=\{1;1;1\}$. Найти вектор $\vec{d}$ длины 1, образующий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{a},\ \vec{d},\vec{c}$ имели противоположную ориентацию.

9. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A(1;2;3)$, а концы выходящих из неё ребер – в точках $B(9;6;4)$, $D(3;0;4)$, $A'(5;2;6)$. Найти угол φ между диагональю AC' и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

10. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1;0;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. В треугольнике ABC проведены медианы $\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2. Из точки O выходят два вектора, $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

3. Даны четыре вектора $\vec{a}=\{1;5;3\},\ \vec{b}=\{6;-4;-2\},\ \vec{c}=\{0;-5;7\},$ $\vec{d}=\{-20;27;-35\}$. Подобрать числа α,β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}$

и $\vec{d}$ образовывали замкнутую ломанию линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

4. Даны два вектора: $\vec{a}=\{11;10;2\}$ и $\vec{b}=\{4;0;3\}$. Найти вектор $\vec{c}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

5. Три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a}=[\vec{b};\vec{c}]$, $\vec{b}=[\vec{c};\vec{a}]$, $\vec{c}=[\vec{a};\vec{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

6. Доказать, что если три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не коллинеарные, то из равенств $[\vec{a};\vec{b}]=[\vec{b};\vec{c}]=[\vec{c};\vec{a}]$ вытекает соотношение $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ и обратно.

7. Доказать, что если $[\vec{a};\vec{b}]+[\vec{b};\vec{c}]+[\vec{c};\vec{a}]=0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

8. Доказать, что если векторы $[\vec{a};\vec{b}]$, $[\vec{b};\vec{c}]$, $[\vec{c};\vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарные.

9. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найти вектор x, удовлетворяющий системе уравнений

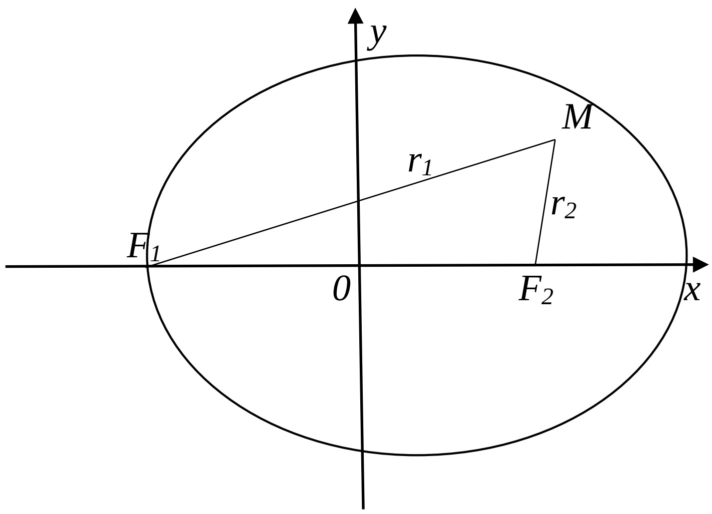
$$(\vec{a};\vec{x})=\alpha,\ (\vec{b};\vec{x})=\beta,\ (\vec{c};\vec{x})=\gamma.$$

10. Решить относительно $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из систему уравнений: $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$, $(\vec{x};\vec{y})=p$, $[\vec{x};\vec{y}]=\vec{b}$. Дано, что $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, $(\vec{a};\vec{b})=0$.

Параграф 9. Кривые второго порядка

1. Эллипс, гипербола.

Эллипс. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянное число; это число мы обозначаем через $2a$. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса; расстояние между ними обозначается через $2c$ и называется фокусным расстоянием. Число a называется большой полуосью эллипса. Середина O отрезка $\overline{F_1F_2}$, соединяющего фокусы, называется центром эллипса, а вся прямая F_1F_2 называется его фокальной или первой осью. Прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к фокальной оси, называется второй осью эллипса. Число $e=\dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса; оно всегда $e<1$.



В этой системе координат имеем $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$; фокус F_1 условно называем **левым**, фокус F_2 – **правым**.

Предположим теперь, что $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса. Пусть $r_1 = \rho(F_1;M)$ и $r_2 = \rho(F_2;M)$ – расстояния точки M до фокусов F_1 соответственно F_2. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами** точки M. Имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \text{ и } r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Точки $M(x;y)$ является точкой эллипса тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a, \qquad (1)$$

т. е.
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1')$$

Это уравнение (в котором оба корня положительны) и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат.

Преобразуем уравнение (1) к виду, который называется **каноническим уравнением эллипса**. Для этого перенесём второй радикал в правую часть. Возведя после этого обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

Или (после раскрытия скобок и приведения подобных членов)

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \qquad (2)$$

Обе части равенства (2) снова возведем в квадрат, получим

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

или (после очевидных упрощений)

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Так как $a > c$, то число $a^2 - c^2$ положительно; обозначим его через b^2, называя число $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ малой полуосью эллипса. Теперь равенство (3) можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

или

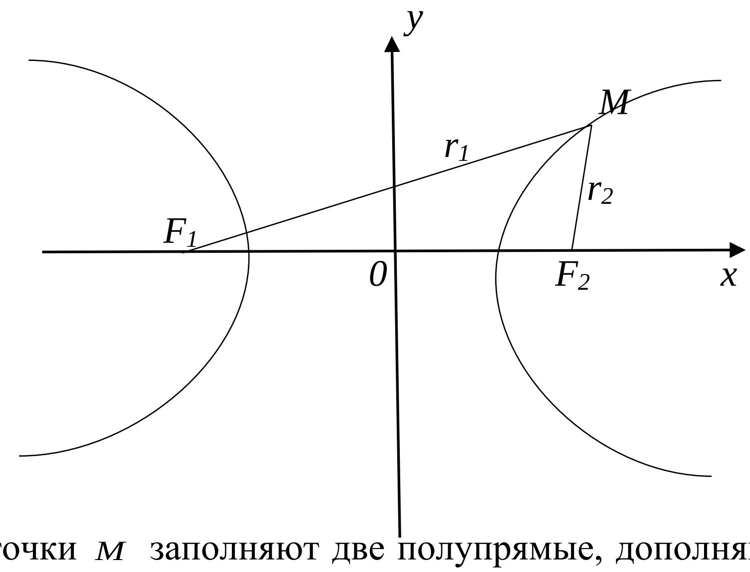
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Все точки эллипса (4) и только эти точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (5)$$

Эту систему называем поэтому «параметрической записью уравнения эллипса» или просто «параметрическим уравнением эллипса».

Гипербола. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть положительная постоянная. Эту постоянную обозначим через $2a$. Число a будем называть первой полуосью гиперболы. Точки F_1 и F_2 называются фокусами гиперболы. Расстояние между ними обозначается через $2c$ и называется фокусным расстоянием. Как и в случае эллипса, середина отрезка $\overline{F_1F_2}$ называется центром гиперболы. Прямая, на которой лежат фокусы гиперболы, называется фокальной или первой (или действительной) осью гиперболы, Прямая, проходящая через центр перпендикулярно к первой оси гиперболы, называется её второй (или мнимой) осью.



Эти точки M заполняют две полупрямые, дополняющие отрезок $\overline{F_1F_2}$ до всей прямой. Поэтому случай $c = a$ рассматривать не будем. Предполагаем, что $c > a$. Как и в случае эллипса, число $\frac{c}{a}$ называем эксцентриситетом гиперболы и обозначаем через e. Имеем $e = \frac{c}{a} > 1$.

В этой системе координат имеем $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$; фокус F_1 условно называем **левым**, фокус F_2 – **правым**.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы. Обозначим через $r_1=\rho(F_1;M)$ и $r_2=\rho(F_2;M)$ – расстояния точки M соответственно до фокусов F_1 соответственно F_2. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами** точки M. Имеем:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ \text{и}\ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (6)$$

Точки $M(x;y)$ есть точка гиперболы тогда и только тогда, когда

$$|r_1-r_2|=2a, \qquad (7)$$

или

$$r_1-r_2=\pm 2a.$$

Если принять во внимание равенства (6), то имеем (предполагая квадратные корни положительными)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (8)$$

Это уравнение и есть уравнение нашей гиперболы в выбранной системе координат.

Преобразуем уравнение (8) к виду, который называется **каноническим**. Для этого уединим первый радикал. Возведя затем обе части уравнения в квадрат, получаем

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

или (после простых преобразований)

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Обе части последнего равенства снова возведем в квадрат. Получим

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx-a^2c^2+a^2y^2$$

или

$$(c^2-a^2)x^2+a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \qquad (9)$$

Так как $a>c$, то число c^2-a^2 положительно; обозначим его через b^2, называя число $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Равенство (4) можно переписать в виде

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

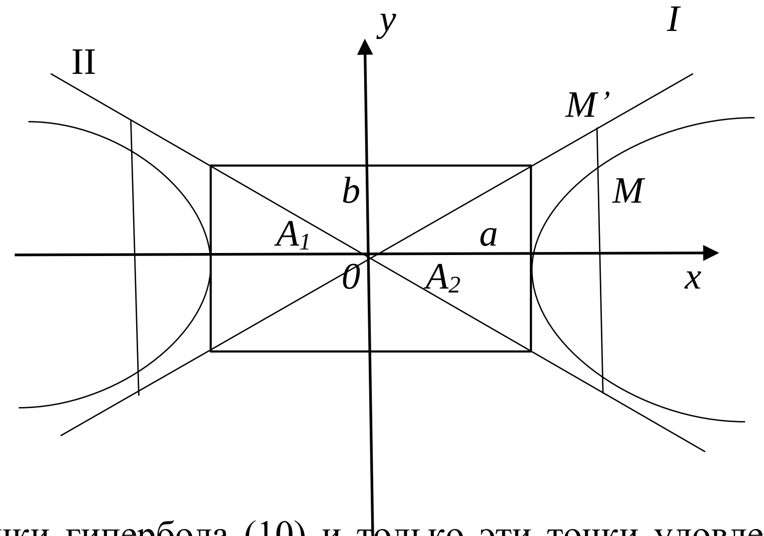
или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (10)$$

Диагонали основного прямоугольника суть прямые, имеющие своими уравнениями (все в той же системе координат, канонической для данной гиперболы)

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \qquad (11)$$

Эти прямые называются **асимптотами** гиперболы. Прямую $y = \frac{b}{a}x$ будем называть **первой**, а прямую $y = -\frac{b}{a}x$ – **второй** асимптотой.



Все точки гипербола (10) и только эти точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x = acht, \\ y = bsht, \end{cases} \quad (12)$$

2. Парабола.

Парабола. Парабола известна читателю из школьного курса математики как кривая, являющаяся графиком функции

$$y = ax^2, \quad (13)$$

Уравнение

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \quad (14)$$

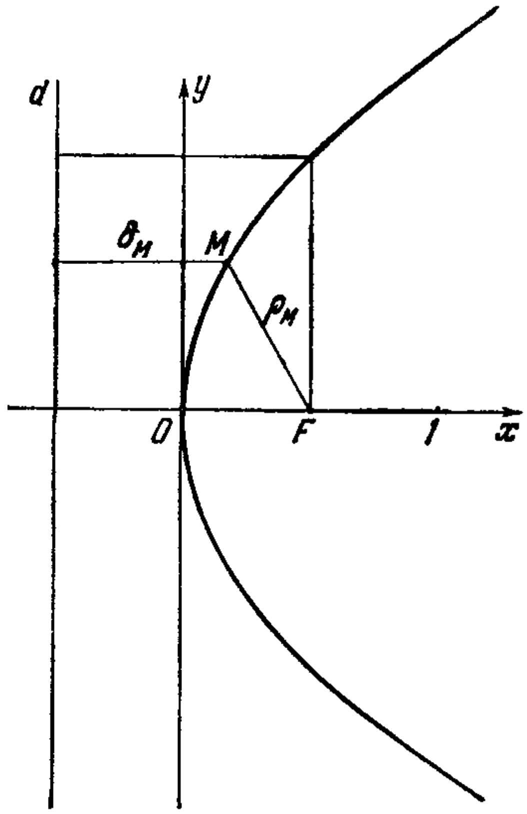
называется в аналитической геометрии **каноническим уравнениям параболы**; прямоугольная система координат, в которой данная парабола имеет уравнение (14), называется **канонической системой координат** (для этой параболы).

Сейчас мы установим геометрический смысл коэффициента p. Для этого берём точку $F(\frac{p}{2};0)$, называемую параболы (14), и прямую d, определенную уравнением $x = -\frac{p}{2}$. Эта прямая называется **директрисой** параболы (14).

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка параболы (14). Из уравнения (14) следует, что $x \geq 0$. Поэтому расстояние точки $M(x;y)$ от директрисы d есть число $\delta_M = \frac{p}{2} + x$. Расстояние точки $M(x;y)$ от фокуса $F(\frac{p}{2};0)$ есть

$$r = \rho(F,M) = \rho_M = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}.$$

Но $y^2 = 2px$, поэтому $r = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2} = \delta_M$.



Итак, все точки M параболы равноудалены от её фокуса и директрисы:

$$r = \delta_M. \qquad (15)$$

Обратно, каждая точка M, удовлетворяющая условия (15), лежит на параболе (14).

В самом деле,

$$\delta_M = |x + \frac{p}{2}|, \quad r = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2}$$

или

$$(x-\frac{p}{2})^2 + y^2 = (x-\frac{p}{2})^2,$$

и, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$y^2 = 2px.$$

Мы доказали, что каждая парабола (14) есть геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса F и от директрисы d этой параболы.

Параболой называется геометрическое место точек, равноудалённых от некоторой фиксированной точки («фокуса» параболы) и некоторой фиксированной прямой («директрисы» параболы).

Обратно, всякая кривая, имеющая такое уравнение в некоторой прямоугольную систему координат, каноническую для данной параболы, т. е. такую, в которой уравнение параболы имеет канонический вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (14)$$

Задачи и примеры для аудитории

1. Найти координаты центра O и радиус r каждой из следующих окружностей:

1) $x^2 + y^2 + x = 0;$

2) $x^2 + y^2 + 3y = 0;$

3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0;$

4) $6x^2 + 6y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$

2. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $(1;1)$, $(0;2)$ и касающейся окружности

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16.$$

3. Написать уравнение эллипса, описанного около равностороннего треугольника, две вершины которого находятся в точках $(a;0)$ и $(-a;0)$ и совпадают с вершинами эллипса, принадлежащими одной оси.

4. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1;2)$, асимптотами которой служат прямые $y = \pm\frac{1}{2}x.$

5. Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(1;0)$ и $(9;0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0;3)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

6. Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, касающегося осей Ox и Oy соответственно в точках $(5;0)$ и $(0;3)$.

7. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1;0)$, асимптотами которой являются прямые $x = 0$, $y = 1$.

8. Написать уравнение гиперболы, зная, что её асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(0;0)$, $(2;1)$, $(1;2)$.

9. Найти наибольший радиус круга, лежащего внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающегося параболы в её вершине.

10. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x + y - 1 = 0$ и которая проходить через точки $(0;0)$, $(0;1)$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Составить уравнение окружности для которой точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ являются концами её диаметра.

2. При каком необходимом и достаточном условии уравнение

$$Ax^2+By^2+2Dx+2Ey+F=0$$

определяет действительную окружность. Предполагая это условие выполненным, найти центр этой окружности и её радиус.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $(1;-2)$ и точки пересечения прямой $x-7y+10=0$ с окружностью $x^2+y^2-2x+4y-20=0.$

4. Написать уравнение эллипса, для которого прямые $x+y-1=0$ и $x-y+1=0$ суть соответсвенно большая и малая оси и длины полуосей которого $a=2,\ b=1.$

5. Написать уравнение равносторонней гиперболы, для которой ось Ox служит асимптотой, а точка $(1;1)$ – вершиной.

6. Написать уравнение гиперболы, зная её ось $2x-y+2=0,$ асимптоту $y=0$ и точку $(1,1).$

7. Написать уравнение параболы, осью которой служить прямая $2x+2y+1=0$ и которая проходит через точки $(0;0),\ (0;2).$

8. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(2;6)$, а ось параллельна оси $Oy,$ зная, что на оси Ox эта парабола вытекает хорду длины 6.

9. Найти геометрическое место центров окружностей, отсекающих на осях Ox и Oy хорды, соответственно равные $2a$ и $2b.$

10. Составить уравнение параболы $y^2=8x$ полярных координатах.

Модул III. Основы математического анализа

Параграф 10. Числовая последовательность

1. Понятие числовой последовательности.

Определение 1. Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n (при этом разным натуральным числам n могут оказаться поставленными в соответствие и одинаковые числа). Совокупность элементов a_n, $n=1,2,\ldots$ называется числовой последовательностью, или просто последовательностью; каждый элемент a_n называется элементом (или членом) этой последовательности, а число n-его номером.

Числовую последовательность с элементами a_n будем обозначать либо a_n, n-$1,2,\ldots$, либо $\{a_n\}$.

Очевидно, что числовая последовательность является частным случаем функции. Именно, последовательность является функцией, определенной на множестве натуральных чисел и принимающей значения в множестве действительных чисел, т. е. функцией вида $f:N\to R$.

Определение 2. Число a называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если в любой его окрестности содержатся почти все члены последовательности, т. е. все члены последовательности, за исключением их конечного числа.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ $a_n\leq a$ (соответственно $a_n\geq a$) для всех $n=1,2,\ldots$, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу а слева (соответственно справа) и иногда вместо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$-0).

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. прежде всего заметим, что для любых натуральных чисел n_o и $n>n_o$ имеет место равенство $y_n-a=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-a=\frac{x_1+\cdots+x_{no}-n_0a}{n}+\frac{(x_{no+1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}$.

Если теперь задано $\varepsilon>0$, то согласно определению предела существует такой номер n_0, что для всех $n\geq m_0$ выполняется неравенство

$$(x_n-a)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной,* если существует число M такое, что при всех n выполняется неравенство

$$|a_n|\leq M.$$

Леммы о бесконечно малых. В дальнейших теоремах нам придется рассматривать одновременно две варианты, сочетая их между собой знаками арифметических действий. При этом, как и выше, мы относим эти знаки к соответствующим значениям вариант. Например, говоря о сумме двух вариант x_n и y_n, пробегающих порознь последовательности значений

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$
$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots,$$

Мы имеем в виду варианту x_n+y_n, принимающую последовательность значений

$$x_1+y_1,\ x_2+y_2, \dots,\ x_n+y_n, \dots$$

При доказательстве теорем, относящихся к результатам арифметических операций над переменными, важную роль будут играть следующие две леммы о бесконечно малых.

Леммы 1. Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.

Проведем доказательство для случая двух бесконечно малых α_n и β_n.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon < 0$. согласно определению бесконечно малой, по числу ε для бесконечно малой a_n найдется такой номер n_0, что при $n > n_0$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Точно так же и для бесконечно малой β_n найдётся такой номер n_0, то при $n > n_0$ одновременно выполняются оба эти неравенства, так что

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, величина $\alpha_n + \beta_n$, действительно, является бесконечно малой.

Лемма 2. Произведение ограниченной переменной x_n на бесконечно малую α_n есть величина бесконечно малая.

Пусть, для всех значений n,

$$|x_n| \leq M.$$

Если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то по числу $\frac{\varepsilon}{M}$ для бесконечно малую a_n найдется такой номер n_0, что для $n > n_0$ будет

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тогда для тех же значений n, очевидно,

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отсюда и следует, что $x_n \cdot \alpha_n$ есть бесконечно малая.

Арифметические операции над переменными. Следующие теоремы важны в том отношении, что с их помощью во многих случаях делается ненужным восхождение всякий раз к определению понятия «предел», с разысканием по заданному ε соответствующего о n_0, и т.д. этим вычисление пределов значительно облегчается.

1) Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

То и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Из условия теоремы следует, что

$$x_n = a + \alpha_n\ ,\ y_n = b + \beta_n\ ,$$

где α_n, β_n – бесконечно малые. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (a_n \pm \beta_n).$$

Здесь $\alpha_n \pm \beta_n$ есть бесконечно малая по лемме 1; следовательно, пользуясь вторым определением предела, можно утверждать, что варианта $x_n \pm y_n$ имеет предел, равный $a \pm b$, что и требовались доказать.

Это теорема и ее доказательство переносится на случай любого конечного числа слагаемых .

2) Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

то и произведение их также имеет конечный предел, и

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Исходя из тех же равенств (1), имеем на этот раз

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b a_n + a_n \beta_n)$$

выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая.

Отсюда и следует, что варианта $x_n, y_n,$ действительно, имеет пределом ab.

Это теорема может быть распространена на случай любого конечного числа сомножителей (например, методом математической индукции).

3) Если варианты x_n и y_n имеют конечные пределы :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

причём b отлично от 0, то и отношение их также имеет конечный предел, а именно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Поскольку $b \neq 0$, согласно утверждению, начиная с некоторого места, не только $y_n \neq 0$ но даже

$$|y_n| > r > 0,$$

где r–постоянное число. Ограничимся темя значениями номера n, для которых это выполняется; тогда отношение $\frac{x_n}{y_n}$ заведомо имеет смысл

Исходя, по-прежнему, из равенств, имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+a_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(ba_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть величина бесконечно малая. Множитель же при нем, на основание сказанного вначале, будет ограниченной переменной:

$$\left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

Следовательно, по лемме 2, все произведение справа будет бесконечно малым, а оно представляет разность между вариантой $\frac{x_n}{y_n}$ и числом $\frac{a}{b}$. Итак, предел $\frac{x_n}{y_n}$ есть $\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

2. Предел числовой последовательности

Неопределенные выражения. В предыдущем *n* мы рассматривали выражения. $x_n \pm y_n,$ $x_n y_n,$ $\frac{x_n}{y_n}$ и , в предположении, что варианты x_n и y_n стремятся к конечным пределам (из которых, в случае частного, предел y_n не должен был равняться нулю), устанавливали пределы каждого из этих выражений.

Оставлены были без рассмотрения случаи, как пределы переменных x_n и y_n (один или оба) бесконечны или – если речь идет о частном – когда предел знаменателя нуль. Из этих случаев мы здесь остановимся лишь на четырех, представляющих некоторую важную и интересную особенность.

Рассмотрим сначала частное $\frac{x_n}{y_n}$ и предположим, что обе переменные x_n и y_n одновременно стремятся к нулю. Здесь мы впервые сталкиваемся с совсем особым обстоятельством хотя нам известны пределы x_n и y_n, но о пределы их отношения – не зная самих этих вариант – никакого общего утверждения мы сделать не можем. Этот предел, в зависимости от частного закона изменения обеих переменных, может иметь различные значения или даже вовсе не существовать. Следующие простые примеры поясняют это.

Пусть, скажем, $x_n = \frac{1}{n^2}$ и $y_n = \frac{1}{n}$; обе варианты стремятся к нулю. Их отношение $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ также стремится к нулю. Если же, наоборот, положить $y_n = \frac{1}{n^2}$ и $x_n = \frac{1}{n}$, то хотя они по-прежнему стремится к нулю, на этот раз их отношение $\frac{x_n}{y_n} = n$ стремится к ∞. Малые $x_n = \frac{a}{n}$ и $y_n = \frac{1}{n}$, видим, что отношение их имеет пределом а (так как тождественно равно a).

Наконец, если $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ (обе имеют пределом нуль) отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ оказывается вовсе не имеющим предела.

Таким образом, одно знание пределов вариант x_n и y_n в данном случае не позволяет еще судить о поведении их отношения: необходимо знать сами варианты, т. е. закон их изменения, и непосредственно исследовать отношение $\frac{x_n}{y_n}$. Для того, чтобы характеризовать эту особенность говорят, что когда $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, выражение $\frac{x_n}{y_n}$ представляет неопределенность вида $\frac{0}{0.}$

В случае, когда одновременно $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$, имеет место подобное же обстоятельство. Не зная самих вариант, общего утверждения о поведение их отношения сделать нельзя. Этот факт иллюстрируется примерами, вполне аналогичными приведенным в 1).

$$x_n = n \to \infty, \qquad y_n = n^2 \to \infty, \qquad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$x_n = n^2 \to \infty, \qquad y_n = n \to \infty, \qquad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty,$$

$$x_n = an \to \pm\infty (a \neq 0), \qquad y_n = n \to \infty, \qquad \frac{x_n}{y_n} = a \to a$$

$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \qquad y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = (-1)^{n+1}$

во все не имеет предела.

В связи с этим при $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$, говорят, что выражение $x_n y_n$ поставляет неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Следовательно, существует такой номер m_0, что для всех $n \le m_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x_1 + \cdots + x_{no} - n_o a}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $x_n \in R$, $y_n \in R$, $z_n \in R$, $n=1,2$ ….

Монотонные последовательности. Последовательность $\{a_n\}$ называется **возрастающей,** если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1} < a_n$. Последовательность $\{a_n\}$ называется **убивающей,** если для любого n выполнено неравенство $a_{n+1} > a_n$.

Например, последовательность $\{n^2\}$ возрастающая, так как для любого натурального n имеет место $a_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = a_n$. Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ убывающая, так как для каждого n справедливо неравенство $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, т. е. $a_{n+1} < a_n$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **неубывающей,** если $a_{n+1} \ge a_n$ для любого n, и **невозрастающей,** если $a_{n+1} \le a_n$ для любого n.

Например, последовательность с n – м членом $a_n = \frac{n+1}{2}$ неубывающая: 1; 2; 2; 3; 3;…

Все такие последовательности (возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие) называются **монотонными.**

Для монотонных и ограниченных последовательностей справедлива следующая теореме:

Теорема Вейерштрасса. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Задачи и примеры для аудитории

1. Доказать, что последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ является неограниченной.

2. Доказать, что последовательность $\{\frac{n + (-1)^n n}{n+2}\}$ является расходящейся.

3. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что $|a_n| \le |b_n|$ при любом n и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ для любого $\alpha > 0$.

Найти пределы последовательностей:

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...a^n}{1+b+b^2+...b^n}=0,$ при $|a|<1$ и $|b|<1.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+n+1}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}.$

9. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ для любого $a>0.$

10. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно: $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\in N$, удовлетворяет теореме Вейерштрасса. Найти предел последовательности.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Доказать ограниченность последовательностей:

а) $\{\dfrac{2n^2-1}{n^2+2}\}$; б) $\{\dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\}$; в) $\{\dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}\}$.

2. Исходя из определения предела, доказать:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-n^2}{2n^2+3}=-\dfrac{1}{2}$.

3. Доказать, что следующие последовательности являются неограниченными:

а) $a_n=(-1)^n n,\ n\in N$; б) $a_n=n^2-n,\ n\in N$; в) $a_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}},\ n\in N$;

г) $a_n=n+(-1)^n n,\ n\in N.$

4. Доказать, что следующие последовательности являются расходящимся:

а) $a_n=\sin\dfrac{\pi n}{2},\ n\in N$; б) $a_n=\dfrac{1}{n}+(-1)^n,\ n\in N$; в) $a_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}},\ n\in N$;

г) $a_n=\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right],\ n\in N$ (здесь [ ] – знак целой числа).

Найти пределы последовательностей:

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^5 n}{10^5+n}$; **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-2n+1}{n^3-2n}$; **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+1}{5n^2+n}$; **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n^2}{n^2}$; **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+2}$.

Параграф 11. Понятие функции

1. Понятие функции и их свойства. Обратная функция.

Определение понятия функции. Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y. Предположим, что по условиям вопроса переменной x может быть приписано произвольное значение из области X без каких-либо ограничений. Тогда переменная y называется **функцией** от переменной x в области её изменения X ставится в соответствие одно определенное y (из Y).

Независимая переменная x называется также **аргументом** функции.

В этом определении существенны два момента: во-первых, указание области X изменения аргумента x (её называют **областью определения** функции y обычно не указывается, поскольку самый закон соответствия уже определяет множество принимаемых функцией значений.)

Можно в определении понятия функции стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению x из X отвечало не одно, а несколько значений y (и даже бесконечное множества их). В подобных случаях функцию называют многозначной, в отличие от однозначной функции, определенной выше. Впрочем, в курсе анализе, стоящем на точке зрения вещественной переменной, избегают многозначных функций, и впредь говоря о функции, если не оговорено противное, мы будем разуметь однозначную функцию.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x).$$

Буквы $f, \varphi, F, \ldots$ характеризуют именно то правило, по которому получается значение y, отвечающее заданному x.

Если рассматривая функцию, скажем $y = f(x)$, мы хотим отметить её частное значение, которое отвечает выбранному частному значению x, равному x_0, то для обозначения его употребляют символ: $f(x_0)$. Например, если

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \; g(t) = \frac{10}{t}, \; h(u) = \sqrt{1-u^2}, \ldots$$

то $f(1)$ означает численное значение функции $f(x)$, при $x = 1$, т. е. попросту число $\frac{1}{2}$, аналогично, $g(5)$ означает число 2, $h(\frac{3}{5})$ – число $\frac{4}{5}$.

Понятие обратной функции. Предположим, что функция $y = f(x)$ задана в некоторой области X, и пусть Y будет множество всех значений, которые эта функция принимает, когда x изменяется в пределах области X.

Выберем какое-нибудь значение $y = y_0$ из области Y; тогда в области X необходимо найдётся такое значение $x = x_0$, при котором наша функция принимает именно значение y_0, так что

$$y_0 = f(x_0);$$

подобных значений x_0 может оказаться и несколько. Таким образом, В каждому значению y из Y ставится в соответствие одно или несколько значений x; этим определяется в области Y однозначная или многозначная функция $x = g(y)$, которая и называется обратной для функции $y = f(x)$.

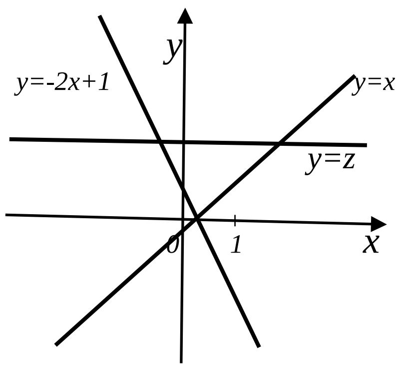
Пример. Пусть $y = a^x$ $(a > 1)$, где x изменяется в промежутке $X = R = (-\infty; +\infty)$. Значения y заполняют промежуток $Y = (0; +\infty)$, причём каждому y заполняют промежутка отвечает, как мы знаем, в X одно определённое $x = \log_a y$. В этом случае обратная функция оказывается однозначной.

2. Основные элементарные функции.

1. Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где k и b – некоторые действительные числа. Она определена на всей числовой прямой R. Если $k \neq 0$, её множеством значений является все множества R, если же $k = 0$, то множество значений состоит из одного числа b.

Функция $y = kx + b$ является монотонной: при $k > 0$ она возрастает на R, при $k < 0$ она убывает, а при $k < 0$ она убывает, а при $k = 0$ она постоянная.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, проходящая через точку $(0; b)$ с угловым коэффициентом k. При $k \neq 0$ эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $x = -\dfrac{b}{k}$, а при $k = 0$ она параллельна оси абсцисс.



2. Дробно-линейная функция задается формулой

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad (1)$$

где a, b, c, d – некоторые действительные числа. Дробно-линейная функция задается формулой (1), где $c \neq 0$, и определена для всех $x \in R$, кроме

$x \neq -\dfrac{d}{c}$. В этом случае правую часть формулы (1) можно преобразовать следующим образом:

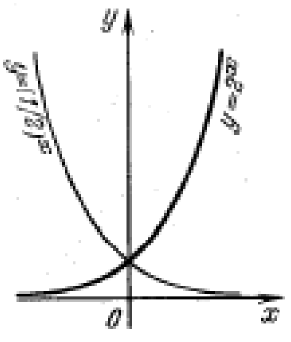
$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}}. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что функция, заданная формулой (1), где $bc - ad = 0$, во всех точках определения принимает постоянное значение $\dfrac{a}{c}$. Эта функция отличается от постоянной функции лишь тем, что она не определена в точке $-\dfrac{d}{c}$.

Предыдущее исследование делает естественным следующее определение: **дробно-линейной функцией** называется функция вида (1), где $c \neq 0$ и $bc - ad \neq 0$.

Из формулы (2) следует, что прямая $y = \dfrac{a}{c}$ является горизонтальная асимптотой графика дробно-линейной функции (1) при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$, а прямая $x = -\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

4. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Показательная функция определена на всей числовой прямой и взаимно однозначно отображает $R = (-\infty; +\infty)$ на $[0; +\infty)$.



На рисования изображены графики функций $y = 2^x$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

При $a > 1$ функция $y = a^x$ возрастает, при $0 < a < 1 -$ убывает.

Прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой, графика функции $y = a^x$ при $x \to -\infty$, если $a > 1$, соответственно, при $x \to \infty$, если $0 < a < 1$.

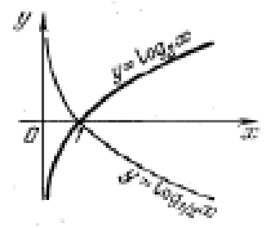
5. Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x, \qquad (3)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$. Она определена только для положительных значений x и взаимно однозначно отображает интервал $[0; +\infty)$ на интервал $R = (-\infty; +\infty)$.

Из определения логарифма числа по основанию a следует, что логарифмическая функция $\log_a x$ является обратной к показательной функции a^x.

Если $a > 1,$ то логарифмическая функция (3) возрастающая, а если $0 < a < 1,$ то убывающая. График логарифмическая функции пересекает ось абсцисс в точке $x = 1,$ а ось ординат не пересекает. Заметим, что график логарифмической функции (3) может быть получен из графика функции $y = a^x$ зеркальным отражением относительно прямой $y = x$.



На рисования изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

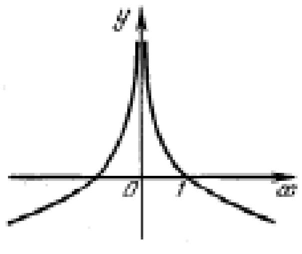
6. Степенной функцией с показателем n называется функция, задаваемая формулой

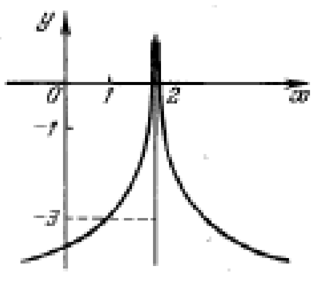
$$y = x^n, \qquad (4)$$

где n – некоторое действительное число.

Сделаем несколько замечаний относительно естественной области определения функции, задаваемой формулой (4).

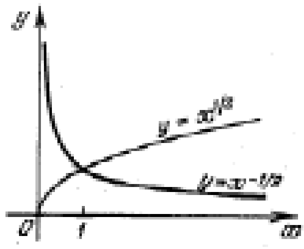
Из определения степени следует, что если n – натуральное число, то формула (4) определяет функцию на всей числовой прямой. В частности, при $n = 1$ получается линейная функция,





а при $n = 2$ – квадратичная функция. Если n – целое отрицательное число, то функция (4) определена для всех действительных значений x, кроме $x = 0$. В частности, если $n = -1,$ то функция (4) является простейшей дробно-линейной функцией.

Если n не является целым числом, то степень x^n в общем случае определена лишь для $x > 0$. Например, функция $y = x^{\frac{1}{2}}$ определена на бесконечном промежутке $[0;\infty),$ а функция $y = x^{-\frac{1}{2}}$ определена на бесконечном промежутке $[0;\infty).$ На рисования изображены графики этих функций.



Таким образом, естественная область определения функции, задаваемой формулой (4), существенно зависит от показателя n.

Однако следует заметить, что на практике часто под областью определения степенной функции понимается естественная область определения соответствующей формулы. Например, естественно считать, что функция $y = x^{\frac{1}{3}}$, являющаяся обратной к функции $y = x^3$, определена на всей числовой прямой.

7. Основными тригонометрическими функциями называются функции синус, косинус, тангенс, котангенс:

$$\sin x,\ \ \cos x,\ \ tgx = \frac{\sin x}{\cos x},\ \ ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Функция синус определена на множестве R всех действительных чисел, является нечётной и периодический с наименьшим периодом 2π.

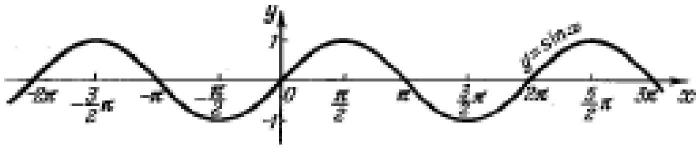
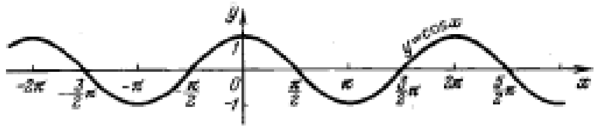
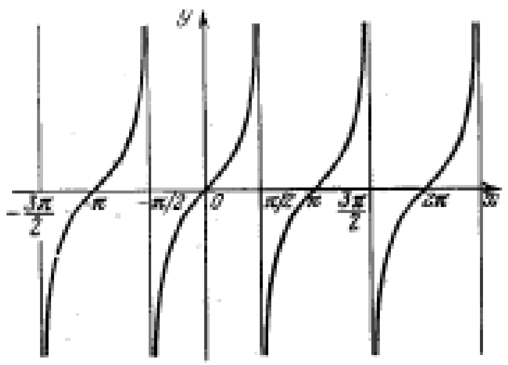


График называется **синусоидой**. Функция $\sin x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ возрастает от -1 до 1, на отрезке $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ убывает от 1 до -1, и т. д. Так как функция $\sin x$ периодическая с периодом 2π, то её график на любом отрезке $[\alpha + 2\pi n; \alpha + 2\pi(n+1)]$ длины 2π получается из её графика на отрезке $[\alpha; \alpha + 2\pi(n+1)]$ параллельным переносим $\vec{r}(2\pi n; 0)$.

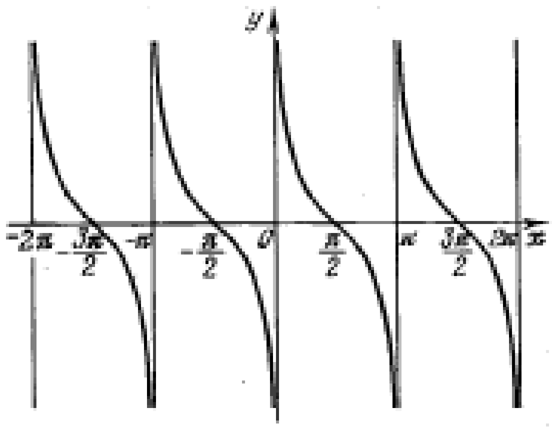
Функция косинус определена на множестве R всех действительных чисел, является чётной и периодической с наименьшим периодом 2π. На отрезке $[0;\pi]$ она убывает от 1 до -1, а на отрезке $[\pi;2\pi]$ она возрастает от -1 до 1. Так как $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ для любого $x \in R$, то графиком функции $y = \cos x$ является синусоида, которая получается из синусоиды $y = \sin x$, изображенной на верхняя рисования, параллельным переносом $\vec{r}(-\frac{\pi}{2};0)$. График функции $y = \cos x$ изображен на рисования:



Функция $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел вида $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,$ где $n \in Z,$ т. е. кроме тех точек, в которых $\cos x$ обращается в нуль. Функция tgx является нечётной и периодической с наименьшим периодом π. На интервале $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ она возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Прямые $x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = tgx.$ Так как функция tgx периодическая с периодом $\pi,$ то её график на любом интервале вида $(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n)$ получается из её графика на $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ параллельным переносом $\vec{r}(\pi n; 0)$. График функции $y = tgx$ изображен на рисования:



Функция $ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, определена на множестве всех действительных чисел, кроме чисел вида $\pi n,$ где $n \in Z$. Функция $ctgx$ является нечётной и периодической с наименьшим периодом π. На интервале $(0; \pi)$ она убывает от $-\infty$ до $+\infty$. Прямые $x = 0,\ x = \pi$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = ctgx.$ Так как функция $ctgx$ периодическая с периодом $\pi,$ то её график на любом интервале вида $(\pi n; \pi(n+1))$ получается из её графика на $(0; \pi)$ параллельным переносом $\vec{r}(\pi n; 0)$. График функции $y = ctgx$ изображен на рисования:



Задачи и примеры для аудитории

Определить области существования следующих функций:

1. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; **2.** $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$;

3. $y = \sqrt{3x - x^3}$; **4.** $y = \ln(x^2 - 9)$;

Построить график функции:

5. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; **6.** $y = x + \dfrac{1}{x}$;

7. $y = \sin^2 x$; **8.** $y = tg(\dfrac{\pi}{x})$;

9. $y = \arcsin(x-1)$; **10.** $y = 1 - e^{-x}$.

11. $y = 2 + \sqrt{1-x}$; **12.** $y = \ln(x+1)$;

13. $y = 3 + 2\cos 3x$; **14.** $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;

15. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

Определить обратную $x = \varphi(y)$ и её область существования, если:

16. $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < \infty)$.

17. $y = x^2$; $\quad a) -\infty \le x \le 0$; $\quad б) \; 0 \le x \le \infty$;

18. $y = shx, \quad -\infty \le x \le \infty$, где $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

Определить области существования следующих функций:

1. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; **2.** $y = \arccos(2\sin x)$;

3. $y = \log_2(x+2) + \log_2(x-2)$; **4.** $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$.

Определить области существования и множество значений следующих функций:

5. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; **6.** $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$;

Построить график функции:

7. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$; **8.** $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$;

9. $y = \sec x$; **10.** $y = e^{1-x}$.

11. $y = \sin x \sin 3x$; **12.** $y = tg\dfrac{\pi}{x}$;

13. $y = \arccos(\sin x)$; **14.** $y = \ln(\cos x)$;

15. $y = x^3 - 3x + 2$.

Определить обратную $x = \varphi(y)$ и её область существования, если:

16. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ $(x \neq 1)$;

17. $y = \sqrt{1-x^2}$, $а)\ -1 \le x \le 0$, $б)\ 0 \le x \le 1$;

18. $y = chx$, $-\infty \le x \le \infty$, где $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Параграф 12. Исследование функций

1. Чётность, нечётность, монотонность и периодичность функций. Сложная функция.

Чётные функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *чётной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$-x \in X$ и $f(-x) = f(x)$.

Очевидно, что функции $f(x) = 1$ и $f(x) = x^2$, определенные на всей числовой оси, являются четными функциями. Однако функция $f(x) = x^2$, $x \in [1;2]$, определенная лишь на отрезке $[1;2]$, не является четной, так как точка 1,5 принадлежит области определения функции, а точка -1,5 не принадлежит.

График чётной функции на координатой плоскости симметричен относительно оси ординат.

Действительно, пусть функция $f(x)$, $x \in X$, четная и пусть точка M с координатами x_0, y_0 принадлежит графику этой функции, т.е. $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0)$. Тогда согласно определению четной функции

$$-x_0 \in X,\ \ f(-x_0) = f(x_0) = y_0,$$

а это и означает, что точка $M'(-x_0;y_0)$, являющаяся симметричной точке $M(x_0;y_0)$ относительно оси Oy, принадлежит графику данной функции. ■

Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то эта функция $f(x)$ четная.

Если две четные функции имеют одну и ту же область определения, то сумма, разность и произведение этих функций являются четными функциями.

Нечетные функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *четной*, если для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$-x \in X \text{ и } f(-x) = -f(x).$$

Например, функции $f(x)=x^3$ и $\boldsymbol{f(x)=s}$ определенные на всей числовой оси, являются нечетными функциями.

Легко показать, что график нечетной функции на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O. Верно и обратное утверждение: если график функции $f(x)$ на координатной плоскости Oxy симметричен относительно начала координат O, то функция является нечетной функцией.

Если две нечетные функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну и ту же область определения X, то функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ являются также нечетными функциями, а функция $f(x)\cdot g(x)$ являются четной функцией.

Отметим, что области определения четных и нечетных функций являются симметричными относительно точки O на координатной прямой Ox.

Например, функции $\ln x$ не является ни четной, ни нечетной, так как она определена лишь для $x>0$. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ также не является ни четной, ни нечетной, так как точка -1 принадлежит области определения функции, а точка 1 не принадлежит. Функция $f(x)=x^2+3x$, хотя и определена на всей числовой прямой, однако не является ни четной, ни нечетной, так как, например, $f(1)=4$, а $f(-1)=-2$ т. е. $f(1)\neq f(-1)$ и $f(1)\neq -f(-1)$.

Приведенные выше примеры показывают, что существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Для любой функции $f(x)$ можно доказать следующее утверждение.

Если функция $f(x)$ определена на множестве X, которое является симметричным относительно точки O на координатной прямой Ox, то ее можно представить в виде суммы двух функций – четной и нечетной, причем такое представление единственно.

Действительно, пусть существуют четная функция $f_1(x)$ и нечетная функция $f_2(x)$ такие, что

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

для любого $x \in X$. Тогда для каждого $x \in X$, $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = = f_1(x) - f_2(x)$. Для определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$f(-x) = f_1(x) - f_2(x),$$

из которой следует, что

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{1}$$

Следовательно, искомые функции однозначно определяются по данной функции формулами (1). Из этих же формул следует, что искомое представление всегда существует. ■

Пример 1. Представить функцию

$$f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^2 + 1$$

в виде суммы четной и нечетной функцию.

Решение. Данная функция является суммой нечетной функции $f_2(x) = 3x^5$ и четной функции $f_1(x) = -4x^4 + x^2 + 1$. Очевидно, что эти же функции получаются и по формулам (1).

Заметим, что функция $f_1(x)$ содержит только те слагаемые, в которых x входит в четной степени, а функция $f_2(x)$ содержит слагаемые, в которых x входит в нечетной степени. ■

Периодические функции. Функция $f(x)$, определенная на множестве X, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, то для любого $x \in X$ выполняются условия:

$$x + T \in X, \quad x - T \in X$$

и

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции $f(x)$, $x \in X$.

Покажем, что если число $T_0 > 0$ является наименьшим периодом некоторой функции, то любой период этой функции имеет вид nT_0, $n \in N$.

Пусть T_0 - наименьшим период, а T – какой-то период функции $f(x)$, $x \in X$. Найдём число $n \in N$ такое, что $T = nT_0 + \alpha T_0$, $0 \le \alpha < 1$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$f(x) = f(x+T) = f(x + \mathrm{nT}_0 + \alpha \mathrm{T}_0) = f(x + \alpha \mathrm{T}_0).$$

А так как T_0 - наименьшим период, то отсюда следует, что $\alpha = 0$, т.е. $T = nT_0$. ■

Пример 1. Доказать, что функция $\cos^2 x$ периодическая, и найти ее наименьший период.

Решение. Так как функция $\cos x$ периодическая с периодом 2π, то и функция $\cos^2 x$ периодическая и число 2π является ее периодом. Найдем ее наименьший период.

Легко убедиться, что число π является периодом функции $\cos^2 x$. Действительно, для любого $x \in R$

$$\cos^2(x+\pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x.$$

А так как $\cos^2 0 = \cos^2 \pi = 1$ и $\cos^2 x < 1$ для любого $x \in [0;\pi]$, то число π является наименьший периодом данной функции.■

Сложная функция. Функция $z = g(y)$ определена в некоторой области $Y = \{y\}$, а функция $y = f(x)$ определена в области $X = \{x\}$, причём значения её все содержатся в области Y. Тогда переменная z, как говорят, через посредство y, и сама является функцией от x:

$$z = g(f(x)).$$

По заданному x из X сначала находят соответствующее ему (по правилу, характеризуемому знаком f) значение y из Y, а затем устанавливают соответствующее этому значению y (по правилу, характеризуемому знаком g) значение z; его и считают соответствующим выбранному x. Полученная **функция от функции** или **сложная функция** и есть результат **суперпозиции** функций $f(x)$ и $g(y)$.

Пример 2. $y = \ln\sin x, \quad x \in (0;\pi)$.

2. Непрерывность элементарных функций.

Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = x_0$ (или в точке x_0), если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (1)$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon; x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной на данном сегменте $[a;b]$, если эта функция непрерывна в каждой точке сегмент $[a;b]$.

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем сегменте определения $[a;b]$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$.

Различают:

1) точки x_0 разрыва первого рода, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ и } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

и

2) точки x_0 разрыва второго рода – все остальные. Разность

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

называется скачком функции в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)$$

то точка разрыва x_0 называется устранимой. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен символу ∞, то x_0 называется точкой бесконечного разрыва.

Если выполнено равенство

$$f(x_0-0)=f(x_0) \text{ (или } f(x_0+0)=f(x_0)\text{)},$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ непрерывна слева (справа) в точке x_0. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трёх чисел:

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0).$$

Если функций $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x=x_0$, то функции

а) $f(x)\pm g(x)$; б) $f(x)\cdot g(x)$; в) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

также непрерывны при $x=x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x: б) дробная рациональная функция

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n, $\sin x$, $\cos x$, tgx, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx,\ldots$ непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x=x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y=f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x=x_0$.

Задачи и примеры для аудитории

1. Определить, какие из нижеприведенных функций являются чётными, какие нечётными, а какие не являются ни чётными, ни нечётными:

$$f_1(x)=\sqrt{x^2-5x+6};\qquad f_2(x)=\sqrt{3x-2};$$

$$f_3(x)=x^3+3\sin x;\qquad f_4(x)=x^4-5\cos x;$$

$$f_5(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^x+1};\qquad f_6(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

2. Исследовать на периодичность следующие функции и определить наименьший период, если он существует:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x\in I.\end{cases}$ б) $f(x)=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x.$

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2;\\ A, & x=2.\end{cases}$

4. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$, если $x\neq 1$ и $f(-1)$ – произвольно.

5. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, если $x\neq 0$ и $f(0)$ – произвольно.

6. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, если $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

7. $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. **8.** $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$. **9.** $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$.

10. $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$. **11.** $f(x)=arctg\,\dfrac{1}{x}$. **12.** $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$.

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

13. $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x)$. **14.** $f(x)=x-[x]$. **15.** $f(x)=arctg\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Примеры и задачи для самостоятельны работ

1. Определить, какие из приведенных ниже функций в области, где они определены, являются чётными, какие нечётными, а какие не являются ни чётными, ни нечётными:

$$f_1(x)=1+x^2-x^4;\quad f_2(x)=x+x^3-3x^5;$$
$$f_3(x)=\sqrt{1+x};\qquad f_4(x)=\sqrt{1-x^2};$$
$$f_5(x)=3^x+3^{-x};\qquad f_6(x)=x\sin 3x.$$

2. Представить следующие функции в виде суммы чётных и нечётных функций в области, где они определены:

$$f_1(x)=\sin 5x+2^x tgx;\quad f_2(x)=x\ln|x|+\frac{x-1}{x+1};$$
$$f_3(x)=3^x+3^{-x};\qquad f_4(x)=x\sin 3x.$$

3. Существуют ли всюду определённые функции, являющиеся одновременно: а) чётными и возрастающими на R, б) нечётными и убывающими на R, в) нечётными и положительными на R?

4. Пусть задана функция $f(x)=e^x,\ x>0$. Доопределить функцию $f(x)$ в области $x\le 0$ так, чтобы вновь полученная функция на множестве R была: а) чётной функцией, б) нечётной функцией.

5. Исследовать на периодичность следующие функции и определить наименьший период, если он существует:

$$f_1(x)=x^2+1;\quad f_2(x)=2tg\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{3};$$
$$f_3(x)=\frac{\sin x}{\frac{x}{\pi}+1};\qquad f_4(x)=3\cos 4x+5\sin 4x.$$

5. Может ли сумма двух непериодических всюду определённых функций быть периодической функцией?

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

7. $f(x)=\left|\frac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x\ne 0$ и $f(0)=1$.

8. $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$, если $x\ne 0$ и $f(0)=1$.

9. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, если $x\ne 0$ и $f(0)=0$.

10. $f(x)=[x]$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

11. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. **12.** $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

13. $f(x)=\cos^2\frac{1}{x}.$

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

14. $f(x)=\frac{1}{x^2\sin^2 x}.$ **15.** $f(x)=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}.$

Параграф 13. Предел функции

1. Определение предела функции.

Напомним, что любой интервал, содержащи точку a, называется **окрестностью** точки a. Симметричный интервал $[a-\delta;a+\delta]$ при любом $\delta>0$ называется $\delta-$**окрестностью** точки a.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, т. е. никаких предположений о том, определена ли функция в точке a или нет, не делается.

Число b называется **пределом** функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Для обозначения того, что число b есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, пишут

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\quad \text{или}\quad f(x)\to b\quad \text{при}\quad x\to a.$$

Заметим, что условия $|x-a|<\delta,\quad x\neq a$ означают, что точка x принадлежит $\delta-$окрестности точки a и отлична от a; эти условия можно объединить в такой записи:

$$0<|x-a|<\delta.$$

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2.$

Δ Функция $f(x)=3x-1$ определена в любой окрестности точки $x=1$. Неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$, т. е. $|(3x-1)-2|<3|x-1|<\varepsilon$, будет выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, тогда что $|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $|f(x)-2|=3|x-1|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to 1}(3x-1)=2. \ \blacktriangle$$

2. Свойства функций, имеющих пределы. Замечательные пределы

Теорема 1. (Основная теорема о пределах)*:*

a) Прямая теорема. Если функция $y=f(x)$ при $x\to x_0$ имеет пределом число А, то в окрестности этой точки её можно представить в виде суммы постоянного числа А, равного пределу функции, и бесконечно малой величины $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$;

b) Обратная теорема. Если функцию $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 можно представить в виде суммы постоянного числа А и бесконечно малой величины $\alpha(x)$, то это постоянное число есть предел функции при $x\to x_0$ т.е. если $f(x)=A+\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Теорема 2. (Об единственности предела) Если функция имеет предел, то только один.

Теорема 3. (О пределе константы) Если функция сохраняет постоянное значение для всех x, т.е. $f(x)=const$, то предел этой функции равен этой константе $\lim\limits_{x\to x_0} C=C.$ Или говорят: предел константы равен самой константе.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 4. (О пределе суммы (разности) двух функций) Предел суммы(разности) двух функций, имеющих предел, равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B.$$

Теорема 5. (О пределе произведения двух функций) Предел произведения двух функций, имеющих предел, равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}\{C\cdot f(x)\}=C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)=C\cdot A.$$

Теорема 6. (О пределе частного двух функций) Предел отношения двух функций, имеющих предел, равен отношению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B},\quad B\neq 0.$$

Теорема 7. (О предельном переходе под знаком неравенства) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенству

$f(x) < g(x)$, то можно перейти к пределу в этом неравенстве, причем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Свойство. К пределу можно переходить под знаком любой элементарной функции в области её определения:

$$\lim_{x\to x_0} \ln[f(x)] = \ln \lim_{x\to x_0}[f(x)], \qquad \lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)},$$

$$\lim_{x\to x_0} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}.$$

Задачи и примеры для аудитории

1. Дана функция $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$. Найти $f(0), f(1), f(-1), f(2)$.

2. Найти область определения функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}$; 3) $y = \frac{1}{2x-6}$; 4) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

3. Найдите область определения функций:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{2x-4}$; 3) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$; 4) $y = \sqrt{\frac{3x-2}{2x+6}}$;

4. Найти предел функции:

1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ при $x \to 1$;

2) $\varphi(t) = t\sqrt{t^2 - 20} - \lg\left(t + \sqrt{t^2 - 20}\right)$ при $t \to 6$.

5. Найти пределы следующих функций:

1) $f(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$ при $x \to 1$;

2) $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 2}$ при $x \to 1$;

3) $y = x \sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{2 - 4n - 7n^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x \cdot arctg\, 6x)}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$;

6. При $n \to \infty$ найти пределы следующих функций

а) $S_1(x) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}$;

б) $S_2(x) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$;

в) $S_3(x)=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^3}+\ldots+\frac{n-1}{n^3}$;

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ при любом значении x.

8. Показать, что элементарные функции: 1) $y=2x^2-1$; 2) $v=\cos x$ непрерывны во всей своей области определения.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Дана функция $f(x)=x^4-x^3+2x^2+4$. Найдите $F(0), F(-1)$ *и* $F(2)$.

2. Дана функция $s(t)=t^2-6t+8$. Найдите $s(0), s(2), s(-2)$.

3. Дана функция $f(x)=x^4-x^2+1$. Покажите, что $f(1)=f(-1)$.

4. Дана функция $f(x)=x^4+x^2+5$. Покажите, что $f(2)=-f(-2)$.

5. Найдите области определений функций:

1. $y=\frac{1}{4x-2}$;
2. $y=\frac{x+2}{2x-8}$;
3. $y=\frac{x^2-4}{x+2}$;
4. $y=\frac{4x-1}{x^2-x-12}$;
5. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$;
6. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$;
7. $y=3\cdot\sqrt{5-x}-\frac{4}{x-3}$;
8. $y=\sqrt{7-x}+\frac{1}{x-1}$;
9. $y=\sqrt{x^2+8x+15}$;
10. $y=\sqrt{(2-x)(5+x)}$;
11. $y=\sqrt{\frac{x-8}{12-x}}$;
12. $y=\sqrt{\frac{4x-8}{3-6x}}$.

6. Записать одной формулой функцию, область определения которой состоит из:

а) одной точки;

б) двух точек;

в) множества всех целых чисел.

7. Могут ли существовать такие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, что $E(f_1)=E(f_2)=R$, но $E(f_1+f_2)=\{1\}$; $E(f_1\cdot f_2)=\{2\}$?

8. Исключив параметр t, явно выразить функцию y:

а) $\begin{cases}x=t+3,\\ y=t^2+6t+10\end{cases}$

б) $\begin{cases}x=3\cos^2 t,\\ y=2\sin^2 t.\end{cases}$

9. Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+5x+6\right)$;

3. $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^5-x^{5x+1}+3\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to -2}\lg\left(2-2x-x^2-x^3\right)$;

5. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3+3^t}{\sqrt{t+3}}$;

6. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(2x-y)^3-\sin y}{x^2+y^2+tg\,2y}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8}{1-2^{ctgx}}$;

8. $\lim\limits_{x\to \pi}5\sin\dfrac{3x}{x-\pi}$;

Параграф 14. Функции нескольких переменных

1. Предел функции.

Понятия функции нескольких переменных. Пусть имеем n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ совместные значения которых могут выбираться произвольно из некоторого множества M точек $n-$мерного пространства: эти переменные называются независимыми. Определение функции и все сказанное по поводу него для случая двух независимых переменных непосредственно переносится и на рассматриваемый случай, так что нет надобности на этом останавливаться.

Если точку $(x_1; x_2; ..., x_n)$ обозначить через M, то функцию $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ от этих переменных иногда называют функцией точки M и обозначают тем же знаком: $u = f(M)$.

Привлечение элементарных функций одной переменной приводит к таким, например, функциям:

$$f(x; y; z) = \frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$g(x; y; z; t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx.$$

Предел функции. Пусть функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(M)$ определена на множестве $E \subset R^n$, имеющем точку сгущения $M_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Говорят, что

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon; M_0) > 0$ такое, что

$$\left|f(M) - A\right| < \varepsilon,$$

если только $M \in E$ и $0 < \rho(M; M_0) < \delta,$ где $\rho(M; M_0) -$ расстояние между точками M и M_0.

Непрерывность. Функция $f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция $f(M)$ непрерывна в данной области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Равномерная непрерывность. Функция $f(M)$ называется равномерно непрерывной в области $G,$ если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0,$ зависящее только от $\varepsilon,$ такое, что для любых точек M' и M'' из G имеет место неравенство

$$\left| f(M'') - f(M') \right| < \varepsilon,$$

если только

$$\rho(M'; M'') < \delta.$$

Функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.

2. Частные производные и дифференциал функции. Экстремум функции нескольких переменных.

Частные производные. Результат частного дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.

Дифференциал функции. Если функции $f(x; y; z)$ от независимых переменных $x; y; z$ может быть представлено в виде

$$\Delta f(x; y; z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

где коэффициент A, B, C от не зависят от $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$ то функция $f(x; y; z)$ называется **дифференцируемой** в точке $(x; y; z),$ а линейная часть приращения $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z,$ равная

$$df(x; y; z) = f_x'(x; y; z)dx + f_y'(x; y; z)dy + f_z'(x; y; z)dz, \quad (1)$$

где $dx = \Delta x, \ dy = \Delta y, \ dz = \Delta z,$ называется **дифференциалом** этой функции.

Формула (1) сохраняет свое значение и в том случае, когда переменные $x; y; z$ являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Если $x; y; z -$ независимых переменные, и функция $f(x; y; z)$ имеет непрерывные частные производные до $n-$го порядка включительно, то для **дифференциалов высших порядков** имеет место символическая формула

$$d^n f(x; y; z) = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})^n f(x; y; z).$$

Экстремум функции нескольких переменных. Пусть функция $f(M) = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ определена в окрестности точки M_0. Если или $f(M_0) > f(M)$, или $f(M_0) < f(M)$ при $0 < \rho(M_0; M) < \delta$, то говорят, что функция $f(M)$ имеет строгий **экстремум** (соответственно **максимум** или ***минимум***) в точке M_0.

Необходимое условие экстремума. Дифференцируемая функция $f(M)$ может достигать экстремума лишь в **стационарной** точке M_0, т. е. такой, что $df(M_0) = 0$. Следовательно, точки экстремума функции $f(M)$ удовлетворяют системе уравнений $f'_{x_i}(x_1; x_2; ...; x_n) = 0 \ (i = 1, 2, ..., n)$.

Достаточное условие экстремума. Функция $f(M)$ в точке M_0 имеет:

а) **максимум,** если $df(M_0) = 0,\ d^2 f(M_0) < 0,$ при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0,$ и

б) **минимум,** если $df(M_0) = 0,\ d^2 f(M_0) > 0,$ при $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0.$

Исследование знака второго дифференциала $d^2 f(M_0)$ может быть проведено путём приведения соответствующей квадратичной формы к каноническому виду.

В частности, для случая функция $f(x; y)$ двух независимых переменных x и y в стационарной точке $(x_0; y_0)$ $(df(x_0; y_0) = 0)$

при условии, что $D = AC - B^2 \neq 0,$ где $A = f''_{xx}(x_0; y_0), B = f''_{xy}(x_0; y_0),$

$C = f''_{yy}(x_0; y_0)$ имеем:

1) **минимум,** если $D > 0,\ A > 0\ (C > 0);$
2) **максимум,** если $D > 0,\ A < 0\ (C < 0);$
3) **отсутствие экстремума,** если $D > 0.$

Задачи и примеры для аудитории

Определить и изобразить области существования следующих функцией:

1. $f(x; y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1};$ **2.** $f(x; y) = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y);$

3. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

4. Найти $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x;y))$ и $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x;y))$, если

а) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$; б) $f(x;y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=+0$;

в) $f(x;y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$; г) $f(x;y)=\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

д) $f(x;y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

5. Найти следующие двойные пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

6. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{xy}{x+y}$; б) $f(x;y)=\sin\dfrac{1}{xy}$;

в) $f(x;y)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

7. Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

а) $f(x;y)=x^4+y^4-4x^2y^2$; б) $f(x;y)=xy+\dfrac{x}{y}$; в) $f(x;y)=x\sin(x+y)$;

г) $f(x;y)=x^y$; д) $f(x;y)=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$; е) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

8. Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций ($x, y, z-$ независимые переменные):

а) $u=x^m y^n$; б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $u=xy+yz+xz$; г) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

9. Найти полные дифференциалы указанного порядка в следующих примерах:

а) $d^{\,3}u$ если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$; б) $d^{\,3}u$ если $u = \sin(x^2+y^2)$;

в) $d^{\,10}u$ если $u = \ln(x+y)$; г) $d^{\,3}u$ если $u = xyz$.

10. Исследовать на экстремум следующие функции нескольких переменных:

а) $z = x^2 + (y-1)^2$; б) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; в) $z = x^2y^3(6-x-y)$;

г) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$; д) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; е) $u = x^3y^3z^3$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Найти области определения функции двух переменных, заданной формулой:

а) $f(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$; б) $f(x;y) = \ln\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$;

в) $f(x;y) = \sqrt{y\sin x}$; г) $f(x;y) = \ln(3x+y-3) + \dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x-2y+6}}$.

2. Найти:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3-y}{x^3+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(\log_{1+x}(1+x+y))$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}(\dfrac{y}{x} tg\dfrac{x}{x+y})$.

3. Дана функция $u = \dfrac{x^y}{1+x^y}\cdot$ Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to 0} u$; б) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to\infty} u$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to -0} u$.

4. Найти:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} xy\sin\dfrac{\pi}{xy}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+6}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^4+y^4+2(1+x^2y^2)}-\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Найти частные производные первого порядка функции $f(x;y)$.

а) $f(x;y)=x^3+y^3-3xy;$ б) $f(x;y)=\dfrac{x^2-xy}{y^2};$ в) $f(x;y)=\sin x-x^2y;$

г) $f(x;y)=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x};$ д) $f(x;y)=e^x(\cos y+x\sin y).$

6. Найти $df(x;y)$ функции $f(x;y)=x^3-y^2.$

7. Найти дифференциал порядка n функции $f(x;y).$

а) $f(x;y)=e^{ax+by};$ б) $f(x;y)=\ln(x+y+z).$

8. Исследовать функцию $f(x;y)$ на экстремум:

а) $f(x;y)=x^2+xy+y^2-12x-3y;$ б) $f(x;y)=x^3+y^3-3axy;$

в) $f(x;y)=xy^2(12-x-y),\ x>0, y>0;$ г) $f(x;y)=xy+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}.$

9. Исследовать функцию $f(x;y;z)$ на экстремум:

а) $f(x;y;z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x;$ б) $f(x;y;z)=xyz(16-x-y-2z);$

в) $f(x;y;z)=xy^2z^3(49-x-2y-3z);$ г) $f(x;y;z)=\dfrac{256}{x}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+z^2.$

10. Исследовать на экстремум функцию трёх переменных $f(x;y;z)=3x^3+y^2+z^2+6xy-2z+1.$

Параграф 15. Числовые ряды

1. Числовые ряды. Понятие рядов.

$$0\quad a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (1)$$

называется **сходящимся,** если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ (сумма ряда), где $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. В противном случае ряд (1) называется **расходящимся.**

Критерий Коши. Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало число $N=N(\varepsilon)$ такое, что при $n>N$ и $p>0$ (n и $p-$натуральные числа) было выполнено неравенство

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon.$$

В частности, если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

2. Схождение и расстояние рядов

Признак сравнения 1. Пусть, кроме ряда (1), имеем ряд

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (2)$$

Если при $n \ge n_0$ выполнено неравенство

$$0 \le a_n \le b_n,$$

то 1) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); 2) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty,$ то ряды с знака положительными членами (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения 2. Если

$$a_n = O * \left(\frac{1}{n^p} \right),$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \le 1$ расходится.

Признак Даламбера. Если $a_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то а) при $_0 q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

Признак Коши. Если $a_n \ge 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

Признак Рабе. Если $a_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

то а) при $p < 1$ ряд (1) сходится и б) при $p > 1$ расходится.

Признак Гаусса. Если $a_n > 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0,$ то а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится и б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 0$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1,$ и расходится, если $\mu \le 1.$

Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ $(x \ge 1)-$ неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Теорема Римана. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ не абсолютно сходится, то какое бы ни взять наперед число B (какое или равное $\pm\infty$), можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно B.

Задачи и примеры для аудитории

1. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

2) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$

2. Исследовать сходимость рядов:

1) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

2) $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots$

3) $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

4) $1 + -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$

3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

1) $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10).$

2) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots$

3) $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \ldots$

4) $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$

Указание. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

4. Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \ldots + \frac{1000^n}{n!} + \ldots$

2) $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \ldots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \ldots$

3) $\frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots + \frac{n!}{n^n} + \ldots$

4) а) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\ldots;$

б) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+\ldots.$

5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ldots\cdot\ln(n+1)}{\ln(2+p)\cdot\ln(3+p)\cdot\ldots\cdot\ln(n+1+p)}$ $(p>0)$.

6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$.

7. Исследовать сходимость следующих рядов:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right);$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(ctg\,\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right);$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right).$

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2_n-1}{2^n}+\ldots;$

2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right);$

4) а) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots;$

б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots.$

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

Указание. Показать, что при $x\neq k\pi$ ($k-$ целое) невозможно, чтобы $\sin nx\to 0$ при $n\to\infty$.

3. Исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots;$

2) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots;$

3) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

4) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

4. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots;$

2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots+\frac{1}{n}+\ldots;$

3) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots.$

5. Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

1) $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots;$

2) $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots;$

3) $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots;$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right);$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n};$

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{\left(2n^2+n+1\right)^{n+1/2}};$

8) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

Указание. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}.$

Модул IV. Дифференциального и интегрального исчисления

Параграф 16. Производная функция

1. Понятие производной функций. Геометрический и механический смысл производных. Основные правила дифференцирования.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $[a;b]$, содержащем точку x_0. Для любой другой точки x интервала $[a;b]$ разность $x - x_0$ обозначается Δx и называется **приращением аргумента**; соответствующая разность значений функции $f(x) - f(x_0)$ обозначается $\Delta f(x_0)$ (или $\Delta y(x_0)$) и называется **приращением функции**. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ следует $x = x_0 + \Delta x$ и

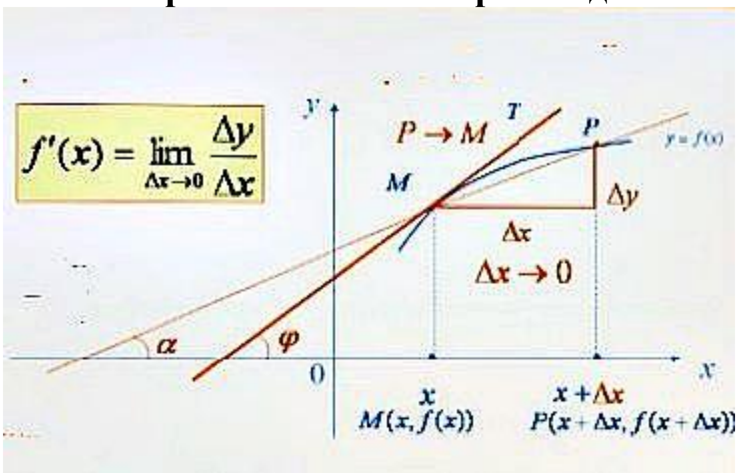
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Если $x \to x_0$, то, очевидно, $\Delta x \to 0$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной.



По определению $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ устремим точку M к точке P, это эквивалентно стремлению $\Delta x \to 0$.

Предельное положение секущей MP это касательная к кривой в точке M, ее угловой коэффициент равен $k = tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Следовательно, производная в точке х равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, т.к. $k = f'(x)$, то уравнение касательной примет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку x_0. Из условия перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали в точке x_0 примет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Механический смысл производной. Пусть прямолинейное движение материальной точки задано законом $S = S(t)$. Путь, который проследует точка за время Δ равен $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. Средняя скорость есть $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, мгновенная скорость $v(x) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$.

Пример. Пусть дан закон движения материальной точки $S(t) = t^2$, найти скорость точки через $t = 3$ сек.

$$v = S'(t) = \left(t^2\right)' = 2t,\ v(3) = 2 \cdot 3 = 6\frac{м}{сек}$$

Дифференциал функции. Пусть задана $y = f(x)$ на интервале (a,b). Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если Δy можно представить с помощью следующего выражения:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta)\Delta x$$

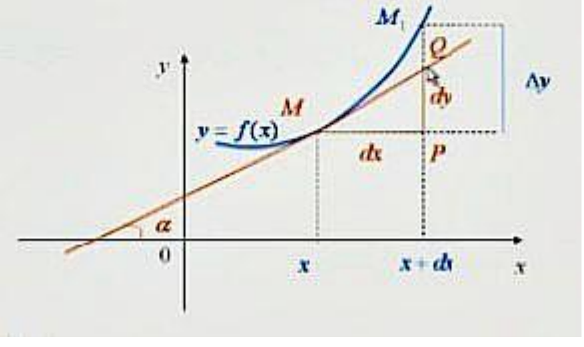
Где $A = const$ при фиксированном x и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Для дифференцируемости функции в точке x необходимо и достаточно, чтобы функция имела в этой точке конечную производную.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение вида $dy = A\Delta x$ – это главная линейная часть приращения Δy, на основании предыдущей теоремы $dy = f'(x)\Delta x$, обозначив дифференциал независимой переменной через $dx = \Delta x$, получим выражение для дифференциала:

$$dy = f'(x)dx$$

Геометрический смысл дифференциала виден из следующего рисунка



$f'(x) = tg\alpha$, $PQ = MPtg\,\alpha = f'(x)dx$, т.е. дифференциал функции равен отрезку PQ это приращение ординаты касательной, а приращение Δy это отрезок PM_1.

2. Производные простейших элементарных функций. Производные сложных функций.

Производные основных элементарных функций

Простые функции	**Сложные функции**
1. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$	1. $\left(U^{\alpha}\right)' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	4. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
5. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$	5. $\left(a^{U}\right)' = a^{U} \cdot \ln a \cdot U'$
6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$	6. $\left(e^{U}\right)' = e^{U} \cdot U'$
7. $(\sin x)' = \cos x$	7. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
8. $(\cos x)' = -\sin x$	8. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	9. $(tgU)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	10. $(ctgU)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	13. $(arctgU)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	14. $(arcctgU)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15. $(shx)' = chx$	15. $(shu)' = chu \cdot u'$
16. $(chx)' = shx$	16. $(chu)' = shu \cdot u'$
17. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$	17. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
18. $\left(U^{V}\right)' = VU^{V-1} \cdot U' + U^{V} \ln U \cdot V'$	

Задачи и примеры для аудитории

1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

а) $y(x)=2x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{7}{5}}+3x^{-2}$; в) $y(x)=x^3\left(\sqrt[4]{x}+1\right)$;

б) $y(x)=\frac{a}{\sqrt[4]{x^5}}-\frac{b}{x\sqrt[3]{x}}(a \text{ и } b-const)$; г) $y(x)=\frac{x^3-1}{x^2}$.

2. Применяя правило дифференцирования сложной функции, найти производную функции:

а) $y(x)=\left(\sqrt{x}+5\right)^4$; в) $y(x)=\sin^2 3x$;

б) $y(x)=\ln(arctg\,5x)$; г) $y(x)=\left(\sin^2 x\right)^{\cos 3x}$.

3. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2-xy+\ln y=2$, и вычислить её значение в точке $(2;1)$.

4. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

а) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$; в) $y=\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)$;

б) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$; г) $y=e^{\sqrt{x}}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[-2,1]$.

6. Найти дифференциал функции $y=\sin^5 3x$.

7. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

8. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличится от 27 до $27{,}1\ м^3$.

9. Найти приближенно $\sin 31^\circ$.

10. Удовлетворяет ли функция $f(x)=3-x^2$ условиям теоремы Ферма на отрезке $[1,4]$?

11. Справедлива ли теорема Ролля:

1) для функции $f(x)=x^2+6x-35$ на отрезке $[-5,-1]$;

2) для функции $f(x)=\sqrt[3]{(x-4)^2}$ на отрезке $[0,8]$?

12. На дуге AB кривой $y=x^3-3x$ найти точку, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;2)$ и $B(3;18)$.

13. Проверить, что функции $f(x)=x^2+4x$ и $\varphi(x)=x^3-x-2$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1,3]$, и найти соответствующее значение с.

14. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{kx}}{x^n}$, где $k>0$, $n-$натуральное число.

15. Исследовать на экстремум с помощью второй производной функции:

1) $f(x)=x^2-2x-3$;

2) $f(x)=x^3-9x^2+24x-12$.

16. Найти асимптоты кривых:

1) $y=\dfrac{1}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x}{x-1}$; 3) $y=e^{\frac{1}{x}}$; 4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

17. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R=2\sqrt{3}$ *дм*.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

Вычислить производные функций:

1. $y=\ln^3 x$;
2. $y=\sin^2 x$;
3. $y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$;
4. $y=3x^3\ln x-x^3$;
5. $y=\sqrt[3]{tg^2 x}$;
6. $y=2^{\frac{1}{x}}$;
7. $y=\log_3\sqrt{2x^2-5x+1}$;
8. $y=\sin arctgx$;
9. $y=\dfrac{2}{\cos 5x}$;
10. $y=e^{2^x}$;
11. $y=\arcsin\sin x$;
26. $y=\dfrac{1}{3}\sin^3 x\left(6\cos^2 x+7\right)$;
27. $y=\ln\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3}}{2x+1}$;
28. $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;
29. $y=\sqrt{\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$;
30. $y=\ln^2\ln x$;
31. $y=\sin^2 tgx$;
32. $y=\ln\log_4\sin x$;
33. $y=2\arccos\sqrt{\sin x}$;
34. $y=\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$;
35. $y=\cos\ln\left(2x-x^2\right)$;
36. $y=\ln\left(1+\sin^2 x\right)$;

12. $y=\frac{\sin x^2}{x}$;

13. $y=tg^2x-ctgx^2$;

14. $y=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x-1}\right)$;

15. $y=e^{-x}\ln tgx$;

16. $y=\sin 8x\cdot\ln\frac{x}{8}$;

17. $y=\cos(1-\pi x)\sqrt{1-e^{2x}}$;

18. $y=6\sqrt[3]{e^{4x}}-7^{tgx}$;

19. $y=\frac{\ln tgx}{e^{1-2x}}$;

20. $y=\sqrt{7-4x}ctg3x$;

21. $y=\cos^2\frac{x}{3}\cdot tg\frac{x}{2}$;

22. $y=2^{x^2-x}tg\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$;

23. $y=\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$;

24. $y=\ln\left(x^2-a^2\right)+\ln\frac{x-a}{x+a}$;

25. $y=\frac{\arcsin 7x}{1-7x}$;

37. $y=e^{ctg\left(-\frac{1}{x}\right)}$;

38. $y=x^2\ln^3\left(-\frac{1}{x}\right)$;

39. $y=\sqrt{\sin x}e^{\sqrt{\sin x}}$;

40. $y=\frac{1}{\cos^2 3x}$;

41. $y=7^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$;

42. $y=\frac{\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$;

43. $y=\sin x\cdot e^{\frac{1}{2}ctg^2x}$;

44. $y=e^{-x^2}\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$;

45. $y=\ln x\sin\sqrt{\ln x}$;

46. $y=\ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

47. $y=5arctg\sqrt{e^{5x}}-\ln\left(e^{5x}+1\right)$;

48. $y=\sqrt{e^x-1}-arctg\sqrt{e^{x-1}}$;

49. $y=\frac{4^{tg\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

50. $y=\frac{1}{6}arctg\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$;

Параграф 17. Применение производной к исследованию функций и построению

1. Применение производной при построение графика функции.

При исследовании функций и построении их графиков широко используются производные. С их помощью у заданной функции находятся интервалы возрастания и убывания и точки экстремумов.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждения. Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала имеет положительную производную $f'(x)$, то она возрастает на этом интервале, а если отрицательную производную, то $f(x)$ убывает.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$ $\qquad\qquad\qquad\qquad (1)$

Решение. Данная функция определена и имеет производную на всей числовой прямой. Так как

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2),$

то $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty;1]$ и $[2;\infty)$ и $f'(x) < 0$ на $[1;2]$. Следовательно, функция (1) возрастает на интервалах $(-\infty;1]$ и $[2;\infty)$ и убывает на интервале $[1;2]$.

Ответ: $(-\infty;1]$, $[2;\infty)$ – интервалы возрастает, $[1;2]$ – интервал убывания функции (1). ▲

2. Нахождение промежутки возрастание, убывание и экстремумы функций с помощью производной. Полное исследование функции.

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что эта функция определена в $\delta -$окрестности $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ точки x_0 и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из этой $\delta -$окрестности. Если же $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \neq x_0$ из $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, то точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$. Точки минимума и максимума функции назқваются её **точками экстремума**, а значения функции в этих точках – **экстремумам** и данной функции.

Для функции $f(x) = |x|$, определенной на всей числовой прямой, $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ для любого $x \neq 0$, и поэтому точка $x = 0$ является точкой минимума функции $f(x) = |x|$.

Для функции $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ точка $x = 1$ является точкой максимума, так как $f(x) < f(1) = 3$ для любого $x \neq 1$.

Функция $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, имеет бесконечное множество точек экстремума. Действительно, каждая точка x, удовлетворяющая условию $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0,1,2,\ldots$, является ее точкой максимума, а каждая точка x, удовлетворяющая условию $\frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$ – ее точкой минимума. Экстремумы этой функции во всех точках максимума равны 1, а в точках минимума равны -1.

Для нахождения точек экстремума заданной функции важную роль играет теорема Ферма:

Если точка x_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Из теоремы Ферма следует, что точки экстремума заданной функции равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими точками** этой функции.

Точки экстремума функции являются ее критическими точками. Однако не всякая критическая точка является точкой экстремума. Например, точка $x=0$ для функции $f(x)=x^3$ является критической, так как $f'(0)=0$, но, очевидно, не является точкой экстремума.

Пример 2. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=xe^{-x}$.

Решение. Данная функция определена и имеет производную для всех $x\in R$:

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x).$$

Из уравнения $f'(x)=0$ находим критические точки функции $f(x)$. У данной функции существует одна критическая точка $x=1$. Так как $f'(x)>0$ для $x<1$ и $f'(x)<0$ для $x>1$, то функция $f(x)$ возрастает на интервале $]-\infty;1[$ и убывает на интервале $]-\infty;1[$. Следовательно, точка $x=1$ является точкой максимума функции $f(x)$.

Ответ: $f(x)$ возрастает на $]-\infty;1[$, убывает на $]1;+\infty[$; $x=1-$ точка максимума. ▲

При исследовании точек экстремума функции удобно пользоваться следующими достаточными условиями для точек максимума и минимума.

Точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$, если у точки x_0 существует такая окрестность, что в ней $f(x)$ непрерывна,

$f'(x)>0$ для $x<x_0$

и

$f'(x)<0$ для $x>x_0$.

Если же $f'(x)<0$ для $x<x_0$ и $f'(x)>0$ для $x>x_0$, то x_0- точка минимума.

В разобранных выше примерах было показано, как применяется производная к нахождению интервалов возрастания и убывания и точек минимума и максимума у данной функции.

Если все эти исследования проведены, то, очевидно, можно более точно изобразить график этой функции.

Пример 3. Построить график функции

$$y=\frac{(x-1)^2}{x+1}. \qquad (2)$$

Решение. Функция (2) определена для всех $x\in R$, кроме $x=-1$. Она не является ни четной, ни нечетной и не является периодической. Ее график пересекает оси координат в точках $(0;1)$ и $(1;0)$. Так как $y(x)\to-\infty$ при $x\to 1+0$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой. Других вертикальных асимптот нет. Для нахождения наклонных асимптот заметим, что

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}.$$

Следовательно, прямая $y = x - 3$ является асимптотой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. найдем производную

$$y' = \frac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Точки $x=-3, x=1$ являются критическими для функции (2): в них производная обращается в нуль.

Легко видеть, что $y'(x) > 0$ для $x < -3$, $y'(x) < 0$ для $x \in]-3;1[$ и для $x \in]-1;1[$, $y'(x) > 0$ для $x > 1$. Следовательно, функция (2) на промежутке $]-\infty;-3]$ возрастает от $-\infty$ до -8, на промежутке $[-3;-1[$ убывает от -8 до $-\infty$, на промежутке $]-1;1]$ убывает от $+\infty$ до 0, на промежутке $[1;+\infty[$ возрастает от 0 до $+\infty$. Отсюда следует, что функция (2) при $x=-3$ имеет максимум, а при $x = 1 -$ минимум.

Задачи и примеры для аудитории

1. Исследовать на периодичность следующие функции и определить наименьший период, если он существует:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное}, \\ 0, \text{ если } x - \text{иррациональное}; \end{cases}$

б) $f(x) = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x.$

2. Найти все асимптоты графиков следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-9}$; б) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-1}$; в) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+8}.$

3. Построить графики следующих функций (не применяя производной):

а) $f_1(x) = x\left(|x-1| + \dfrac{x}{3} - 1\right)$; б) $f_2(x) = \lg(\sin x)$; в) $f_3(x) = 2^{\cos x}.$

4. Применяя производную, построить графики следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$; б) $f(x) = x + e^{-x}$; в) $f(x) = \dfrac{6\sin x}{2+\cos x}.$

5. Найти интервалы монотонности и точки экстремумов функции $f(x) = 2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1.$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$ на отрезке $[1;4]$.

7. Найти все асимптоты графиков следующих функций:

1) $f_1(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; 2) $f_2(x)=\dfrac{2^x}{3x-2}$; 3) $f_3(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-x}$;

4) $f_4(x)=\dfrac{1}{\cos x}$; 5) $f_5(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$; 6) $f_6(x)=\dfrac{\{x\}}{[x]}$, *где* $\{x\}=x-[x]$.

8. Построить графики следующих функций (не применяя производной):

1) $f_1(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}$; 2) $f_2(x)=\cos(\ln x)$;

3) $f_3(x)=\arcsin(\sin x)$; 4) $f_4(x)=\dfrac{\sin x}{\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}$;

5) $f_5(x)=r(x)$, где $r(x)-$ расстояние от x до ближайшего целого числа.

9. Применяя производную, построить графики следующих функций:

1) $f_1(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$; 2) $f_2(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; 3) $f_3(x)=(1+x)|x|^{\frac{2}{3}}$;

4) $f_4(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$; 5) $f_5(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; 6) $f_6(x)=\dfrac{(\ln x)}{\sqrt{x}}$.

10. Пусть x_1 и x_2- соответственно точка максимума и точка минимума функции $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$. При каких a $x_1^2=x_2$?

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$

на отрезке $[-3;6]$.

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+x-2\right)$ на отрезке $[3;6]$.

13. Найти экстремумы функции $f(x)=(x-3)e^{|x+1|}$ на интервале $]-2;4[$, а также наибольшее и наименьшее значения на отрезке $]-2;4[$.

14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$;

Примеры и задачи для самостоятельные работы

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $y=2+x-x^2$; 3) $y=\cos x+chx$;

2) $y=(x-1)^3$; 4) $y=(x+1)^{10}e^{-x}$;

5) $y=|x|$; 6) $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

2. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$;

б) $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

3. Построить графики этих функций. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию:

$f(x)=|x|\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right)$, если $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

4. Построить графики этих функций. Найти экстремумы следующих функций:

1) $y=x^3-6x^2+9x-4;$

2) $y=2x^2-x^4;$

3) $y=x(x-1)^2(x-2)^3;$

4) $y=x+\dfrac{1}{x};$

5) $y=\dfrac{2x}{1+x^2};$

6) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1};$

7) $y=\sqrt{2x-x^3};$

8) $y=\sqrt{x}\ln x.$

5. Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1) $f(x)=2^x$ на сегменте $[-1;5]$.

2) $f(x)=x^2-4x+6$ на сегменте $[-3;10]$.

3) $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ на сегменте $[-10;10]$.

4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ на сегменте $[0{,}01;100]$.

5) $f(x)=\sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1;1]$.

6. Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

1) $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ на интервале $(0,+\infty)$.

2) $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ на интервале $(0,+\infty)$.

3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(0,+\infty)$.

4) $f(x)=e^{-x^3}\cos x^2$ на интервале $(-\infty,+\infty)$.

7. Построить графики следующих функций:

1) $y=3x-x^3;$

2) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2};$

3) $y=(x+1)(x-2)^2;$

9) $y=\dfrac{2-x^3}{1+x^4};$

10) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6};$

11) $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2};$

4) $y=\frac{x^4}{(1+x)^2}$;

5) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $y=x+arctgx$;

7) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

8) $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$;

12) $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

13) $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$;

14) $y=\arcsin\frac{1-x}{1-2x}$;

15) $y=x^x$;

16) $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

Параграф 18. Неопределённый интеграл

1. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл.

Определение. Множество всех первообразных для функции $f(x)$, $x\in[a;b]$, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Это обозначение читается: «неопределенный интеграл от функции $f(x)$ по dx», или короче «интеграл от $f(x)$ по dx».

Из вышесказанного следует, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx=\{F(x)+C|C\in\Re\}. \qquad (1)$$

На практике формула (1) записывается более кратко:

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (2)$$

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, выражение $f(x)dx$ называется **подынтегральным выражением**, а постоянная C называется **постоянной интегрирования**.

Пример 1. Найти $\int\cos xdx$.

Решение. Чтобы найти неопределенный интеграл от $\cos x$ по dx, достаточно найти какую-то первообразную для функции $\cos x$, т. е. найти функцию $F(x)$ такую, что $F(x)=\cos x$. Из таблицы производных следует, что такой функцией будет $\sin x$.

$\int\cos xdx=\sin x+C$. ▲

1°. **Понятие неопределенного интеграла.** Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке (a,b) и $F(x)-$ее первообразная, т. е. $F'(x)=f(x)$ при $a<x<b$, то

$\int f(x)dx = F(x) + C,\ \ a < x < b,$

где $C -$ произвольная постоянная.

2°. **Основные свойства неопределенного интеграла:**

а) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;$

б) $\int d\phi(x) = \phi(x) + C;$

в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx\ \ (A = const;\ A \neq 0);$

г) $\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

2. Простейшие свойства интеграла и методы интегрировании

3°. **Таблица простейших интервалов:**

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ \ (n \neq -1);$

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C\ \ (x \neq 0);$

III. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C. \end{cases}$

IV. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C;$

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

VI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\ \ (a > 0,\ a \neq 1);\ \ \int e^x dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin xdx = -\cos x + C;$

IX. $\int \cos xdx = \sin x + C.$

X. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

XI. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

XII. $\int shxdx = chx + C;$

XIII. $\int chxdx = shx + C;$

XIV. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

XV. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$

4°. **Основные методы интегрирования.**

а) **Метод введения нового аргумента**. Если

$\int f(x)dx = F(x) + C,$

то

$\int f(u)du = F(u) + C,$

где $u=\varphi(x)-$ непрерывно дифференцируемая функция.

б) **Метод разложения**. Если

$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$

то

$\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx.$

в) **Метод подстановки**. Если $f(x)-$ непрерывна, то, полагая

$x=\varphi(t),$

где $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t),$ получим

$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

г) **Метод интегрирования по частям**. Если u и $v-$некоторые дифференцируемые функции от $x,$ то

$\int udv=uv-\int vdu.$

Задачи и примеры для аудитории

1. Применяя таблицу простейших интегралов, найти следующие интегралы:

1) $\int\left(3-x^2\right)^3dx;$

2) $\int x^2(5-x)^4dx;$

3) $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx;$

4) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx;$

5) $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)^4dx;$

6) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx;$

7) $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}}dx;$

8) $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx;$

9) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx;$

10) $\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx;$

2. Путем надлежащего преобразования подынтегрального выражения найти следующие интегралы:

Указание. $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2d\left(\sqrt{x}\right).$

1) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

2) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx;$

3) $\int\frac{x}{3-2x^2}dx;$

6) $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^3};$

7) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^3+1}}dx;$

8) $\int\frac{x}{\left(x^3-1\right)^{3/2}}dx;$

Указание. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(\left(x-\frac{1}{x}\right)\right).$

4) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx;$

6) $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx;$

5) $\int \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1+x^{n+3}}}dx;$ 7) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx;$

6) $\int \frac{x}{3-2x^2}dx;$ 8) $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x}dx;$

3. Применяя метод разложения, вычислить интегралы:

1) $\int x^3\left(2-3x^2\right)^2 dx;$ 4) $\int x(1-x)^{10}dx;$

2) $\int \frac{1+x}{1-x}dx;$ 5) $\int \frac{x^2}{1+x}dx;$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx;$ 6) $\int x\sqrt{2-5x}dx.$

Примеры и задачи для самостоятельные работы

1. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

1) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx;$ 4) $\int \frac{\sin x\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx;$

2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx;$ 5) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx;$

3) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx;$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

2. Применяя тригонометрические подстановки $x=a\sin t,\ x=a\,tgt,\ x=a\sin^2 t$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1) $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}};$ 4) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx;$

2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx;$ 5) $\int x\frac{x}{\sqrt{2a-a}}dx;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}};$

Указание. Применить подстановку $x-a=(b-a)\sin^2 t.$

6) $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx.$

4. Применяя гиперболические подстановки $x=a\,sht,\ \ x=a\,cht,$ и т. п., найти следующие интегралы (параметры положительны):

1) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx;$

2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx;$

Указание. Положить $x+a=(b-a)sh^2t.$

3) $\int \ln xdx;$ 6) $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx;$

4) $\int x^n \ln xdx \quad (n\neq -1);$ 7) $\int xe^{-x}dx;$

5) $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$ 8) $\int x^2 e^{-2x}dx.$

5. Найти интегралы:

1) $\int(\arcsin x)^2 dx;$ 5) $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}dx;$

2) $\int x(arctg\, x)^2 dx;$ 6) $\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx;$

3) $\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx;$ 7) $\int\frac{arcctg\, e^x}{e^x}dx;$

4) $\int\frac{xe^{arctg\, x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx;$ 8) $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx.$

Параграф 19. Определённый интеграл

1. Понятие определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.

Пусть задана функция $f(x)$, определенная на некотором интервале X, и $F(x)$, $x\in X$, некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда число $F(b)-F(a)$, где $a\in X$ и $b\in X$, называется **интегралом от a до b от функции** $f(x)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, согласно определению, если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \quad (1)$$

Функция f называется **подынтегральной функцией,** переменная x называется **переменной интегрирования,** отрезок с концами a и b называется **отрезком интегрирования, число b** называется **верхним пределом интегрирования,** число a – **нижним пределом интегрирования.**

Равенство (1) носит название **формулы Ньютона-Лейбница.**

Для удобства записи разность $F(b)-F(a)$ обозначают $F(x)\big|_a^b$. Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона-Лейбница записывают в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b.$$

Заметим, что интеграл от a до b от функции $f(x)$ не зависит от выбора первообразной для функции $f(x)$. Действительно, если $\Phi(x)$ –

некоторая первообразная для $f(x)$, отличная от $F(x)$, то существует постоянная C такая, что $\Phi(x)=F(x)+C$ для любого x из рассматриваемого интервала, и поэтому

$$\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a).$$

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 2^x\,dx.$

Решение. Так как $\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}\right)' = 2^x$, то функция $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$ является первообразной для функции $f(x)=2^x$, и поэтому по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_1^2 2^x\,dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2=\frac{1}{\ln 2}\left(2^2-2\right)=\frac{2}{\ln 2}. \qquad \blacktriangle$$

Сформулируем некоторые свойства интегралов. При этом будем предполагать, сто все рассматриваемые интегралы существуют.

Свойство 1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx. \qquad (2)$

Свойство 2. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$

Пример 2. Вычислить $\int_1^2 (x+3\cos x)dx.$

Решение. Воспользовавшись свойствами 1 и 2, получаем

$$\int_1^2 (x+3\cos x)dx=\int_1^2 xdx+3\int_1^2 \cos xdx=$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2+3\sin x\Big|_1^2=2-\frac{1}{2}+3\sin 2-3\sin 1=\frac{3}{2}+3\sin 2-3\sin 1. \qquad \blacktriangle$$

Свойство 3. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \qquad (4)$

Свойства 1, 2, 3 легко доказываются, если воспользоваться определением интеграла. Докажем, например, свойство 3.

Пусть функция $F(x)-$некоторая первообразная функции $f(x)$ на некотором интервале, который содержит точки a, b и c. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(b)-F(c)+F(c)-F(a)=\int_c^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Свойство 4. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ такие, что определена и непрерывна сложная функция $f(\varphi(t))$. Тогда, если функция $\varphi(t)$ имеет производную $\varphi'(t)$, справедлива формула

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^b f(x)dx, \qquad (5)$$

где $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$.

Пусть $F(x)-$ первообразная функции $f(x)$. Тогда, как легко видеть, функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Поэтому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)\int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

2. Некоторые применение определенного интеграла.

Формула (5) называется **формулой замены переменной интегрирования.** Она сводит вычисление интеграла от одной функции к вычислению интеграла от другой функции, который в каком-то смысле проще. Формула (5) применяется как слева направо, так и справа налево.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx.$ При замени x на t по формуле $x=\varphi(t)$ нужно вместо x подставить $\varphi(t),$ вместо dx подставить $\varphi'(t)dt,$ а новые пределы интегрирования α и β найти из условий $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$ Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (5')$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0.$

Решение. Перейдем к новой переменной интегрирования $t,$ положив $x=a\sin t,$ где $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$ Когда t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2},$ то x изменяется от 0 до $a.$ В этом примере $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}.$ Подставив $x=a\sin t,$ получим

$$f(a\sin t)=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t.$$

Вместо dx подставляем $(a\sin t)'dt=a\cos tdt.$

По формуле (5) получаем

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\cos tdt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt.$$

Так как $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2},$ то

$$a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}dt+\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2tdt=\frac{a^2}{2}t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{a^2}{2\cdot 2}\sin t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{4}\blacktriangle$$

При вычислении интегралов часто используют **формулу интегрирования по частям:**

$\int_a^b uv'dx=uv\big|_a^b-\int_a^b u'vdx,$ которая, как и для неопределенного интеграла, является непосредственным следствием формулы для производной произведения функций.

Пример 4. Вычислении $\int\limits_0^2 xe^x dx.$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Для этого положим $u = x$ и $v' = e^x$. Тогда $u' = 1$ и $v = e^x + C,$ где $C -$ произвольная постоянная. Для простоты будем считать, что $C = 0,$ т. е. за функцию e^x. Теперь по формуле интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1. \qquad \blacktriangle$$

Свойство 5. Если $f(x) \le g(x)$ для любого $x \in [a;b],$ то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx. \qquad (6)$$

Пусть $F(x) -$ первообразная функции $f(x),$ а $G(x) -$ первообразная функции $g(x)$ такие, что $F(a) = G(a) = 0,$ тогда

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt.$$

Напомним, что эти первообразные называются **интегралами с переменным верхним пределом.**

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = G(x) - F(x).$ Эта функция неубывающая и $\varphi(a) = 0.$ Действительно, $\varphi'(x) = G'(x) - F'(x) = g(x) = f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a;b]$ и $\varphi(a) = G(a) - F(a) = 0.$ Следовательно, $\varphi(b) = G(b) - F(b) \ge 0,$ т. е. $G(b) \ge F(b),$ что и требовалось доказать. ■

Следствие. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (7)$$

Действительно, так как $m \le f(x) \le M,$ то в силу свойства 5 справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b mdx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b Mdx,$$

из которого и получается неравенство (7), если учест, что

$$\int\limits_a^b mdx = m(b-a), \quad \int\limits_a^b Mdx = M(b-a). \quad ■$$

Пример 5. Используя формулу (7), оценить значение интеграла $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx.$

Решение. Наименьшее значение функции e^{-x^2} на отрезке $[0;1]$ равно e^{-1}, а наибольшее значение равно 1. И поэтому

$$e^{-1} \le \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx \le 1. \quad \blacktriangle$$

Задачи и примеры для аудитории

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти следующие определенные интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади:

1) $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx;$

2) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$

3) $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx;$

4) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

5) $\int_{sh\,1}^{sh\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$

6) $\int_{0}^{2} |1-x|\,dx;$

7) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} \quad (0<\alpha<\pi);$

8) $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \quad (0\le\varepsilon<1).$

2. Найти интегральную сумму S_n для функции

$f(x)=1+x$

на сегменте $[-1,4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента $\xi_i\ (i=0,1,\dots,n-1)$ в серединах этих промежутков.

3. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на n равных частей, если

а) $f(x)=x^3 \quad [-2\le x\le 3];$

б) $f(x)=\sqrt{x} \quad [0\le x\le 1];$

в) $f(x)=2^x \quad [0\le x\le 10].$

3. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x)=x^4$ на сегменте $[1,2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n\to\infty$?

4. Исходя из определения интеграла, найти $\int_0^T (v_0+gt)\,dt,$ где v_0 и g – постоянны.

5. Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом:

1) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx;$

2) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx;$

3) $\int_{0}^{1} a^x\,dx \quad (a>0);$

4) $\int_{0}^{x} \cos t\,dt;$

5) $\int_{a}^{b} \frac{dx}{x^2} \quad (0<a<b).$

Указание. Положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_i + 1}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$. $\int_a^b x^m dx$ $(0 < a < b;\ m \neq -1)$.

Указание. Выбрать точки деления так, чтобы их абсциссы x_i образовывали геометрическую прогрессию.

5) $\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(0 < a < b)$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам, если:

а) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + tg^2 x}$; в) $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(arctg\,\frac{1}{x}\right)dx$;

1) Найти $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + 2^{1/x}}\right)dx$;

2) Найти $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$;

3) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1 - 2ax + a^2)(1 - 2bx + b^2)}}$ $(|a| < 1,\ |b| < 1,\ ab > 0)$;

4) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$;

2. Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

1) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$;

2) $\int_0^{\pi} x \sin x dx$;

3) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$;

4) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx$;

5) $\int_0^1 \arccos x dx$;

6) $\int_0^{\sqrt{3}} x\, arctg\ x dx$.

3. Применяя подходящую замену переменной, найти следующие определенные интегралы:

1) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}$;

2) $\int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 1}}$;

3) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$;

4) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$;

4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{1 + x^2}{1 + x^4} dx$, полагая $x - \frac{1}{x} = t$.

5. Объяснить, почему формальная замена $x = \varphi(t)$ приводит к неверным результатам, если:

а) $\int\limits_{-1}^{1} dx$, *где* $t = x^{2/3}$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, *где* $x = \frac{1}{t}$;

в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, *где* $x = \frac{1}{t}$.

6. Можно ли в интеграле $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ положить $x = \sin t$?

7. Можно ли в интеграле $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ при замене переменной $x = \sin t$

В качестве новых пределов взять числа π и $\frac{\pi}{2}$?

8. Найти $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{x \sin x dx}{1+\cos^2 x}$.

Найти интеграл $\int\limits_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$, если

$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$.

10. Вычислить интегралы:

$\int\limits_{0}^{1} x\left(2-x^2\right)^{12} dx$;

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^2+x+1}$;

$\int\limits_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^6}$; $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

Параграф 20. Несобственные интегралы

1. Определение интегралов с бесконечными пределами.

В главе XVII было изучено понятие определенного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ для случая конечного промежутка $[a;b]$ и ограниченной функции $f(x)$. Настоящая глава посвящена обобщению этого понятия в различных направлениях. Начнём с рассмотрения интеграла, распространенного на бесконечный промежуток.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a;\infty)$, т. е. для $x \geq a$, и интегрируема в любой конечной его части $[a, A]$, так что интеграл $\int\limits_{a}^{A} f(x)dx$ имеет смысл при любом $A > a$.

Предел этого интеграла (конечный или бесконечный) при $A \to \infty$ называют интегралом функции $f(x)$ от а до $+\infty$ и обозначают символом

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx. \qquad (1)$$

В случае, если этот предел конечен, говорят, что интеграл (1) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a;\infty]$. Если же предел (1) бесконечен или во все не существует, то про интеграл говорят, что он расходится. В отличие от изученного ранее интеграла в собственном смысле или собственного интеграла, только что определённый интеграл (1) называется несобственным.

Пример 1: Функция $\frac{1}{1+x^2}$ интегрируема в любом конечном промежутке $[0;A]$ $(A>0)$, причём имеем

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^A = arctgA.$$

Так как для этого интеграла при $A\to\infty$ существует конечный предел $\frac{\pi}{2}$, то интеграл от 0 до $+\infty$ сходится и имеет значение

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично (1), определяется и интеграл функции $f(x)$ от $-\infty$ до a:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{a} f(x)dx \quad (A'<a), \qquad (3)$$

Равно как и интеграл функции $f(x)$ от $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to\infty}}\int_{A'}^{A} f(x)dx.$$

При этом сохраняется и терминология, введенная по поводу интеграла (1).

В последнем случае, взяв любое $a,$ можно положить

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx,$$

И существование предела при $A'\to-\infty,\ A\to\infty$ для интеграла слева, очевидно, равносильно существование порознь пределов (1) и (3) для интегралов справа. Таким образом, интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ можно определить и равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

в предположении существования порознь интегралов справа. Определение это не зависит на деле от выбора точки $a.$

Пример 2: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A'\to-\infty}\int\limits_{A'}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$

Свойства несобственного интеграла

1. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx,$ то сходится также интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx\ \ (A>a),$ и наоборот. При этом

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\int\limits_a^{A} f(x)dx+\int\limits_A^{\infty} f(x)dx.$$

2. В случае сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ имеем

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_A^{\infty} f(x)dx=0.$$

3. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ вытекает и сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} cf(x)dx\ \ (c=const),$ причём

$$\int\limits_a^{\infty} cf(x)dx=c\int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$$

Наконец:

4. Если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx,$ то сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty}[f(x)\pm g(x)]dx=\int\limits_a^{\infty} f(x)dx\pm\int\limits_a^{\infty} g(x)dx.$

Сходимость интеграла в случае положительной функции. Если функция $f(x)$ положительна (неотрицательна), то интеграл

$$F(A)=\int\limits_a^{A} f(x)dx \qquad (4)$$

Представляет собой монотонно возрастающую функцию от переменной $A.$ Вопрос о существовании для неё конечного предела при $A\to\infty$ решается очень просто – на основании теоремы о предела монотонной функции:

Теорема 1. Для сходимости несобственного интеграла (1) – в случае положительной функции $f(x)$ – необходимо и достаточно, чтобы интеграл (4) при возрастании A оставался ограниченным сверху:

$$\int\limits_a^{A} f(x)dx\le L \quad (L=\mathrm{co}nst).$$

На этом основана следующая «теорема сравнения» для интегралов от положительных функций:

Теорема 2. Если хотя бы при $x \geq A \ \ (A \geq a)$ имеет место неравенство $f(x) \leq g(x),$ то из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ или, что то же, из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx.$

Часто полезна следующая теорема, являющаяся следствием второй:

Теорема 3. Если существует предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \leq K \leq \infty),$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx,$ при $K < +\infty,$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx,$ а из расходимости первого интеграла, при $K > 0,$ вытекает расходимость второго.

Признак Коши. Пусть для достаточно больших x функция $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ имеет вид

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Тогда: 1) если $\lambda > 1$ и $\varphi(x) \leq c < +\infty,$ то этот интеграл сходится,

2) если же $\lambda \leq 1$ и $\varphi(x) \geq c > 0,$ то этот интеграл расходится.

Если при $x \to \infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\lambda > 0$ (по сравнению с $\frac{1}{x}$), то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $\lambda > 1$ или $\lambda \leq 1.$

Здесь следует сослаться на теорему 3; роль функции $g(x)$ играет $\frac{1}{x^\lambda}.$

Пример 3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

Под интегральные выражения при $x \to \infty$ представляют собою бесконечно малые, соответственно, порядка $\frac{1}{2}$ и 2. Следовательно, первый интеграл расходится, а второй – сходится.

2. Сходимость интеграла в общем случае. Признаки Абеля и Дирихле. Определение интегралов с бесконечными пределами.

Сходимость интеграла в общем случае. Вопрос о существовании несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx,$ согласно определению (1), приводится к вопросу о существовании конечного предела при $A \to \infty$ для функции от A:

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx. \qquad (4)$$

Применяя к этой функции признак Больцано-Коши можно условие существования несобственного интеграла представить в следующей форме:

Признак Больцано-Коши. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечало такое число $A_0 > a,$ чтобы при $A > A_0$ и $A' > A_0$ выполнялось неравенство

$$|F(A') - F(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Этот критерий позволяет с легкостью установить такое предложение:

Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx,$ то и подавно сходится $\int_a^\infty f(x)dx.$

В самом деле, применяя изложенный критерий к интегралу $\int_a^\infty |f(x)|dx,$ который предполагаем сходящимся, видим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $A_0 > a,$ что

$$\int_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

лишь только $A' > A > A_0$. Но, очевидно, $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \le \int_A^{A'} |f(x)|dx$ и, следовательно, для тех же A, A' тем более выполняется неравенство

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, в силу нашего критерия, вытекает сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)dx.$

Отметим, что из сходимости последнего интеграла, вообще говоря, не следует сходимость интеграла $\int_a^\infty |f(x)|dx.$ Это обстоятельство даёт основание особого отличать следующий случай. Если наряду с интегралом

$\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ называют *абсолютно* **сходящимся,** а функцию $f(x)$ – **абсолютно интегрируемой** в промежутке $[a; +\infty)$. Пример интеграла, сходящегося неабсолютно, будет дан в следующем признак.

По отношению к знакопеременной функции $f(x)$ признаки непосредственно неприложимы. Но можно попытаться с их помощью установить сходимость интеграла от положительной функции $|f(x)|$: если эта функция оказывается интегрируема и притом абсолютно.

Отсюда вытекает и следующее предложение, которое часто бывает полезно:

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a;+\infty]$, а функция $g(x)$ ограничена, то и произведение их $f(x)\cdot g(x)$ будет функцией, абсолютно интегрируемой в промежутке $[a;+\infty]$.

Для доказательства достаточно сослаться на неравенство

$|f(x)\cdot g(x)| \le L\cdot|f(x)|$.

Пример 4. Дан интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+k^2}dx$. Здесь функция $f(x)=\frac{1}{x^2+k^2}$ оказывается (абсолютно) интегрируемой, в то время как $g(x)=\cos ax$, очевидно, ограничена. Отсюда – абсолютная сходимость предложенного интеграла.

Признаки Абеля и Дирихле. Признак Абеля позволяют устанавливать сходимость несобственных интегралов в ряде случаев, когда абсолютная сходимость отсутствует.

Признак Абеля. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a;\infty)$, причём

1) функция $f(x)$ интегрируема в этом промежутке, так что интеграл (1) сходится (хотя бы и неабсолютно),

2) функция $g(x)$ монотонна и ограничена:

$|g(x)| \le L \quad (L=const,\ a \le x < \infty)$.

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx \qquad (5)$$

сходится.

Признак Дирихле. Пусть

1) функция $f(x)$ интегрируема в любом конечном промежутке $[a;A]$ $(A>a)$, и интеграл (4) оказывается ограниченным:

$$\left|\int\limits_a^A f(x)dx\right| \le K \quad (K=const,\ a\le A<\infty).$$

2) функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x \to \infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0.$

Тогда интеграл (5) сходится.

Пример 5. Легко видеть, что при $\lambda > 0$ сходятся интегралы

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx \text{ и } \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}dx \quad (a > 0).$$

Пользуясь признаком Дирихле, мы полагаем $f(x) = \sin x$ или $\cos x$, а $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$. Условия 1) и 2) выполнены, так как

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right| = |\cos a - \cos A| \le 2 \text{ и, аналогично, } \left|\int_a^A \cos x dx\right| \le 2,$$

и функция $\dfrac{1}{x^\lambda}$, монотонна убывая, стремится к 0 при $x \to \infty$.

В частности, откуда при $\lambda = 1$ вытекает сходимость интеграла

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

(мы могли взять здесь $a = 0$, потому что под интегральная функция при $x \to 0$ имеет конечный предел). Можно показать, что этот интеграл сходится неабсолютно, т. е. что интеграл

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

расходится. В самом деле, если бы этот интеграл сходился, то по теореме 2 сходился бы и интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx \qquad (a > 0),$$

ибо $\sin^2 x \le |\sin x|$. Иными словами, сходился бы интеграл

$$\frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}dx;$$

Прибавив к нему заведомо сходящийся интеграл $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$, мы пришли бы к заключению, что сходится интеграл $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x}$, чего на деле нет.

Задачи и примеры для аудитории

Вычислите несобственного интеграла:

1. а) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$; б) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$; в) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; г) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$.

2. а) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$; б) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

г) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; д) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}$; е) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$.

3. а) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int\limits_1^\infty \frac{arctgx}{x^2+1}dx$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

4. а) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

5. а) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; б) $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Исследовать расходимость следующих интегралов:

6. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x+1}$;

7. а) $\int\limits_0^\infty \sin x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{x+1}{x^2+1}dx$; в) $\int\limits_3^\infty \frac{2x+5}{x^2+3x-10}dx$;

8. а) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+x)}{x}dx$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-1}dx$; в) $\int\limits_1^\infty x\cdot\cos x dx$; г) $\int\limits_1^\infty \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

Определить области сходимости интегралов:

9. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}dx$. **10.** $\int\limits_\pi^\infty \frac{x\cos x}{x^p+x^q}dx$. **11.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^q}{x^p}dx$.

12. Исследовать сходимость следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; б) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$;

г) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x dx}{x^2}$; д) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$; е) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$.

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов:

13. $\int\limits_0^\infty \frac{cosx}{x+a}dx$. **14.** $\int\limits_1^\infty \frac{xdx}{1+x^n\sin^2 x}$ $(n>0)$. **15.** $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Исследовать условная сходимость следующих интегралов:

16. $\int\limits_2^\infty \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\ln x}dx$. **17.** $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x+1}\sin x}{\ln x}dx$. **18.** $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

19. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x+\frac{1}{x})dx$. **20.** $\int\limits_1^\infty arctg\,\frac{cosx}{x^{\frac{2}{3}}}dx$.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

Исследовать расходимость следующих интегралов:

1. $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx.$ **2.** $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx.$ **3.** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

4. $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx.$ **5.** $\int_e^\infty \frac{dx}{x^2 \ln x}.$ **6.** $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x}.$

7. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$ **8.** $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}.$ **9.** $\int_e^\infty \frac{arctgx}{x\sqrt{x}} dx.$

Исследовать условная сходимость следующих интегралов:

10. $\int_0^\infty \sin x^2 dx.$ **11.** $\int_1^\infty \frac{x^2 \sin x}{x^3+1} dx.$ **12.** $\int_0^\infty \frac{\sin \ln x}{\sqrt{x}} dx.$

13. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\ln x} dx.$ **14.** $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100} dx.$

Исследовать абсолютная сходимость следующих интегралов:

15. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0).$ **16.** $\int_0^\infty \frac{\sin(\sin \frac{1}{x})}{x^\alpha} dx.$ **17.** $\int_0^\infty \frac{\sin(\ln x)}{x^\alpha} \sin x dx.$

18. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{(2x - \cos(\ln x))^\alpha} dx.$ **19.** $\int_0^\infty x^\alpha \sin x^2 dx.$ **20.** $\int_2^\infty \frac{\sin x}{(arctg \frac{1}{x} - arctg \frac{1}{x^2})} dx.$

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

21. $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx \quad (0 < \alpha_0 \le \alpha < \infty).$ **22.** $\int_1^\infty x^\alpha e^{-x} dx \quad (a \le \alpha \le b).$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad (-\infty < \alpha < \infty).$ **24.** $\int_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0 \le \alpha < \infty).$

25. $\int_0^\infty \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \le \alpha < \infty).$

Параграф 21. Дифференциальны уравнения

1. Понятие о дифференциальных уравнениях. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение — уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение её производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, ее производные и независимые переменные; однако не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением. Например, $f'(x) = f(f(x))$ не является дифференциальным уравнением. Стоит также отметить, что дифференциальное уравнение может вообще не содержать неизвестную функцию, некоторые её производные и свободные переменные, но обязано содержать хотя бы одну из производных.

Порядок, или **степень дифференциального уравнения** — наибольший порядок производных, входящих в него.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения порядка n называется функция $y(x)$, имеющая на некотором интервале (a,b) производные $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Процесс решения дифференциального уравнения называется **интегрированием**. Вопрос об интегрировании дифференциального уравнения считается решенным, если нахождение неизвестной функции удается привести к квадратуре, независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде или нет.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на **обыкновенные** (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и **уравнения с частными производными** (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных. Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — это уравнения вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

где $y = y(x)-$ неизвестная функция (возможно, вектор-функция; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от независимой переменной x, штрих означает дифференцирование по x. Число n называется **порядком** дифференциального уравнения.

Линейное дифференциальное уравнение. В математике линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$Ly = f$$

где дифференциальный оператор L линеен, $y-$ неизвестная функция $y = y(t)$, а правая часть $f = f(t)-$ функция от той же переменной, что и y.

Линейный оператор L можно рассматривать в форме

$$L_n(y) \equiv \frac{d^ny}{dt^n} + A_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + A_n(t)y$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами имеет общий вид

$$y'(x)+f(x)y(x)=g(x)$$

Уравнения в такой форме могут быть решены путём умножения на интегрирующий множитель

$$e^{\int f(x)dx}$$

по лучим

$$y'(x)e^{\int f(x)dx}+f(x)y(x)e^{\int f(x)dx}=g(x)e^{\int f(x)dx},$$

используем правило дифференцирования произведения

$$y(x)e^{\int f(x)dx}=\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx+C,$$

$$y(x)=\frac{\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx+C}{e^{\int f(x)dx}}.$$

Таким образом, решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y'(x)+f(x)y(x)=g(x),$$

(в частности, с постоянными коэффициентами) имеет вид

$$y(x)=e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx+C\right)$$

где C является константой интегрирования.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

Такое мнение и такой настрой в корне неверен, потому что на самом деле дифференциальные уравнения – это просто и даже увлекательно. Что нужно знать и уметь, для того чтобы научиться решать дифференциальные уравнения? Для успешного изучения диффуров вы должны хорошо уметь интегрировать и дифференцировать. Чем качественнее изучены темы **Производная функции одной переменной** и **Неопределенный интеграл,** тем будет легче разобраться в дифференциальных уравнениях. Скажу больше, если у вас более или менее приличные навыки интегрирования, то тема практически освоена! Чем больше интегралов различных типов вы умеете решать – тем лучше. Почему? Придётся много интегрировать. И дифференцировать. Также е настоятельно рекомендую научиться находить **производную от функции, заданной неявно**.

В 95% случаев в контрольных работах встречаются 3 типа дифференциальных уравнений первого порядка: **уравнения с разделяющимися переменными**, которые мы рассмотрим на этом уроке; **однородные уравнения** и **линейные неоднородные уравнения**. Начинающим изучать дифф.УР советую ознакомиться с уроками именно в такой последовательности, причём после изучения первых двух статей не помешает закрепить свои навыки на дополнительном практикуме – **уравнения, сводящихся к однородным**.

Есть еще более редкие типы дифференциальных уравнений: **уравнения в полных дифференциалах**, **уравнения Бернулли** и некоторые другие. Наиболее важными из двух последних видов являются уравнения в полных дифференциалах, поскольку помимо данного ДУ я рассматриваю новый материал – **частное интегрирование**.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

В первую очередь нужно переписать **производную** немного в другом виде.

Вспоминаем громоздкое обозначение $y' = \frac{dy}{dx}$, которое многим из вас наверняка казалось нелепым и ненужным. В дифф.УРах рулит именно оно!

Итак: $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$.

На втором шаге смотрим, нельзя ли **разделить переменные?** Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части** организовать **только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это полноправные множители и активные участники боевых действий. В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

$$\ln|y| = \ln|x| + C.$$

Как мы помним, к любой **первообразной** приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз (т.к. константа + константа всё равно равна другой константе). В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

То есть, вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Используем свойство логарифмов $\ln a + \ln b + \ln(ab)$. В данном случае: $\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и модули можно убрать:

$y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$..

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и дифференцируем его:

$y' = (Cx)' = C$

После чего подставляем $y = Cx$ и производную $y' = C$ в исходное уравнение $xC = Cx$:

$Cx = Cx -$ получено верное равенство, значит, общее решение $y = Cx$ удовлетворяет уравнению $xy' = y$, что и требовалось проверить.

Задачи и примеры для аудитории

1. В задачах 1-14 с помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений.

1) $y' = y - x^2$;
2) $2(y + y') = x + 3$;
3) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1$;
4) $(y^2 + 1)y' = y - x$;
5) $yy' + x = 0$;
6) $xy' = 2y$;
7) $xy' + y = 0$;
8) $y' + y = (x - y')^3$.

2. Написать уравнение геометрического места точек (x, y), являющихся точками максимума или минимума решений уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

3. В задачах составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.

1) $y = e^{Cx}$;
2) $y = Cx^3$;
3) $x^2 + Cy^2 = 2y$;
4) $y = (x - C)^3$;
5) $y = \sin(x + C)$;
6) $y^2 + Cx = x^3$;

4. Решить уравнения.

1) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;
2) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$;
3) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;
4) $y^2 + x^2 y' = xyy'$;
5) $2x^3 dx = y(2x^2 - y^2)dy$;
6) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$;
7) $xy' - y = x\,tg\,\dfrac{y}{x}$;
8) $xy' = y - xe^{y/x}$.

5. Решить уравнения.

1) $xy' - 2y = 2x^4$.

2) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;

3) $y' + ytg\,x = \sec x$;

4) $x^2 y' + xy + 1 = 0$;

5) $2x(2x^2 + y)dx = dy$;

6) $(x + y^2)dy = ydx$;

7) $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$;

8) $y' + 2y = y^2 e^x$.

6. С помощью замены переменных или дифференцирования привести уравнения к линейным и решить их.

1) $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$;

2) $(x+1)(yy' - 1) = y^2$;

3) $x(e^y - y') = 2$;

4) $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$;

5) $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$;

6) $\int\limits_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$.

Примеры и задачи для самостоятельные работы

1. Решить уравнения.

1) $xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$;

2) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$;

3) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$;

4) $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$;

5) $2x(2x^2 + y)dx = dy$;

6) $(x + y^2)dy = ydx$;

7) $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

8) $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + tg\,\dfrac{y-2x}{x+1}$;

9) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$;

10) $2y + (x^2 y + 1)xy' = 0$.

2. Решить уравнения.

1) $(x+1)(y' + y^2) = -y$;

2) $y' = y^4 \cos x + y\,tg\,x$;

3) $xy^2 y' = x^2 + y^3$;

4) $xydy = (y^2 + x)dx$;

5) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;

6) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$;

7) $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$;

8) $y' x^3 \sin y = xy' - 2y$.

3. В задачах, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Рикатти к уравнениям Бернулли и решить их.

1) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$;

2) $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$;

3) $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$;

4) $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$;

5) $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

4. В задачах искомое решение выражается через интеграл с бесконечным пределом:

1) Показать, что уравнение $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, где $f(t) \le M$ при $-\infty < t < +\infty$, имеет одно решение, ограниченное при $-\infty < t < +\infty$. Найти это решение. Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

2) Показать, что только одно решение уравнения $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найти этот предел. Выразить это решение через интеграл.

3) Найти периодическое решение уравнения $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

4) Пусть в уравнении $\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$ $a(t) \ge c > 0$, $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t \to +\infty$.

5. Начертить приближенно интегральные кривые следующих уравнений (не решая уравнений):

а) $y' = \dfrac{y(2y-x)}{x^2}$;

б) $y' = \dfrac{2y^3 - x^2y}{2x^2y - x^3}$;

в) $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy}$;

г) $xy' = y + \sqrt{y^2 + \dfrac{y^3}{x}}$.

Указание. Тангенс угла между лучом $y = kx$ и пересекающей его интегральной кривой уравнения $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ равен $\dfrac{f(k) - k}{1 + kf(k)}$ (почему?). Для приближенного построения интегральных кривых надо исследовать знак этой дроби в зависимости от k.

Модул V. Комбинаторика. Теория вероятности и математическая статистика. Математические модели

Параграф 22. Комбинаторика. Случайные события и их вероятности

1. Размещения, перестановки, сочетания. Формула Ньютона.

Размещения. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется **размещением** из n **элементов по** k **элементов**.

Из определения вытекает, что $n \geq k \geq 0$ и что размещения из n элементов по k элементов – это все $k-$элементные подмножества, отличающиеся составим элементов или порядком их следования. Для множества, состоящего из 4-х элементов a, b, c, d все размещения по 3 элемента были выписаны в конце предыдущего пункта: их оказалось 24, они отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из n элементов по k элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «A из n по k»).

A – первая буква французского слова arrangement, что означает размещение, приведение в порядок. Мы уже видели, что число размещений из 4 элементов по 3 элемента равно 24, т. е. $A_4^3 = 24.$ Теперь должно быть ясно, что в примере 1 требовалось найти число размещений из 30 элементов по 2 элемента, и из **решения** этого примера следует, что $A_{30}^2 = 870.$ Далее, очевидно, что $A_n^1 = 1,$ так как существует только одно подмножество $n-$ элементного множества, не содержащее элементов (пустое множество).

В общем случае на вопрос о числе размещений из $n-$элементов по k элементов даёт ответ следующая формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1), \quad k > 0, \qquad (1)$$

т. е. число размещений из $n-$элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно.

Δ Число размещений из $n-$элементов по k элементов равно числу всех $k-$элементных упорядоченных подмножеств множества, содержащего n элементов. Первый элемент подмножества можно, очевидно, выбрать n способами, второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способом, так как в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым. Каждый из способов выбора первого элемента можно объединятся с каждым из способов выбора второго, и следовательно, существует $n(n-1)$ способов выбора первых двух элементов при построении $k-$ элементного упорядоченного подмножества.

После выбора первых двух элементов остаются $n-2$ возможности для выбора первых двух элементов, т. е. выбор первых трёх элементов может быть осуществлен $n(n-1)(n-2)$ способами. Последний k – й элемент k – элементного подмножества может быть выбран $n-(k-1)$ элементов. Δ

Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Будем для краткости произведение $n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1,$ т. е. произведение всех натуральных чисел от n до единицы, обозначать символом $n!$ (читается «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать:

$$1!=1,$$

$$2!=1\cdot 2=2,$$

$$3!=1\cdot 2\cdot 3=6,$$

$$4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,$$

$$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$ Тогда получим

$$A_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

или

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Формула (1) была получена в предположении, что $k>0,$ формулой (2) можно пользоваться и при $k=0,$ так как она и в этом частном случае даёт правильный результат, а именно

$$A_n^0=\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

При выводе формулы (1) предполагалось также, что $n\neq 0,$ т. е. что данное множество имеет хотя бы один элемент. Если $n=0,$ то это означает, что рассматривается пустое множество, (само-себя), то $A_0^0=1.$ Если условится, что $0!=1,$ то формула (2) будет давать верный результат и в случае $n=0.$ В самом деле

$$A_0^0=\frac{0!}{0!}=1.$$

Пример 1. Вычислить

$$\frac{A_{20}^6+A_{20}^5}{A_{20}^4}.$$

Δ Используя формулу (2), получаем

$$\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4} = \frac{\frac{20!}{14!} + \frac{20!}{15!}}{\frac{20!}{16!}} = \frac{16!}{14!} + \frac{16!}{15!} = 16 \cdot 15 + 16 = 16 \cdot 16 = 256. \quad \Delta$$

Перестановки. Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов.

Перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются из n элементов обозначают через P_n. P – первая буква французского слова permutation – перестановка. Теперь ясно, что в примере 2 требовалось найти число всех перестановок из 6 элементов (число всех возможных перестановок дежурных класса). Это число оказалось равным 720. Следовательно, $P_6 = 720$.

В общем случае число перестановок из n элементов $P_n = A_n^n$, и следовательно, его можно найти по формуле (1) или по формуле (2), положив в каждой из них $k = n$.

Действительно, формула (2) даёт

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,$$

из формулы (1) находим

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1) = n!.$$

Итак, *число перестановок из n элементов равно* $n!$

Таким образом в множестве, содержащем n элементов, установить определённый порядок следования элементов или, как говорят, *упорядочить* такое множество можно $n!$ способами.Например, список учеников класса, в котором 20 человек и нет однофамильцев, можно составить

$20! = 2.432.902.008.176.640.000$ способами.

Пример 2. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

Δ Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Δ

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, k элементов, называется сочетанием из n элементов по k элементов.

Таким образом, сочетания из $n-$элементного множества, причём различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг на от друга только порядком следования элементов, не считаются различными. Например, для четырехэлементного множества a, b, c, d сочетаниями по 3 элемента являются следующие подмножества:

$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k»). Мы только что видели, что $C_4^3 = 4.$ В примере 3 было найдено число сочетаний из 5 элементов по 2 элемента, причём оказалось, что $C_5^2 = 10.$

В общем случае число сочетаний из n элементов по k элементов определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Δ Сначала образуем все возможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Их число равно C_n^k. Затем из каждого полученного подмножества перестановкой его элементов получим все упорядоченные подмножества, которых будет, очевидно, в $k!$ раз больше, так как каждое $k-$ элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Итак, $A_n^k = k!C_n^k$, откуда и следует формула (3). Δ

Формулу (3) можно записать в другом, более удобном для вычислений виде. Сократив числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!,$ получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}, \qquad (4)$$

т. е. число сочетаний из k элементов равно произведению всех натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, делённому на $k!$.

Пример 3. В чемпионате страны по футболу (высшая лига) участвуют 18 команд, причем каждые две команды встречаются между собой 2 раза. Сколько, матчей играется в течение сезона?

Δ В первом круге состоится столько матчей, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, содержащего 18 элементов, т. е. их число равно C_{18}^2. По формуле (4) получаем

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

Во втором круге играется столько же матчей, поэтому в течение сезона состоится 306 встреч. Δ

Числа C_n^k обладают многими интересными и важными свойствами. Остановимся на двух свойствах, которые часто используются.

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Применяя формулу (3), получаем

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k > \frac{n}{2}$, например

$$C_{15}^{12} = C_{15}^{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

2) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \qquad (k < n). \qquad (5)$

Опять используем формулу (3):

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Формула Ньютона. Хорошо известные формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

можно записать так:

$$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3.$$

Возникает естественная гипотеза: не будут ли справедливы аналогичные формулы для четвёртой, пятой и вообще любой натуральной степени двучлена (бинома)?

Выясним сначала, будет ли справедлива аналогичная формула для четвёртой степени. Для этого обе части формулы для $(a+b)^3$ умножим на $a+b$. Тогда получим

$$(a+b)^4 = (C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3)(a+b) = C_3^0a^4 + C_3^1a^3b + C_3^2a^2b^2 +$$
$$+C_3^3ab^3 + C_3^0a^3b + C_3^1a^2b^2 + C_3^2ab^3 + C_3^3b^4 = C_3^0a^4 + (C_3^1 + C_3^0)a^3b + (C_3^2 + C_3^1)a^2b^2 +$$
$$+(C_3^3 + C_3^2)ab^3 + C_3^3b^4.$$

Учитывая, что

$$C_3^0 = C_4^0,\ C_3^1 + C_3^0 = C_4^1,\ C_3^2 + C_3^1 = C_4^2,\ C_3^2 + C_3^2 = C_4^3,\ C_3^3 = C_4^4,$$

убеждаемся в справедливости формулы

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

Таким образом, нам удалось, используя формулу для третьей степени бинома, получить аналогичную формулу для четвёртой степени. Проведенное рассуждение, во-первых, подтверждает гипотезу и, во-вторых, наталкивает на мысль воспользоваться для её доказательства методом математической индукции.

Теорема. Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... C_n^n b^n. \quad (6)$$

Используя знак суммы, формулу Ньютона можно записать короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (7)$$

Δ Для $n=1$ формула Ньютона имеет вид

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

и, так как $C_1^0 = C_1^1 = 1,$ она, очевидно, верна.

Предположим, что формула справедлива для $n=m,$ т. е.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = C_m^0 a^{m+1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} = C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1}.$$

Учитывая, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1},$$

получаем

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.$$

Таким образом, из справедливости формулы (6) для $n=m$ следует её справедливость для $n=m+1,$ и, так как формула верна и при $n=1,$ то на основании принципа математической индукции её справедливость установлена для всех натуральных значений n. Δ

Формула (6) носит имя великого английского физика и математика И. Ньютона. Правая часть её называется разложением натуральной степени бинома. Коэффициенты C_m^k называются биномиальными коэффициентами.

Отметим некоторые характерные особенности формулы Ньютона.

а) Правая часть формулы Ньютона содержит $n+1$ слагаемых.

б) Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$, стоящее на $k+1-$м месте, удобно считать $k-$м членом разложения и обозначать через T_k, т. е.

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (8)$$

При этом условии $T_0 = C_n^0 a^n -$ нулевой член разложения, $T_1 = C_n^1 a^{n-1} b -$ первый член разложения.

в) Показатели степени при a в каждом следующем члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, показатели степени при $b -$ на единицу больше. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.

г) Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от нулевого и от $n -$го члена разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример 4. Возвести в шестую степень двучлен $x^2 - y$.

Δ Положив в формуле (7) $a = x^2,\ b = -y,\ n = 6,$ получим

$$(x^2 - y)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k} (-y)^k = C_6^0 x^{12} - C_6^1 x^{10} y + C_6^2 x^8 y^2 - C_6^3 x^6 y^3 + C_6^4 x^4 y^4 -$$

$$-C_6^5 x^2 y^5 + C_6^6 y^6 = x^2 - 6x^{10} y + 15x^8 y^2 - 20x^6 y^3 + 15x^4 y^4 - 6x^2 y^5 + y^6. \ \Delta$$

2. Случайные события и их вероятности

Случайные события и их вероятности. Рассмотрим простой опыт, заключающийся в подбрасывании монеты. Этот опыт имеет два исхода: либо монета упадает так, что сверху окажется герб, либо она ляжет гербом вниз. Тот или иной исход опыта зависит от многих причин, которые не поддаются учету, и заранее предсказать результат опыта нельзя. Событие, состоящее в том, что «выпал герб», является примером случайного события. Другими примерами случайных событий могут служить: «появление единицы» при бросании игральной кости (кубика из однородного материала с гранями, занумерованными цифрами от единицы до шести), выход из строя электролампы до контроля изделия. Во всех этих случаях невозможно предсказать заранее, до окончания опыта, произойдет или не произойдет соответствующее событие. Поэтому такие события и называют случайными.

В опыте с подбрасыванием монеты оба исхода очевидно равноправны, до опыта нет никаких оснований предпочитать один исход другому. В таких случаях говорят, что оба исхода равновероятны, а вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$. При подбрасывании игральной кости имеется шесть исходов. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то все исходы опыта одинаково возможны или равновероятны. Вероятность каждого исхода $\frac{1}{6}$.

Обобщением этих простых опытов будет опыт, в котором возможны n равновероятных исходов: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ (их называют также

элементарными событиями). В этом случае вероятность каждого исхода принимается равной $\frac{1}{n}$. Записывают это следующим образом:

$$P(u_1)=\frac{1}{n},\ P(u_2)=\frac{1}{n},\ P(u_3)=\frac{1}{n},...,\ P(u_n)=\frac{1}{n}.$$

Первая из этих формул читается так: «вероятность u_1 равна $\frac{1}{n}$» (Р – первая буква английского слова «probability» - вероятность).

Рассмотрим теперь опыт с n равновероятными исходами и некоторое событие A, которое происходит тогда, когда опыт оканчивается какими-то k исходами, и не происходит в том случае, если имеет место один из остальных $n-k$ исходов. Будем говорить, что исходы, приводящие к событию A, связанного с опытом с n равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов, т. е.

$$P(A)=\frac{k}{n}, \qquad (8)$$

где $k-$ число исходов, благоприятствующих событию A.

Поясним сказанное примерами. Опыт с игральной костью имеет шесть равновероятных исходов: u_i- выпала грань с номером i $(i=1,2,3,4,5,6)$. Рассмотрим следующие события, связанные с этим опытом:

событие A_1- число выпавших очков кратно 3,

событие A_2- выпало 7 очков,

событие A_3- число выпавших очков меньше 3,

событие A_4- число выпавших очков меньше 7.

Событию A_1 благоприятствуют два исхода u_3 и u_6. Положив в формуле (8) $n=6,\ k=2,$ находим $P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Событию A_2 благоприятствуют три исхода u_2,u_3,u_5. По формуле (8) получаем $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Событию A_3 не благоприятствует ни один из возможных исходов. Следовательно, $P(A_3)=\frac{0}{6}=0$. Событие A_3 является примером **невозможного события**.

Событию A_4 не благоприятствуют все шесть исходов, поэтому $P(A_4)=\frac{6}{6}=1$. Событие A_4- пример **достоверного** события.

Вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0\le P(A)\le 1,$$

что непосредственно следует из формулы (8), так как очевидно, что $0\le k\le n$.

Для вычисления вероятностей событий по формуле (8) приходится находить число всех равновозможных исходов и число исходов, благоприятствующих случайному событию. Здесь часто оказываются полезными комбинаторные формулы, рассмотренные в начале.

Пример 5. Опыт заключается в подбрасывании двух монет: медной и серебряной. Какова вероятность того, что хотя бы на одной монете появится герб?

Δ Равновероятными исходами опыта являются следующие:

u_1 – герб появился на обеих монетах,

u_2 – герб выпал только на медной монете,

u_3 – герб выпал только на серебряной монете,

u_4 – герб не выпал ни на одной монете.

Благоприятствуют событию A (появлению герба хотя бы на одной монете) исходы u_1, u_2 и u_3. Полагая в формуле (8) $n = 4,\ k = 3,$ получаем $P(A) = \frac{3}{4}$. Δ

Задачи и примеры для аудитории

1. На пять сотрудников выделены три путёвки. Сколькими способами их можно распределить, если: а) все путёвки различны, б) все путёвки одинаковы?

2. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 чёрных шара так, чтобы чёрные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: а) шары одного цвета не отличим друг от друга, б) все шары разные.

3. Сколько диагоналей имеет выпуклый $n-$угольник?

4. На первой из двух параллельных прямых лежит 10 точек, на второй – 20. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

5. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причём первый и третий должны написать по 5 глав, второй – 4, а четвёртый 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

6. Известно, что крокодил имеет не более 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17}

Крокодилов может не оказаться двух крокодилов с одним и тем же набором зубов.

7. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, используя цифры 1 и 2?

8. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если буква не должна содержать более четырёх знаков.

9. Автомобильные номера состоят из трёх букв (всего используется 30 букв) и четырёх цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, чтобы никакие два автомобиля не имели одинакового номера?

10. Сколькими способами $2n$ элементов можно разбить на пары, если разбиения, отличающиеся только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются одинаковыми?

11. Найти сумму коэффициентов многочлена $(7x-5)^{100}$.

12. Вычислить $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$.

13. Найти члены разложения $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^9$, являющиеся целыми числами.

14. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди наудачу взятых пяти билетов: а) один выигрышный, б) оба выигрышных.

15. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них независимо друг от друга и с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Вычислить:

а) $\dfrac{6!}{A_{10}^{7}}(C_7^5+C_7^3)$; б) $\dfrac{P_{k+1}}{(k-n)!\,A_{k-1}^{n-1}}$.

2. Найти n, если:

а) $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=15(n+2)$; б) $\dfrac{1}{C_4^n}=\dfrac{1}{C_5^n}+\dfrac{1}{C_6^n}$;

г) $5C_n^3=C_{n+2}^4$; в) $(n+2)!=132A_n^kP_{n-k}$;

д) $C_{n+3}^{n+1}-5C_{3n}^2+19n^2=6$; е) $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{143}{4P_n}$;

ж) $8C_{105}^{n}<3C_{105}^{n+1}$.

3. Найти множество значений функции:

а) $f(x)=A_{7-x}^{x-3}$; б) $f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$.

4. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если: а) один из них должен быть старшим; б) старшего быть не должно?

5. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

6. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения диагоналей.

7. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько получилось чисел? Сколько среди них чётных чисел?

8. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трёх солдат для патрулирования?

9. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

10. Среди всех целых от 1 до 10^n каких больше: тех, для записи которых используется цифра 9, или тех, которые записываются без неё?

11. Написать формулу Ньютона для степени бинома:

а) $(x+1)^7$; б) $(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}})^5$.

12. Доказать равенства:

а) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

б) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

в) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^3 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

13. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 чёрных, 5 красных шаров, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: а) белым, б) чёрным, в) жёлтым, г) красным?

14. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

15. Доказать, что вероятность того, что у двенадцати случайно выбранных человек дни рождения приходятся на разные месяцы, меньше $\frac{1}{10000}$.

Параграф 23. Элементы математической статистики

1. Понятия выборки, оценки.

В математической статистике исследуются способы получении выводов на основе эмпирических данных. **Случайной выборкой объема** n (или просто **выборкой**) называется случайный вектор

$$x_1; x_2; \ldots; x_n, \qquad (1)$$

где x_i обычно предполагаются независимыми и имеющими одну и ту же функцию распределения $F(x) = P(x_i \le x)$. Случайная выборка (1) является математической моделью последовательно проводимых измерений или наблюдений. Возможны другие способы получения эмпирических данных, приводящие к другим математическим моделям.

Обычно для выборки (1) известен только тип распределения (например, нормальный), но неизвестны параметры, от которых зависит распределение.

В этом случае по выборке требуется каким-либо образом определить приближенные значения неизвестных параметров.

Пусть $P(x_i \le x) = F_\xi(x;\theta).$ Оценкой неизвестного параметра θ назовем произвольную функцию $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1;x_2;...;x_n).$ Оценка θ_n^* является **несмещенной** оценкой $\theta,$ если $M\theta_n^* = \theta.$ Если θ_n^* при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $\theta,$ то оценка θ_n^* называется **состоятельной**.

Может оказаться, _что_ существуют такие функции $\underline{\theta}_n = \underline{\theta}_n(x_1;x_2;...;x_n)$ и $\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_n(x_1;x_2;...;x_n),$ что $P(\underline{\theta}_n < \theta < \overline{\theta}_n) = 1-2\alpha$ одинакова при всех значениях неизвестного параметра $\theta.$ В этом случае интервал $(\underline{\theta}_n;\overline{\theta}_n)$ называют **доверительным интервалом**, и вероятность $1-2\alpha$ того, что интервал $(\underline{\theta}_n;\overline{\theta}_n)$ накроет неизвестный параметр $\theta,$ называют доверительной вероятностью.

Если при $n \to \infty$

$$P(\underline{\theta}_n < \theta < \overline{\theta}_n) \to 1-2\alpha$$

где значение α не зависит от $\theta,$ то интервал $(\underline{\theta}_n;\overline{\theta}_n)$ называют асимптотически доверительным интервалом.

В качестве примера рассмотрим выборку (1), образованную независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение с неизвестными параметрами: математическим ожиданием a и дисперсией σ^2.

Покажем, как для неизвестных параметров a и σ^2 можно построить доверительные интервалы.

Пусть $\xi_0;\xi_1;\xi_2;...;\xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Положим

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + ...\xi_n^2, \quad \tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}.$$

Законы распределения этих величин называют соответственно **распределением χ^2 и распределением Стьюдента с n степенями свободы**» Определим величины $t_{\alpha,n}$ и $\chi_{\alpha,n}^2$ как решения уравнений

$$P\{\tau_n > t_{\alpha,n}\} = \alpha, \quad P\{\chi_n^2 > \chi_{\alpha,n}^2\} = \alpha.$$

Построим по выборке (1) величины

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Тогда

$$P\{\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\} = 1 - 2\alpha,$$

$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}}\right\} = 1 - 2\alpha.$$

Отметим, что в рассмотренном случае (т. е. когда $x_1; x_2; \ldots x_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение) случайные величины $\bar{x}$ и s^2 независимы.

Случайные величины (1), расположенные в порядке неубывания их значений:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots x_{(n)}, \qquad (2)$$

называют вариационным рядом. В частности,

$$x_{(1)} = \min\{x_1; x_2; \ldots x_n\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_1; x_2; \ldots x_n\}.$$

2. Эмпирической функцией распределения

Эмпирической функцией распределения называется случайная функция $\hat{F}_n(x)$, которая принимает при $x \in [x_{(k)}; x_{(k+1)}]$ значение $\frac{k}{n}$ (здесь $k = 0,1,2,\ldots,n$ и считается, что $x_{(0)} - \infty; x_{(n+1)} = \infty$). Нетрудно проверить, что $\hat{F}_n(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $F(x)$ при любом x.

Одним из методов получения оценок является **метод наибольшего правдоподобия**. Пусть (1) — независимая выборка, соответствующая случайной величине ξ, которая имеет плотность распределения $p_\xi(x; \theta_1; \theta_2; \ldots; \theta_n)$. **Функцией правдоподобия** называется функция

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} p_\xi(x; \theta_1; \theta_2; \ldots; \theta_k).$$

Оценками наибольшего правдоподобия параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ называется набор $\theta_1^* = \theta_1^*(x_1; x_2; \ldots; x_n), \ldots, \theta_k^* = \theta_k^*(x_1; x_2; \ldots; x_n),$

максимизирующий значение $L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ при данных $x_1, x_2, ..., x_n$. Если плотность $p_\xi(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ дифференцируема, то $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_k^*$ – решение системы уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0_j, \quad j = 1, 2, 3, ..., k.$$

При довольно общих условиях оценки наибольшего правдоподобия являются состоятельными и. асимптотически нормальными. Аналогично определяется функция L для дискретных случайных величин.

Другой круг задач математической статистики связан с проверкой различных гипотез. Пусть предполагается, что свойства выборки (1) соответствуют одной из двух гипотез:

$H_1 : x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет распределение P_1,

$H_2 : x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет распределение P_2,

где P_1, P_2 – два известных распределения.

Статистический критерий, на основании которого принимается решение о том, какой из этих гипотез соответствует выборка (1), определяется множеством $B \subset R^n$ и имеет вид: если $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B$, то принимается гипотеза H_2, в противном случае — H_1. Вероятность $\alpha = P_1(x \in B)$, т. е. вероятность принять гипотезу H_2, когда в действительности верна H_1, называют **ошибкой 1-го рода**. Вероятность $\beta = P_2(x \notin B)$, т. е, вероятность принять H_1, когда верна H_2, называют ошибкой **2-го рода**. Если множество В задано в виде

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in B\} = \{\eta_n = \eta_n(x_1, x_2, ..., x_n) > C\},$$

то функцию $\eta_n = \eta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют **статистикой критерия**. Например, пусть $p_1(x)$ – плотность распределения каждого x_i при гипотезе H_1 и $p_2(x)$ – соответствующая плотность при гипотезе H_2. Положим

$$\eta_n = \frac{p_2(x_1) p_2(x_2) ... p_2(x_n)}{p_1(x_1) p_1(x_2) ... p_1(x_n)}.$$

Согласно критерию Неймана — Пирсона при $\eta_n > C$ (C – некоторая постоянная, определяемая по ошибке 1-го рода) принимается гипотеза H_2, а в противном случае H_1. Этот критерий среди всех критериев с фиксированной ошибкой 1-го рода имеет наименьшую ошибку 2-го рода. Аналогично формулируется критерий для дискретных распределений.

Иногда формулируется только одна гипотеза о выборке (1). Эту гипотезу нужно либо принять, либо отвергнуть. Пусть, например, гипотеза состоит в том, что выборка (1) соответствует случайной величине ξ с $P(\xi \le x) = F(x)$. Для статистической проверки этой гипотезы используется **критерий** χ^2. Разобьем числовую ось на $r+1$ непересекающихся полуинтервалов $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_{r+1}, \bigcup_{i=1}^{r+1} \Delta_i = (-\infty; \infty)$. Положим $p_k = P\{\xi \in \Delta_k\}$ $k = 1, 2, ..., r+1$. Обозначим через m_k число x_i, попавших в Δ_k. Статистикой критерия χ^2 является величина

$$\eta_{n,r} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Оказывается, что если элементы выборки (1) независимы и имеют функцию распределения $F(x)$ (т. е. если гипотеза верна), то для любого x при $n \to \infty$

$$P\{\eta_{n,r} \le x\} \to P\{\chi_r^2 \le x\}. \qquad (3)$$

По критерию χ^2 гипотеза отвергается, если $\eta_{n,r} > C$. Величина C выбирается так, чтобы вероятность $P\{\eta_{n,r} > C\} = \alpha$ была мала. При таком выборе C в случае $\eta_{n,r} > C$ говорят, что гипотеза отвергается с уровнем значимости α. Используя предельное распределение (3), можно положить $C = \chi^2_{\alpha,r}$, где $P\{\chi_r^2 > \chi^2_{\alpha,r}\} = \alpha$, и тогда в силу (3)

$$P\{\eta_{n,r} > C\} \to \alpha, \quad n \to \infty.$$

Если распределение $F(x)$ зависит от неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$, вероятности $p_i(\theta) = P\{\xi \in \Delta_i\}$ вычисляют, заменяя параметры θ их оценками (например, оценками максимального правдоподобия). В этом случае в предельном распределении (3) число степеней свободы r должно быть уменьшено на число оцениваемых параметров.

Задачи и примеры для аудитории

1. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – случайная выборка с $Mx_k = a, Dx_k = \sigma^2, M(x_k - a)^4 < \infty, \quad k = 1, 2, 3, ..., n.$ Найти математическое ожидание величины

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2, \quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Является ли s^2 состоятельной оценкой σ^2?

2. Найти математическое ожидание и дисперсию эмпирического момента $m_r = \frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r}{n}$ независимой выборки, соответствующей случайной величине ξ с $M\xi^k = a_k$, $1 \le k \le 2r$.

3.По неоднородной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $x_k, k = 1, 2, 3, \ldots, n$, независимы, $Mx_k = a, Dx_k = \sigma_k^2$ (σ_k известны), найти несмещенную линейную относительно x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ оценку $a*$ параметра a, которая имеет наименьшую возможную дисперсию.

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − независимые одинаково распределенные случайные величины с $Dx_1 > 0$, $Mx_1^4 < \infty$. Положим

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - Mx_1)}{s} \le x\right).$$

5.Пусть μ_n − число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Найти оценку наибольшего правдоподобия $p*$ параметра p. Доказать её несмещенность и состоятельность.

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1.Пусть μ_n − число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Построить для p асимптотически доверительный интервал с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

2.Используя таблицу случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_k равномерно распределены на отрезке $[0;1]$ (значения x_k взять с тремя знаками; $n = 50$). Найти:

а) вариационный ряд $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$;

б) эмпирическую функцию распределения (построить её график и график теоретической функции распределения);

в) $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ (сравнить с Mx_k);

г) $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$ (сравнить с Dx_k).

3. Используя таблицу нормально распределенных случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где x_k имеет нормальное распределение с параметрами $a = Mx_k = 0,5;$ $\sigma^2 = Dx_k = 1;$ $n = 50.$ Найти: а) вариационный ряд, б) эмпирическую функцию распределения, в) $\bar{x};$ г) $s^2.$

4. По выборке, полученной в задаче 3, построить доверительный интервал для a (считая a и σ неизвестными) с доверительной вероятностью 0,95.

5. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n -$ выборка, соответствующая показательному распределению с параметром $\lambda.$ Найти оценку максимального правдоподобия $\lambda*$ для к. Вычислить $M\dfrac{1}{\lambda*},\ D\dfrac{1}{\lambda*}.$

Параграф 24. Элементарные математические модели

1. Фундаментальные законы природы.

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» - математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот «третий метод» познания, конструирования, проектирования сочетает в себе многие достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью даёт возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). В то же время вычислительные (компьютерные, симуляционные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоритическим подходам (преимущества эксперимента). Неудивительно, что методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

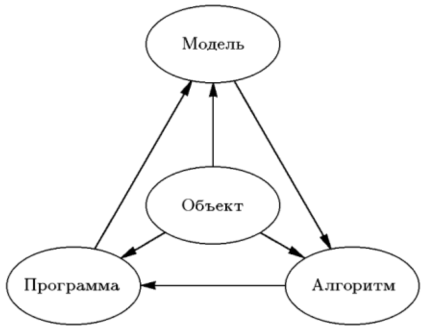
Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового среднеазиатского учёного Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено по крайней мере двумя причинами. Первая из них – появление ЭВМ (компьютеров), хотя и скромных по нынешним меркам, но тем не менее избавивших учёных от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая – беспрецедентный социальный заказ – выполнение национальных программ быв. СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полёты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике. Этот успех во многом определил дальнейшие достижения методологии, без применения которой в развитых странах ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический проект теперь всерьез не рассматривается (сказанное справедливо и по отношению к некоторым социально-политическим проектам).

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, «выстраиваясь» в структуры так называемого **информационного общества**. Впечатляющий прогресс средств переработки, переработки, передачи и хранения информации отвечает мировым тенденциям к усложнению и взаимному проникновению различных сфер человеческой деятельности. Без владения информационными «ресурсами» нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом. Однако информация как таковая зачастую мало что даёт для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надёжные способы переработки информационного «сырья» в готовый «продукт», т. е. точное знание. История методологии математического моделирования убеждает: она может и должна быть **интеллектуальным ядром** информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Технические, экологические экономические иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в «единственном экземпляре». Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому математическое (шире - информационное) моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает чёткий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: **модель – алгоритм – программа** (см. схему).

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или её фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.



Второй этап – выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных и методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на «экспериментальной установке» - компьютере.

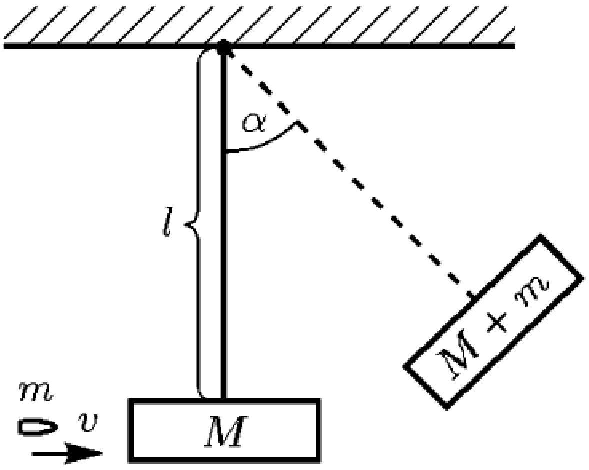
Создав **триаду** «модель – алгоритм - программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того как **адекватность** (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Будучи методологией, математическое моделирование не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, не конкурирует с ними. Наоборот, трудно переоценить его синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без поры на самые разные методы и подходы – от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования. Оно даёт новые дополнительные стимулы самым разным направлениям науки.

Рассмотрим некоторые подходы к построению простейших математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий, иерархический цепочек. Несмотря на простоту, привлекаемый материал даст возможность начать обсуждение таких понятий, как адекватность моделей, их «оснащение», нелинейность, численная реализация и ряда других принципиальных вопросов математического моделирования.

Фундаментальные законы природы. Наиболее распространённый метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений, что, помимо всего прочего, обеспечивает исследователю мощную психологическую поддержку. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.

а) **Сохранение энергии.** Этот закон известен почти двести лет и занимает, пожалуй, наиболее почётное место среди великих законов природы. Полагаясь на него, эксперт по баллистике, желающий быстро определить скорость револьверной пули и не имеющий поблизости специальной лаборатории, может воспользоваться относительно простым устройством типа маятника – груза, подвешенного на лёгком жестком и свободно вращающемся стержне.



Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе «пуля - груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали полностью перейдёт в потенциальную энергию системы. Эти трансформации описываются цепочкой равенств

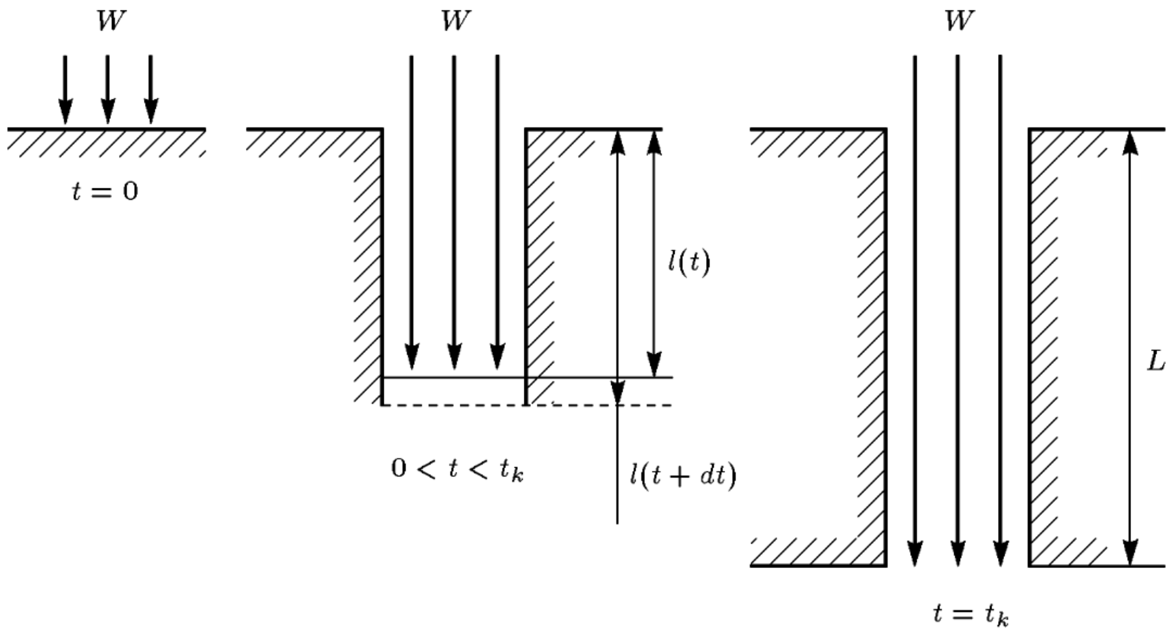
$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)\frac{V^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos\alpha).$$

Здесь $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия пули массы m, имеющей скорость v, M – масса груза, V – скорость системы «пуля – груз» сразу после столкновения, g – ускорение свободного падения, l – длина стержня, α – угол наибольшего отклонения. Искомая скорость определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos\alpha)}{m}}, \qquad (1)$$

которая будет вполне точной, если не учитываемые нами потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, разгон стержня и т. д. невелики. Это, на первый взгляд, разумное рассуждение на самом деле неверно. Процессы, происходящие при «слипании» пули и маятника, уже не являются чисто механической энергии несправедлив: сохраняется полная, а не механическая энергия системы. Он даёт лишь нижнюю границу для оценки скорости пули (для правильного решения этой простой задачи надо воспользоваться также законом сохранения импульса – см. упр. 1).

Сходные рассуждения может применить и инженер для оценки времени t_k сверления слоя металла толщины L лазером с мощностью W, излучение которого перпендикулярно поверхности материала.



Если энергия лазера полностью идёт на испарение столбика металла массы LS_ρ (S – облучаемая площадь, LS – объём столбика, ρ – плотность вещества), о закон сохранения энергии выражается равенством

$$E_0 = Wt_k = hLS_\rho, \qquad (2)$$

где h – энергия, требуемая для испарения единицы массы. Величина h имеет составную структуру: $h = (T_{пл} - T)h_1 + h_2 + h_3$, поскольку материал необходимо последовательно нагреть до температуры плавления $T_{пл}$, а затем расплавить и превратить в пар (T – исходная температура, h_1 – удельная теплота плавления и парообразования).

Изменения глубины выемки $l(t)$ со временем определяется из детального баланса энергии в промежутке времени от t до $t + dt$. На испаренную за это время массу

$$[l(t+dt) - l(t)]S_\rho = dl\, S_\rho$$

тратится энергия $dl\ hS_\rho$, равная энергии $W\,dt$, сообщаемой веществу лазером:

$$dl\ hS_\rho = W\,dt,$$

откуда получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dl}{dt}=\frac{W}{hS_\rho}.$$

Его интегрирование (с учётом того, что начальная глубина выемки равна нулю) даёт

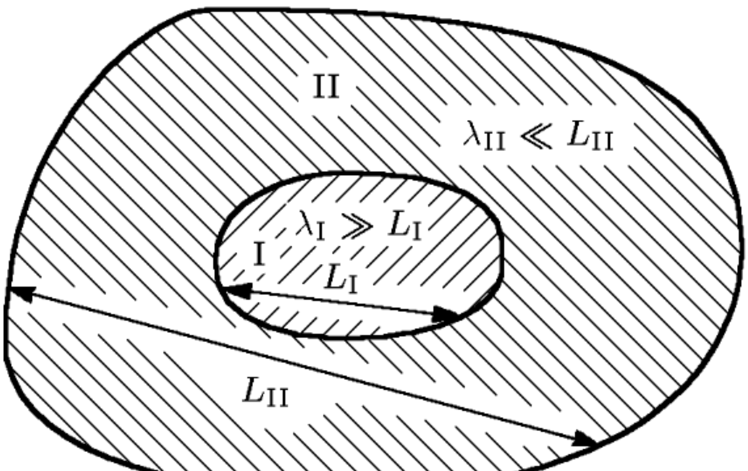
$$l(t)=\frac{W}{hS_\rho}t=\frac{E(t)}{hS_\rho}, \qquad (3)$$

где $E(t)$ – энергия, выделенная лазером к моменту времени t. Следовательно, глубина выемки пропорциональна затраченной энергии (причём величина t_k, когда $l(t_k)=L$, совпадает с вычисленной по формуле (2)).

В действительности процесс сверления гораздо сложнее рассмотренной схемы – энергия тратится на нагрев вещества, на удаление паров из выемки, которая может иметь неправильную форму, и т. д. Поэтому уверенность в правильности предложенного математического описания значительно меньше, чем в случае с пулей. Вопрос о соответствии объекта и его модели – один из центральных в математическом моделировании, и в дальнейшем мы будем неоднократно к нему возвращаться.

б) **Сохранение материи**. Именно этим соображением руководствуется школьник, решающий задачу о заполнении бассейна водой, втекающей и вытекающей из двух труб. Конечно же, область применения этого закона несравненно шире.

Пусть, например, имеется небольшое количество радиоактивного вещества (урана), окруженного толстым слоем «обычного» материала (свинца), - ситуация типичная либо при хранении делящихся материалов, либо при их использовании в энергетике.



Под словом «небольшой» подразумевается упрощающее обстоятельство, а именно то, что все продукты распада, не испытывая столкновений с атомами вещества, беспрепятственно покидают область I. Другими словами, длина свободного пробега продуктов распада λ_I в первом веществе значительно больше характерных размеров самого материала L_I, т.

е. $\lambda_I >> L_I$. Слова «толстый слой» означают, что в согласии с целями хранения продукты деления полностью поглощаются в области II. Это гарантируется при выполнении противоположного условия $\lambda_{II} << L_{II}$, где λ_{II} – длина пробега продуктов распада во втором веществе, L_{II} – его характерный размер.

Итак, все что вылетает из области I, поглощается в области II, и суммарная масса обоих веществ со временем не меняется. Это и есть закон сохранения материи, примененный к данной ситуации. Если в начальный момент времени $t = 0$ массы веществ были равны $M_I(0)$ и $M_{II}(0)$, то любой момент времени справедлив баланс

$$M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t). \qquad (4)$$

Одного уравнения (4), очевидно, недостаточно для определения текущих значений двух масс - $M_I(t)$ и $M_{II}(t)$. Для замыкания математической формулировки необходимо привлечь дополнительное соображение о характере распада. Оно гласит, что скорость распада (число атомов, распадающихся в единицу времени) пропорционально общему числу атомов радиоактивного вещества. За небольшое время dt между моментами $t + dt$ всего распадется

$$N_I(t+dt) - N_I(t) = -\alpha N_I(t + \xi dt), \quad \alpha > 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

атомов. Здесь вторично использован закон сохранения вещества, но применительно не ко всему процессу, а к отрезку времени dt. В этом уравнении, описывающем баланс атомов, в правой части стоит знак минус (вещество убывает), а величина $N_I(t + \xi dt)$ отвечает некоторому среднему значению числа атомов за рассматриваемое время. Перепишем его в дифференциальной форме:

$$\frac{dN_I(t)}{dt} = -\alpha N_I(t).$$

Учитывая, что $M_I(t) = \mu_I N_I(t)$, где μ_I – атомный вес вещества I, получаем

$$\frac{dM_I(t)}{dt} = -\alpha M_I(t). \qquad (5)$$

При самопроизвольной радиоактивности любой атом имеет некоторою не зависящую от состояния окружающего вещества вероятность распада. Поэтому, чем больше (меньше) самого радиоактивного вещества, тем больше (меньше) выделяется продуктов распада в единицу времени. Коэффициент пропорциональности $\alpha > 0$ (постоянная распада) определяется конкретным веществом.

Уравнения (4), (5) вместе с условиями $\lambda_I >> L_I$, $\lambda_{II} << L_{II}$, а также величинами $\alpha, M_I(0), M_{II}(0)$ и составляют математическую модель рассматриваемого объекта.

Интегрируя (5), получаем, что масса делящегося материала убывает по экспоненциальному закону

$$M_I(t) = M_I(0)e^{-\alpha t},$$

и при $t \to \infty$ в области I вещество полностью исчезает.

Так как суммарная масса в соответствии с (4) остается постоянной, то в области II количество вещества растет:

$$M_{II}(t) = M_{II}(0) + M_I(0) - M_I(0)e^{-\alpha t} = M_{II}(0) + M_I(0)(1 - e^{-\alpha t}),$$

и при $t \to \infty$ продукты распада полностью переходят из области I в область II.

в) **Сохранение импульса**. Неподвижно стоящая в безветренную погоду на поверхности озера лодка начнёт двигаться вперед, если сделать несколько шагов от её носа к корме. Так проявляет себя закон сохранения импульса, утверждающий: полный импульс системы, не испытывающей действия внешних сил, сохраняется. На передвижение гребца лодка реагирует смещением в противоположную сторону.

Принцип реактивного движения положен в основу многих замечательных технических устройств, например, ракеты, выводящей на орбиту вокруг Земли искусственный спутник, для чего ей требуется развить скорость примерно 8 км/с. Простейшая математическая модель движения ракет получается из воздуха, гравитацией и другими силами, исключая, конечно, тягу реактивных двигателей.

Пусть продукты сгорания ракетного топлива покидают расположенные в кормовой части выхлопные сопла со скоростью u (для современных топлив величина u равна 3-5 км/с). За малый промежуток масса ракеты изменилась на величину dm. Изменился также импульс ракеты, однако суммарный импульс системы «ракета плюс продукты сгорания» остался тем же, что и в момент t, т. е.

$$m(t)v(t) = m(t+dt)v(t+dt) - dm[v(t+\xi dt) - u],$$

где $v(t)$ – скорость ракеты, $v(t+\xi dt) - u$, $0 < \xi < 1$ – средняя за промежуток dt скорость истекающих из сопел газов (обе скорости берутся относительно Земли). Первый член в правой части этого равенства – импульс ракеты в момент $t + dt$, второй – импульс, переданный истекающим газом за время dt.

Учитывая, что $m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2)$, закон сохранения импульса можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u,$$

В котором член $-\frac{dm}{dt}u$, очевидно, не что иное, как сила тяги ракетных двигателей, и которое, будучи преобразованным к виду

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt},$$

легко интегрируется:

$$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right),$$

где v_0, m_0 – соответственно скорость и масса ракеты в момент $t = 0$. Если $v_0 = 0,$ то максимальная скорость ракеты, достигаемая при полном сгорании топлива, равна

$$v = u\ln(\frac{m_0}{m_p + m_s}). \qquad (6)$$

Здесь m_p − полезная масса (масса спутника), m_s – структурная масса (масса собственно ракетной конструкции – топливных баков, двигателей, систем управления и т. д.).

Простая формула Циолковского (6) позволяет сделать фундаментальный вывод о конструкции ракеты для космических полётов. Введём величину $\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$, которая характеризует при $m_p = 0$ отношение структурной и начальной масс ракеты. Тогда для практически реальных значений $\lambda = 0{,}1,\ u = 3\ км/с$ получаем при $m_p = 0$ $v = u\ln\frac{1}{\lambda} = 7\ км/с.$

Отсюда следует, что даже в самой идеальной ситуации (полезная масса равна нулю, отсутствуют гравитация и сопротивление воздуха и т. д.) ракета рассматриваемого типа не способна достичь первой космической ракеты – вывод, к которому пришли основоположники космонавтики.

Данный пример иллюстрирует также своего рода принцип «наибольшего благоприятствуя», часто используемый на начальной стадии математического моделирования сложных объект, поставленный в наилучшие условия, не в состоянии достичь требуемых характеристик к нему; если же требования в принципе достижимы, то следующие шаги связаны с исследованием влияния на объект дополнительных осложняющих факторов.

2. Применение аналогий при построение моделей. Предварительные выводы

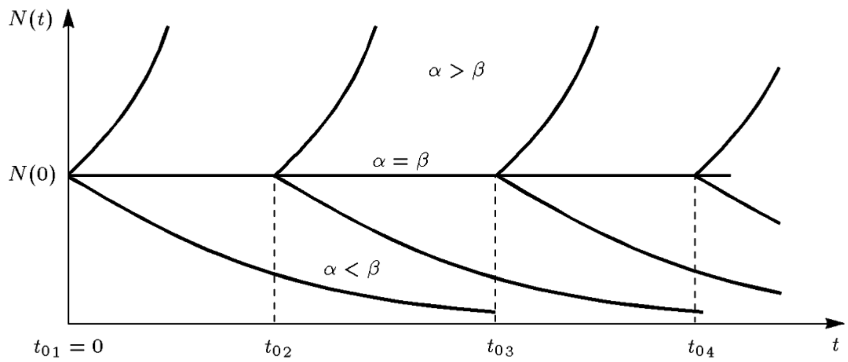
Применение аналогий при построение моделей. В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая **моделью Мальтуса**. В её основу положено простое утверждение – скорость изменения населения со временем t пропорциональна его текущей численности $N(t)$, умноженной на сумму коэффициентов рождаемости $\alpha(t) \geq 0$ и смертности $\beta(t) \leq 0$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \qquad (7)$$

весьма похожему на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при $\alpha < \beta$ (если α и β постоянные). Это неудивительно, так как при их выводе использовались одинаковые соображения. Интегрирование уравнения (7) даёт

$$N(t) = N(0)\exp(\int_{t_0}^{t}[\alpha(t) - \beta(t)]dt),$$

где $N(0) = N(t = t_0)$ – начальная численность.



В рисования приведены графики функции $N(t)$ при постоянных α и β (разным подобным друг другу кривым соответствуют разные t_0 – значения времени начала процесса). При $\alpha = \beta$ численность остается постоянной, т. е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина $N(t) = N(0)$. Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что небольшое нарушение равенства $\alpha = \beta$ приводит с течением времени ко все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения $N(0)$. При $\alpha < \beta$ численность населения убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$. Последнее обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Как в данном примере, так и в ряде рассмотренных выше случаев можно указать немало очевидных ограничений применимости построенной модели. Конечно же, сложнейший процесс изменения численности населения, зависящий к тому же от сознательно вмешательства самих людей, не может описывается какими-либо простыми закономерностями. Даже в идеальном случае изолированной биологической популяции предложенная модель не отвечает реальности в полной мере хотя бы из-за ограниченности ресурсов, необходимых для её существования.

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений. Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей – их универсальности, т. е. их приложи мости к объектам принципиально различной природы. Так, предложения типа «скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от неё)» широко используются в далеких друг от друга областях знаний.

Предварительные выводы. Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

1. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и целях его исследования эта стадия может содержать также некоторые предположения (невесомый стержень, толстый слой вещества, прямолинейное распространение световых лучей и т. д.). Данный этап можно назвать формулировкой пред модели.

2. Следующий этап – завершение идеализации объекта. Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Например, при составлении баланса материи не учитывался, виду его малости, дефект масс, которым сопровождается радиоактивный распад. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме (подобно условию $\lambda_I >> L_I$), с тем чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю.

3. После выполнения первых двух этапов можно переходить к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т. п.), которому подчиняется объект, и его записи в математической форме. При необходимости используются дополнительные сведения об объекте, также записываемые математически (например, постоянство величины c для всех траекторий лучей света, вытекающее из геометрии задачи). Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона отнюдь не тривиальная задача.

4. Завершает формулировку модели её «оснащение». Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (скорость ракеты и её массу в момент $t = 0$) или иные его характеристики (величины l, g; $\alpha, \lambda_I, \lambda_{II}$; $\alpha(t)$ и $\beta(t)$), без знания которых невозможно определить поведение объекта. И, наконец, формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т. д.).

5. Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов. В отличие от рассматриваемых в простейших случаев, большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, известно.

6. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) её адекватность – соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного, и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

Задачи и примеры для аудитории

1. В первой задаче п. 1, а) примените для нахождения величины v (скорости системы «пуля-груз» сразу после столкновения) не закон сохранения энергии, а закон сохранения импульса. Убедитесь, что для скорости пули v получается формула, дающая значение в $\sqrt{\dfrac{M+m}{m}}$ раз меньше, чем получающееся по формуле (1).

2. Пусть мощность лазера, сверлящего материал, зависит от времени, т. е. $W = W(t)$. Как изменится формула (3)? Остается ли в силе утверждение о том, что глубина выемки пропорциональна затраченной энергии?

3. Найдите момент времени, когда распадается последний атом радиоактивного вещества. Почему в модели (5) вещество распадается полностью лишь при $t \to \infty$?

4. Предположим, что в п. 1, в) рассматривается «идеальная» одноступенчатая ракета, у которой непрерывно отбрасывается отработавшая и ставшая ненужной часть структурной массы (к моменту полного сгорания топлива $m_s = 0$). Пользуясь законом сохранения по формуле $v = (1-\lambda)u\ln\dfrac{m_0}{m_p}$. Сравните её с формулой (6). Почему идеальная ракета может достичь любой скорости?

Примеры и задачи для самостоятельных работ

1. Определите, как себя должна вести при больших t величина $r(t) = \alpha(t) - \beta(t) > 0$ в модели Мальтуса (7), чтобы численность популяции оставалась ограниченной при $t \to \infty$.

2. Перейдите в формуле (8) для многоступенчатой ракеты к пределу при $n \to \infty$ и убедитесь, что её предельная скорость вычисляется по формуле для идеальной ракеты из упр. 4. Почему результаты совпадают?

3. Рассмотрите в логистической модели (9) малые отклонения от положения равновесия, т. е. ситуацию, когда решение имеет вид $N(t) = N_p + \delta N(t)$, где $|\delta N(t)| << N_p$. Покажите, что для величины $\delta N(t)$ в первом приближении справедлива линейная модель типа модели Мальтуса (7).

Модул VI. Применения математики в ествественной науке

Параграф 25. Математика в химии и биологии

1. Какие ограничения накладывает химия на решение математических задач? Геометрия в химии: синтез и упаковки

Как-то раз Гаусс спорил с Авогадро (1776—1856) о сущности научных законов. Гаусс утверждал, что законы существуют только в математике, а потому химия почитаться за науку не может. В ответ Авогадро сжёг 2 л водорода в литре кислорода и, получив два литра водяного пара, торжествующе воскликнул: «Вот видите! Если химия захочет, то два плюс один окажутся равны двум. А что скажет на это ваша математика?»

Математические уравнения и методы, используемые в химии, имеют дело не с абстрактными величинами, а с конкретными свойствами атомов и молекул, которые подчиняются естественным природным ограничениям. Иногда эти ограничения бывают довольно жёсткими и приводят к резкому сужению числа возможных решений математических уравнений. Говоря другим языком, математические уравнения, применяемые в химии, а также их решения должны иметь химический смысл. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Число атомов в молекулах должно быть положительным целым числом. Рассмотрим уравнение $12x + y = 16$. Для математика это уравнение описывает прямую линию на плоскости. Оно имеет бесконечно много решений, в том числе и целочисленных. А для химика выражение $12x + y$ описывает молекулярную массу углеводорода C_xH_y (12 – атомная масса углерода, 1 – водорода). Молекулярную массу 16 имеет единственный углеводород — метан, CH_4, поэтому только одно решение данного уравнения обладает химическим смыслом: $x = 1,\ y = 4$.

Одно из ключевых понятий химии – валентность, то есть число химических связей, которыми данный атом соединён с другими. Валентность почти всегда является положительным целым числом. Например, углерод в органических соединениях всегда четырёхвалентен. Это накладывает некоторые ограничения на химические формулы. Например, число атомов водорода во всех углеводородах чётно. Кроме того, оно всегда имеет верхнюю границу.

Найдём максимально возможное число атомов водорода в углеводороде, содержащем n атомов углерода. Любой химик, будь то школьник, студент или научный сотрудник, сразу скажет, что это число равно $2n + 2$. Оно соответствует предельным углеводородам – алканам. Решим эту задачу с помощью математических рассуждений.

Первый способ. Используем метод математической индукции. При $n = 1$ существует только один углеводород — CH_4. Число атомов водорода равно $2 \cdot 1 + 2 = 4$. Формула верна. Далее, пусть углеводород с n атомами углерода содержит максимально $2n + 2$ атомов водорода. Увеличим число атомов углерода на 1. Новый атом углерода можно добавить к молекуле C_nH_{2n+2} только вместо атома водорода, при этом из четырёх валентностей нового атома одна будет занята связью $C - C$, а три другие — связями $C - H$. Таким образом, число атомов водорода в новом углеводороде равно: $2n + 2 - 1 + 3 = 2(n + 1) + 2$. Доказательство закончено.

Второй способ. Общее число валентностей углерода в молекуле C_nH_x равно $4n$, так как каждый атом углерода четырёхвалентен. Что входит это число? Атомы углерода связаны друг с другом и с атомами водорода. Минимально возможное число связей $C - C$ равно $(n - 1)$ — оно необходимо, чтобы углеродный скелет не имел разрывов. В каждой такой связи участвует два атома углерода, поэтому число валентностей, расходуемых на связи $C - C$, равно $2(n - 1)$. Остальные $4n - 2(n - 1) = 2n + 2$ валентностей расходуются на связи $C - H$. Водород одновалентен, поэтому число его атомов равно числу связей $C - H$: $x = 2n + 2$.

Благодаря ограничениям, накладываемым валентностями атомов, часто по молекулярной массе можно однозначно установить формулу вещества. Например, молекулярной массе 78 формально соответствуют 6 формул углеводородов: CH_{66}, C_2H_{54}, C_3H_{42}, C_4H_{30}, C_5H_{18}, C_6H_6. Из них только последняя имеет химический смысл, так как во всех остальных число атомов водорода заведомо превышает то, которое возможно при четырёхвалентном углероде.

Третий способ. Многие физические величины, используемые для описания химических веществ и реакций, **могут принимать только неотрицательные значения:** масса, объём, концентрация, скорость реакции и др. Химикам часто приходится решать задачи на расчёт состава равновесной смеси. В них возникают полиномиальные уравнения относительно доли превращения исходных веществ в продукты. Согласно основной теореме алгебры полином n – й степени имеет ровно n корней, среди которых могут быть и комплексные. Однако во всех уравнениях, возникающих в химии, всегда только один корень имеет химический смысл.

Рассмотрим такой пример. Смесь азота и водорода в соотношении $1:3$ нагрели до установления равновесия. Рассчитаем, какая доля исходных веществ превратилась в аммиак, если константа равновесия при конечной температуре смеси и давлении 100 атм. равна $5 \cdot 10^{-6}$. Запишем уравнение реакции:

$$N_2 + 3H_2 = 2NH_3.$$

Составим таблицу, в которой указаны количества веществ до реакции, вступивших в реакцию и после реакции. Долю прореагировавшего азота обозначим x.

Количества веществ (моль)	N_2	H_2	NH_3	Всего
Исходный состав	1	3	0	
Вступило в реакцию	x	$3x$	$2x$	
Конечный (равновесный) состав	$1 - x$	$3 - 3x$	$2x$	$4 - 2x$

Неизвестное x можно определить из уравнения, выражающего константу равновесия через давления находящихся в смеси газов:

$$K = \frac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} P_{H_2}^3} = \frac{\left(\dfrac{2x}{4-2x}P\right)^2}{\dfrac{1-x}{4-2x}P \cdot \left(\dfrac{3-3x}{4-2x}P\right)^3} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

При P=100 атм. данное уравнение четвёртой степени относительно x имеет 4 действительных корня:

$$x_1 = -0{,}187; \;\; x_2 = 0{,}12; \;\; x_3 = 1{,}88; \;\; x_4 = 2{,}187;$$

из которых только один (x_2) удовлетворяет условию положительности концентраций. Такой результат совершенно типичен для расчётов химических равновесий: каким бы сложным ни было уравнение относительно степени превращения реагентов в продукты и сколько бы корней (в том числе и положительных) оно ни имело, всегда только один корень будет обладать химическим смыслом, то есть приводить к положительным равновесным концентрациям всех веществ.

В данном примере выход реакции, то есть доля прореагировавших веществ, составил 12 %.

Четвёртый способ. В химии нет иррациональных чисел. Иррациональное число содержит бесконечное число знаков в десятичной записи. Химия — наука экспериментальная, она оперирует с результатами измерений, которые выражаются или целыми числами, или дробными, но полученными с конечной точностью, как правило, не более 4 значащих цифр. Например, показатель преломления вещества может быть равен 1,414, но не бывает равным $\frac{21}{2}$. Поэтому числа π и e, часто возникающие в химических расчётах, обычно округляют до 3,14 и 2,72 соответственно.

Пятый способ. В химии нет понятия «бесконечность». Число атомов в наблюдаемой части Вселенной очень велико, но конечно, поэтому в природе нет бесконечно больших величин. Каковы же самые большие числа, используемые химиками? Число атомов во Вселенной оценивается как 1080, на Земле — 1050 атомов, в человеческом организме их примерно 1027. В статистической термодинамике возникает число способов перестановки одинаковых молекул в порции жидкого вещества, которое равно $N!$, где N~1023. Для оценки этого числа используем формулу Стирлинга:

$$\ln(10^{23}!) \approx 10^{23}\ln(10^{23}) \approx 5 \cdot 10^{24}, \;\; 10^{23}! \approx \exp(5 \cdot 10^{24}) \approx 10^{2 \cdot 10^{24}}.$$

Для сравнения, математик Харди утверждал, что самое большое число, которое когда-либо служило какой – либо цели в математике, равно $10^{10^{10^{34}}}$.

Аналогично, в химии нет и бесконечно малых величин. Каждая физическая величина – время, энергия, масса, расстояние – имеет конечное наименьшее значение, которому присущ химический смысл. Например, время в химии ограничено снизу значением 10^{-14} с, которое характеризует самую быструю реакцию среди всех возможных:

$$H + H = H_2.$$

Нижняя граница для расстояний – это 10^{-10} м, то есть характерный размер атомов. Меньшие значения с точки зрения химии уже не имеют смысла.

Раз нет бесконечно малых величин, то, строго говоря, теряет смысл понятие «производной в точке», которое равно отношению бесконечно малых приращений функции и аргумента. Тем не менее, в химии производная играет очень большую роль: производные по температуре, давлению и объёму составляют основу математического аппарата химической термодинамики, а производные по времени – химической кинетики. Это связано с тем, что при той точности измерений, которая принята в химии, отличие производной от отношения конечных приращений экспериментально не наблюдаемо, то есть равно нулю практически:

$$f'(t) - \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx 0.$$

Примером функции от температуры и объёма может служить давление идеального газа: $P(V,T) = \frac{RT}{V}$, где R – газовая постоянная. А раз есть функция, то у неё может быть и производная: $P'(V) = -\frac{RT}{V^2}$. Это отрицательная величина, ведь давление газа уменьшается с ростом объёма.

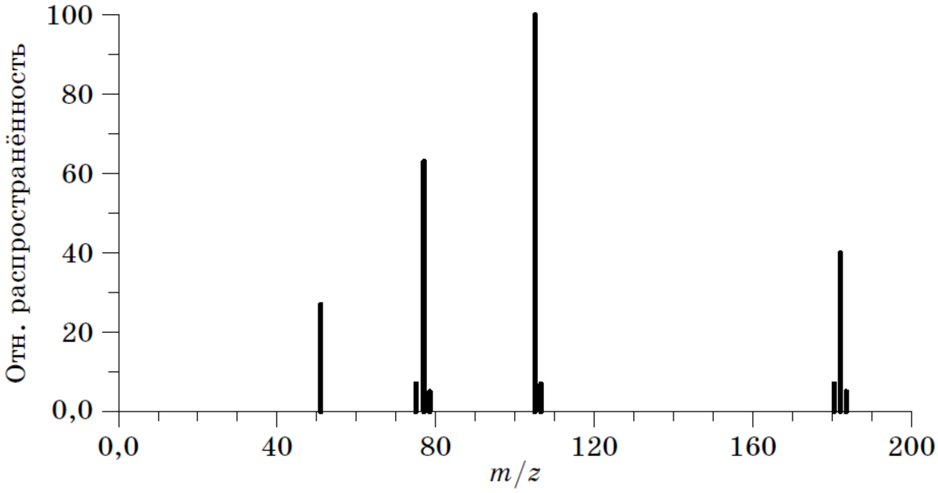
Геометрия в химии: синтез и упаковки. Геометрические идеи в химии возникают в синтетических и расчётных задачах. В задачах первого типа ищут оптимальные пути синтеза молекул, имеющих за данную геометрическую форму. Это направление в химии именуют молекулярным дизайном. Искусство синтеза новых молекул достигло такого уровня, что позволяет создать любую, даже самую причудливую структуру при условии, что полученная молекула будет устойчива. Ниже мы приведём несколько характерных примеров. Однако прежде чем описывать красивые химические структуры, расскажем коротко о том, как экспериментально можно установить строение молекул.

В современной химии для определения структуры молекул используют разнообразные физические методы, наиболее распространённые из которых — инфракрасная (ИК)спектроскопия, спектроскопия ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и масс-спектрометрия. Сочетание этих методов позволяет определить структуру даже очень сложных молекул со стопроцентной надёжностью.

Атомы в составе молекулы не фиксированы жёстко, а испытывают небольшие колебания относительно друг друга. Частоты этих колебаний можно измерить с помощью инфракрасной спектроскопии. Для каждой группы атомов, например $O-H$, $C=O$, CH_3 имеются свои, характерные только для них частоты. Измерив весь набор частот, можно установить, какие группы атомов входят в состав молекулы.

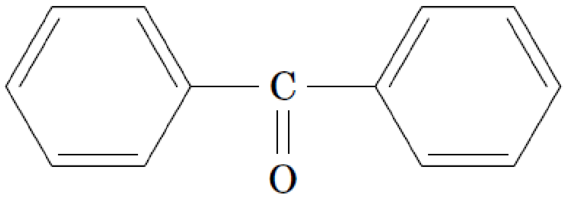
Спектроскопия ядерного магнитного резонанса основана на том, что уровни энергии некоторых магнитных ядер, например водорода 1H или тяжёлого углерода C, изменяются в постоянном магнитном поле, причём это изменение зависит не только от самого ядра, но и от окружающих его соседей. Поместив образец вещества в магнитное поле и измерив сдвиг уровней энергии, можно точно определить окружение каждого магнитного ядра и тем самым установить строение молекулы. Каждому типу атомов соответствует свой сигнал (пик) в спектре ЯМР. Например, в молекуле этилового спирта CH_3CH_2OH имеется три типа атомов водорода — в составе групп CH_3, CH_2 и OH, поэтому в спектре ЯМР этого вещества наблюдается три сигнала. А изомер этилового спирта — диэтиловый эфир CH_3OCH_3 – содержит только один тип атомов водорода, поэтому в его спектре ЯМР будет только один сигнал. В целом, чем более симметрична молекула вещества, тем меньше пиков содержит его спектр ЯМР.

Масс-спектрометрический метод определения строения основан на разложении молекулы на фрагменты под действием пучка электронов высокой энергии. При разложении в присутствии электронов фрагменты молекулы приобретают отрицательный заряд. В масс-спектрометрах измеряется отношение массы к заряду и находится молекулярная масса фрагментов. Зная состав фрагментов, можно восстановить структуру исходной молекулы.



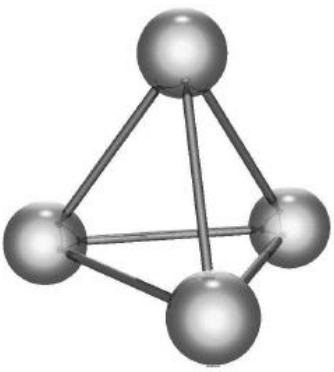
Например, одно из веществ состава $C_{13}H_{10}O$ $(M_r = 182)$ характеризуется масс-спектром, в котором есть интенсивные пики, соответствующие молекулярным массам 51, 77,105 и 182 (рисования, более мелкие пики появляются благодаря изотопам элементов).

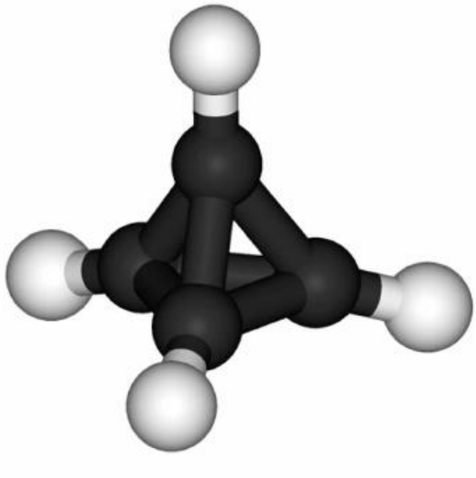
Пики 51 и 77 характерны для ароматических соединений и соответствуют углеводородным фрагментам C_4H_3 и C_6H_5. Пик 105 (= 77 + 28) — это фрагмент C_6H_5CO. Других интенсивных пиков в спектре нет. Отсюда можно сделать вывод, что в молекуле есть только бензольные кольцаи карбонильная группа CO. Структурная формула вещества:



Это — дифенилкетон, другое название — бензофенон.

Рассмотрим теперь геометрию химических структур. Известно, что существует всего 5 правильных многогранников — тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Все они многократно реализованы в химических структурах. Самый простой правильный многогранник — тетраэдр. Молекула с такой геометрией существует в природе — это P_4, молекула белого фосфора (рисования). Каждая вершина связана с тремя другими, атомы фосфора в P_4 трёхвалентны. Эта молекула обладает довольно высокой энергией и легко взаимодействует с другими молекулами — поэтому белый фосфор так активен. В начале прошлого века его использовали в спичечных головках, поскольку он легко воспламеняется от трения о любую поверхность.

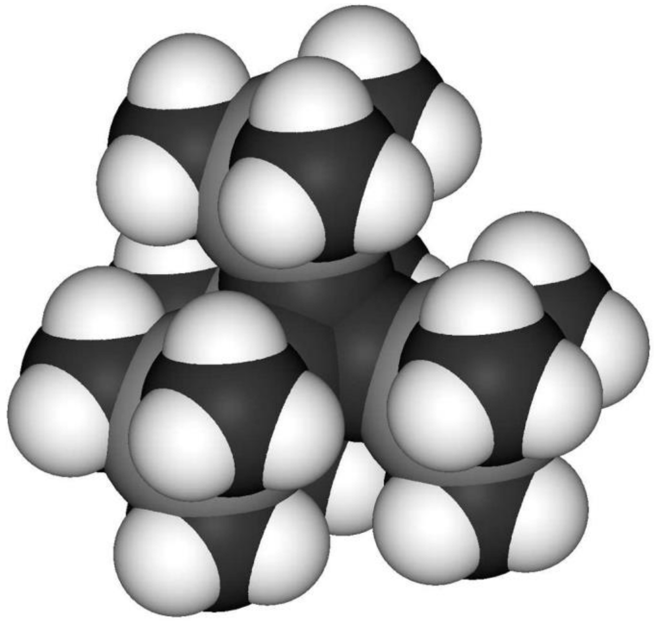




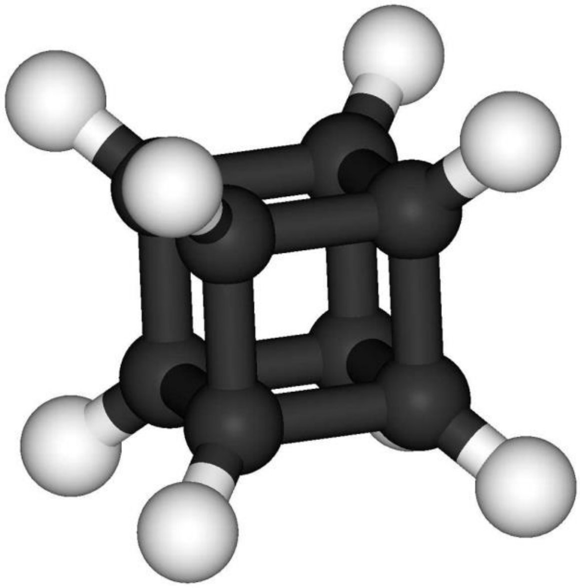
Молекула белого фосфора P_4 Гипотетическая структура углеводорода тетраэдра на C_4H_4

Валентность III характерна и для группы CH, поэтому можно представить себе углеводород, углеродный скелет которого имеет форму тетраэдра — его так и назвали: тетраэдран.

Однако он оказался слишком неустойчив и в свободном виде не получен. Тем не менее, удалось синтезировать некоторые его производные, например тетра(триметилсилил) тетраэдран, в котором атомы водорода замещены на объёмные группы $Si(CH_3)_3$.



Объёмная модель тетра(триметилсилил) тетраэдрана $C_4(\mathrm{SiC_3H_9})_4$



Молекула кубана C_8H_8

Эти группы защищают углеродный скелет от самопроизвольного превращения в другие углеводороды, поэтому данное производное тетраэдрана вполне устойчиво.

Также устойчив и углеводород в форме куба. Он имеет формулу C_8H_8 и называется кубан. Кубан был получен в 1964 г. 13-стадийным синтезом.

2. Некоторые математические проблемы, связанные с биологическими исследованиями

До сих пор мы все время говорили о возможностях и перспективах применения математических методов для нужд биологии. Но не менее важна и «обратная связь» - влияние биологических исследований на развитие математики, на возникновение новых математических проблем. За последние десятилетия это влияние биологии на математическую проблематику стало достаточно существенным. В этом заключительном разделе нашего краткого очерка мы рассмотрим некоторые математические проблемы, возникшие полностью или в значительной мере в связи с теми или иными биологическими исследованиями.

Проблемы надежности и скорости. Одно из замечательных свойств живых систем - это их надежность. Еще сравнительно недавно старые кадровые артиллеристы, сетуя на замену в артиллерии конной тяги механической, выдвигали в качестве основного аргумента то, что живое существо - лошадь - гораздо надежнее в работе, чем самый совершенный механизм. Вместе с тем элементы, из которых строится живая система,- отдельные клетки - вовсе не обладают такой уж большой надежностью. Их ответы на те или иные воздействия довольно неустойчивы, а сами клетки легко разрушаются. Это положение обратно тому, с которым мы обычно встречаемся в технических системах. Там, как правило, усложнение конструкции требует для обеспечения работоспособности системы все большей надежности отдельных ее элементов. Например, если в радиоприемнике имеется пять ламп, каждая из которых служит в среднем 1000 часов, то такое устройство можно считать достаточно надежным. А если взять ламповую вычислительную машину (в настоящее время такие машины почти совсем вышли из употребления, но в 50-х годах они были широко распространены), содержащую несколько тысяч ламп, то при той же надежности этих элементов машина в целом весьма ненадежна, поскольку в среднем через каждые 10-15 минут какая-то из ламп в машине перегорает, а при этом машина выходит из строя.

Какими же способами в живых организмах достигается такая надежность системы, которая существенно превосходит надежность составляющих ее элементов? Как математическая проблема этот вопрос впервые был рассмотрен Дж. Нейманом. Изучая сети, составленные из элементов, каждый из которых может с некоторой вероятностью «не сработать», он показал, что вероятность «несрабатывания» такой сети в целом можно, при соответствующей организации ее работы, сделать сколь угодно малой. Например, если имеется достаточно большой запас ненадежных выключателей, каждый из которых с некоторой вероятностью $\varepsilon *$ не замыкает сеть в положении «включено» и с той же вероятностью не размыкает ее в положении «выключено», то из них можно собрать схему, которая будет работать как выключатель, имеющий сколь угодно малую вероятность ошибки.

(При этом следует полагать, что $\varepsilon < \frac{1}{2}$, так как если $\varepsilon > \frac{1}{2}$, то это просто означает, что положения «включено» и «выключено» нужно поменять местами, а при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ изменение положения выключателя вообще не играет никакой роли и из таких выключателей ничего разумного собрать нельзя)

В такого рода схемах надежность достигается применением процедуры, аналогичной «принятию решения большинством голосов». При этом, однако, увеличение надежности достигается за счет возрастания числа элементов, составляющих сеть. По-видимому, нет достаточных оснований считать, что принципы, найденные Дж. Нейманом для построения надежных схем из ненадежных элементов,- единственные, с помощью которых может быть решена задача обеспечения надежности, и что именно так она решается в живых системах. Таким образом, вопрос о тех общих принципах, которые обеспечивают надежность живых систем, еще далеко не решен.

Проблема надежности, о которой мы упомянули, родственна в известной мере другой проблеме, которую можно назвать проблемой скорости. Как известно, современная вычислительная машина производит арифметические операции со скоростью несравненно большей, чем человек. Тем не менее при решении некоторых задач человеческий мозг вполне может конкурировать по скорости с самой быстродействующей машиной. Предположим, человеку задается вопрос: «Смотрели ли Вы вчера в телескоп?». Как правило, для ответа на этот вопрос человеку достаточно доли секунды. (Может быть, лишь астроном-наблюдатель, для которого смотреть в телескоп - обычное, но все же не ежедневное занятие, задумается на больший срок). При этом человек вовсе не должен вспоминать в деталях весь свой вчерашний день (встал, умылся, позавтракал и т. д.), чтобы дать верный ответ. Он сразу же использует некоторую более общую информацию (например: «никогда в жизни не смотрел в телескоп» или: «смотрел, но это было очень давно»). А для машины нет аналогичных способов быстрого получения ответа. Если мы хотим выяснить, не записана ли в ее памяти (неизвестно, в каком месте) какая-либо определенная информация, то у нас нет иного способа, как перебрать по очереди все ячейки ее памяти. Обследование каждой отдельной ячейки делается быстро, однако при большом объеме памяти весь процесс такого последовательного поиска займет немало времени.

С тем обстоятельством, что человеческий мозг успешно справляется с задачами, требующими, казалось бы, перебора столь большого числа вариантов, что это затруднительно даже для электронной машины, мы сталкиваемся в самых разнообразных случаях, например при игре в шахматы. Хороший шахматист «видит» все возможности игры на несколько ходов вперед и безошибочно рассчитывает многоходовые комбинации, учитывая все возможные варианты. Как показывает несложный подсчет, если при этом действительно перебирать все допустимые правилами игры собственные ходы и все возможные ответы противника, то такой перебор окажется непосильным даже для самых быстрых электронных машин. Высказываемое иногда предположение, что в мозгу на самом деле происходит весьма быстрая, но не контролируемая нашим сознанием переработка информации, представляется маловероятным, так как для этого нужно было бы предположить существование в нервных клетках каких-то неизвестных нам и необычайно быстрых физико-химических процессов (ведь обработка информации - обязательно материальный процесс). Следовательно, экономия времени в такого рода ситуациях достигается не за счет каких-либо сверхбыстрых процессов, а за счет применения методов обработки информации, существенно отличных от полного перебора. В последнее время в связи с развитием так называемого эвристического программирования, т. е. применения вычислительных машин к решению разного рода не вычислительных задач (сюда относится и составление программ для игры в шахматы), был выполнен ряд исследований, посвященных различным методам, повышающим эффективность перебора возможных вариантов с целью выбора наилучшего. Полученные при этом математические результаты позволили, например, реализовать на сравнительно медленной вычислительной машине М-20 такую программу для игры в шахматы, которая для каждого хода проделывает анализ на 5 полу ходов вперед (т. е. оценивает положение, возникающее после трех собственных ходов и двух ответов противника). Такую программу на машине М-20(да и на более быстродействующей) заведомо невозможно реализовать, если пользоваться лишь методом полного перебора всех возможных вариантов.

Математические результаты, относящиеся к исследованию наиболее эффективных методов обработки и использования больших массивов информации, представляют существенный интерес. Однако то, что сделано в этом направлении до сих пор, не дает еще достаточно ясного ответа на вопрос о том, как справляются с такого рода задачами живые системы. Таким образом, наряду с парадоксом о надежных системах, построенных из ненадежных элементов, живые организмы приводят нас еще к одному парадоксу, который можно сформулировать так: быстрые системы, построенные из медленных элементов.

Автоматы в случайных средах. Одно из важных качеств живых систем состоит в том, что можно назвать целесообразностью их поведения. Каждое живое существо действует так, чтобы обеспечить себе возможно более благоприятные условия (ищет пищу, уклоняется от опасности и т. д.). Естественно, возникает желание построить формальную математическую модель того, что мы называем целесообразностью поведения. Это было осуществлено М. Л. Цетлиным в развитой им теории поведения автоматов в случайных средах. Попытаемся кратко изложить основные идеи этой теории.

Под автоматом, или, точнее, конечным автоматом, понимается некоторое устройство А, обладающее следующими свойствами:

1.Это устройство имеет некоторое фиксированное число состояний s_1, s_2,.., s_n. В каждый момент времени автомат находится в одном из этих состояний;

2.Автомат может производить некоторое число действий φ_1, φ_2,.., φ_l; выбор действия определяется состоянием автомата;

3.Автомат может получать от внешней среды некоторое число различных сигналов $f_1, f_2, .., f_k$ и в зависимости от получаемого сигнала менять свое состояние.

Рассмотрим тот простейший случай, когда входной сигнал, получаемый автоматом от внешней среды, принимает только два значения: $f=1$ и $f=0$, которые мы условно назовем «поощрением» и «штрафом» (или «отсутствием поощрения»).

Мы скажем, что автомат A находится в стационарной случайной среде, если действия автомата и сигналы, получаемые им от внешней среды, связаны следующим образом: в ответ на действие φ_α, совершаемое в момент времени t, автомат в момент $t+1$ с вероятностью p_α получает поощрение, а с вероятностью $q=1-p_\alpha$ получает штраф. Если автомат совершает все свои действия с одной и той же вероятностью и независимо от воздействия среды, то математическое ожидание его выигрыша (за один такт работы) равно

$$\frac{1}{l}(p_1 + p_2 + \ldots + p_e).$$

где l - число действий. Далее очевидно, что при любом поведении автомата математическое ожидание его выигрыша заключено между $\min p_\alpha$ (что соответствует непрерывному? повторению самого невыгодного действия) и $max p_\alpha$ (что отвечает? на выгоднейшему действию). Если бы вместо автомата действовал человек, который знал бы величины p_α, то его тактика была бы очевидна: он все время повторял бы то действие, которому отвечает максимальное p_α, и получал бы (в среднем) максимальный возможный выигрыш, равный $max p_\alpha$. Но мы рассматриваем не человека, а автомат, который такими сведениями не располагает, а может лишь в зависимости от получаемых от среды сигналов переходить из одного состояния в другое и, следовательно, менять свои действия. То, как автомат меняет свои состояния (а следовательно, и действия) в ответ на сигналы среды, называется тактикой автомата. Мы скажем, что автомат обладает целесообразной тактикой, если математическое ожидание его выигрыша больше, чем $\frac{1}{l}(p_1 + p_2 + \ldots + p_l)$, т. е. больше, чем выигрыш, отвечающий чисто случайному поведению. Нетрудно указать примеры автоматов, обладающих целесообразным поведением. Более того, можно доказать следующее утверждение: если среда (т. е. вероятности p_α) задана, то для каждого положительного числа ε можно построить такой автомат, что математическое ожидание его выигрыша будет меньше, чем на ε отличаться от $max p_\alpha$, т. е. от максимально возможного выигрыша.

(Величины p_α и q_α зависят от состояния автомата, но не зависят от момента времени t. В этом и состоит смысл термина «стационарная» среда. Время мы здесь для удобства считаем не непрерывным, а дискретным)

Приведем элементарный пример автомата, обладающего целесообразным поведением. Пусть автомат $A_{2,2}$ имеет два состояния s_1 и s_2 и два действия (φ_1 и φ_2, причем в состоянии s_1 совершается действие φ_1, а в состоянии s_2 - действие φ_2. Пусть тактика этого автомата состоит в том, что при получении поощрения она сохраняет свое состояние, а при штрафе - меняет. Если в соответствии с введенными выше обозначениями p_1 и $q_1=1-p_1$ - вероятности поощрения и штрафа в первом состоянии, а p_2 и $q_2=1-p_2$ - аналогичные вероятности для второго состояния, то, как нетрудно показать, наш автомат (независимо от своего состояния в начальный момент) будет на протяжении длительного промежутка времени с вероятностью

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

находиться в состоянии s_1, а с вероятностью

$$\frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

в состоянии s_2. Так как в состоянии s_i $(i=1,2)$ математическое ожидание выигрыша равно то окончательно математическое ожидание выигрыша для нашего автомата равно

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 + p_2}.$$

Предположим, что $p_1 \neq p_2$ (если $p_1 = p_2$, то все тактики автомата дают один и тот же результат). Тогда элементарный подсчет показывает, что

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1 + p_2} > \frac{p_1 + p_2}{p_2}, i$$

т. е. наш автомат выигрывает больше, чем автомат, выбирающий свои действия случайно.

Если параметры среды (т. е. вероятности p_α) не постоянны, а меняются с течением времени случайным образом, то опять-таки можно ставить вопрос об автомате, обладающем в данной среде целесообразным поведением. Можно, например, считать, что имеются две стационарные среды и автомат случайным образом переходит из одной среды в другую. При этом ему нужно после каждого перехода «адаптироваться к новым условиям», и важно, чтобы это время адаптации было мало по сравнению со временем, в течение которого среда остается постоянной. Иначе автомат не будет успевать приспосабливаться к перемене условий существования.

Вместо взаимодействия одного автомата со средой можно рассматривать поведение коллектива взаимодействующих между собой автоматов в некоторой среде. При этом возможный выигрыш каждого автомата определяется как его собственной тактикой, так и тактикой остальных автоматов, которые по отношению к каждому фиксированному автомату тоже играют роль своего рода «внешней среды».

Мы не имеем возможности излагать здесь теорию поведения автоматов сколько-нибудь подробно. Нам хочется лишь подчеркнуть, что такое, казалось бы, далекое от математики понятие, как понятие целесообразности поведения живого организма, на самом деле, при соответствующей его формализации, приводит к постановке точных задач и к интересным и важным математическим результатам.

Метод оврагов. Задача о «разумном» или «целесообразном» функционировании той или иной системы, биологической или технической, родственна, По существу, чисто математической задаче об отыскании экстремума (для определенности, скажем, минимума) некоторой функции многих переменных. Действительно, обычно можно бывает связать с системой некоторую функцию Ф (оценочную функцию) так, чтобы ее минимум отвечал тому состоянию системы, которое с некоторой точки зрения является оптимальным.

Если бы оценочная функция, о которой идет речь, была задана какой-то формулой, то для нахождения ее минимума можно было бы воспользоваться хорошо известным из анализа приемом: продифференцировать эту функцию по каждому из аргументов, приравнять эти производные нулю и решить полученную таким образом систему уравнений*. Однако в задачах, связанных с физиологией, мы обычно не можем дать аналитического выражения для оценочной функции. Поэтому поиск ее минимума должен, по необходимости, сводиться к серии проб, или чисто случайных, или подчиненных определенной тактике. Так как наша оценочная функция, вообще говоря, меняется со временем (то состояние, которое благоприятно для системы в данный момент, может оказаться непригодным для нее в дальнейшем в силу изменения окружающих условий), то процесс отыскания ее минимума должен повторяться многократно и не быть слишком длительным (иначе существенное изменение ситуации произойдет раньше, чем мы закончим поиск). Какие же возможны разумные тактики такого поиска?

Если о функции $\Phi = \Phi(x_1\, x_2,\ ..,\ x_n)$ нам ничего не известно, то для отыскания ее минимума нельзя предложить ничего лучшего, чем так называемый слепой поиск, состоящий в том, что различные точки в пространстве параметров просматриваются в том или ином случайном порядке. В каждой из выбираемых точек находится значение оценочной функции и поиск прекращается тогда, когда находится значение, не превосходящее некоторого допустимого предела. После того как, в силу изменения оценочной функции во времени, ее значение в данной точке превысит допустимый предел, поиск возобновляется. Ясно, что такой поиск, особенно в случае большого числа параметров, может быть весьма продолжительным. Например, если бы человек обучался координации движений при ходьбе с помощью «слепого поиска», то скорее всего он не научился бы ходить до конца жизни.

Если оценочную функцию можно считать непрерывно зависящей от параметров, то для отыскания ее минимума можно применять различные методы локального поиска, общей основой которых служит следующая идея: изучив поведение функции в окрестности некоторой точки, мы устанавливаем, в каких направлениях функция убывает, и в соответствии с этим перемещаемся в новую точку. Например, определяем в данной точке направление наибыстрейшего убывания функции и затем сдвигаемся в этом направлении на определенное расстояние (так называемый «градиентный метод»). Однако во всех таких процессах локального поиска существует опасность «зацикливания», т. е. блуждания в окрестности какой-то локальной «ямы», в которой значения функции меньше, чем в близлежащих точках, но весьма далеки от абсолютного минимума.

Опасность такого зацикливания делает существенным использование тех или иных методов нелокального поиска. Однако для того чтобы получить на этом пути результаты, существенно лучшие, чем слепой поиск, нужно, чтобы наша функция была соответствующим образом организована. Поясним смысл этого, рассмотрев так называемый «метод оврагов», предложенный для отыскания экстремумов функций многих переменных И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным. Идея этого метода возникла на основе изучения особенностей поведения живых систем.

Предположим, что переменные, от которых зависит функция Ф, могут быть разбиты на две группы, скажем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, .., y_k$. Допустим, что большинство переменных входит в первую группу и что изменение значений этих параметров заметно меняет значение функции Ф. Эти переменные мы назовем несущественными. Вторая группа включает небольшое число переменных (может быть, всего 2-3) и от них функция Ф зависит сравнительно слабо. Эти переменные называются существенными. То обстоятельство, что изменение несущественных переменных достаточно резко сказывается на значении оценочной функции, позволяет сравнительно просто подобрать подходящие значения этих переменных; поэтому основные затруднения при отыскании экстремума связаны с наличием существенных переменных (именно этим и объясняется та на первый взгляд несколько нелогичная терминология, которую мы ввели). Конечно, не всякая функция многих переменных допускает такое разбиение параметров на существенные и несущественные. Однако для многих функций, возникающих из практических задач, такое положение имеет место. В частности, с такой ситуацией приходится встречаться в задачах координации движений. Грубая схема того или иного движения (бег, прыжок, плавание, удар ракеткой по мячу и т. д.) усваивается человеком, как правило, сравнительно легко (на нашем языке - легко находятся нужные значения «грубых», несущественных параметров этого движения), после чего начинается трудная и кропотливая «отработка техники», совершенствование деталей этого движения (т. е. выбор оптимальных значений существенных параметров).

Разумеется, и в тех случаях, когда рассматриваемая функция обладает «организацией» в указанном выше смысле, мы не можем заранее выделить существенные и несущественные параметры, а лишь исходим из возможности такого выделения. Само же выделение существенных и несущественных переменных должно происходить автоматически, в процессе отыскания экстремума.

Таковы те общие соображения, которые были положены в основу «метода оврагов». Сам этот метод состоит в следующем. Сперва в пространстве переменных выбираем некоторую произвольную точку Хо и, отправляясь от нее, начинаем поиск минимума каким-либо локальным способом, например спуском по градиенту. Спуск продолжается до тех пор, пока дальнейшее продвижение не станет малоэффективным, т. е. пока отношение Δ/Φ Ф(где $\Delta\Phi$ - изменение Ф за один шаг) не станет меньше некоторой заданной величины Δ. Величину Δ не надо брать слишком малой, так как там, где $\Delta\Phi/\Phi$ мало, различие между существенными и несущественными переменными исчезает и применение локального спуска приводит к блужданию, не приближающему нас к цели.

Пусть локальный спуск привел нас в некоторую точку M_0. Зафиксируем ее и выберем некоторую точку X_1 в окрестности исходной точки X_0, по отстоящую от X_0 на расстояние, существенно превышающее шаг градиентного спуска. Применив в точке X_1 локальный спуск, придем в некоторую точку M_1. После этого соединяем точки M_0 и M_1 прямой, выбираем на этой прямой точку X_2, отстоящую от точки M_0 на некоторое расстояние L, существенно превышающее первоначально выбранный градиентный шаг, и затем с шагом L производим из X_2 спуск, приводящий нас в некоторую точку M_2. Далее, по точкам M_1 и M_2 выбирается точка X_3 так же как по M_0 и M_1 выбиралась точка X_2, и процесс повторяется.

Наглядный смысл метода состоит в следующем. Разделение переменных на существенные и несущественные означает, что поверхность, определяемая рассматриваемой функцией Ф, имеет вид рельефа, прорезанного «оврагами», и мы сперва нащупываем направление такого «оврага» (прямая M_0M_1), а потом идем по дну этого оврага к возможно более низкой точке.

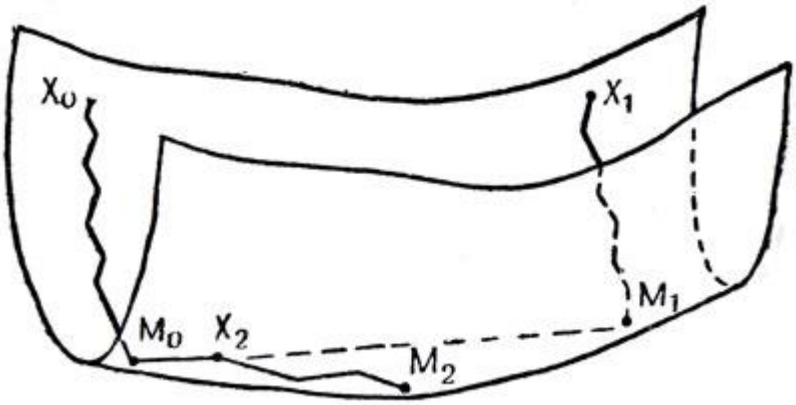


Схема «метода оврагов»

«Метод оврагов» был с успехом применен к решению ряда задач, например к изучению молекулярной структуры некоторых аминокислот по данным рентгеноструктурного анализа.

Задачи для аудитории и самостоятельные работы

1. В бронзе – сплаве меди с оловом, на долю олова приходится 20 %. Сколько весит олово, пошедшее на создание Медного всадника, если масса памятника 5 тонн? (1 тонн)

2. Найти массу 20 % раствора, в котором растворено 80 г вещества. (400 г)

3. Какова массовая доля раствора, при выпаривании 300 г которого получено 30 г соли? (10 %)

4. Рассчитать массовую долю раствора, полученного растворением 20 кг щелочи в 80 кг воды. (20 %)

5. Имеются 2 сосуда, содержащие соответственно 4 и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получается раствор, содержащий 35 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится 36 % раствор. Сколько кг содержится в каждом растворе?

6. Какую массу соли надо добавить к 500 грамм 10 % раствора соли, чтобы раствор стал 25 %?

7. Вычислить вес и процентной содержание серебра в сплаве с медью, зная, что, сплавив его с 3 килограммами чистого серебра, получат сплав, содержащий 90 % серебра, а, сплавив его с 2 килограммами сплава, содержащего 90 % серебра, получат сплав 84 % содержания серебра.

8. В колбе содержится 57 % водный раствор соли. После выпаривания 25 грамм воды раствор стал 76 процентным. Сколько ещё надо выпарить воды, чтобы содержание воды в колбе стало равным 95 %.

9. Сплав олова с медью весом 12 кг содержит 45 % меди. Сколько чистого олова надо добавить, чтобы получить сплав, содержащий 40 % меди.

10. Имеются два сплава, в первом содержится 40 % серебра, а во втором – 20 % серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30 % серебра?

Тесты по высшей математике
1-вариант

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Найти матрицу $3\cdot A+2\cdot B$.

А) $\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\ -5 & 8 & -6\end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix}3 & -5\\ 6 & 8\\ -2 & -7\end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix}3 & 6 & 2\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}$;

2. Как изменится детерминант матрицы четвертого порядка, если каждый её элемент умножить на 2?

А) увеличится в 4 раза; Б) не изменится; В) увеличится в 16 раз; Г) увеличится в 2 раза.

3. Найти сумму $x_1+x_2+x_3$, где $(x_1;\ x_2;\ x_3)$ – решение системы

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5\\ x_2+4x_3=7\\ x_3=2\end{cases}.$$

А) -2; Б) -1; В) 0; Г) 1.

4. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Укажите координаты середины стороны AB.

А) (-2; -2); Б) (0; 2); В) (2; 2); Г) (3; 2).

5. При каком значения k прямые $y=2x+4$ и $y=kx+5$ параллельны?

А) 5; Б) 2; В) -5; Г) 0,2.

6. Какие плоскости параллельны:

1. $4x-6y+3z+5=0;$
2. $2x-3y+z-5=0;$
3. $6x+8y-4z-6=0;$
4. $3x-6y+3z-6=0;$
5. $3x+4y-2z+3=0.$

А) 1 и 2; Б) 3 и 5; В) 1 и 3; Г) 2 и 4.

7. Если 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, то какой из них равен 1?

А) все, кроме 1; Б) 1 и 2; В) только 4; Г) все.

8. Производная функции $y=x\ln x$ равна.

А) $\ln(ex)$; Б) $x+\ln x$; В) $1+\frac{1}{x}$; Г) $\frac{1}{x}$.

9. Если точки x_1 и x_2 являются точками локального экстремума функции $y=(x+6)^2(5x-1),\ x\in R,$ то умножение $x_1\cdot x_2$ равно …

А) $\dfrac{58}{5}$; Б) -6; В) $-\dfrac{28}{5}$; Г) $\dfrac{56}{5}$.

10. Вычислить детерминант:

$$\begin{vmatrix} 283466 & 283478 \\ 283465 & 284477 \end{vmatrix}$$

А) 1; Б) 2; В) -1; Г) 0.

11. Найти точку пересечения прямых $x+y-3=0$ и $2x+3y-8=0$.

А) (2;1); Б) (-1;-2); В) (1;2); Г) (-2;3).

12. Определить угловой коэффициент наклонной асимптоты функции $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2}$.

А) 2; Б) 0; В) 1; Г) -1.

13. Укажите неопределённые интегралы, при нахождении которых придётся использовать один и тот же табличный интеграл.

1. $\int xdx$; 2. $\int xe^{x^2}dx$; 3. $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

А) все; Б) 1 и 2; В) 1 и 3; Г) 2 и 3.

14. Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$.

А) $e-1$; Б) e; В) $e+1$; Г) 1.

15. Решить уравнение $x\cdot(y+1)-(x^2+1)\cdot y'=0$.

А) $x^2-y^2-2y=c$; Б) $x^2+y^2+2y=c$; В) $x^2-y^2+2y=c$; Г) $x^2+y^2-2y=c$.

16. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{3}{11}+\frac{2}{7}+\ldots$$

А) $\dfrac{n}{3n+2}$; Б) $\dfrac{n}{n+5}$; В) $\dfrac{n}{5n+1}$; Г) $\dfrac{n}{3n+1}$.

17. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$ – степенной ряд, то его радиус сходимости равен…

А) 0,2; Б) 5; В) ∞; Г) 1.

18. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x).$$

А) 3; Б) 0; В) ∞; Г) 1,5.

19. Указать промежуток (или промежутки) вогнутости функции $y=-2x^3-5x^2-4x+4$.

А) $(-\infty;\ -1)\cup(-\frac{2}{3};\ +\infty)$; Б) $(-\frac{5}{6};\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ -\frac{5}{6})$; Г) $(-1;\ -\frac{2}{3})$.

20. Укажите номера нечётных функций: 1) $y=\log_4 x$; 2) $y=\sin 3x$; 3) $y=x^7-5x$.

А) только 3); Б) 2 и 3; В) только 1; Г) только 2.

2-вариант

1. Для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

найдите произведение элементов её побочной диагонали.

А) 24; Б) 48; В) 36; Г) 12.

2. Какому числу равно алгебраическое дополнение элемента a_{23} детерминанта:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}?$$

А) -14; Б) 32; В) 14; Г) 8.

3. Даны системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} 6x-3y=1, \\ 2x-y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=-2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2. \end{cases}$

Несовместной системой является:

А) 3; Б) 2; В) 1 и 2; Г) 1.

4. Угловой коэффициент прямой $2x-5y-7=0$ равен …

А) 2; Б) $\frac{2}{5}$; В) $\frac{5}{2}$; Г) -5.

5. Найти угол между плоскостями $x+2y-2z+1=0$ и $x+y-4=0$.

А) 60^0; Б) 30^0; В) 45^0; Г) 90^0.

6. Если $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2+x}{2x+1}\right)^x=A,\quad \lim\limits_{x\to 2}(1+x)^{\frac{1}{x}}=B,$ то $A-B$ равно:

А) e^2; Б) $2e$; В) $2-e$; Г) ∞.

7. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\cos 2x+\sqrt[3]{7}$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{12}$.

А) -2; Б) -1; В) $\frac{1}{12}$; Г) 1.

8. Если у графика функции $y = 4x^3 + 3x^2 + x - 1,\ x \in R,$ существует точка перегиба, то абсцисса $x = x_0$ этой точки равна…

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{4}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) точек перегиба нет.

9. Найти точку пересечения прямых $x + y - 3 = 0$ и $2x + 3y - 8 = 0.$

А) (2;1); Б) (-1;-2); В) (3;2); Г) (1;2).

10. Найти предел: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 10x}{tg 2x}.$

А) 1; Б) 5; В) 0; Г) ∞.

11. Если $F'(x) = \sin 2x$ и $F(0) = \frac{3}{2}$, то $F(\frac{\pi}{4})$ равно…

А) 1; Б) 1,5; В) 2; Г) -2.

12. Найти интеграл: $\int xe^{-x}dx.$

А) $(x+1)e^{-x} + c$; Б) $-x - e^{-x} + c$; В) $-(x-1)e^{-x} + C$; Г) $-(x+1)e^{-x} + c.$

13. Вычислить интеграл с помощью замены переменной $\int\limits_0^1 x\sqrt{5x^2+4}dx.$

А) $\frac{19}{15}$; Б) $\frac{19}{3}$; В) $\frac{38}{15}$; Г) $\frac{7}{3}$.

14. Определить объём продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \frac{3}{3t+1} + 4.$

А) 12; Б) 24; В) 6; Г) 36.

15. Вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_2^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx.$

А) -2; Б) -1; В) 1; Г) 2.

16. Общее решение уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:

А) $y = e^x + C$; Б) $y = e^{x+C}$; В) $y = x(e^x + C)$; Г) $y = e^x(x + C).$

17. $y = \cos(\sin^3 x).$ Найти y'.

А) $-3\sin(\sin^3 x)\sin^2 x\cos x$; Б) $-3\cos^2(\sin^3 x)\cos x$;

В) $-3\sin(\cos^3 x)\cos^2 x\sin x$; Г) $-\sin(\cos^3 x).$

18. Определитьколичество асимптот графика функции $y = \frac{3x^2+3x+5}{x^2+5x+6}.$

А) 1; Б) 2; В)3; Г) 0.

19. При каких значениях параметра k функция $y = 3x^2 + kx - 18$ монотонна на отрезке $[-2;3]$?

А) -3; Б) 3; В) 2; Г) 1.

20. Написать многочлен Маклорена 6-й степени для функции $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

А) $x^2-\dfrac{x^6}{6}$; Б) $x^2-\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{x^6}{3}$; В) $1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{x^6}{16}$; Г) $1+x^2+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^6}{6}$.

3-вариант

1. Укажите размерность матрицы B, которую можно умножить как слева, так и справа на матрицу

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

А) 2×3; Б) 3×2; В) 3×3; Г) 1×3.

2. Вычислить детерминант произведения двух матриц:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

А) 56; Б) -32; В) 4; Г) -4.

3. При каком значении a система

$$\begin{cases}4x+a^2y=12\\ x+y=a+1\end{cases}$$

не имеет решений?

А) 2; Б) -1; В) 0; Г) -2.

4. Ордината точки пересечения прямой $3y-4x+6=0$ с осью Oy равна…

А) -2; Б) 3; В) -6; Г) $\dfrac{4}{3}$.

5. Какое уравнение определяет плоскость xOz.

А) $x=0$; Б) $y=0$; В) $z=0$; Г) $x=z$.

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-5}{x^2+3x-4}$.

А) -2; Б) -1; В) 2; Г) 0.

7. Вычислить производную функции $y=4x\sqrt[4]{x}+3\sin 1$ в точке $x=16$.

А) -5; Б) 1; В) 5; Г) 10.

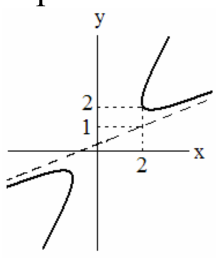
8. Дана производная функции $f(x)$: $f'(x)=(x-2)(x-3)$. Если x_0 – точка максимума функции $f(x)$, то x_0 равно:

А) 3; Б) 2; В) -3; Г) -2.

9. Вычислить производную функции $y=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ в точке $x=0$.

А) $\dfrac{1}{2}$; Б) $\dfrac{1}{4}$; В) 1; Г) $\dfrac{1}{8}$.

10. Чему равен угловой коэффициент асимптоты гиперболы, изображенной на рисунке?



А) 2; Б) 1; В) $\frac{1}{2}$; Г) 4.

11. Найти интеграл: $\int x\cos 3x dx.$

А) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x+C$; Б) $x\sin 3x+\cos 3x+C$;

В) $\sin 3x+C$; Г) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$

12. Вычислить $\int\limits_{8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

А) 3; Б) 4; В) 2; Г) 1.

13. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx.$

А) 1; Б) расходится; В) e; Г) $e-1$.

14. Общее решение уравнения $y''-y'-12y=0$ имеет вид:

А) $y=e^{-x}(C_1x+C_2)$; Б) $y=e^{-3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$;

В) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{4x}$; Г) $y=e^{4x}(C_1x+C_2)$.

15. Для каких из рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctgn$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{5n^2-3}$, 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда?

А) 4; Б) 1, 2, 4; В) 2, 3, 5; Г) 1, 2, 3, 5.

16. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,$ $x=2\pi.$

А) 1; Б) 2; В) 4; Г) 3.

17. Уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ является характерисческим уравнением дифференциального уравнения…

А) $y''-2y'+1=0$; Б) $y''-2y'+y=0$; В) $y''-2y'=0$; Г) $y''-2y'+y=x$.

18. Если ряд из абсолютных величин знакочередующегося ряда сходится, то знакочередующийся ряд. Выберите один ответ:

А) сходится условно; Б) может как сходится условно, так и расходиться;

В) сходится абсолютно; Г) расходится

19. Интервалы монотонного убывания функция $y = x^3 - 3x^2$ равны…

А) $(0;3)$; Б) $(-2;2)$; В) $(1;2)$; Г) $[0;2]$.

20. У заданной функции $y = \dfrac{2x-1}{x^2-8x+15}$ …

А) точками разрыва являются 2, 4; Б) точками разрыва являются 0, 2;
0 В) точками разрыва являются 1, 2; Г) точками разрыва являются 3, 5.

4-вариант

1. Найти элемент c_{32} матрицы $C = A \cdot B,$ если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

А) 20; Б) -10; В) 0; Г) 10.

2. Вычислить детерминант $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

А) 9; Б) 39; В) 9; Г) -39.

3. Какое из уравнений:

1) $x + y = 1,$

2) $x - y = 0,$

3) $2x + 2y = 0$

можно приписать к уравнению $x + y = 0,$ чтобы составить совместную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $x, y.$

А) любое; Б) никакое; В) только 1); Г) только 3).

4. Уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой 3, а ось Oy в точке с ординатой 8 имеет вид…

А) $y = 3x + 8$; Б) $8y = x + 3$; В) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{8} = 1$; Г) $3x + 8y = 0.$

5. Даны две точки $M(2;-1;3)$ и $N(4;-2;-1).$ Какая плоскость проходить через точку M перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$?

А) $2(x-2)+(y+1)+4(z-3)=0$; Б) $2(x-4)-(y+2)-4(z+1)=0$;
В) $2(x-2)-(y+1)-4(z-3)=0$; Г) $3(x-2)-(y+1)-4(z-3)=0.$

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{x+9}-3}.$

А) 24; Б) -4; В) -2; Г) 0.

7. Вычислить производную функции $y = x^3 \ln x$ в точке $x = 1$.

А) -3; Б) 3; В) 1; Г) 0.

8. Дана производная функции $f(x)$: $f'(x) = x(3 - x)$. Найдите абсциссу точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

А) 3; Б) -3; В) 1,5; Г) -1,5.

9. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{2x}{3x - 2}$ является прямая:

А) $x = 2$; Б) $y = 3x - 2$; В) $x = \dfrac{2}{3}$; Г) $x = -\dfrac{2}{3}$.

10. Вычислить A^3, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

А) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 27 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

11. Если $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ и $f(1) = 0$, то $f(-1)$ равно…

А) -1; Б) 2; В) 1; Г) -2.

12. Найти неопределённый интеграл $\int 2\sin(3 - 2x)dx$.

А) $\cos(3 - 2x) + C$; Б) $\dfrac{1}{2}\cos(3 - 2x) + C$;

В) $-\cos(3 - 2x) + C$; Г) $-4\cos(3 - 2x) + C$.

13. При помощи формулы интегрирования по частям вычислить определённый интеграл $\int_0^{\pi} x \sin\dfrac{x}{2}dx$.

А) 2; Б) 4; В) 1; Г) 0.

14. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}$.

А) e; Б) 1; В) расходится; Г) -1.

15. Общее решение уравнения $y' + 2xy = 0$ имеет вид $y = Ce^{-x^2}$. Частным решением данного уравнения, удовлетворяющим условию $y = 1$ при $x = 1$, является:

А) $y = e^{-x^2}$; Б) $y = e^{-x^2+1}$; В) $y = e^{-x^2+2}$; Г) $y = e^0$.

16. Частным решением уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющим условиям $y = 2$, $y' = 1$ при $x = 0$, является:

А) $y = 2e^x$; Б) $y = e^x(x + 2)$; В) $y = e^{-x} + e^x$; Г) $y = e^x(2 - x)$.

17. Для каких из рядов 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{n^3+4}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$; является знак постоянными?

А) 2, 4; Б) Для всех; В) 3; Г) 1, 4.

18. Какой из данных рядов сходится условно?

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6n+5}{n}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$; Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n}$.

19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6\sqrt{x}+4$, $y=0$, $x=0$, $x=4$.

А) 24; Б) 36; В) 48; Г) 12.

20. Формула общего члена ряда $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+...$ имеет вид…

А) $a_n = \frac{1}{2n}$; Б) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; В) $a_n = \frac{(-1)}{2^n}$; Г) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+2}$.

5-вариант

1. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Обратной к ней является:

А) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить детерминант $\det A^{-1}$ обратной матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

А) 2; Б) 1; В) $\frac{1}{2}$; Г) 0.

3. Какая из однородных систем имеет множество решений?

А) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-3y=4 \end{cases}$; Б) $\begin{cases} x+4y=0 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$; В) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$; Г) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$.

4. При каком значении k прямые $y = 2x+4$ и $y = kx-3$ перпендикулярны?

А) -2; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) 2.

5. Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$ и $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{0}$.

А) 30^0; Б) 45^0; В) 60^0; Г) 90^0.

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{tgx}$.

А) 4; Б) -2; В) 0; Г) 1.

7. Горизонтальной асимптотой графика функции $y=\frac{2x}{3x-2}$ является прямая:

А) $x=2$; Б) $y=3x-2$; В) $y=\frac{2}{3}$; Г) $x=\frac{2}{3}$.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;\,7)$ и параллельной прямой $3x-4y-10=0$.

А) $3x+4y+37=0$; Б) $3x-4y+37=0$; В) $4x-3y+38=0$;
Г) $4x+3y-36=0$.

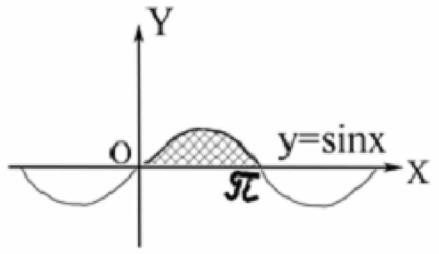
9. Найти $\int 9\sqrt{3x-2}dx$.

А) $2(3x-2)^{\frac{1}{2}}$; Б) $2x^3+C$; В) $2(3x-2)^{\frac{3}{2}}+C$; Г) $6(3x-2)^{\frac{3}{2}}+C$.

10. Найти неопределённый интеграл $\int\frac{dx}{4x^2-25}$.

А) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$; Б) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$; В) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$;
Г) $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{2x-5}{2x+5}\right|+C$.

11. Рассмотрев рисунок, вычислите площадь S заштрихованной фигуры.



А) 1; Б) 4; В) 3; Г) 2.

12. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

А) $\frac{3}{2}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{5}{2}$; Г) $-\frac{3}{2}$.

13. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

А) $y'+p(x)y^2=q(x)$; Б) $y''+p(x)y=q(x)$; В) $y'+p(x)y=q(x)$;

Г) $y=ax+b$.

14. С помощью интегрального признака установить, какие из перечисленных рядов сходятся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n}$.

А) 1 и 2; Б) все, кроме 3; В) только 1; Г) 1 и 3.

15. Среди перечисленных рядов гармоническим рядом называется:

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; Г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

16. Вычислить приближенно значение выражения $36\sin 1$, ограничиваясь суммой первых двух членов ряда Маклорена.

А) 30; Б) 36; В) 0; Г) 18.

17. Для каких рядов 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n}$ является знак постоянными?

А) 1, 2, 3; Б) 2, 4, 5; В) все; Г) 3, 4, 5.

18. Вычислит предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x-4\ln(1+\sin 3x)}{\arcsin 3x}$.

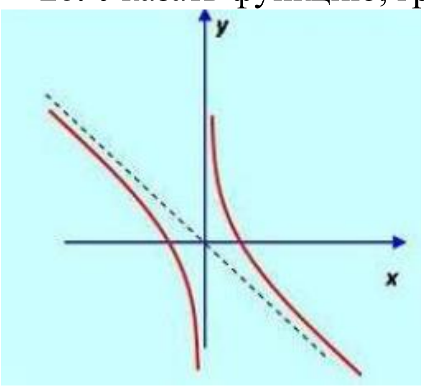
А) $-\frac{1}{10}$; Б) $-\frac{8}{3}$; В) $-\frac{1}{3}$; Г) $\frac{2}{3}$.

19. Определить типы асимптот графика функции $y=x\sqrt{\frac{x+4}{x+3}}$.

А) только вертикальная; Б) вертикальная и наклонная;

В) только горизонтальная; Г) вертикальная и горизонтальная.

20. Указать функцию, график которой приведен на рисунке.



Выберите один ответ:

А) $y=\frac{x^2+1}{x}$; Б) $y=\frac{x^2-1}{x}$; В) $y=\frac{x+1}{x}$; Г) $y=\frac{1-x^2}{x}$.

Ответами:

1-вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	Г	В	Б	Б	Б	А	А	Г	Г	В	Б	А	А	А	А	А	В	В	В

2-вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	В	В	Б	Г	В	Б	Г	Г	В	В	Г	Б	А	В	Г	А	Б	А	В

3-вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
А	В	Г	А	Б	В	Г	А	В	В	Г	Г	Б	В	Г	Б	А	Б	Г	Г

4-вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
В	А	Г	А	В	А	В	В	В	А	Б	А	Г	В	Б	А	А	А	В	Б

5-вариант

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Б	А	Б	Б	Г	А	Г	А	В	В	Г	А	В	А	В	В	В	Б	Б	Г

Список литературы

1. А. Д. Кутасов, Т. С. Пиголника, В. И. Чехлов, Т. Х. Яковлева. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1985. – 484 с.

2. В. П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. – 362 с.

3. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Московского университета Издательства ЧеРо, 1997. – 625 с.

4. Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.

5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – М.: Наука, 1973. – 616 с.

6. Ю. С. Очан. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. - М.: Наука, 1965. – 231 с.

7. П. С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

8. О. Н. Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 245 с.

9. И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1967. – 385 с.

10. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

Б.Э. ХУСЕНОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

(для естественных направлений)

Учебное пособие

Muharrir:	*G`.Murodov*
Texnik muharrir:	*G.Samiyeva*
Musahhih:	*A.Qalandarov*
Sahifalovchi:	*M.Ortiqova*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 08.07.2020. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog`ozi. Bosma tobog`i 12,0. Adadi 100. Buyurtma №96.

Buxoro viloyat Matbuot va axborot boshqarmasi
"Durdona" nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

"Sadriddin Salim Buxoriy" MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko`chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45