SCIENTIFIC EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER
of VOLGA FEDERAL DISTRICT
BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE of MATHEMATICS of UFRC of RAS
STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE OF RAS

«FUNCTION THEORY, OPERATOR THEORY AND QUANTUM INFORMATION THEORY»

Book of abstracts
of the International Conference
October 4 – 7, 2021

UFA–2021

Достижимая информация квантового гауссовского ансамбля состояний

@ Холево А.С.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г.Москва, Россия

Достижимая информация квантового ансамбля состояний, которая является одной из базовых величин в квантовой теории информации [1], [2], определяется как максимальное количество информации Шеннона, которое может быть получено путем всевозможных квантовых измерений над данным ансамблем. В настоящей работе достижимая информация вычислена для общего квантового гауссовского ансамбля состояний при выполнении определенного "порогового условия" [3]. Показано, что максимизирующее измерение является гауссовским и представляет собой далеко идущее обобщение процедуры оптического гетеродинирования. Это существенно расширяет предыдущий результат [4], касающийся калибровочно-инвариантного случая. Предложено простое достаточное условие, которое влечет пороговое условие для общего гауссовского ансамбля. Результаты проиллюстрированы на примере одной бозонной моды.

[1] Нильсен М. А., Чанг И., Квантовые вычисления и квантовая информация, М.: Мир, 2006.

[2] Холево А. С. Квантовые системы, каналы, информация, М.: МЦНМО, 2010. http://www.mcnmo.ru/free-books/holevo-quantum.pdf

[3] Holevo A. S. "Accessible information of a general quantum Gaussian ensemble". https://arxiv.org/pdf/2102.01981.pdf

[4] Holevo A. S. "Gaussian maximizers for quantum Gaussian observables and ensembles," IEEE Trans. Inform. Theory **66**:9, 5634-5641 (2020).

Boundary uniqueness theorem for $A(z)$-analytic functions

@ Husenov B.E.

Bukhara state university, c.Bukhara, Uzbekistan

Let $A(z)$ be some function in the domain $D \subset \mathbb{C}$. We introduce the operator: $\partial_A = \partial - \bar{A} \cdot \bar{\partial}$, where ∂ is the differentiation operator by z, and $\bar{\partial}$ is the differentiation operator by $\bar{z}$.

Definition 1.[1] If for a differentiable function $f(z)$ in the D :

$$\bar{\partial_A} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

then such a function $f(z)$ is called an $A(z)-$analytic function and we will denote it is a $f \in O_A(D)$, where $|A(z)| \le C < 1, C =$const, $A(z)-$antianalytic: $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$. Equality (1) is called the Beltrami equation. If in the domain of $D : \partial_A f = \frac{\partial f}{\partial z} - \bar{A}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, then the $f(z)$ function $A(z)-$antianalytic function.

The set $L(a;r) = \left\{ |\psi(z;a)| = \left| z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a;z)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < r \right\}$ is open in D. For sufficiently small $r > 0$ it compactly belongs to D and contains the point a. This set is called $A(z)-$lemniscate with center a and denoted by $L(a;r)$. It is simply connected domain.

Let $A(z)$ is anti-analytic, $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = 0$ in D.

Definition 2. $F(z)$ a function is called belonging to the Hardy class if the function satisfies the following inequality in the lemniscate $L(a;r)$:

$$H_A^p(f) = \lim_{\rho \to r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| < \infty, \quad (2)$$

where $z \in \partial L(a;\rho), 0 < \rho < r, p > 0$.

The Hardy class in the domain of D $A(z)-$analytic functions is denoted as $H_A^p(D)$.

When studying the boundary properties of functions of a complex variable the fundamental value has the property of uniqueness of its definition by boundary values. Let us first consider this property for $A(z)-$analytic bounded functions.

Proposition 1. If the $f(z)-$function, $A(z)-$analytic and bounded in the lemniscate $L(a;r)$, tends along the radius to the value zero on the set of points $M \subset \partial L(a;r)$ of a positive Lebesgue measure, then $f(z)$ is identically equal to zero.

If $f(z) \in H_A^1(L(a;r))$, then the angular limit of $f(\varsigma) = \lim\limits_{\substack{z \to \varsigma \\ \measuredangle}} f(z)$ exists and is finite for almost all $\varsigma \in \partial L(a;r)$. It particular, it is true:

Result. If the $A(z)-$ analytic function $f(z)$ is bounded in the lemniscate $L(a;r)$, then it has angular limit values almost everywhere on $\partial L(a;r)$.

Proposition 2. Let $f(z) \in H_A^1(L(a;r))$. Suppose that for some set $M \subset \partial L(a;r)$ of the Lebesgue positive measure $f(\varsigma) = 0$ at $\varsigma \in M$. Then $f(z) \equiv 0$.

Now we show that the analog of the Lusin-Privalov theorem is $A(z)-$analytic function.

Theorem(analogue of the Lusin-Privalov theorem). Let $f(z) \in O_A(L(a;r))$. Suppose that M is the of a Lebesgue positive measure on the boundary of $\partial L(a;r)$, such that

$$\lim_{\substack{z \to \varsigma \\ \measuredangle}} f(z) = 0,$$

where $\varsigma \in M$. Then the $f(z)$ functions identically equal to zero.

[1] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Москва.: Гостехиздат, 1950.

[2] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. Москва.: Мир, 1984.

[3] Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions//J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016. Volume 9, Issue 3. 374-383 p.

Один случай задачи Римана для обобщенных аналитических функций с сингулярным коэффициентом

@ Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Россия.

В плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$ рассмотрим верхнюю полуплоскость $E^+ = \{z : Im\ z > 0\}$, нижнюю полуплоскость $E^- = \{z : Im\ z < 0\}$, и вещественную ось $\Gamma = \{z : Im\ z = 0\}$. В областях E^+ или E^- рассмотрим обобщенную систему Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z),\ A(z) = \frac{a(z)}{\bar{z} + z},\ a(z), F(z) \in C(\overline{\mathbb{C}}). \qquad (1)$$

Следуя [1],[2] мы будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в E^+ (E^-) функция $a_0^+(z)$ ($a_0^-(z)$), что

$$A_0^{\pm}(z) := \frac{a(z) - a_0^{\pm}(z)}{\bar{z} + z} \in L^p(E^{\pm}),\ F(z) \in L^p(E^{\pm}),\ p > 2.$$

Граничные значения функций $a_0^{\pm}(z)$, т.е. функции $a_0^+(t)$, $a_0^-(t)$ будем считать непрерывными по Гёльдеру на вещественной оси Γ, включая окрестность бесконечно удаленной точки.

Кроме того, на функции $a_0^{\pm}(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$|a_0^{\pm}(z) - a_0^{\pm}(-\bar{z})| \le K(x, y)(|z + \bar{z}|^{\alpha}), \quad \alpha < 1,$$
$$a_0^{\pm}(x) = a_0^{\pm}(\infty) + O(|x|^{-\beta}), \quad \pm x \to +\infty,\ \beta > 0;$$

кроме того, положим что $a_0^{\pm}(0) = \beta_0^{\pm} + i\beta_0^{\pm}$, $a_0^{\pm}(\infty) = \beta_{\infty}^{\pm} + i\beta_{\infty}^{\pm}$. Привлекая идеи работ [1],[2] выведем формулу общего решения системы (1):

$$U^{\pm}(z) = e^{\Omega^{\pm}(z)}[(T(e^{-\Omega^{\pm}}F^{\pm}))(z) + \phi^{\pm}(z)],\ z \in E^{\pm},$$

$$\Omega^{\pm}(z) = (TA_0^{\pm})(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{a_0^{\pm}(t)\ln|t + \bar{t}|}{t - z}dt + a_0^{\pm}(z)\ln|z + \bar{z}|. \qquad (2)$$