BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
1930

ISSN 2181-6833

PEDAGOGIK MAHORAT

MS
2022

ISSN 2181-6833
9 772181 683301

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2022-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2022

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2022, MAXSUS SON

Jurnal O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo'yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA

ЖАЛОЛОВ Озоджон Исомидинович
доцент Бухарского государственного университета

БАРНОЕВА Зубайда Эркин кизи
магистрант Бухарского государственного университета

ИСОМИДДИНОВ Бекзоджон Озоджон угли
студент Бухарского государственного университета

УДК 517.518.644

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах.

При исследовании наилучших формул приближённого интегрирования, в первую очередь, возникает вопрос о существовании таких формул. Этот вопрос исследован весьма полно, хотя и является достаточно сложным, о чём свидетельствует обзор статей, где было достигнуто существенное продвижение в его решении. В работе рассматриваются весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и найдены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита и с использованием необходимого условия экстремума.

Ключевые слова: *квадратурная формула, функциональная погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональное пространство, экстремальная функция.*

DAVRIY SOBOLEV FUNKSIYALARI FAZOSIDA $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL VAZNLI KUADRATUR FORMULALARNI TUZISH METODLARI

Taqribiy integrallash formulalarini optimallashtirish muammosining zamonaviy formulasi tanlangan normalangan fazolarda funktsional xatolik formulasining normasini minimallashtirishdan iborat.

Taqribiy integrallash uchun eng yaxshi formulalarni o'rganayotganda, birinchi savol tug'iladi: bunday formulalar mavjudmi. Bu masala to'liq o'rganilgan, garchi u ancha murakkab bo'lsada, masalan, [1] maqolasida ko'rsatilgandek, uni hal qilishda sezilarli yutuqlarga erishildi. Maqolada Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar ko'rib chiqiladi va optimal koeffitsientlar topiladi. Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar uchun xatolik funktsional normasini minimallashtirish va zarur ekstremum shartni qo'llash orqali natija olinadi.

Kalit so'zlar: *kvadratur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, ekstremal funksiya.*

METHODS FOR CONSTRUCTING AN OPTIMAL WEIGHTED HERMITIAN QUADRATIVE FORMULA IN THE SPACE OF SOBOLEV PERIODIC FUNCTIONS $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the formula error functional on chosen normed spaces.

When studying the best formulas for approximate integration, the first question that arises is whether such formulas exist. This issue has been studied quite fully, although it is rather complicated, as evidenced, for example, by the article [1], where significant progress has been made in its solution. The paper considers Hermite-type weighted quadrature formulas and finds optimal coefficients. The result is obtained by minimizing the norm of the error functional for Hermite-type weighted quadrature formulas and using the necessary extremum condition.

Keywords: *quadrature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, function space, extremal function.*

Введение. Многие работы, например, [1-9] посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не

только значения функции $f(x)$ в точках x на T_1, но и значения её некоторых производных порядков, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае в случае использования только значений функций.
В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита

$$\int_{T_1} P(x)\, f(x)\,dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}\, c_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}\left(x^{(\lambda)}\right), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = P(x)\varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_{\lambda}^{\alpha}\delta^{(\alpha)}\left(x - x^{(\lambda)}\right) \tag{2}$$

в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, где соответственно $c_{\lambda}^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$ являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$, T_1 - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы , $p(x)$-весовая функция и α - порядок производных, $\varepsilon_{T_1}(x)-$ характеристическая функция T_1, а $\delta(x)$ - дельта функция Дирака.

Определение 1. Пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ - определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе T_1 и имеющих все обобщённые производные порядка m суммируемые с квадратом в норме [4]:

$$\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|^2 = \left(\int_{T_1} f(x)\,dx \right)^2 + \sum_{k\neq 0} |2\pi k|^{2m} \left| \hat{f}_k \right|^2, \tag{3}$$

где $\hat{f}_k$ - коэффициенты Фурье т.е. $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi ikx}dx$.

Постановка задачи. Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$- это вычисление следующей величины:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1) \right\| = \inf_{c_{\lambda}^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\|\neq 0} \frac{\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right|}{\left\| f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1) \right\|} \tag{4}$$

где $\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)$ - сопряжённое пространство к пространству $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$.
Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую

Задача 2. Найти такие значения $c_{\lambda}^{(\alpha)}$ и $x^{(\lambda)}$, чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ периодических функций построена оптимальная квадратурная формула и приведена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряжённом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$. А также для функционал погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ получена оценку сверху, и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при $m = 2(\alpha = 0,1)$.
Отметим, что задача 1 решена в работе [5], и задача 2 решена при $\alpha = 0$ в работе [13].

Оптимальная квадратурная формула в пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$

В этой работе рассмотрена минимизация нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1).

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Квадрат нормы функционала погрешности (2) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$ равен:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}\left(T_1\right)\right\|^2=\left|\hat{P}_0-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{\alpha}(2\pi i)^{\alpha} k^{\alpha} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}}, \qquad (5)$$

где $c_\lambda^{(\alpha)}$ - коэффициенты, $x^{(\lambda)}$ - узлы квадратурной формулы (1) и $\hat{P}_k$-коэффициенты Фурье функции $P(x)$.

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве $\tilde{W}_2^{(m)}\left(T_1\right)$, при $m=2(\alpha=0,1)$ имеет равноотстоящие узлы $x^{(\lambda)}=\dfrac{\lambda}{N}$, $\lambda=1,2,\ldots,N$ и равные коэффициенты $c_1=c_2=\ldots=c_N=\overset{o}{c}$ и $c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=\ldots=c_N^{(1)}=\dot{c}^{(1)}$, которые выражаются формулой:

$$\dot{c}=\frac{\hat{P}_0+\dfrac{1}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{N^4}\sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{\hat{P}_k}{k^4}}{N\left(1+\dfrac{1}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{N^4}\sum\limits_{k\neq o}\dfrac{1}{k^4}\right)} \quad \text{и} \quad \dot{c}^{(1)}=0. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть в равенстве (5) $m=2$, тогда $\alpha=\overline{0,1}$ и в этом случае (5) принимает следующий вид:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)^*}\left(T_1\right)\right\|^2=\left|\hat{P}_o-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}}-(2\pi i)\ k\ \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4} \qquad (7)$$

Теперь произведём некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (7).

Пусть $\sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\neq 0$, тогда, умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину $\sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda=\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta$ и $\sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)}=\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}$, получаем:

$$\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda e^{2\pi i x^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \sum\limits_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}=$$

$$=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta\right)\sum\limits_{\lambda=1}^{N}\dfrac{c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}\right)\sum\limits_{\lambda=1}^{N}\dfrac{c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum\limits_{\beta=1}^{N} c_\beta^{(1)}}\right|^2}{k^4}=$$

$$=\left|\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right|^2+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}, \qquad (8)$$

где

$$c'_\lambda=\frac{c_\lambda}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta} \quad \text{и} \quad c'^{(1)}_\lambda=\frac{c_\lambda^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}} \qquad (9)$$

Очевидно, что $\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda=1$ и $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)'}=1$ (10)

Учитывая (9) и (10), равенство (8) перепишем в виде :

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left(\hat{P}_0-\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}+(2\pi i)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}. \qquad (11)$$

Отсюда получаем, что:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left[\hat{P}_0-2\hat{P}_0\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda+\left(\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\left[\hat{P}_k-\left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right]^2+\left[(2\pi)\ k\ \left(\sum_{\beta=1}^{N}c_\beta^{(1)}\right)\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right]^2}{k^4}. \qquad (12)$$

Вводя обозначение $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=x_1$ и $\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=x_2$, после некоторых упрощений равенство (2) перепишем как полиному второй степени по x_1 и x_2.

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left[\hat{P}_0^{\,2}-2\hat{P}_0x_1+x_1^2\right]+\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k^{\,2}}{k^4}-+$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\sum_{k\neq 0}\frac{2\hat{P}_kx_1\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}. \qquad (13)$$

Имея в виду условия (10) в равенстве (13) и используя результаты работы [6], получим:

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/\tilde{W}_2^{(m)^*}(T_1)\right\|^2=\left[\hat{P}_0^{\,2}-2\hat{P}_0x_1+x_1^2\right]+$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k^{\,2}}{k^4}-\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}2\hat{P}_kx_1\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}. \qquad (14)$$

Здесь мы учитывали, что суммы:

$$\sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k\neq 0}\frac{\left|\sum_{\lambda=1}^{N}c'^{(1)}_\lambda e^{2\pi ikx^{(\lambda)}}\right|^2}{k^2}$$

достигают своего наименьшего значения, равного соответственно:

$$\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4} \quad \text{и} \quad \frac{1}{N^2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2},$$

когда узлы $x^{(\lambda)}$ квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты $c_\lambda^{'}$, также $c_\lambda^{'(1)}$ равны между собой, т.е.:

$$c_\lambda^{'}=\frac{1}{N},\ c_\lambda^{'(1)}=\frac{1}{N} \ \text{ и } \ x^{(\lambda)}=\frac{\lambda}{N},\lambda=\overline{1,N}. \tag{15}$$

Правую часть (14) будем рассматривать как функцию зависимости x_1, x_2 и обозначим её через $y(x_1,x_2)$ т.е.:

$$y(x_1,x_2)=\left[\hat{P}_0^{\,2}-2\hat{P}_0x_1+x_1^2\right]-\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}2x_1\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}x_1^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^4}+\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}x_2^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}. \tag{16}$$

Тогда из необходимого условия экстремума после некоторых упрощений из (16) получим систему уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2.

$$\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)x_1=\hat{P}_0+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}$$

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{N^2}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^2}\right)x_2=0 \tag{17}$$

Решая систему (17) и введя некоторые преобразования, последовательно находим x_1 и x_2,т.е.

$$x_1=\frac{\hat{P}_0+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}}{\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)}, \quad \text{и} \quad x_2=0. \tag{18}$$

Пусть $c_\lambda^{'}=\frac{1}{N}$ и $c_\lambda^{'(1)}=\frac{1}{N}$, $\lambda=\overline{1,N}$

тогда из (6) и (15) следует, что

$c_1=c_2=...=c_N=\dot{c}$ и $c_1^{(1)}=c_2^{(1)}=...=c_N^{(1)}=\dot{c}^{(1)}$.

Отсюда следует, что

$$x_1=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda=N\dot{c} \quad \text{и} \quad x_2=\sum_{\lambda=1}^{N}c_\lambda^{(1)}=N\dot{c}^{(1)}. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (19), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е.

$$\dot{c}=\frac{\hat{P}_0+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq 0}\frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N\left(1+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{N^4}\sum_{k\neq o}\frac{1}{k^4}\right)} \quad \text{и} \tag{20}$$

$$\dot{c}^{(1)}=0, \tag{21}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании этой теоремы 1 функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ имеет оценку:

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f>\right| \le \left\{\left|\hat{f}_0\right|^2 + \sum_{k\neq 0}\left|\hat{f}_k\right|^2 \left|2\pi ik\right|^{2m}\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left|1-\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}\right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k\neq 0} \frac{\left|\sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda^{(\alpha)}(2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}}\right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Вывод. Качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, которая определяется формулой:

$$\left\|\ell^N / B^*\right\| = \sup_{f\in B} \frac{\left|<\ell^N, f>\right|}{\left\|f/B\right\|}$$

Она является функцией неизвестных коэффициентов и узлов, поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_λ и $x^{(\lambda)}$ есть задача на исследование функции многих переменных на экстремум.

Значения C_λ и $x^{(\lambda)}$, реализующие этот минимум, определяют оптимальную формулу. Таким образом, оптимальной квадратурной формулой мы будем считать такую, в которой при заданном числе узлов N функционал погрешности имеет наименьшую норму.

Литература:

1. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.

2.Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. матем. заметки. 1969, 6. Вып. 4, с. 475 – 480.

3.Никольский С.М. Квадратурные формулы. М. Наука, 1979, 256 с.

4. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.

5. Жалолов Ф. И. О норме функционала погрешности квадратурных формул общего вида над пространством С. Л. Соболева. УЗМЖ. Ташкент, 2010 №1. с. 46-52.

6. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977, 41, №5, с.1110 – 1124.

7. Хаитов Т.И. Некоторые теоремы теории периодеческих кубатурных формул с заданием производных. ДАН ТаджССР, 1975, т. XVIII, 1.

8. Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, 5.

9. Шайнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой зависящей и ее производных, Диссертация доктора физ.- мат. наук. Новосибирск.

10. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature f0rmulas for compating of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied matematics , 2020, No.4, pp 73-85.

11. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.

12. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0057015.

13. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И., Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева $W_2^{(m)}(T_1)$. Докл. АН РУз. - Ташкент, 2011,-1.