

# **PEDAGOGIK MAHORAT**

**MS**  
**2022**



ISSN 2181-6883

# **PEDAGOGIK MAHORAT**

**Ilmiy-nazariy va metodik jurnal**

**MAXSUS SON  
(2022-yil, dekabr)**

**Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan**

**Buxoro – 2022**

## PEDAGOGIK MAHORAT

### Ilmiy-nazariy va metodik jurnal 2022, MAXSUS SON

Jurnal O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrda qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo‘yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo‘lgan zaruriy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O‘zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro‘yxatga olingan.

**Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** 200117, O‘zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy  
Elektron manzil: nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

#### TAHRIR HAY‘ATI:

**Bosh muharrir:** Adizov Baxtiyor Rahmonovich – pedagogika fanlari doktori, professor

**Mas‘ul kotib:** Sayfullayeva Nigora Zakiraliyevna – pedagogika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD)

*Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor*

*Begimqulov Uzoqboy Shoyimqulovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Navro‘z-zoda Baxtiyor Nigmatovich – iqtisodiyot fanlari doktori, professor*

*Mahmudov Mels Hasanovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Ibragimov Xolboy Ibragimovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Rasulov To‘lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent*

*Yanakiyeva Yelka Kirilova, pedagogika fanlari doktori, professor (N. Rilski nomidagi Janubiy-G‘arbiy Universitet, Bolgariya)*

*Andriyenko Yelena Vasilyevna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Fizika, matematika, axborot va texnologiya ta‘limi instituti, Novosibirsk, Rossiya)*

*Romm Tatyana Aleksandrovna pedagogika fanlari doktori, professor (Novosibirsk davlat pedagogika universiteti Tarix, gumanitar va ijtimoiy ta‘lim instituti, Novosibirsk, Rossiya)*

*Chudakova Vera Petrovna, psixologiya fanlari nomzodi (Ukraina pedagogika fanlari milliy akademiyasi, Ukraina)*

*Hamroyev Alijon Ro‘ziqulovich – pedagogika fanlari doktori (DSc), dotsent*

*Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Mahmudova Muyassar, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Kozlov Vladimir Vasilyevich, psixologiya fanlari doktori, professor (Yaroslavl davlat universiteti, Rossiya)*

*Tadjixodjayev Zokirxo‘ja Abdusattorovich, texnika fanlari doktori, professor*

*Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor*

*O‘rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor*

*Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor*

*Mahmudov Nosir Mahmudovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor*

*Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Chariyev Irgash To‘rayevich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Qiyamov Nishon Sodiqovich, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor*

*Shomirzayev Maxmatmurod Xuramovich, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Ro‘ziyeva Dilnoza Isomjonovna, pedagogika fanlari doktori, professor*

*Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc)*

*To‘xsanov Qahramon Rahimboyevich, filologiya fanlari doktori, dotsent*

*Nazarov Akmal Mardonovich, Psixologiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent*

*Jumaev Rustam G‘aniyevich, siyosiy fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent*

*Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, dotcent.*

MUNDARIJA

№	Familiya I.Sh.	Mavzu	Bet
1.	<b>БАКАЕВ Илхом Иззатович, ЭШАНКУЛОВ Хамза Илхомович</b>	Формирование механизма поиска с применением алгоритмов полнотекстового поиска	7
2.	<b>ЖАЛОЛОВ Озоджон Исомидинович, БАРНОЕВА Зубайда Эркин кизи, ИСОМИДДИНОВ Бекзоджон Озоджон угли</b>	Методы построения оптимальной весовой квадратурной формулы типа эрмита в пространстве периодических функций Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	14
3.	<b>ШАФИЕВ Турсун Рустамович, САЛИМОВ Рузбек Насим угли</b>	Алгоритм сопоставления отпечатков пальцев	20
4.	<b>JUMAYEV Jo'ra, ISMATOVA Kamola Otabek qizi</b>	Transport masalasini kompyuterli modellashtirish	27
5.	<b>RUSTAMOV Hakim Sharipovich, QURBONOV Suhrob Bekro'latovich</b>	Zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalanish ta'lim samaradorligining asosiy omili	32
6.	<b>ZARIPOVA Gulbahor Kamilovna, HAZRATOVA Roila Zainiddinovna</b>	Development of professional competence of specialists in the training of teachers in digital and information technologies in our society	36
7.	<b>XAZRATOV Fazliddin Xikmatovich, RUFATOV Jo'rabek Zafar o'g'li</b>	Data mining qo'llash sohasi. Prognozlash va vizualizatsiya masalalarini hal etish	43
8.	<b>ЖАЛОЛОВ Озоджон Исомидинович, НАСРИДДИНОВА Халима Фарход кизи, РАСУЛОВА Камола Хаким кизи</b>	Методы построения оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа эрмита в пространстве соболева	50
9.	<b>АТАЕВА Гулсина Исроиловна, МАХМАДИЕВ Хасан</b>	Роль искусственного интеллекта в образовании	57
10.	<b>TURDIEVA Gavhar Saidovna</b>	Kredit modul tizimida talabalarning ilmiy-tadqiqot ishlari - mustaqil faoliyatning eng yuqori shakli sifatida	62
11.	<b>TURDIEVA Gavhar Saidovna, DJURAYEVA Salomat Nabiyevna</b>	Ta'lim jarayonida stem-texnologiya-talabalarning loyihalash faoliyatini rivojlanish vositasi sifatida	68
12.	<b>ШАФИЕВ Турсун Рустамович, ЭШОНКУЛОВ Шахзод Равшанович</b>	Аутентификация личности на мобильных устройствах с использованием проверки	73
13.	<b>IMOMOVA Shafolat Mahmudovna</b>	Matematikani o'qitishda matematik tizimlardan foydalanish	77
14.	<b>IMOMOVA Shafolat Mahmudovna, BOTIROVA Nigora Qoyirovna</b>	Google classroom - “virtual sinf” texnologiyasi	81
15.	<b>JUMAYEV Jo'ra, SHAMSIYEVA Nigora Rafiq Qizi</b>	Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechishning kompyuterli modeli	86
16.	<b>ИСМОЙЛОВА Махсума Нарзикуловна, НАМОЗОВА Нигина Шермат кизи</b>	Методы и дидактические задачи на основе мобильных технологий обучения	91
17.	<b>YADGAROVA Lola Djalolovna, ERGASHEVA Sarvinoz Bahodurovna</b>	Innovative approach: project-based learning the organization of the educational process in higher educational institutions	96

ЖАЛОЛОВ Озоджон  
Исомидинович

БАРНОЕВА Зубайда  
Эркин кизи

ИСОМИДДИНОВ Бекзоджон  
Озоджон угли

доцент Бухарского  
государственного университета

магистрант Бухарского  
государственного университета

студент Бухарского  
государственного университета

УДК 517.518.644

**МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ  
ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ .**

*Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах.*

*При исследовании наилучших формул приближённого интегрирования, в первую очередь, возникает вопрос о существовании таких формул. Этот вопрос исследован весьма полно, хотя и является достаточно сложным, о чём свидетельствует обзор статей, где было достигнуто существенное продвижение в его решении. В работе рассматриваются весовые квадратурные формулы типа Эрмита, и найдены оптимальные коэффициенты. Результат получен с помощью минимизации нормы функционала погрешности для весовых квадратурных формул типа Эрмита и с использованием необходимого условия экстремума.*

**Ключевые слова:** квадратурная формула, функциональная погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональное пространство, экстремальная функция.

**DAVRIY SOBOLEV FUNKSIYALARI FAZOSIDA  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL  
VAZNLI KUADRATUR FORMULALARNI TUZISH METODLARI**

*Taqribiy integrallash formulalarini optimallashtirish muammosining zamonaviy formulasi tanlangan normalangan fazolarda funktsional xatolik formulasining normasini minimallashtirishdan iborat.*

*Taqribiy integrallash uchun eng yaxshi formulalarni o'rganayotganda, birinchi savol tug'iladi: bunday formulalar mavjudmi. Bu masala to'liq o'rganilgan, garchi u ancha murakkab bo'lsada, masalan, [1] maqolasida ko'rsatilgandek, uni hal qilishda sezilarli yutuqlarga erishildi. Maqolada Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar ko'rib chiqiladi va optimal koeffitsientlar topiladi. Ermit tipidagi vaznli kvadratur formulalar uchun xatolik funktsional normasini minimallashtirish va zarur ekstremum shartni qo'llash orqali natija olinadi.*

**Kalit so'zlar:** kvadratur formula, xatolik funktsionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funktsional fazo, ekstremal funksiya.

**METHODS FOR CONSTRUCTING AN OPTIMAL WEIGHTED HERMITIAN QUADRATURE  
FORMULA IN THE SPACE OF SOBOLEV PERIODIC FUNCTIONS  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ .**

*The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the formula error functional on chosen normed spaces.*

*When studying the best formulas for approximate integration, the first question that arises is whether such formulas exist. This issue has been studied quite fully, although it is rather complicated, as evidenced, for example, by the article [1], where significant progress has been made in its solution. The paper considers Hermite-type weighted quadrature formulas and finds optimal coefficients. The result is obtained by minimizing the norm of the error functional for Hermite-type weighted quadrature formulas and using the necessary extremum condition.*

**Keywords:** quadrature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, function space, extremal function.

**Введение.** Многие работы, например, [1-9] посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не



только значения функции  $f(x)$  в точках  $x$  на  $T_1$ , но и значения её некоторых производных порядков, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных можно ожидать более точный результат, чем в случае в случае использования только значений функций.

В связи с этим рассмотрим весовую квадратурную формулу типа Эрмита

$$\int_{T_1} P(x) f(x) dx \approx \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha c_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x^{(\lambda)}), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = P(x) \varepsilon_{T_1}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x^{(\lambda)}) \tag{2}$$

в пространстве С.Л.Соболева  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ , где соответственно  $c_\lambda^{(\alpha)}$  и  $x^{(\lambda)}$  являются произвольными коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1),  $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ ,  $T_1$  - одномерный тор, т.е. окружность длины равной единицы,  $p(x)$ -весовая функция и  $\alpha$  - порядок производных,  $\varepsilon_{T_1}(x)$  - характеристическая функция  $T_1$ , а  $\delta(x)$  - дельта функция Дирака.

**Определение 1.** Пространство  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  - определяется как пространство функций, заданных на одномерном торе  $T_1$  и имеющих все обобщённые производные порядка  $m$  суммируемые с квадратом в норме [4]:

$$\|f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|^2 = \left( \int_{T_1} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2, \tag{3}$$

где  $\hat{f}_k$  - коэффициенты Фурье т.е.  $\hat{f}_k = \int_{T_1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx$ .

**Постановка задачи.** Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства  $B$  равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к  $B$  пространстве  $B^*$  или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве  $B$  мы взяли пространство  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ .

Задача построения оптимальных квадратурных формул над пространством Соболева  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  - это вычисление следующей величины:

$$\|\ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)\| = \inf_{c_\lambda^{(\alpha)}, x^{(\lambda)}} \sup_{\|f(x)\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f / \tilde{W}_2^{(m)}(T_1)\|} \tag{4}$$

где  $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$  - сопряжённое пространство к пространству  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ .

Для оценки погрешности квадратурной формулы необходимо решить следующую задачу.

**Задача 1.** Найти норму функционала погрешности (2) данной квадратурной формулы. Далее, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, необходимо решить следующую

**Задача 2.** Найти такие значения  $c_\lambda^{(\alpha)}$  и  $x^{(\lambda)}$ , чтобы выполнялось равенство (4).

В настоящей работе в пространстве  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  периодических функций построена оптимальная квадратурная формула и приведена норма функционала погрешности построенной квадратурной формулы в сопряжённом пространстве  $\tilde{W}_2^{(m)*}(T_1)$ . А также для функционал погрешности квадратурной формулы типа Эрмита для функций класса  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  получена оценку сверху, и найдены оптимальные коэффициенты квадратурной формулы типа Эрмита при  $m = 2(\alpha = 0, 1)$ .

Отметим, что задача 1 решена в работе [5], и задача 2 решена при  $\alpha = 0$  в работе [13].

**Оптимальная квадратурная формула в пространстве  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$**

В этой работе рассмотрена минимизация нормы функционала погрешности квадратурной формулы (1).

В работе [5] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Квадрат нормы функционала погрешности (2) весовой квадратурной формулы типа Эрмита вида (1) над пространством  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  равен:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}}, \quad (5)$$

где  $c_\lambda^{(\alpha)}$  - коэффициенты,  $x^{(\lambda)}$  - узлы квадратурной формулы (1) и  $\hat{P}_k$ -коэффициенты Фурье функции  $P(x)$ .

**Теорема 2.** Оптимальная квадратурная формула типа Эрмита вида (1) в периодическом пространстве  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ , при  $m = 2(\alpha = 0, 1)$  имеет равноотстоящие узлы  $x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, N$

и равные коэффициенты  $c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{o}{c}$  и  $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \overset{o}{c}^{(1)}$ , которые выражаются формулой:

$$\overset{o}{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N \left( 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \quad \text{и} \quad \overset{o}{c}^{(1)} = 0. \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть в равенстве (5)  $m = 2$ , тогда  $\alpha = \overline{0, 1}$  и в этом случае (5) принимает следующий вид:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_1) \right\|^2 = \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} - (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \quad (7)$$

Теперь произведём некоторое преобразование над вторым слагаемым в равенстве (7).

Пусть  $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \neq 0$ , тогда, умножая числитель и знаменатель второго слагаемого на величину

$\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda = \sum_{\beta=1}^N c_\beta$  и  $\sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} = \sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)}$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} = \\ & \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left( \sum_{\beta=1}^N c_\beta \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_\lambda e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta} + (2\pi i) k \left( \sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N \frac{c_\lambda^{(1)} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}}}{\sum_{\beta=1}^N c_\beta^{(1)}} \right|^2}{k^4} = \end{aligned}$$

$$= \left| \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4}, \quad (8)$$

где

$$c'_{\lambda} = \frac{c_{\lambda}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}} \quad \text{и} \quad c'_{\lambda}^{(1)} = \frac{c_{\lambda}^{(1)}}{\sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)}} \quad (9)$$

$$\text{Очевидно, что} \quad \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda}^{(1)} = 1 \quad (10)$$

Учитывая (9) и (10), равенство (8) перепишем в виде :

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left( \hat{P}_0 - \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{P}_k - \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} + (2\pi i) k \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4}. \quad (11)$$

Отсюда получаем, что:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[ \hat{P}_0 - 2\hat{P}_0 \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} + \left( \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} \right)^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\left[ \hat{P}_k - \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2 + \left[ (2\pi) k \left( \sum_{\beta=1}^N c_{\beta}^{(1)} \right) \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right]^2}{k^4}. \quad (12)$$

Вводя обозначение  $\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda} = x_1$  и  $\sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda}^{(1)} = x_2$ , после некоторых упрощений равенство (2) перепишем как полиному второй степени по  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[ \hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k \neq 0} \frac{2\hat{P}_k x_1 \left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2}. \quad (13)$$

Имея в виду условия (10) в равенстве (13) и используя результаты работы [6], получим:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / \tilde{W}_2^{(m)*} (T_1) \right\|^2 = \left[ \hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k^2}{k^4} - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2\hat{P}_k x_1 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (14)$$

Здесь мы учитывали, что суммы:

$$\sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\lambda=1}^N c'_{\lambda} e^{2\pi i k x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^2}$$



достигают своего наименьшего значения, равного соответственно:

$$\frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \text{ и } \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2},$$

когда узлы  $x^{(\lambda)}$  квадратурной формулы (1) равноотстоящие и все коэффициенты  $c'_\lambda$ , также  $c_\lambda^{(1)}$  равны между собой, т.е.:

$$c'_\lambda = \frac{1}{N}, c_\lambda^{(1)} = \frac{1}{N} \text{ и } x^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}, \lambda = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Правую часть (14) будем рассматривать как функцию зависимости  $x_1, x_2$  и обозначим её через  $y(x_1, x_2)$  т.е.:

$$y(x_1, x_2) = \left[ \hat{P}_0^2 - 2\hat{P}_0 x_1 + x_1^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} 2x_1 \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} x_1^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} x_2^2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2}. \quad (16)$$

Тогда из необходимого условия экстремума после некоторых упрощений из (16) получим систему уравнений с двумя неизвестными  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right) x_1 &= \hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4} \\ \left( \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right) x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Решая систему (17) и введя некоторые преобразования, последовательно находим  $x_1$  и  $x_2$ , т.е.

$$x_1 = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{\left( 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)}, \text{ и } x_2 = 0. \quad (18)$$

Пусть  $c'_\lambda = \frac{1}{N}$  и  $c_\lambda^{(1)} = \frac{1}{N}$ ,  $\lambda = \overline{1, N}$

тогда из (6) и (15) следует, что

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = \dot{c} \text{ и } c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \dots = c_N^{(1)} = \dot{c}^{(1)}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda = N\dot{c} \text{ и } x_2 = \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(1)} = N\dot{c}^{(1)}. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), находим оптимальные коэффициенты квадратурных формул типа Эрмита вида (1), т.е.

$$\dot{c} = \frac{\hat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{\hat{P}_k}{k^4}}{N \left( 1 + \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{N^4} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} \right)} \text{ и} \quad (20)$$

$$\dot{c}^{(1)} = 0, \quad (21)$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании этой теоремы 1 функционал погрешности квадратурной формулы (1) для функций класса  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$  имеет оценку:

$$\begin{aligned}
 | \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle | \leq & \left\{ \left| \hat{f}_0 \right|^2 + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{f}_k \right|^2 |2\pi i k|^{2m} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \left| 1 - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \times \right. \\
 & \left. \times \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} (2\pi i)^\alpha k^\alpha e^{2\pi i x^{(\lambda)}} \right|^2}{k^{2m}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

**Вывод.** Качество квадратурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, которая определяется формулой:

$$\left\| \ell^N / B^* \right\| = \sup_{f \in B} \frac{|\langle \ell^N, f \rangle|}{\|f / B\|}$$

Она является функцией неизвестных коэффициентов и узлов, поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить её. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по  $C_\lambda$  и  $x^{(\lambda)}$  есть задача на исследование функции многих переменных на экстремум.

Значения  $C_\lambda$  и  $x^{(\lambda)}$ , реализующие этот минимум, определяют оптимальную формулу. Таким образом, оптимальной квадратурной формулой мы будем считать такую, в которой при заданном числе узлов  $N$  функционал погрешности имеет наименьшую норму.

### Литература:

1. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.
2. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. матем. заметки. 1969, 6. Вып. 4, с. 475 – 480.
3. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М. Наука, 1979, 256 с.
4. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул, М.Наука, 1974г. 808 с.
5. Жалолов Ф. И. О норме функционала погрешности квадратурных формул общего вида над пространством С. Л. Соболева. УЗМЖ. Ташкент, 2010 №1. с. 46-52.
6. Женсыкбаев А.А., Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1977, 41, №5, с.1110 – 1124.
7. Хайтов Т.И. Некоторые теоремы теории периодических кубатурных формул с заданием производных. ДАН ТаджССР, 1975, т. XVIII, 1.
8. Хайтов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, 5.
9. Шайнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой зависящей и ее производных, Диссертация доктора физ.- мат. наук. Новосибирск.
10. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied mathematics, 2020, No.4, pp 73-85.
11. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space  $L_2^{(1)}$ , Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.
12. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), <https://doi.org/10.1063/5.0057015>.
13. Шадиметов Х.М., Жалолов Ф.И., Наилучшая весовая квадратурная формула над пространством Соболева  $W_2^{(m)}(T_1)$ . Докл. АН РУз. - Ташкент, 2011,-1.