

И.И. ЖАЛОЛОВ, О.И. ЖАЛОЛОВ

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ $\overline{V}_m(x)$ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. Рассмотрена задача построения преобразования Фурье борнообразной функции для определения дискретного аналога дифференциального оператора, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера. Кроме того, рассмотрена задача построения дискретного аналога конкретного оператора в частном случае.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство Соболева, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

УДК: 519.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-44-56

ВВЕДЕНИЕ

Для построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространствах $H_2^\mu(R^n)$ и $L_2^{(m)}(R^n)$ важную роль играет дискретный аналог $D_{m,n}[\beta]$ полигармонического оператора

$$\Delta^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^m.$$

Впервые в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ построением и изучением свойств обращения оператора свертки с функцией $G_{m,n}[\beta]$, где $G_{m,n}(x)$ — фундаментальное решение полигармонического оператора, т. е. свойств такой функции дискретного аргумента $D_{m,n}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству $D_{m,n}[\beta] * G_{m,n}[\beta] = \delta[\beta]$, где $\delta[\beta]$ равно единице при $\beta = 0$ и равно нулю при $\beta \neq 0$, занимался С.Л. Соболев [1]. Он изучал свойства оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, являющегося обращением оператора свертки с функцией $G_{hH}^{(m)}[\beta] = h^n G_m(hH\beta)$ [1]. Задача построения дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ при произвольном n оказалось очень трудной.

В одномерном случае дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ построен З.Ж. Жамоловым [2]. Но там вид этой функции выписан с точностью до $m+1$ -неизвестного коэффициента. В работе Х.М. Шадиметова [3] найдены эти коэффициенты, тем самым полностью построен дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. Построением дискретного аналога дифференциальных

операторов

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$$

и

$$\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$$

занимались Х.М. Шадиметов, А.Р. Хаётов [4], [5].

В работе Х.М. Шадиметов, Н.Х. Маматова [6] вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. В работе Б.Г. Габдулхаева [7] в пространстве квадратично суммируемых функций установлены эффективные достаточные условия непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов с ядрами Коши на отрезке вещественной оси.

В данной работе рассматривается построение преобразования Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$ для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

Определение. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме

$$\|f\|_{H_2^\mu(R)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1} \left[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Здесь F и F^{-1} — прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i y x} dx \quad \text{и} \quad F^{-1}[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

При выполнении условия $V_{m/2}(x) = F^{-1} \left[(1+y^2)^{-m/2} \right](x) \in L_2(R)$ пространство $H_2^\mu(R)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(R)$ [1], [8].

Скалярное произведение в $H_2^\mu(R)$ определяется в виде

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1} \left[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[\varphi(x)](y) \right] \cdot F^{-1} \left[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[\psi(x)](y) \right] dx.$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы исследуем задачу построения преобразования Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора

$$\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi\omega)^2 dx^2} \right)^m$$

[9], [10], который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$.

Данная работа является обобщением работ [11] и [12], т.е. дан алгоритм построения преобразования Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога оператора $D_m[h\beta]$, который удовлетворяет равенству

$$D_m [\beta] * V_m [\beta] = \delta [\beta], \quad (1)$$

где $V_m(x) = \nu_m(\omega x)$, $\omega > 0$. Здесь

$$\nu_m(x) = F^{-1} \{ [1 + y^2]^m \} (x), \quad x = h\beta,$$

где $F^{-1}[\varphi]$ — обратное преобразование Фурье функции φ , $\delta[\beta]$ — дискретная дельта-функция, которая равна единице при $\beta = 0$ и равна нулю при $\beta \neq 0$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 2, 3, \dots$, $[\beta] = h\beta$.

Оператор $D_m[\beta]$ при $m = 3, 4$ построен в работах [11] и [12].

Теорема 1. Оператор $D_3[\beta]$, удовлетворяющий равенству (1), при $m = 3$ определяется формулой

$$D_3[\beta] = B \begin{cases} c + \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{\lambda_i}, & \beta = 0; \\ 1 + \sum_{i=1}^2 A_i, & |\beta| = 1; \\ \sum_{i=1}^2 A_i \lambda_i^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \end{cases}$$

где

$$B = \frac{4}{a_1 \pi}, \quad a_1 = 16\pi^2 h^2 \operatorname{sh}(2\pi h) - 3 \left(\pi h \operatorname{ch}(2\pi h) - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\pi h) \right), \quad c = - \left(6 \operatorname{ch}(2\pi) h + \frac{a_2}{a_1} \right),$$

$$a_2 = 6 \operatorname{ch}(2\pi h) \left(\pi h h 2\pi h - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\pi h) \right) - 3 (\operatorname{sh}(2\pi h) \operatorname{ch}(2\pi h) - 2\pi h) - 8\pi^2 h^2 \operatorname{sh}(2\pi h),$$

$$A_i = \frac{\lambda_i^6 - 6b\lambda_i^5 + 3(b^2 4 + 1)\lambda_i^4 - 4b(2b^2 + 3)\lambda_i^3 + 3(4b^2 + 1)\lambda_i^2 - 6b\lambda_i + 1}{\lambda_i^2 - 1}, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left[b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 - 8} + \sqrt{\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + 8} \right)^2 - 16} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left[b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 - 8} - \sqrt{\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2 + 8} \right)^2 - 16} \right],$$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_1},$$

$$a_3 = \left[6 \operatorname{ch}(2\pi h) (\operatorname{sh}(2\pi h) \operatorname{ch}(2\pi h) - 2\pi h) - 6 \left(\pi h \operatorname{ch}(2\pi h) - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2\pi h) \right) + 16\pi^2 h^2 \operatorname{sh} 2\pi h \operatorname{ch} 2\pi h \right],$$

$|\lambda_1| < 1$ и h — малый параметр.

Теорема 2. Оператор $D_4[\beta]$, удовлетворяющий равенству (1), при $m = 4$ определяется формулой

$$D_4[\beta] = B \cdot \begin{cases} c + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\lambda_i}, & \beta = 0; \\ 1 + \sum_{i=1}^3 A_i, & |\beta| = 1; \\ \sum_{i=1}^3 A_i \lambda_i^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} B &= \frac{2^2 \cdot 3}{\pi^2 \cdot a_1}, \quad a_1 = -15a + 120hb - 12 \cdot 16\pi h^2 a + 32\pi^2 h^3 b, \\ c &= \frac{a_2}{a_1} + 8b, \quad a_2 = 90ab - 240h(1 + 2b^2) + 12 \cdot 16\pi^2 a \cdot 2(1 + b) + 32\pi^2 h^3 \cdot 8(b^2 - 1), \\ A_i &= \frac{\lambda_i^8 + b'_1 \lambda_i^7 + b'_2 \lambda_i^6 + b'_3 \lambda_i^5 + b'_4 \lambda_i^4 + b'_5 \lambda_i^3 + b'_6 \lambda_i^2 + b'_7 + 1}{\lambda_i^2 - 1}, \quad i = \overline{1, 3}, \\ b'_1 &= -8b, \quad b'_2 = 4(b^2 + 1), \quad b'_3 = 8b(1 - 4b^2), \quad b'_4 = 2(24b^2 + 8b^4 + 3); \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} b'_1 &= b'_7, \quad b'_2 = b'_6, \quad b'_3 = b'_5, \\ \lambda_i &- \text{корни многочлена } P_6(\lambda) = (\lambda^6 + b_1 \lambda^5 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^3 + b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + 1), \quad i = \overline{1, 3}, \\ b_1 &= \frac{a_2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= -45a(1 + 4b^2) + 120hb(11 + 4b^2) + 12 \cdot 16\pi h^2 a(8b - 11) + 32\pi^2 h^3 b(4b^2 - 13), \\ a_4 &= 60ab(3 + 2b) - 120h^4(1 + 4b^2) + 12 \cdot 16\pi h^2 a^4(1 + 2b^2 + 3b) + 32\pi^2 h^3 16(2 - b^2), \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) + \sqrt{\left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right)^2 - 4 \left(b_2 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right) - 3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{4} \left[b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) + \sqrt{\left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right)^2 - 4 \left(b_2 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right) - 3} \right]^2 - 4} \right\}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) + \sqrt{\left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right)^2 - 4 \left(b_2 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right) - 3} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{1}{4} \left[b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) + \sqrt{\left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right)^2 - 4 \left(b_2 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \left(b_1 - \left(A + B + \frac{b_1}{3} \right) \right) - 3} \right]^2 - 4} \right\}; \end{aligned}$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{9} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{9} + \frac{q^2}{4}}};$$

здесь $p = -\frac{b_1^2}{3} + b_2 - 3$, $q = 2 \cdot \frac{b_1^3}{9} - \frac{b_1(b_2 - 3)}{3} + 2b_1 - b_3$ и h — малый параметр.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $V_m(x)$

1. Из четности $\mu^{-1}(\xi) = (1 + \xi^2)^{-m}$ следует четность $V_m(x) = F^{-1}[\mu(\xi)](\omega x)$. Это очевидно.

2. Функция $V_m(x)$ убывает на бесконечность быстрее любой отрицательной степени $|x|$. Действительно, функция $\mu(\xi)$ и $\mu^{-1}(\xi)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями. Из бесконечной дифференцируемости и суммируемости $\mu^{-1}(\xi)$ и ее производных следует

$$V_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i \omega x)^{(\alpha)} \cdot \left[(1 + \xi^2)^{-m} \right]^{(\alpha)} e^{-2\pi i \xi \omega x} d\xi,$$

для любого $\alpha \geq 0$. Отсюда $|V_m(x)(2\pi i \omega x)^\alpha| < \infty$.

3. Явный вид $V_m(x)$. В силу четности $V_m(x)$ имеем

$$V_m(x) = \nu_m(\omega x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i y \omega x}}{(1 + y^2)^m} dy = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi \omega y x}{(1 + y^2)^m} dy.$$

Далее, известно (см. [13]) следующее равенство:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ay) dy}{(b^2 + y^2)^n} = \frac{\pi \cdot e^{-ab}}{(2 \cdot b)^{2n-1} (n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} (2ab)^k. \quad (2)$$

Положив в этом равенстве, что $a = 2\pi \omega x$ и $n = m$, получим явное выражение преобразования Фурье функции $\mu^{-1}(\xi)$ в элементарных функциях. Так как левая часть (2) не меняется при замене x на $-x$ в силу четности подинтегральной функции, а правая часть справедлива только для $x > 0$, то в правой части последнего равенства x заменим на $|x|$.

Тогда

$$V_m(x) = \nu_m(\omega x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi \omega y x}{(1 + y^2)^m} dy = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi \omega |x|}}{2^{2m-2} (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)! (2\pi \omega)^k}{k! (m-k-1)!} |x|^k. \quad (3)$$

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ $\overleftarrow{V}_m(x)$

В дальнейшем рассмотрим систему из работы [14], которая имеет следующий вид:

$$\sum_{\beta=0}^N \overset{0}{C}_\beta V_m(h\alpha - h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(y) \cdot V_m(h\alpha - y) dy, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Переобозначив $C[\beta] = C_\beta$ и $V_m^h[\beta] = V_m(h\beta)$, систему (4) можно записать в виде свертки функций дискретного аргумента:

$$\overset{0}{C}[\beta] * V_m^h[\beta] = f_m[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\overset{0}{C}[\beta] = 0, \quad h\beta \notin [0, 1], \quad (6)$$

где

$$f_m[\beta] = \int_0^1 p(y) \cdot V_m(h\beta - y) dy.$$

Систему уравнений (5), (6) будем обозначать системой B .

Рассмотрим соответствующую задачу.

Задача В. Найти дискретную функцию $C[\beta]$, удовлетворяющую системе B при заданных $f_m[\beta]$.

Главная идея этого метода состоит в замене неизвестной функции $C[\beta]$ на функцию $u_m^h[\beta] = u_m(h\beta)$, а именно вместо $C[\beta]$ вводится неизвестная функция

$$u_m^h[\beta] = V_m^h[\beta] * C[\beta]. \quad (7)$$

Тогда необходимо найти оператор $D_m(h\beta) = D_m^h[\beta]$, который удовлетворяет равенству

$$D_m^h[\beta] * V_m^h[\beta] = \delta(h\beta), \quad (8)$$

$$\text{где } \delta(h\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0; \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}$$

Из (7), учитывая (8), получим

$$C[\beta] = D_m^h[\beta] * u_m^h[\beta],$$

где $u_m^h[\beta]$ определено в работе [14] и доказана

Теорема 3. *Функция*

$$u_m(h\beta) = \begin{cases} f_m[\beta], & h\beta \in [0, 1]; \\ \sum_{\alpha=0}^N C_\alpha V_m(h\beta - h\alpha), & h\beta \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Теперь будем искать решение уравнения (8). Согласно теории периодических обобщенных функций и преобразованию Фурье вместо дискретной функции $D_m(h\beta)$ удобнее искать боронообразную функцию

$$\overleftarrow{D}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_m(h\beta) \delta(x - h\beta).$$

Тогда уравнение (8) в классе боронообразных функций переходит в уравнение

$$\overleftarrow{D}_m(x) * \overleftarrow{V}_m(x) = \delta(x), \quad (9)$$

где

$$\overleftarrow{V}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_m(h\beta) \delta(x - h\beta).$$

Известно (см. [1]), что между классом боронообразных функций и классом функций дискретного аргумента существует изоморфизм. Поэтому вместо $D_m(h\beta)$ достаточно исследовать функцию $\overleftarrow{D}_m(x)$. Применяя к обеим частям равенства (9) преобразование Фурье и имея в виду, что $F[\varphi(x) * \psi(x)] = F[\varphi] \cdot F[\psi]$ и $F[\delta(x)] = 1$, получим

$$F[\overleftarrow{D}_m(x)] \cdot F[\overleftarrow{V}_m(x)] = 1.$$

Отсюда имеем

$$F[\overleftarrow{D}_m(x)] = \left\{ F[\overleftarrow{V}_m(x)] \right\}^{-1}. \quad (10)$$

Вычислим преобразование Фурье $F[\overleftarrow{V}_m(x)]$ боронообразной функции $\overleftarrow{V}_m(x)$.

Известно (см. [1]), что

$$\phi_0(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta), \quad \delta(hx) = h^{-1}\delta(x) \text{ и } F\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i\beta x)\right] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - \beta).$$

В силу этих равенств получим

$$\begin{aligned} \overleftarrow{V}_m(x) &= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_m(h\beta)\delta(x - h\beta) = V_m(x) \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - h\beta) = \\ &= h^{-1}V_m(x) \cdot \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(xh^{-1} - \beta) = h^{-1}V_m(x)\phi_0(h^{-1}x). \end{aligned} \quad (11)$$

Известно также (см. [2]), что

$$\begin{aligned} F[\phi_0(h^{-1}x)] &= \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} F[\delta(h^{-1}x - \beta)] = h \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} F[\delta(x - h\beta)] = \\ &= h \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i p h \beta) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(hp - \beta) = h\phi_0(hp), \end{aligned}$$

т. е.

$$F[\phi_0(h^{-1}x)] = h\phi_0(hp). \quad (12)$$

Поэтому с учетом (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} F[\overleftarrow{V}_m(x)] &= F[h^{-1}V_m(x) \cdot \phi_0(h^{-1}x)] = \\ &= h^{-1}F[V_m(x)] * F[\phi_0(h^{-1}x)] = h^{-1}F[V_m(x)] * \phi_0(hp) \cdot h. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку $F[V_m(x)](p) = (1 + p^2)^{-m}$, из (20) имеем

$$\begin{aligned} F[\overleftarrow{V}_m(x)](p) &= (1 + p^2)^{-m} * \phi_0(hp) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} (1 + p^2)^{-m} * \delta(hp - \beta) = \\ &= h^{-1} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1 + (p - \beta h^{-1})^2]^m}. \end{aligned} \quad (14)$$

Функция $F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)$ является $N = h^{-1}$ -периодической функцией. Используя равенство (14), мы должны сначала определить $\left\{F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)\right\}^{-1}$, которая также будет N -периодической функцией, а потом разложить ее в ряд Фурье. Тогда на основании (10) имеем

$$F[\overleftarrow{D}_m(x)](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \hat{D}_\beta \exp(2\pi i\beta hp), \quad (15)$$

где $\hat{D}_k$ — коэффициенты Фурье функции $F[\overleftarrow{D}_m(x)](p)$, т. е.

$$\hat{D}_\beta = \int_0^N F[\overleftarrow{D}_m(x)](p) \exp(2\pi i p h \beta) dp.$$

Применяя к равенству (15) формулу обращения Фурье, придем к боронообразной функции

$$\overleftarrow{D}_m(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \hat{D}_k \delta(x - h\beta).$$

Таким образом, по определению боронообразной функции, совокупность коэффициентов Фурье и есть искомая функция дискретного аргумента $D_m(hk)$. Для определения коэффициентов Фурье $F[\overleftarrow{D}_m(x)]$ сначала определим коэффициенты Фурье функции

$$F[\overleftarrow{V}_m(x)](p).$$

Чтобы определить $F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)$, доказывается

Лемма. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{[1 + (p - \beta h^{-1})^2]^m} = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \nu_m(\omega h \beta) \exp(2\pi i \beta h p). \quad (16)$$

Доказательство. Пусть φ — основная функция. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{[1 + (p - h^{-1}\beta)^2]^m}, \varphi(p) \right) &= \left(F^{-1} \left[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{h^{-1}}{[1 + (p - h^{-1}\beta)^2]^m} \right], F^{-1}[\varphi(p)] \right) = \\ &= \left(F^{-1} \left[\frac{1}{(1 + p^2)^m} * \phi_0(hp) \right] (x), F^{-1}[\varphi(p)](x) \right) = \\ &= \left(F^{-1} \left[\frac{1}{(1 + p^2)^m} \right] (x) \cdot F^{-1}[\phi_0(hp)](x), F^{-1}[\varphi(p)](x) \right) = \\ &= \left(V_m(x) \cdot h^{-1} \phi_0(h^{-1}x), F^{-1}[\varphi(p)](x) \right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} V_m(hk) \exp(2\pi i h k x), \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

□

Из определения равенства двух обобщенных функций вытекает (16), что и доказывает лемму. Из (14), (16) следует

$$F[\overleftarrow{V}_m(x)](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} V_m(h\beta) e^{2\pi i h p \beta}. \quad (17)$$

Из (13) видно, что $F[\overleftarrow{V}_m(x)](p) > 0$ как сумма положительных функций. Поэтому $\left\{ F[\overleftarrow{V}_m(x)](p) \right\}^{-1} > 0$. Согласно (10) для определения коэффициентов Фурье функции $F[\overleftarrow{D}_m(h\beta)](p)$ нам нужно найти преобразование Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 4. *Преобразование Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога дифференциального оператора*

$$\left[1 - \frac{1}{(2\pi\omega)^2} \frac{d^2}{dx^2} \right]^m, \quad (18)$$

удовлетворяющего равенству (10), имеет вид

$$F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) = \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[\frac{\lambda (e^{4\pi\omega h} - 1)}{-\lambda^2 e^{2\pi\omega h} + \lambda (e^{4\pi\omega h} + 1) - e^{2\pi\omega h}} \right] +$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \sum_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \right)^i \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\rho=0}^i (-1)^{i-\rho} \frac{i!}{\rho! (i-\rho)!} \rho^k + \frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \right)^i \sum_{\rho=0}^i (-1)^{i-\rho} \frac{i!}{\rho! (i-\rho)!} \rho^k \right].$$

Доказательство. Используя (17), вычислим преобразование Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$. В формуле (3) положим, что $x = h\beta$, тогда

$$F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi \cdot e^{-2\pi\omega h|\beta|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!} |h\beta|^k e^{2\pi i h \beta p}.$$

Таким образом,

$$F \left[\overleftarrow{V}_m(\omega x) \right] (p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \nu_m(h\beta) e^{2\pi i h \omega \beta p} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi \cdot e^{-2\pi\omega h|\beta|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega)^k}{k!(m-k-1)!} |h\beta|^k \times$$

$$\times e^{2\pi i h \beta p} = \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} e^{2\pi i h p \beta} |\beta|^k. \quad (19)$$

Отсюда, обозначая $e^{2\pi h p} = \lambda$, и после некоторых преобразований из (19) имеем

$$F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) = \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta |\beta|^k =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \frac{(2m-2)!}{(m-1)!} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta +$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta |\beta|^k =$$

$$= \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \frac{(2m-2)!}{(m-1)!} \left[1 + \sum_{\beta=-\infty}^{-1} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta + \sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta \right] +$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\sum_{\beta=-\infty}^{-1} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta |\beta|^k + \sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-2\pi\omega h|\beta|} \lambda^\beta |\beta|^k \right] =$$

$$= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}} \right)^\beta + \sum_{\beta=1}^{\infty} e^{-2\pi\omega h\beta} \lambda^{-\beta} \right] +$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}} \right)^\beta \beta^k + \sum_{\beta=1}^{\infty} (\lambda^{-\beta} e^{-2\pi\omega h\beta}) \beta^k \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}} \right)^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda e^{2\pi\omega h})^{\beta}} \right] + \\
 &+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}} \right)^{\beta} \beta^k + \sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h}} \right)^{\beta} \beta^k \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Применяя некоторые формулы из [15] на первое слагаемое (20), получаем

$$\begin{aligned}
 F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) &= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[1 + \frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h} - 1} + \frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \right] + \\
 &+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\sum_{\beta=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h}} \right)^{\beta} \beta^k + \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda e^{2\pi\omega h})^{\beta}} \beta^k \right]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Справедлива следующая формула [16]:

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1} q^{\gamma} \gamma^k = \frac{1}{1-q} \sum_{i=0}^k \left(\frac{q}{1-q} \right)^i \Delta^i 0^k - \frac{q^n}{1-q} \sum_{i=0}^k \left(\frac{q}{1-q} \right)^i \Delta^i \gamma^k |_{\gamma=n},$$

при $|q| < 1$ из (21) имеем

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\gamma} \gamma^k = \frac{1}{1-q} \sum_{i=0}^k \left(\frac{q}{1-q} \right)^i \Delta^i 0^k. \quad (22)$$

В силу (22) из (21) имеем

$$\begin{aligned}
 F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) &= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[\frac{\lambda (e^{4\pi\omega h} - 1)}{-\lambda^2 e^{2\pi\omega h} + \lambda (e^{4\pi\omega h} + 1) - e^{2\pi\omega h}} \right] + \\
 &+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \sum_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \right)^i \Delta^i 0^k + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \right)^i \Delta^i 0^k \right], \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $\Delta^i \gamma^k$ — конечная разность порядка i от γ^k , $\Delta^i 0^k = \Delta^i \gamma^k |_{\gamma=n}$.

Таким образом, применяя формулы из [17] в (23), имеем

$$\begin{aligned}
 F \left[\overleftarrow{V}_m(x) \right] (p) &= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[\frac{\lambda (e^{4\pi\omega h} - 1)}{-\lambda^2 e^{2\pi\omega h} + \lambda (e^{4\pi\omega h} + 1) - e^{2\pi\omega h}} \right] + \\
 &+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \sum_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \right)^i \Delta^i 0^k + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \right)^i \Delta^i 0^k \right] = \\
 &= \frac{\pi (2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} \left[\frac{\lambda (e^{4\pi\omega h} - 1)}{-\lambda^2 e^{2\pi\omega h} + \lambda (e^{4\pi\omega h} + 1) - e^{2\pi\omega h}} \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(4\pi\omega h)^k}{k!(m-k-1)!} \left[\frac{e^{2\pi\omega h}}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \sum_{i=0}^k \left(\frac{\lambda}{e^{2\pi\omega h} - \lambda} \right)^i \times \right. \\ \left. \times \sum_{\rho=0}^i (-1)^{i-\rho} \frac{i!}{\rho!(i-\rho)!} \rho^k + \frac{\lambda e^{2\pi\omega h}}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi\omega h} - 1} \right)^i \sum_{\rho=0}^i (-1)^{i-\rho} \frac{i!}{\rho!(i-\rho)!} \rho^k \right],$$

что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что в работах [18]–[21] построены оптимальные квадратурные формулы и оптимальные по порядку сходимости, асимптотические оптимальные и практичные асимптотические оптимальные кубатурные формулы в функциональных пространствах С.Л. Соболева.

Так как нам известно $F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)$, то для определения коэффициентов Фурье функции $F[\overleftarrow{D}_m(h\beta)](p)$, т. е. $D_m(x)$, учитывая (10) после разложения $\left\{F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)\right\}^{-1}$ в ряд Фурье, в дальнейшем находим дискретный аналог $D_m[\beta]$ оператора (18).

Рассмотрим случай $m = 1$ и $\omega = 1$. Для $F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)$ имеем

$$F[\overleftarrow{V}_1(\beta)](p) = \pi \left[1 + \frac{\lambda}{\exp(2\pi h) - \lambda} + \frac{1}{\lambda \exp(2\pi h) - 1} \right] = \\ = \pi \left[\frac{(\exp(2\pi h) - \lambda)(\lambda \exp(2\pi h) - 1) + \lambda(\lambda \exp(2\pi h) - 1) + (\exp(2\pi h) - \lambda)}{\lambda \exp(4\pi h) - \exp(2\pi h) - \lambda^2 \exp(2\pi h) + \lambda} \right] = \\ = \pi \left[\frac{-\lambda^2 \exp(2\pi h) + \lambda(\exp(4\pi h) + 1) - \exp(2\pi h) + \lambda^2 \exp(2\pi h) - \lambda + \exp(2\pi h) - \lambda}{-\lambda^2 \exp(2\pi h) + \lambda(\exp(4\pi h) + 1) - \exp(2\pi h)} \right] = \\ = \pi \left[\frac{\lambda(\exp(4\pi h) - 1)}{-\lambda^2 \exp(2\pi h) + \lambda(\exp(4\pi h) + 1) - \exp(2\pi h)} \right],$$

где $\lambda = \exp(2\pi i p h)$. Отсюда

$$F[\overleftarrow{V}_1(\beta)](p) = \pi \left[\frac{\lambda(\exp(4\pi h) - 1)}{-\lambda^2 \exp(2\pi h) + \lambda(\exp(4\pi h) + 1) - \exp(2\pi h)} \right].$$

Далее находим $\left\{F[\overleftarrow{V}_1(x)](p)\right\}^{-1}$. Имеем

$$\left\{F[\overleftarrow{V}_m(x)](p)\right\}^{-1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\lambda^2 \exp(2\pi h) - \lambda(\exp(4\pi h) + 1) + \exp(2\pi h)}{\lambda(1 - \exp(4\pi h))} \right] = \\ = \frac{1}{\pi} \left[\lambda \frac{\exp(2\pi h)}{1 - \exp(4\pi h)} - \frac{\exp(4\pi h) + 1}{1 - \exp(4\pi h)} + \frac{1}{\lambda} \frac{\exp(2\pi h)}{1 - \exp(4\pi h)} \right] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} D_1[\beta] \exp(2\pi i p h \beta).$$

Отсюда вытекает

Теорема 5. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left[1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{dx^2}\right]^m$, удовлетворяющий равенству (8), при $m = 1$ имеет следующий вид:

$$D_1[\beta] = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\exp(4\pi h) + 1}{\exp(4\pi h) - 1}, & \beta = 0; \\ \frac{\exp(2\pi h)}{1 - \exp(4\pi h)}, & |\beta| = 1. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теории квадратурных и кубатурных формул важную роль играют дискретные аналоги дифференциальных операторов. С.Л.Соболев разработал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных и кубатурных формул.

В настоящей работе рассмотрена задача построения преобразования Фурье функции $\overleftarrow{V}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi\omega)^2 dx^2}\right)^m$, который используется при построении оптимальных квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).
- [2] Жамолов З.Ж. *Об одном разностном аналоге оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. В кн.: Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения* (Фан, Ташкент, 1978).
- [3] Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение*, *Вопр. вычисл. и прикл. матем.* (79), 22–35 (1985).
- [4] Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. *Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$* , *Узб. матем. журн.* (2), 85–95 (2004).
- [5] Хаётов А.Р. *Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ и его свойства*, *Узб. матем. журн.* (3), 81–88 (2009).
- [6] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *Составные кубатурные формулы на решетке*, *Изв. вузов. Матем.* (11), 59–74 (2023).
- [7] Габдулхаев Б.Г. *О непрерывности и компактности сингулярных интегральных операторов*, *Изв. вузов. Матем.* (8), 3–10 (2009).
- [8] Волевич Л.Р., Панейх Б.П. *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения*, *УМН* **20** (1), 3–74 (1965).
- [9] Jalolov I.I. *A differential operator of order 2m and its fundamental solution*, *Uzb. Math. J.* **1**, 65–72 (2018).
- [10] Jalolov I.I. *The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution*, *AIP Conf. Proc.* **2365** (1), 020015 (2021).
- [11] Жалолов Ик.И. *Алгоритм построения дискретного аналога $D_3^h[\beta]$ одного оператора*, *Пробл. вычисл. и прикл. матем.* (2), 48–52 (2015).
- [12] Jalolov I.I. *Algorithm for constructing a discrete analogue $D_4[\beta]$ of a differential operator*, *AIP Conf. Proc.* **2781** (1), 020041 (2023).
- [13] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, М., 1971).
- [14] Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. *Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева*, *Пробл. вычисл. и прикл. матем.* (2), 94–102 (2016).
- [15] Данилов В.Л. и др. *Математический анализ (справочная математическая библиотека)* (Физматгиз, М., 1961).
- [16] Шадиметов Х.М. *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева* (Дисс. док. физ.-матем. наук: 01.01.07, Ташкент, 2002).
- [17] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей* (Наука, М., 1967).
- [18] Hayotov A.R., Boboev S.S. *Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space*, *Пробл. вычисл. и прикл. матем.* **4**, 73–84 (2020).
- [19] Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. *On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$* , *J. Comput. Appl. Math.* **372**, 112713 (2020).
- [20] Jalolov O.I. *Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space*, *AIP Conf. Proc.* **2365** (1), 020014 (2021).
- [21] Jalolov O.I. *Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space $\overline{L}_p^{(m)}(K_n)$* , *AIP Conf. Proc.* **2781** (1), 020066 (2023).

Икромжон Исомидинович Жалолов

*Ташкентский государственный транспортный университет,
ул. Адылходжаева, д. 1, г. Ташкент, 100167, Республика Узбекистан,*

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Озоджон Исомидинович Жалолов

*Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,*

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Ik.I. Jalolov and O.I. Jalolov

On one algorithm for constructing the Fourier transform of the function $\overline{V}_m(x)$ to determine a discrete analog of one differential operator

Abstract. This paper considers the problem of constructing the Fourier transform of a harrow-shaped function to determine a discrete analog of the differential operator, which is used in constructing optimal quadrature formulas in L. Hörmander space. In addition, the problem of constructing a discrete analog of a specific operator in a particular case is considered.

Keywords: generalized function, Sobolev space, error functional, interpolation formula, extremal function.

Ikromjon Isomidinovich Jalolov

*Tashkent State Transport University,
1 Adylkhodjaeva str., Tashkent, 100167 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Ozodjon Isomidinovich Jalolov

*Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz