E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

6/2022

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

6/2022

PUBLISHED SINCE 2000 (Online since 2020)

PUBLISHED SIX TIMES A YEAR

2022/6(94)

SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY

***

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

***

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

The journal is published in the Bukhara Regional Department of Press and Information of the Press and Information Agency of Uzbekistan on August 24, 2020 With registered certificate № 1103

The journal "Scientific reports of Bukhara state university" is included in the list of scientific publications recommended to publish the main scientific results of doctoral dissertations of the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan on philology and physical and mathematical sciences.

The journal is intended for professors and teachers of higher educational institutions, senior researchers, students, scientific staff of scientific research institutions, teachers of academic lyceums, professional colleges, as well as researchers in general secondary education and various fields.

Founder: BUKHARA STATE UNIVERSITY

УДК 517.518.392

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Жалолов Озоджон Исомидинович
доцент, заведующий кафедрой Прикладной математики и технологий программирования,
Бухарский государственный университет, 200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.
o_jalolov@mail.ru

Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўғли
студент,
Бухарский государственный университет,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.

Аннотация: *В работе исследование ведется для кубатурных формул в функциональных пространствах Соболева $L_2^{(m)}$ и L_2^m для функций заданных в n - мерной единичной сфере. Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить ее. В связи с этим в пространстве L_2^m вычислена нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита и найдена экстремальная функция. Получена оценку сверху для нормы функционала погрешности кубатурных формул и на основе теоремы Бахвалова в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ построена оптимальная по порядку сходимости кубатурная формула для функций заданных в n - мерной единичной сфере.*

Если нам известны не только значения функции $f(\theta)$ в некоторых точках области S, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно , что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции.

Ключевые слова: *кубатурная формула, функционал погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональная пространство, экстремальная функция.*

Abstract: *In this paper, the study is carried out for cubature formulas in the Sobolev function spaces $L_2^{(m)}$ and L_2^m for functions defined in the n-dimensional unit sphere. The quality of the cubature formula is characterized by the norm of the error functional, and is a function of unknown coefficients and nodes. Therefore, it is useful for computational practice to be able to calculate the norm of the error functional and evaluate it. In this connection, in the L_2^m space, the norms of the error functional of Hermite-type cubature formulas are calculated and the extremal function is found. An upper bound is obtained for the norm of the error functional of cubature formulas, and on the basis of Bakhvalov's theorem in the space $L_2^{(m)}(S)$, an optimal cubature formula in terms of the order of convergence is constructed for functions given in the n-dimensional unit sphere.*

If we know not only the values of the function $f(\theta)$ at some points of the region S, but also the values of its derivatives of one order or another, then naturally, with the correct use of all these data, we can expect a more accurate result than in the case of using only the values of the function.

Keywords: *cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, extremal function.*

Annotatsiya: *Ushbu maqolada n o'lchovli birlik sferada aniqlangan funktsiyalar uchun $L_2^{(m)}$ va L_2^m Sobolev fazolarida kubatur formulalar o'rganilgan. Kubatur formulaning optimalligi xatolik funksional normasi bilan tavsiflanadi va noma'lum koeffitsientlar va tugunlarga bog'liq bo'ladi.*

Shuning uchun, xatolik funktsionali normasini hisoblash va uni baholash muhimdir. Shu munosabat bilan L_2^m fazosida Ermit tipidagi kubatur formulalarning xatolik funksionali normalari hisoblab chiqilgan va ekstremal funksiya topilgan. Kubatur formulalarning xatolik funksionali normasi uchun yuqori chegara olingan va $L_2^{(m)}(S)$ fazodagi Baxvalov teoremasi asosida n o'lchovli birlik sferada berilgan funksiyalar uchun yaqinlashish tartibi bo'yicha optimal kubatur formula qurilgan.

Agar biz S sohaning ba'zi nuqtalarida nafaqat $f(\theta)$ funktsiyasining qiymatlarini, balki uning bir yoki boshqa tartibdagi hosilalarining qiymatlarini ham bilsak, tabiiyki, bu ma'lumotlarning barchasidan to'g'ri foydalanish bilan biz buni amalga oshirishimiz mumkin va aniqroq natijaga erishishimiz mumkin.

Kalit so'zlar: *kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, ekstremal funksiya.*

1. Введение.

Последнее время много работ (см., например, [1-11]) посвящены построению кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов по поверхности сфер, точных для сферических гармоник некоторого порядка. Пусть функции $f(\theta)$, заданные на единичной сфере *S*, принадлежат некоторому Банаховому пространству *B*, вложенному в пространство $C(S)$ непрерывных функций на *S*. Функции $f(\theta)\in B$ продолжим на все пространство R^n, считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы *S* и будем обозначать через $\overline{f}(\theta)$, где *S* $n-$мерная единичная сфера.

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S f(\theta)d\theta \approx \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \tag{1}$$

на функциях из *B*:

$$<\ell_N^{(\alpha)}, f>=\int_S f(\theta)d\theta-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})=\int_{R^n}\ell_N^{(\alpha)}(\theta) f(\theta)d\theta, \tag{2}$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\delta_s(1-r)-\sum_{|\alpha|\le t}\ \sum_{\lambda=1}^{N} C_{\lambda}^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \tag{3}$$

$\delta_S(1-r)$, $\delta\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right)$ - дельта - функции Дирака, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$,

$\sum_{\lambda=1}^{N} C_{\lambda}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, $\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ и $0\le t\le m$,

где $\Gamma(n/2)=\left(\frac{n}{2}-1\right)!$.

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданным на B, и в силу предположения вложенности $B\to C(S)$ этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ будет непрерывным.

2. Постановка задачи.

До сих пор мы рассматривали кубатурные формулы, при помощи которых приближенно вычисляют определенный интеграл от функции, когда известны значения этой функции в отдельных точках-узлах кубатурной формулы. Но возможны более общие кубатурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения ее производных того или иного порядка .

В пространстве B^* норма функционала $\ell_N^{(\alpha)}$ определяются по формуле

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| = \sup_{f \in B, \|f\| \neq 0} \frac{\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f > \right|}{\| f \mid B \|}.$$

Функция $f_0 \in B,$ для которой имеет место равенство

$$\left| < \ell_N^{(\alpha)}, f_0 > \right| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| \cdot \| f_0 \mid B \|,$$

называется *экстремальной функцией* $\ell_N^{(\alpha)}$.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства B, равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы.

Для решения этой задачи в качестве B возьмём пространство $L_2^m(S)$.

Определение. Пространство $L_2^m(S)$ определяется как пространство функций, заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m, норма которых определяется равенством [9]

$$\left\| f \mid L_2^m(S) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \tag{4}$$

где $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и предположим, что $2m > n$, здесь

$Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ и $\sigma(n,k) = \dfrac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2)$, т.е. число линейно независимых сферических гармоник.

3. Вычисление нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^m(S)$.

Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности (3) и оценить ее.

Справедлива следующая

Теорема 1. Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$ кубатурной формулы типа Эрмита (1) над пространством $L_2^m(S)$ равна

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Известно [9], что если $f(\theta) \in L_2^m(S)$, то для абсолютной и равномерной сходимости ряда $f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta)$, где $Y_k(\theta)$ - сферические гармоники порядка k, достаточно выполнение условия $2m > n$.

Таким образом, функция $f(\theta)\in L_2^m$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta), \tag{5}$$

где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ, $a_{k,\ell}=\int_S Y_{k,\ell}(\theta)f(\theta)d\theta$ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник, т.е.

$$\sigma(n,k)=\frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2).$$

Подставляя (5) в левую часть (2), находим

$$<\ell_N^{(\alpha)}(\theta),f(\theta)>=<\delta_S(1-r)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>=$$

$$=<\delta_S(1-r),\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>-<\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>=$$

$$=\int_S\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)d\theta-<\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)>=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}\int_S Y_{k,\ell}(\theta)d\theta-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n.k)}a_{k,\ell}\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}<\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),Y_{k,\ell}(\theta)>=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right].$$

(6)

Если в правой части (6) $a_{k,\ell}$ умножить на $k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}$, а кубатурную сумму разделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то с учетом равенства (4) получаем

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)},f>\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}}\le$$

$$\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}^2k^m(k+n-2)^m\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\| f / L_2^m(S) \right\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

(7)

Из (7) следует

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S) \right\| \le \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right]}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

(8)

Покажем, что в (8) равенство достигается для функции

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \tag{9}$$

из $L_2^m(S)$, где

$$b_{k,\ell} = \frac{\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m (n+k-2)^m} . \tag{10}$$

Действительно, так как для сферических функций имеет место оценка [10]

$$\max \left| Y_k(\theta) \right| \le C(n) k^{-m+\frac{n}{2}-1} \left\| f(\theta) / L_2^m(S) \right\|,$$

то из определения (10) коэффициентов ряда (9) следует, что $U(\theta) \in L_2^m(S)$.

Вычислив погрешность (6) кубатурной формулы для этой функции, получим следующее равенство:

$$\left| < \ell_N^{(\alpha)}, U > \right| = \left| < \delta_S(1-r) p(\theta) - \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} C_{\lambda}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}\left(\theta - \theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) > \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[< \delta_S(1-r), Y_{k,\ell}(\theta) > - \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} C_{\lambda}^{(\alpha)} < \delta^{(\alpha)}\left(\theta - \theta^{(\lambda)}\right), Y_{k,\ell}(\theta) > \right] \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\int_S Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right] \right| =$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^{2}}{k^{m}\left(k+n-2\right)^{m}}\right|=\left\|U\mid L_{2}^{m}(S)\right\|^{2}.$$

(11)

Сопоставляя (8) и (11) находим, что

$\left\|\ell_{N}^{(\alpha)}\mid L_{2}^{m*}(S)\right\|=\left\|U\mid L_{2}^{m}(S)\right\|,$

где $U\left(\theta\right)$ является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е. $U\left(\theta\right)$ - функция Рисса для функционала погрешности $\ell_{N}^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать.

Из (11) следует следующая

Теорема 2. Функция

$$U\left(\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_{\lambda}^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{m}\left(n+k-2\right)^{m}}Y_{k,\ell}\left(\theta\right)$$

является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1) и $U\left(\theta\right)\in L_{2}^{m}\left(S\right)$, где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - ортонормированная сферическая гармоника порядка k, вида ℓ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник порядка k.

4. Оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $L_{2}^{(m)}(S)$.

В настоящем разделе рассматривается кубатурной формулы (1) с функционалом погрешности

$$\ell_{N}^{(\alpha)}\left(\theta\right)=\varepsilon_{s}\left(\theta\right)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_{\lambda}^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right) \qquad (12)$$

Пусть функционалы погрешностей одномерных весовых квадратурных формул типа Эрмита имеют вид

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}\left(\theta_i\right)=\varepsilon_{\Omega_i}\left(\theta_i\right)-\sum_{\alpha_i=1}^{m}\sum_{\lambda_i=1}^{N_i}C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)}\delta^{(\alpha_i)}\left(\theta_i-\theta_i^{(\lambda_i)}\right), \qquad p(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p_i(\theta_i)$$

где $$\Omega_i=\begin{cases}\left[0,2\pi\right], & i=n\ ,\\ \left[0,\pi\right], & i=\overline{1,(n-1)}\ ,\end{cases}$$

и функционал погрешности (12) кубатурной формулы вида (1) представляется в виде:

$\ell_{N}^{(\alpha)}(\theta)=\ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1)\cdot\ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$

Ообозначим $\ell_{N}^{(\alpha)}\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}\left(\theta_i\right).$

В работе Г.Н.Салихова [8] показано, что пространство $L_{2}^{m}\left(S\right)$ по составу своих элементов совпадает с аналогичным пространством $L_{2}^{(m)}\left(S\right)$ С.Л.Соболева нормой

$$\left\| f / L_2^{(m)}(S) \right\| = \left\{ \int_S \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^\alpha f(\theta) \right)^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В одномерном случае для $f_i \in L_2^{(m)}(\Omega_i)$ норма определяется так:

$$\left\| f_i / L_2^{(m)}(\Omega_i) \right\| = \left\{ \int_{\Omega_i} \left(\frac{d^m}{d\theta_i^m} f(\theta_i) \right)^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если $f(\theta)$ из пространства $L_2^{(m)}(S)$ ($2m>n$) и для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ кубатурной формулы вида (1) выполняются условия

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \ldots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n) \quad \text{и}$$

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} \mid L_2^{(m)}(\Omega_i) \right\| \le K_i N_i^{-m} \qquad (13)$$

где $$\Omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n, \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

то $$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{(m)*}(S) \right\| \le \sum_{i=1}^{n} K_i^1 N_i^{-m}.$$

Доказательство. Наиболее очевидным подходом к интегрированию по n - мерной единичной сфере является рассмотрение интеграла как n - раз повторного интеграла и применение 1-мерной весовой квадратурной формулы по каждой переменной отдельно (см.[2]). Таким образом, если $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \ldots, Q_n^{(\alpha_n)}$ - весовые квадратурные формулы типа Эрмита для интервалов $\Omega_i \ (i = \overline{1, n})$, то

$$\int_S f(\theta) d\theta = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \ldots \int_{\Omega_n} f(\theta_1, \ldots, \theta_n) d\theta_1 \ldots d\theta_n \approx$$

$$\approx \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_{n-1}} Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1) d\theta_2, d\theta_3 \ldots d\theta_{n-1} \approx$$

$$\approx \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_{n-2}} Q_2^{(\alpha_2)}(Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2) d\theta_3 \ldots d\theta_{n-1} \approx$$

$$\approx Q_n^{(\alpha_n)}(Q_{n-1}^{(\alpha_{n-1})}(\ldots Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2); \ldots; \theta_n).$$

(14)

Последнее выражение (14) является как раз линейной комбинацией значений f. Действительно, если

$$Q_j^{(i)}(g) = \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i} g^{(\alpha_i)}(\theta_j^{\lambda_i}), \quad j = \overline{1, n},$$

то последнее выражение в (14) в точности есть

$$\sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \ldots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \ldots \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \ldots C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} f^{(\alpha)} \left(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \ldots, \theta_n^{\lambda_n} \right).$$

Последнее выражение обозначим через $\left(Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, ..., Q_n^{(\alpha_n)}\right) f$ или $\left(\prod_{i=1}^{n-1} Q_i^{(\alpha_i)}\right) f$, и кубатурную формулу $Q^{(\alpha)} = \left(Q_1^{(\alpha_1)} \cdot Q_2^{(\alpha_2)} \cdot ... \cdot Q_n^{(\alpha_n)}\right)$ назовем формулой "декартовое произведение", поскольку множество точек, на которых вычисляется значение f в (14), является декартовым произведением множества узлов формул $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, ..., Q_n^{(\alpha_n)}$. Легко заметить, что если для каждого i $d_i^{(\alpha_i)}$ является степенью точности $Q_i^{\alpha_i}$, тогда степень точности $Q^{(\alpha)}$ есть $\mathrm{Min}(d_1^{(\alpha_1)}, d_2^{(\alpha_2)}, ..., d_n^{(\alpha_n)})$.

Пусть нам известно, что

$$\left| \int_{\Omega_i} f(\theta_i) d\theta_i - Q_i^{(\alpha_i)}(f, \theta_i) \right| = E_i^{(\alpha_i)} \tag{15}$$

для всех значений $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_i, \theta_{i+1}, ..., \theta_n$, лежащих на интервалах Ω_i, и что мы имеем 1-мерную оценку погрешности для каждого i от 1 до *n*.

В дальнейшем $A_i^{(\alpha_i)}$ обозначает сумму абсолютных значений коэффициентов в формуле $Q_i^{(\alpha_i)}$ Для получения оценки погрешности кубатурных формул (1) используем понятие экстремальной функции функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$, введенное С.Л. Соболевым [12].

Учитывая теорему 2 и это определение, имеем, что $U(\theta) = \psi_\ell(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$.

Известно, что [11]

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{(m)*}(S) \right\|^2 = \left\| \psi_\ell \mid L_2^{(m)}(S) \right\|^2 = |< \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) >|.$$

Таким образом, имеем

$$\left| < \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) > \right| = \left| \int_S \psi_\ell(\theta) ds - (\prod_{i=1}^{n} Q_i^{(\alpha_i)}) \psi_\ell \right| =$$

$$= \left| \int_{\Omega_1} ... \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, ..., \theta_n) d\theta_1 ... d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} ... \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, ..., \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| =$$

$$= \left| \int_{\Omega_1} ... \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, ..., \theta_n) d\theta_1 ... d\theta_n - \int_{\Omega_2} ... \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, ..., \theta_n) d\theta_2 ... d\theta_n + \right.$$

$$\left. + \int_{\Omega_2} ... \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, ..., \theta_n) d\theta_2 ... d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} ... \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, ..., \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \le$$

$$\leq \int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n} d\theta_2\ldots d\theta_n \left| \int_{\Omega_1}\psi_\ell d\theta_1 - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1}\sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}{}_{\lambda_1}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2,\ldots,\theta_n)\right| +$$

$$+\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\left|C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}\right|\left|\int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2,\ldots,\theta_n)d\theta_2\ldots d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\ldots\sum_{\alpha_n=1}^{m_n}\sum_{\lambda_n=1}^{N_n}C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\ldots,\theta_n^{(\lambda_n)})\right| =$$

$$=\int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n} d\theta_2\ldots d\theta_n E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1}\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\left|C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}\right|\left|\int_{\Omega_2}\ldots\int_{\Omega_n}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2\ldots,\theta_n)d\theta_2\ldots d\theta_n -\right.$$

$$-\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n}\sum_{\alpha_2=1}^{m_2}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\psi_\ell(\theta_2^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\theta_3,\ldots,\theta_n)d\theta_3\ldots d\theta_n +$$

$$\left.+\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n}\sum_{\alpha_2=1}^{m_2}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\psi_\ell(\theta_2^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\theta_3,\ldots,\theta_n)d\theta_3\ldots d\theta_n - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\ldots\sum_{\alpha_n=1}^{m_n}\sum_{\lambda_n=1}^{N_n}C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)}C_{\lambda_n}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\ldots,\theta_n^{(\lambda_n)})\right| \leq$$

$$\leq C_1E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1}\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\left|C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}\right|\left\{\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n} d\theta_3\ldots d\theta_n\left|\int_{\Omega_2}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2\ldots,\theta_n)d\theta_2 - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\ldots,\theta_n)\right| +\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha_2=1}^{m_2}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\left|C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\right|\left|\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\ldots,\theta_n)d\theta_3\ldots d\theta_n - \sum_{\alpha_3=1}^{m_3}\sum_{\lambda_3=1}^{N_3}C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)}\ldots\sum_{\alpha_n=1}^{m_n}\sum_{\lambda_n=1}^{N_n}C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\ldots,\theta_n^{(\lambda_n)})\right|\right\} =$$

$$= C_1E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1}\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\left|C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}\right|\left|\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n} d\theta_3\ldots d\theta_n E_2 + \sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\left|C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)}\right|\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)}\right|\int_{\Omega_3}\ldots\int_{\Omega_n}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\ldots,\theta_n)d\theta_3\ldots d\theta_n -$$

$$\left.-\sum_{\alpha_3=1}^{m_3}\sum_{\lambda_3=1}^{N_3}C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)}\ldots\sum_{\alpha_n=1}^{m_n}\sum_{\lambda_n=1}^{N_n}C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)}\psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)},\theta_2^{(\lambda_2)},\ldots,\theta_n^{(\lambda_n)})\right| \leq$$

$$\leq \ldots \leq C_1E_1^{(\alpha_1)} + C_2A_1^{(\alpha_1)}E_2^{(\alpha_2)} + C_3A_1^{(\alpha_1)}A_2^{(\alpha_2)}E_3^{(\alpha_3)} + \ldots + C_nA_1^{(\alpha_1)}A_2^{(\alpha_2)}\ldots E_n^{(\alpha_n)}A_{n-1}E_n^{(\alpha_n)}.$$

(16)

Итак, для каждого i, учитывая

$$\left\{\int_{\Omega_i}\frac{d^m}{d\theta_i^m}\left|\psi_\ell(\theta)\right|^2 d\theta_i\right\}^{1/2} \leq C\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}(S)\right\| \quad (17)$$

и оценки (13) и (17), из (15) получаем

$$E_i^{(\alpha_i)}(f) \leq C\left\|\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}|L_2^{(m)*}(\Omega_i)\right\|\cdot\left\|\psi_\ell|L_2^{(m)}(S)\right\| \leq CK_iN_i^{-m}\left\|\psi_\ell\left|L_2^{(m)}(S)\right.\right\|.$$

(18)

Подставляя (18) в (16), имеем

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}|L_2^{(m)*}(S)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}K_i^1N_i^{-m}. \quad (19)$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть справедливо

$$\left\|\ell_{N_i}^{(\alpha_i)} \mid L_2^{(m)*}(\Omega_i)\right\| \leq K_iN_i^{-m},$$

кроме того, $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ и $\prod_{i=1}^{n}N_i = N$, тогда кубатурная формула вида (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \ldots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

является оптимальной по порядку сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(S)$, т.е.

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{(m)*}(S) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}} \right).$$

Доказательство. На основе леммы , так как $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$, то из

$$\prod_{i=1}^{n} N_i = N \qquad \text{имеем} \qquad N_1 = N^{\frac{1}{n}}. \tag{20}$$

Учитывая (20) из (19) получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{(m)*}(S) \right\| \le N^{-\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^{n} K_i^1. \tag{21}$$

используя (см [16, 17]) и (21) получим утверждение теоремы.

Вывод.

Исследование для получение оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита показывает, что вычисляя значение функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ на функции $U(\theta)$, получили равенство для нормы функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(S)$ и нормы функции $U(\theta)$ в пространстве $L_2^{(m)}(S)$. Это равенство действительно подтверждает, что $U(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$ является экстремальной функцией для кубатурных формул типа Эрмита. Таким образом применяя метод повторного интегрирования, т.е. используя одномерных квадратурных формул, построена оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева для функций заданных в n-мерной единичной сферы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы. СМЖ, 1962, т.3,№5, с.769-796.*
2. *Мысовских И.П. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы, СМЖ, 1964,т.5,№3,с.721-723.*
3. *Лебедов В.И. О квадратурах на сфере ЖВМ и МФ,1976 ,т.16,№2, с.293-306.*
4. *McLaren D.A.Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.1963,t.83, S.361-383.*
5. *Freeden W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere.- computing,1980,t.23,N2., -Pp.131-146.*
6. *Freeden W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere . Bull . Geod. (1978)52,11. 165-175.*
7. *Соболев С. Л, Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск. 1996,-483с.*
8. *Салихов Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985.*
9. *Салихов Г.Н. Оценка погрешности кубатурных формул в пространстве* $L_2^{(m)}(S)$ *// Докл. АН СССР. –Москва, 1975. -Т.223, № 6. - С.1318-1321.*
10. *Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. – 724 с.*
11. *Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.*
12. *Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.*

13. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature f0rmulas for compating of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied matematics , 2020, No.4, pp 73-85.

14. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$ *, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020).*

15. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0057015.

16.Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических харатеристик классов функций с доминирующей смешанной производной// Матем.заметки.-Москва. 1972.- Т.12, №6.- С.655-664.

17.Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.

2030 UZBEKISTAN RESEARCH ONLINE
uzjournals.edu.uz

digital object identifier

Google scholar

ROAD DIRECTORY OF OPEN ACCESS SCHOLARLY RESOURCES

ADVANCED SCIENCES INDEX

"SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY"

The journal was composed in the Editorial and Publishing Department of Bukhara State University.

Editorial address:
Bukhara, 200117
Bukhara state university, main building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing Department.
https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted 28.12.2022 y. Paper format 60x84,1/8. Printed in express printing method. Conditional printing plate – 35,30. Circulation 70. Order № 30. Price is negotiable. Published in the printing house "Sadriddin Salim Buxoriy" LLC Address: Bukhara, M.Ikbol street, 11