



E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004

**PUBLISHED
SINCE 2000**
(Online since 2020)

**PUBLISHED SIX
TIMES A YEAR**

2022/6(94)

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD:
Khamidov O.Kh.

Doctor of Economics, Professor

EDITOR-IN-CHIEF:

Rasulov T.Kh.

Doctor of Physics and Mathematics, Docent

INTERNATIONAL EDITORIAL BOARD:

Kuzmichev N.D. (Russia)

Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Danova M. (Bulgaria)

Doctor of Philology, Professor

Margianti SE. (Indonesia)

Doctor of Economics, Professor

Wünsch Th. (Germany)

History of E.Europe Dr. of phil. habil, Professor

Minin V.V. (Russia)

Doctor of Chemical Sciences

Tashkaraev R.A. (Kazakhstan)

Doctor of Technical Sciences

Muminov M.E. (Malaysia)

Candidate of Physics and Mathematics

Srivastava P.K. (India)

American and English Literature PhD in English

NATIONAL EDITORIAL BOARD:

Adizov B.R.

Doctor of Pedagogical sciences, Professor
(Deputy Editor-in-Chief)

Abuzalova M.K.

Doctor of Philological sciences, Professor

Amonov M.R.

Doctor of Technical sciences, Professor

Barotov Sh.R.

Doctor of Psychological sciences, Professor

Bakoyeva M.K.

Doctor of Philological sciences

Buriyev S.B.

Doctor of biological sciences, professor

Djurayev D.R.

Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Durdiyev D.K.

Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Olimov Sh.Sh.

Doctor of Pedagogical sciences, Professor

Kakhkhorov S.K.

Doctor of Pedagogical sciences, Professor

Umarov B.B.

Doctor of Chemical sciences, Professor

Urayeva D.S.

Doctor of Philological sciences, Professor

Zaripov G.T.

Candidate of technical sciences, Docent

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:

Navruz-zoda B.N.

Doctor of Economics, Professor

Turayev H.H.

Doctor of Historical sciences, Professor

Juraev N.K.

Doctor of Political sciences, Professor

Jumaev R.G.

PhD in Political sciences, Docent

Kuvvatova D.Kh.

Doctor of Philological sciences, Professor

Akhmedova Sh. N.

Doctor of Philological sciences, Professor

**SCIENTIFIC REPORTS OF
BUKHARA STATE
UNIVERSITY**

**BUXORO DAVLAT
UNIVERSITETI ILMIY
AXBOROTI**

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК
БУХАРСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

*The journal is published in the Bukhara
Regional Department of Press and
Information of the Press and Information
Agency of Uzbekistan on August 24, 2020
With registered certificate № 1103*

*The journal "Scientific reports of Bukhara
state university" is included in the list of
scientific publications recommended to
publish the main scientific results of
doctoral dissertations of the Higher
Attestation Commission under the
Cabinet of Ministers of the Republic of
Uzbekistan on philology and physical and
mathematical sciences.*

*The journal is intended for professors
and teachers of higher educational
institutions, senior researchers, students,
scientific staff of scientific research
institutions, teachers of academic
lyceums, professional colleges, as well as
researchers in general secondary
education and various fields.*

**Founder: BUKHARA STATE
UNIVERSITY**

Executive secretary:
Sayfullaeva N.Z.
**Doctor of Philosophy in
Pedagogical Sciences (PhD)**

Editor: Sobirova Z.R.

Department technicians:
Shirinova M.Sh.
Raximova S.M.

EXACT AND NATURAL SCIENCES		
Турдиев Х.Х., Холиков С.Х., Темирова М. Х.	Смешанная задача для интегро-дифференциальной гиперболической систем первого порядка с памятью	3
Abdullaev J.I., Ibragimov H.H.	Pifagor va EYler g'ishtlari	10
Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.	Построение оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева	16
Jumayev J.	Transport masalasini Mathcad tizimida yechish	27
Raxmatova N.J.	Inverse coefficient problem for the 1d fractional diffusion equation with initial-boundary problem	32
Nurolliyev N.Sh.	Methods and analysis of operating with scientific laboratories to investigate the optical properties of zinc oxide nanorods	41
Хаятов Х.У.	Построение квадратурных формул с помощью оптимальной интерполяционной формулы в пространстве С.Л.Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	50
Babaev S.S., Amonova N.A.	To construct basis functions in $W_2^{(1,0)}$ space for finite element method for 1d two-point boundary-value problems	57
LINGUISTICS		
Jumayev E.B., To'xtayeva M.O.	O'zbek adabiy tilida so'roq gap va o'zlashtirmalik	63
Kambarova M.	Classification of architecture and construction terms for the national corpus	69
Kazakov I.R.	Frazeologiyada millat tili va madaniyati tavsifi	73
Radjabov R.R.	Fransuz tili orfografiyasiga oid ilmiy-nazariy qarashlar	77
Rabieva M.G'.	Kinodiskurs yaxlitligini ta'minlashda verbal-vizual komponentlar va ularning ahamiyati	81
Saidov S.S.	Ikkinchi til o'rganishda ekstraversiyaning foydalari	86
Xolova Sh.D.	Frazeologik birlik-frazema-frazeologizm: tasnif va tadqiqot tahlili	92
Usmonov A.K.	Bog'lovchilarning pleonastik qo'llanishining stilistik xususiyatlari	98
Жаббарова Ю.Х.	Қариндошлик терминлари иштирокидаги прагматик коннотация	103
Нурова Ю.У.	Паремалардаги озиқ-овқат номлари этнолингвистика объекти сифатида	109
Раджабов Н.Н.	Инглиз тилида унли фонемаларнинг позицион кўринишлари	114
Рўзиев Я.Б.	Ноқардош тилларда иккинчи тур ўзлаштирмалик ва микромагн	121

Жабборов Э.	Маҳмудхўжа Бехбудийнинг “сарт” сўзи ҳақидаги қарашлари	126
Kaharova I.S.	Morphological features of imitative words in the Uzbek and English languages	130
LITERARY CRITICISM		
Kurbanova Ch.B.	Abdulla Oripov she'riyatida aruz vazni va uning ahamiyati	137
Nasridinova S.U.	O.Henri hikoyalarida yumorning badiiy vazifalari	143
Obidova N.O.	Kortasar hikoyalarida psixologik tahlil	148
Халимова Ф.Р.	Лингвофонетик воситаларнинг прагматик хусусияти (инглиз шеърий матни мисолида)	152
Zaripova D.B.	Huvaydo lirikasida payg'ambarlar obrazi	156
Ахмедова Ш.Н.	Академик Наим Каримов услубига хос муҳим қирралар (Ойбек ижоди мисолида)	160
Бокарева М.А.	Пути развития русского реализма рубежа XX-XXI веков: от соцреализма до экзистенциального постреализма	166
Джалилова З.Б.	Инглиз шеъриятида инсон образининг гуллар орқали тасвирланиши	173
Каримова Ш.К.	Замонавий ўзбек шеъриятида поэтик синтаксис унсурларининг уйғун келиши	182
Fayziyeva M.Ch.	Amerika va o'zbek badiiy diskursida sadoqat va xiyonat g'oyalari talqini	189
Қодирова Ф.Ш.	Риторика санъатшунослик дискурси контекстида	194
“NAVOIY GULSHANI”		
Амонова З.Қ.	Изҳори ҳамд	198
PHILOSOPHY, LAW AND POLITICAL SCIENCES		
Давидов У.Х.	Миллий-маънавий хавфсизлик ва миллий ўзликни англашнинг ўзига хос сиёсий-мафкуравий хусусиятлари ва эволюцияси	201
Muminkhujaev A.M.	The formation and development of liberal worldview on ideological threats in the context of globalization	207
PEDAGOGICS		
Ҳакимова Н.С.	Бошланғич синф тарбия дарсларида ўқувчиларда ижтимоий-ҳуқуқий компетенцияларини шакллантириш тамойиллари	212

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Жалолов Озоджон Исомидинович
 доцент, заведующий кафедрой Прикладной
 математики и технологий программирования,
 Бухарский государственный университет, 200114,
 улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.
o_jalolov@mail.ru

Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўгли
 студент,
 Бухарский государственный университет,
 200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.

Аннотация: В работе исследование ведется для кубатурных формул в функциональных пространствах Соболева $L_2^{(m)}$ и L_2^m для функций заданных в n -мерной единичной сфере. Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить ее. В связи с этим в пространстве L_2^m вычислена нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита и найдена экстремальная функция. Получена оценка сверху для нормы функционала погрешности кубатурных формул и на основе теоремы Бахвалова в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ построена оптимальная по порядку сходимости кубатурная формула для функций заданных в n -мерной единичной сфере.

Если нам известны не только значения функции $f(\theta)$ в некоторых точках области S , но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции.

Ключевые слова: кубатурная формула, функционал погрешности, пространство Соболева, обобщенная функция, функциональное пространство, экстремальная функция.

Abstract: In this paper, the study is carried out for cubature formulas in the Sobolev function spaces $L_2^{(m)}$ and L_2^m for functions defined in the n -dimensional unit sphere. The quality of the cubature formula is characterized by the norm of the error functional, and is a function of unknown coefficients and nodes. Therefore, it is useful for computational practice to be able to calculate the norm of the error functional and evaluate it. In this connection, in the L_2^m space, the norms of the error functional of Hermite-type cubature formulas are calculated and the extremal function is found. An upper bound is obtained for the norm of the error functional of cubature formulas, and on the basis of Bakhvalov's theorem in the space $L_2^{(m)}(S)$, an optimal cubature formula in terms of the order of convergence is constructed for functions given in the n -dimensional unit sphere.

If we know not only the values of the function $f(\theta)$ at some points of the region S , but also the values of its derivatives of one order or another, then naturally, with the correct use of all these data, we can expect a more accurate result than in the case of using only the values of the function.

Keywords: cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, extremal function.

Аннотация: Ushbu maqolada n o'lchovli birlik sferada aniqlangan funktsiyalar uchun $L_2^{(m)}$ va L_2^m Sobolev fazolarida kubatur formulalar o'rganilgan. Kubatur formulaning optimalligi xatolik funktsional normasi bilan tavsiflanadi va noma'lum koeffitsientlar va tugunlarga bog'liq bo'ladi.

Shuning uchun, xatolik funktsionali normasini hisoblash va uni baholash muhimdir. Shu munosabat bilan L_2^m fazosida Ermit tipidagi kubatur formulalarning xatolik funktsionali normalari hisoblab chiqilgan va ekstremal funktsiya topilgan. Kubatur formulalarning xatolik funktsionali normasi uchun yuqori chegara olingan va $L_2^{(m)}(S)$ fazodagi Baxvalov teoremasi asosida n o'lchovli birlik sferada berilgan funktsiyalar uchun yaqinlashish tartibi bo'yicha optimal kubatur formula qurilgan.

Agar biz S sohaning ba'zi nuqtalarida nafaqat $f(\theta)$ funktsiyasining qiymatlarini, balki uning bir yoki boshqa tartibdagi hosilalarining qiymatlarini ham bilsak, tabiiyki, bu ma'lumotlarning barchasidan to'g'ri foydalanish bilan biz buni amalga oshirishimiz mumkin va aniqroq natijaga erishishimiz mumkin.

Калит so'zlar: kubatur formula, xatolik funktsionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funktsiya, funktsional fazo, ekstremal funktsiya.

1. Введение.

Последнее время много работ (см., например, [1-11]) посвящены построению кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов по поверхности сфер, точных для сферических гармоник некоторого порядка. Пусть функции $f(\theta)$, заданные на единичной сфере S , принадлежат некоторому Банаховому пространству B , вложенному в пространство $C(S)$ непрерывных функций на S . Функции $f(\theta) \in B$ продолжим на все пространство R^n , считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы S и будем обозначать через $\bar{f}(\theta)$, где S n -мерная единичная сфера.

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S f(\theta) d\theta \approx \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \quad (1)$$

на функциях из B :

$$\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle = \int_S f(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell_N^{(\alpha)}(\theta) f(\theta) d\theta, \quad (2)$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \delta_s(1-r) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \quad (3)$$

$\delta_s(1-r)$, $\delta(\theta - \theta^{(\lambda)})$ - дельта - функции Дирака, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$,

$$\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{и} \quad 0 \leq t \leq m,$$

где $\Gamma(n/2) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$.

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданным на B , и в силу предположения вложенности $B \rightarrow C(S)$ этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ будет непрерывным.

2. Постановка задачи.

До сих пор мы рассматривали кубатурные формулы, при помощи которых приближенно вычисляют определенный интеграл от функции, когда известны значения этой функции в отдельных точках-узлах кубатурной формулы. Но возможны более общие кубатурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения ее производных того или иного порядка.

В пространстве B^* норма функционала $\ell_N^{(\alpha)}$ определяются по формуле

$$\|\ell_N^{(\alpha)} | B^*\| = \sup_{f \in B, \|f\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f | B\|}.$$

Функция $f_0 \in B$, для которой имеет место равенство

$$|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f_0 \rangle| = \|\ell_N^{(\alpha)} | B^*\| \cdot \|f_0 | B\|,$$

называется *экстремальной функцией* $\ell_N^{(\alpha)}$.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства B , равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы.

Для решения этой задачи в качестве B возьмём пространство $L_2^m(S)$.

Определение. Пространство $L_2^m(S)$ определяется как пространство функций, заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщёнными производными порядка m , норма которых определяется равенством [9]

$$\|f | L_2^m(S)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \quad (4)$$

где $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и предположим, что $2m > n$, здесь

$Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ и

$$\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} (n+2k-2), \text{ т.е. число линейно независимых сферических гармоник.}$$

3. Вычисление нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^m(S)$.

Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности (3) и оценить ее.

Справедлива следующая

Теорема 1. Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$ кубатурной формулы типа Эрмита (1) над пространством $L_2^m(S)$ равна

$$\|\ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S)\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Известно [9], что если $f(\theta) \in L_2^m(S)$, то для абсолютной и равномерной

сходимости ряда $f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta)$, где $Y_k(\theta)$ - сферические гармоники порядка k , достаточно выполнение условия $2m > n$.

Таким образом, функция $f(\theta) \in L_2^m$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \tag{5}$$

где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ , $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и

$\sigma(n, k)$ - число линейно независимых сферических гармоник, т.е.

$$\sigma(n, k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} (n+2k-2).$$

Подставляя (5) в левую часть (2), находим

$$\begin{aligned} & \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle = \langle \delta_S(1-r) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\ & = \langle \delta_S(1-r), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) \rangle = \\ & = \int_S \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \langle \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \int_S Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} \left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]. \end{aligned}$$

(6)

Если в правой части (6) $a_{k,\ell}$ умножить на $k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}$, а кубатурную сумму разделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то с учетом равенства (4) получаем

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} (-1)^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^{\frac{m}{2}} (k+n-2)^{\frac{m}{2}}} \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$= \|f / L_2^m(S)\| \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(7)

Из (7) следует

$$\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S) \| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(8)

Покажем, что в (8) равенство достигается для функции

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} b_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta) \tag{9}$$

из $L_2^m(S)$, где

$$b_{k,\ell} = \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m}. \tag{10}$$

Действительно, так как для сферических функций имеет место оценка [10]

$$\max |Y_k(\theta)| \leq C(n) k^{-m+\frac{n}{2}-1} \|f(\theta) / L_2^m(S)\|,$$

то из определения (10) коэффициентов ряда (9) следует, что $U(\theta) \in L_2^m(S)$.

Вычислив погрешность (6) кубатурной формулы для этой функции, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, U \rangle \right| &= \left| \langle \delta_s(1-r)p(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\langle \delta_s(1-r), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}), Y_{k,\ell}(\theta) \rangle \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (k+n-2)^m} \cdot \left[\int_S Y_{k,\ell}(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right] \right| = \end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right| = \|U | L_2^m(S)\|^2.$$

(11)

Сопоставляя (8) и (11) находим, что

$$\|\ell_N^{(\alpha)} | L_2^{m*}(S)\| = \|U | L_2^m(S)\|,$$

где $U(\theta)$ является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е. $U(\theta)$ - функция Рисса для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать.

Из (11) следует следующая

Теорема 2. Функция

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)})}{k^m (n+k-2)^m} Y_{k,\ell}(\theta)$$

является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1) и $U(\theta) \in L_2^m(S)$, где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - ортонормированная сферическая гармоника порядка k , вида ℓ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник порядка k .

4. Оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(S)$.

В настоящем разделе рассматривается кубатурной формулы (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \varepsilon_s(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) \tag{12}$$

Пусть функционалы погрешностей одномерных весовых квадратурных формул типа Эрмита имеют вид

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i) = \varepsilon_{\Omega_i}(\theta_i) - \sum_{\alpha_i=1}^m \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)} \delta^{(\alpha_i)}(\theta_i - \theta_i^{(\lambda_i)}), \quad p(\theta) = \prod_{i=1}^n p_i(\theta_i)$$

где
$$\Omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n, \\ [0, \pi], & i = \overline{1, (n-1)}, \end{cases}$$

и функционал погрешности (12) кубатурной формулы вида (1) представляется в виде:

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

Обозначим
$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \prod_{i=1}^n \ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i).$$

В работе Г.Н.Салихова [8] показано, что пространство $L_2^m(S)$ по составу своих элементов совпадает с аналогичным пространством $L_2^{(m)}(S)$ С.Л.Соболева нормой

$$\|f/L_2^{(m)}(S)\| = \left\{ \int_S \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(\theta))^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В одномерном случае для $f_i \in L_2^{(m)}(\Omega_i)$ норма определяется так:

$$\|f_i/L_2^{(m)}(\Omega_i)\| = \left\{ \int_{\Omega_i} \left(\frac{d^m}{d\theta_i^m} f(\theta_i) \right)^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если $f(\theta)$ из пространства $L_2^{(m)}(S)$ ($2m > n$) и для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ кубатурной формулы вида (1) выполняются условия

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n) \quad \text{и}$$

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} | L_2^{(m)}(\Omega_i) \right\| \leq K_i N_i^{-m} \tag{13}$$

где $\Omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n, \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1}, \end{cases}$

то $\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*}(S) \right\| \leq \sum_{i=1}^n K_i^1 N_i^{-m}.$

Доказательство. Наиболее очевидным подходом к интегрированию по n - мерной единичной сфере является рассмотрение интеграла как n - раз повторного интеграла и применение 1-мерной весовой квадратурной формулы по каждой переменной отдельно (см.[2]). Таким образом, если $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}$ - весовые квадратурные формулы типа Эрмита для интервалов Ω_i ($i = \overline{1, n}$), то

$$\begin{aligned} \int_S f(\theta) d\theta &= \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} f(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n \approx \\ &\approx \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{n-1}} Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1) d\theta_2, d\theta_3 \dots d\theta_{n-1} \approx \\ &\approx \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_{n-2}} Q_2^{(\alpha_2)}(Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2) d\theta_3 \dots d\theta_{n-1} \approx \\ &\approx Q_n^{(\alpha_n)}(Q_{n-1}^{(\alpha_{n-1})}(\dots Q_1^{(\alpha_1)}(f; \theta_1); \theta_2); \dots; \theta_n). \end{aligned} \tag{14}$$

Последнее выражение (14) является как раз линейной комбинацией значений f . Действительно, если

$$Q_j^{(i)}(g) = \sum_{\lambda_j=1}^{N_j} C_{\lambda_j}^{(\alpha_j)} g^{(\alpha_j)}(\theta_j^{\lambda_j}), \quad j = \overline{1, n},$$

то последнее выражение в (14) в точности есть

$$\sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \dots \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} f^{(\alpha)}(\theta_1^{\lambda_1}, \theta_2^{\lambda_2}, \dots, \theta_n^{\lambda_n}).$$

Последнее выражение обозначим через $(Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}) f$ или $\left(\prod_{i=1}^{n-1} Q_i^{(\alpha_i)}\right) f$, и кубатурную формулу $Q^{(\alpha)} = (Q_1^{(\alpha_1)} \cdot Q_2^{(\alpha_2)} \cdot \dots \cdot Q_n^{(\alpha_n)})$ назовем формулой "декартово произведение", поскольку множество точек, на которых вычисляется значение f в (14), является декартовым произведением множества узлов формул $Q_1^{(\alpha_1)}, Q_2^{(\alpha_2)}, \dots, Q_n^{(\alpha_n)}$. Легко заметить, что если для каждого i $d_i^{(\alpha_i)}$ является степенью точности $Q_i^{(\alpha_i)}$, тогда степень точности $Q^{(\alpha)}$ есть $\text{Min}(d_1^{(\alpha_1)}, d_2^{(\alpha_2)}, \dots, d_n^{(\alpha_n)})$.

Пусть нам известно, что

$$\left| \int_{\Omega_i} f(\theta_i) d\theta_i - Q_i^{(\alpha_i)}(f, \theta_i) \right| = E_i^{(\alpha_i)} \tag{15}$$

для всех значений $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n$, лежащих на интервалах Ω_i , и что мы имеем 1-мерную оценку погрешности для каждого i от 1 до n .

В дальнейшем $A_i^{(\alpha_i)}$ обозначает сумму абсолютных значений коэффициентов в формуле $Q_i^{(\alpha_i)}$. Для получения оценки погрешности кубатурных формул (1) используем понятие экстремальной функции функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$, введенное С.Л. Соболевым [12].

Учитывая теорему 2 и это определение, имеем, что $U(\theta) = \psi_\ell(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$.

Известно, что [11]

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{(m)*}(S) \right\|^2 = \left\| \psi_\ell \mid L_2^{(m)}(S) \right\|^2 = | \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) \rangle |.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} | \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), \psi_\ell(\theta) \rangle | &= \left| \int_S \psi_\ell(\theta) ds - \left(\prod_{i=1}^n Q_i^{(\alpha_i)} \right) \psi_\ell \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n - \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n + \right. \\ &\left. + \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_2 \dots d\theta_n \left| \int_{\Omega_1} \psi_\ell d\theta_1 - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) \right| + \\
 &+ \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \left| \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| = \\
 &= \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_2 \dots d\theta_n E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \left| \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 \dots d\theta_n - \right. \\
 &- \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n + \\
 &+ \left. \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \theta_3, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \leq \\
 &\leq C_1 E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \left\{ \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_3 \dots d\theta_n \left| \int_{\Omega_2} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_2 - \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \dots, \theta_n) \right| + \right. \\
 &+ \left. \sum_{\alpha_2=1}^{m_2} \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \left| C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \right| \left| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \sum_{\alpha_3=1}^{m_3} \sum_{\lambda_3=1}^{N_3} C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \right| \right\} = \\
 &= C_1 E_1 + \sum_{\alpha_1=1}^{m_1} \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} d\theta_3 \dots d\theta_n E_2 + \sum_{\lambda_1=1}^{N_1} \left| C_{\lambda_1}^{(\alpha_1)} \right| \sum_{\lambda_2=1}^{N_2} C_{\lambda_2}^{(\alpha_2)} \left| \int_{\Omega_3} \dots \int_{\Omega_n} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \dots, \theta_n) d\theta_3 \dots d\theta_n - \right. \\
 &- \sum_{\alpha_3=1}^{m_3} \sum_{\lambda_3=1}^{N_3} C_{\lambda_3}^{(\alpha_3)} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{m_n} \sum_{\lambda_n=1}^{N_n} C_{\lambda_n}^{(\alpha_n)} \psi_\ell(\theta_1^{(\lambda_1)}, \theta_2^{(\lambda_2)}, \dots, \theta_n^{(\lambda_n)}) \left. \right| \leq \\
 &\leq \dots \leq C_1 E_1^{(\alpha_1)} + C_2 A_1^{(\alpha_1)} E_2^{(\alpha_2)} + C_3 A_1^{(\alpha_1)} A_2^{(\alpha_2)} E_3^{(\alpha_3)} + \dots + C_n A_1^{(\alpha_1)} A_2^{(\alpha_2)} \dots E_n^{(\alpha_n)} A_{n-1} E_n^{(\alpha_n)}.
 \end{aligned}$$

(16)

Итак, для каждого i , учитывая

$$\left\{ \int_{\Omega_i} \frac{d^m}{d\theta_i^m} |\psi_\ell(\theta)|^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} \tag{17}$$

и оценки (13) и (17), из (15) получаем

$$E_i^{(\alpha_i)}(f) \leq C \left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} \right\|_{L_2^{(m)*}(\Omega_i)} \cdot \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)} \leq C K_i N_i^{-m} \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m)}(S)}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (16), имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \right\|_{L_2^{(m)*}(S)} \leq \sum_{i=1}^n K_i^1 N_i^{-m}. \tag{19}$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть справедливо

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} \right\|_{L_2^{(m)*}(\Omega_i)} \leq K_i N_i^{-m},$$

кроме того, $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ и $\prod_{i=1}^n N_i = N$,

тогда кубатурная формула вида (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

является оптимальной по порядку сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(S)$, т.е.

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{(m)*}(S) \right\| = O\left(N^{-\frac{m}{n}} \right).$$

Доказательство. На основе леммы, так как $N_1 = N_2 = \dots = N_n$, то из

$$\prod_{i=1}^n N_i = N \quad \text{имеем} \quad N_1 = N^{\frac{1}{n}}. \quad (20)$$

Учитывая (20) из (19) получаем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{(m)*}(S) \right\| \leq N^{-\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^n K_i^1. \quad (21)$$

используя (см [16, 17]) и (21) получим утверждение теоремы.

Вывод.

Исследование для получение оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита показывает, что вычисляя значение функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ на функции $U(\theta)$, получили равенство для нормы функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(S)$ и нормы функции $U(\theta)$ в пространстве $L_2^{(m)}(S)$. Это равенство действительно подтверждает, что $U(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$ является экстремальной функцией для кубатурных формул типа Эрмита. Таким образом применяя метод повторного интегрирования, т.е. используя одномерных квадратурных формул, построена оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева для функций заданных в n -мерной единичной сферы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы. *СМЖ*, 1962, т.3, №5, с.769-796.
2. Мысовских И.П. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы, *СМЖ*, 1964, т.5, №3, с.721-723.
3. Лебедев В.И. О квадратурах на сфере *ЖВМ и МФ*, 1976, т.16, №2, с.293-306.
4. McLaren D.A. *Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.* 1963, т.83, S.361-383.
5. Freedен W. *An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere.- computing*, 1980, т.23, №2, -Pp.131-146.
6. Freedен W. *An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere . Bull . Geod. (1978)52,11. 165-175.*
7. Соболев С. Л, Васкевич В.Л. *Кубатурные формулы. Новосибирск. 1996,-483с.*
8. Салихов Г.Н. *Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985.*
9. Салихов Г.Н. *Оценка погрешности кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(S)$* // Докл. АН СССР. –Москва, 1975. -Т.223, № 6. - С.1318-1321.
10. Виленкин Н. Я. *Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. – 724 с.*
11. Шадиметов Х.М. *Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.*
12. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.*

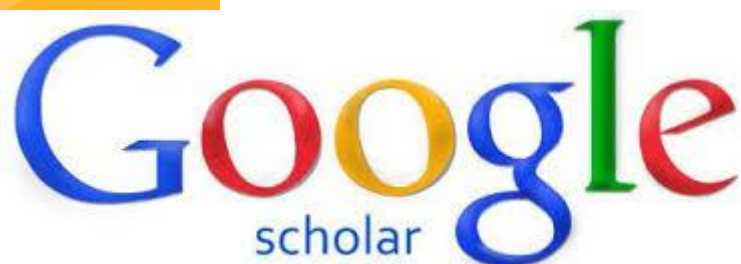
13. Hayotov A.R., Boboev S.S. Optimal quadrature formulas for computing of Fourier integrals in a Hilbert space. *Problems of computational and applied mathematics*, 2020, No.4, pp 73-85.

14. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 372 (2020).

15. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), <https://doi.org/10.1063/5.0057015>.

16. Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной// *Матем. заметки*.-Москва. 1972.- Т.12, №6.- С.655-664.

17. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М.:Наука, 1973.-631 с.



**"SCIENTIFIC REPORTS
OF BUKHARA STATE
UNIVERSITY"**

The journal was composed
in the Editorial and
Publishing Department of
Bukhara State University.

Editorial address:

Bukhara, 200117
Bukhara state university, main
building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing
Department.
[https://buxdu.uz/32-buxoro-
davlat-universiteti-ilmiy-
axboroti/131/131-buxoro-davlat-
universiteti-ilmiy-axboroti/](https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/)
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted
28.12.2022 y. Paper format
60x84,1/8. Printed in express
printing method. Conditional
printing plate – 35,30.
Circulation 70. Order № 30.
Price is negotiable.
Published in the printing house
"Sadriiddin Salim Buxoriy" LLC
Address: Bukhara,
M.Ikbol street, 11