Buxoro davlat universiteti
BUXORO, 200117, M.IQBOL ko'chasi, 11-uy, 2021

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
INNOVATSION
RIVOJLANISH VAZIRLIGI

«AMALIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARINING ZAMONAVIY MUAMMOLARI» XALQARO ILMIY-AMALIY ANJUMAN TEZISLAR TO' PLAMI

ABSTRACTS INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES»

ТЕЗИСЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

2021 YIL 15 APREL
BUXORO

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ФАКУЛЬТЕТИ

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИНГ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ

ХАЛҚАРО МИҚЁСИДАГИ ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН

МАТЕРИАЛЛАРИ

2021 йил, 15-апрель

Бухоро – 2021

ТАШКИЛИЙ ҚЎМИТА

Раис: Хамидов О.Х., БухДУ ректори, профессор
Раис ўринбосари: Қаххоров О.С., БухДУ проректори, доцент
Ташкилий қўмита аъзолари:

Жўраев А.Т.	БухДУ, проректори, доцент
Рашидов Ў.У.	БухДУ, проректори
Зарипов Г.Т.	БухДУ, доцент
Эшанкулов Х.И.	БухДУ, декан, т.ф.ф.д., (PhD)
Жалолов О.И.	БухДУ, кафедра мудири, доцент
Сайидова Н.С.	БухДУ, кафедра мудири, доцент
Жумаев Ж.	БухДУ, доцент
Болтаев Т.Б.	БухДУ, доцент
Зарипова Г.К.	БухДУ, доцент
Рустамов Ҳ.Ш.	БухДУ, доцент
Хаятов Х.У.	БухДУ, катта ўқитувчи
Жўраев З.Ш.	БухДУ, катта ўқитувчи
Атаева Г.И.	БухДУ, катта ўқитувчи
Турдиева Г.С.	БухДУ, катта ўқитувчи

ДАСТУРИЙ ҚЎМИТА

Арипов М.М.	ЎзМУ, профессор
Алоев Р.Ж.	ЎзМУ, профессор
Шадиметов Х.М	Тошкент давлат транспорт университети, профессор
Расулов А.С.	Жаҳон иқтисодиёти ва дипломатия университети, профессор
Равшанов Н.	ТАТУ ҳузуридаги АКТ илмий-инновацион марказ, лаборатория мудири, профессор
Солеев А.С.	СамДУ, профессор
Дурдиев Д.Қ.	БухДУ, профессор
Ҳаётов А.Р.	В.И.Романовский номидаги Математика институти, профессор
Мўминов Б.Б.	ТАТУ, профессор
Худойберганов М.У.	ЎзМУ, доцент
Жумаев Ж.	БухДУ, доцент
Болтаев Т.Б.	БухДУ, доцент
Эшанкулов Х.И.	БухДУ, т.ф.ф.д., (PhD)
Жалолов О.И.	БухДУ, доцент
Сайидова Н.С.	БухДУ, доцент
Расулов Т.Ҳ	БухДУ, доцент

КОНФЕРЕНЦИЯ КОТИБЛАРИ

Атамурадов Ж.Ж., Эргашев А.А. Қосимов Ф.Ф., Ҳазратов Ф.Ҳ., Зарипов Н.Н., Ибрагимов С.И., Назаров Ш.Э.

Тўплам Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2021 йил 2 мартдаги 78-ф-сонли фармоиши билан тасдиқланган Ўзбекистон Республикасида 2021 йилда халқаро ва республика миқёсидаги ўтказиладиган илмий ва илмий-техник тадбирлар режасида белгиланган тадбирларнинг бажарилиши мақсадида 2021 йил 15 апрель куни Бухоро давлат университети Ахборот технологиялари факультетида “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” мавзусидаги халқаро илмий-амали анжуман материаллари асосида тузилди.

Масъул муҳаррир:
О.И.Жалолов, доцент

Тақризчилар:
Ж.Жумаев, доцент

УДК 517.516.87

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА $H_2^{\mu}(R)$

Жалолов О.И., Каримов Ф.Р.

Бухарский государственный университет

В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{1}$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хермандера $H_2^{\mu}(R)$ [19] и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.

Определения 1. Пространство $H_2^{\mu}(R)$ определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убивающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом [1,2]

$$\left\| f \mid H_2^{\mu}(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[\mu(\xi)\cdot F[f^c(x)](\xi)](x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $f^c(x)$ класс функций, следы которых в области R совпадают, F -преобразование Фурье, $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, F и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx \quad , \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx ,$$

Отметим, что условие $\quad \nu_m(x) = \left(F^{-1}\left(\dfrac{1}{\mu(\xi)} \right) \right)(x) \in L_2(R)$

обеспечивает вложение пространстве $H_2^{\mu}(R)$ в $C(R)$ - непрерывные функции.

Условие вложения пространства $H_2^{\mu}(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимом условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Постановка задачи.

Рассматривая квадратурную формулу типа Фурье вида (1),
погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$\ell(f) = \langle \ell_N, f(x) \rangle = \int_0^1 \ell^{2\pi i\sigma x} f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{2}$$

и этой разности (2) соответствует функционал погрешности $\ell_N(x)$, который имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)\ell^{2\pi i\sigma x} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta). \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка [0,1], $\delta(x)$ – дельта – функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (1) будет линейным и непрерывным функционалом из пространства $H_2^{\mu^*}(R)$, сопряженного пространство $H_2^{\mu}(R)$,

т.е. $\quad \ell_N(x) \in H_2^{\mu^*}(R)$.

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности :

$$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\left\| f \left| H_2^{\mu}(R)\right.\right\|}. \qquad (4)$$

Норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β.
Если

$$\left\|\overset{0}{\ell}_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|<\ell_N(x), f(x)>|}{\left\| f \mid H_2^{\mu}(R)\right\|}$$

то говорят , что функционала $\overset{0}{\ell}_N(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $H_2^{\mu}(R)$.

Основная цель настоящей работы является определить существование и единственность оптимальной квадратурной формулы типа Фурье в непериодическом пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$

Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье и его норма.

Для нахождения нормы функционала погрешности (3) в пространстве $H_2^{\mu^*}(R)$ используется его экстремальная функция .

Определение 2. Функция $\psi_e(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N(x)$, если $<\ell_N, \psi_e> = \left\|\ell_N \left| H_2^{\mu^*}(R)\right.\right\| \cdot \left\|\psi_e \left| H_2^{\mu}(R)\right.\right\|$. (5)

Так как пространство $H_2^{\mu}(R)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала существует единственная функция $\psi_\ell(x) \in H_2^{\mu}(R)$ для которой

$$<\ell_N, f)> = <\psi_\ell, f> \qquad (6)$$

и

$\left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\|$, где $<\psi_\ell(x), f(x)>$ - скалярное произведение двух функций $\psi_\ell(x)$ и $f(x)$ из пространства $H_2^{\mu}(R)$. Напомним, что скалярное произведение $<\psi_\ell, f>$ определяется следующим образом:

$$<\psi_\ell, f> = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[\psi_\ell(x)](\xi)\right] \times F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[f(x)](\xi)\right] dx.$$

В частности, из (6) при $f(x) = \psi_\ell(x)$ имеем

$$<\ell_N, f> = <\psi_\ell, f> = \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\|^2 = \left\|\psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R)\right\| \cdot \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\| = \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\|^2$$

Отсюда видно, что решения $\psi_\ell(x)$ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией. Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности $\ell_N(x)$, сперва надо решить уравнение (6) т.е. найти экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ а потом вычислить скалярные произведение $<\ell_N, f> = \left\|\ell_N \mid H_2^{\mu^*}(R)\right\|^2$

Ниже мы будем находит экстремальную функцию другим путём. Из теории преобразования Фурье обобщенных функций имеем

$$< \ell_N, f >= \left(F[\ell_N](\xi), F[f](\xi)\right) = \left(\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi), \mu(\xi)F[f](\xi)\right) =$$
$$= \left(F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\}, F^{-1}\left\{\mu(\xi)F[f](\xi)\right\}\right). \qquad (7)$$

Если в этом равенстве (7) полагать $F^{-1}\left\{\mu\ (\xi)F[\psi_\ell](\xi)\right\} = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\}$, т.е. если полагать $f = \psi_\ell = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x)$,

То будем иметь:

$$< \ell_N, \psi_\ell >=< \psi_\ell, \psi_\ell >= \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|^2.$$

Отсюда следует, во первых, что

$$\psi_\ell(x) = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x) = \left[\ell^{2\pi i\sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)\right] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta), \qquad (8)$$

Где $\nu_m(x) = F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x)$, так как $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией функционала погрешности (3); во вторых

$$\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_\ell\right|^2 dx\ . \qquad (9)$$

Этим доказана следующая.

<u>Теорема 1</u>. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид $\psi_e(x) = [\ell^{2\pi i\sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta)$, (10)

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ имеет следующий вид

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [\ell^{2\pi i\sigma x} \cdot \varepsilon_{[0],1}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta) \right|^2 dx. \qquad (11)$$

Исследование о существование и единственности оптимальной квадратурной формулы типа Фурье в пространстве $H_2^\mu(R)$.

Из (9) видно , что нормы функционала погрешности (2) является функцией коэффициентов C_β, $\beta = 0,1,...,N$, при фиксированных узлов $x_\beta = \frac{\beta}{N} = \beta h,\ \beta = 0,1,...,N$.

Задача оптимизации нормы функционала погрешности при фиксированных узлах x_β заключается определении таких коэффициентов $\overset{0}{C}_\beta$, $\beta = 0,1,...,N$ для которых достигается

$$\inf_{C_\beta} \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|.$$

Для нахождения коэффициентов C_β, $\beta = 0,1,...,N$ равенство (9) перепишем в несколько иной форме :

$$\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 == \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x) \right|^2 dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x) * \ell_N(x) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nu_{\frac{m}{2}} * \ell_N(x) \right|^2 dx = \qquad (12)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nu_{\frac{m}{2}} * \ell^{2\pi i\sigma x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_{\frac{m}{2}}(x - \beta h) \right|^2 dx$$

Равенство (12) связывает задачу построения квадратурной формулы (1) с задачей приближения в L_2 функций $\ell^{2\pi i\sigma x} * v_m(x)$ линейной комбинацией сдвинутых на x_β функций $v_m(x)$. Действительно, из (12) видно , что отыскание наименьшего значение нормы функционала погрешности по коэффициентом при фиксированных узлах x_β, равносильно наилучшему приближению функции $v_{\frac{m}{2}}(x)*[\ell^{2\pi ix}\varepsilon_{[0,1]}(x)]$, линейной комбинацией функции $v_{\frac{m}{2}}(x)$ и ее сдвигов на $x_\beta = \beta h,\ \beta = 0,1,...,N$ в норме пространства $L_2(R)$. Справедливо следующая.

Лемма.

Система $\left\{v_{\frac{m}{2}}(x-\beta h)\right\}_{\beta=0}^{N}$ является линейно независимой системой в пространстве $L_2(R)$ и линейная оболочка этой системы является $(N+1)$ мерным подпространством в $L_2(R)$.

Сначала докажем линейную независимость системы

$$\left\{v_{\frac{m}{2}}(x-\beta h)\right\}_{\beta=0}^{N} \tag{13}$$

в $L_2(R)$.

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \in H_2^{\mu*}(R)$$

Имеем

$$<\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), f(x)> \le \left\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \right| \left. H_2^{\mu*}(R) \right\| \cdot \left\| f(x) \middle| H_2^{\mu}(R) \right\|.$$

Нетрудно показать, что

$$\left\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \middle| H_2^{\mu*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta) \right|^2 dx \cdot$$

Экстремальная функция функционала

$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta)$ является $\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_m(x-h\beta)$.

Пусть система (13) является линейно зависимой , т.е. $\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta) = 0$ и $\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta^2 \ne 0$.

Пусть $C_{\beta^1} = \max\left\{C_\beta \quad \middle| C_\beta \ne 0, \beta = 0,1,...,N\right\}$.

Отсюда следует

$$\left\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \middle| H_2^{\mu*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta) \right|^2 dx = 0 \ , \tag{14}$$

Берём функцию $\omega_{\beta^1}(x) = C_{\beta^1} e^{-(x-h\beta')^2} \cdot \dfrac{\prod\limits_{\beta\ne\beta'}(x-h\beta)}{\prod\limits_{\beta\ne\beta'}(h\beta'-h\beta)} \in H_2^{\mu}(R)$

Для этой функции имеем $<\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), \omega_{\beta'}(x)> = \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta'}^2$

С другой страны имеем $0 < \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta'}^2 = <\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), \omega_{\beta'}(x)> \le \left\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \right| \left. H_2^{\mu*}(R) \right\| \cdot \left\| f(x) \middle| H_2^{\mu}(R) \right\|$

Это неравенство противоречить с (14) .
Это противоречие и доказывает линейную независимость систему (13).
Отсюда следует также линейная независимость $\delta(x-h\beta),\ \beta=0,1,...,N$ в $H_2^{\mu*}(R)$.
Таким образом линейная оболочка функций $v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta),\ \beta=0,1,...,N$ является $(N+1)$ - мерным подпространством в $L_2(R)$.
Что и требовалось доказать.
Как известно из теории гильбертовы пространств, элемент $\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta)$ является наиближайшим к элементу $\ell^{2\pi i\sigma x}\cdot\varepsilon_{[0,1]}(x)*v_{\frac{m}{2}}(x)$ тогда и только тогда, когда разность $\left[\ell^{2\pi i\sigma x}\cdot\varepsilon_{[0,1]}(x)\right]*v_{\frac{m}{2}}(x)-\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta)$ ортогональна каждому элементу $v_{\frac{m}{2}}(x-h\alpha),\ \alpha=0,1,...,N$ в $L_2(0,1)$ [1].
Имея в виду это имеем

$$\psi_\ell(h\alpha)=0,\quad \alpha=0,1,...,N. \tag{15}$$

Из этой леммы и из теории существование и единственности наилучшего приближения подпространством следует существование и единственность оптимальной квадратурной формулы типа Фурье.

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула типа Фурье (1), коэффициенты который является решением системы линейных уравненный (15) в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$, существует и она является единственная.

Список литературы

1. С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул , М.1974.
2. Валевич Л.Р. и Панеяк Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.
3. Жалолов О.И, С.И.Ибрагимов, Б.Р.Абдуллаев. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор- пространством Соболева // WORLD Science "Topical researches of the World science" —June 20 – 21, 2015, —Dubai, UAE).
4. Жалолов О.И, Косимов А.А. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2015. -№3. -С.24- 33.
5. Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул в пространстве периодических функций С.Л.Собовева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. // Научный журнал. -№2.-2015 декабр.-Ташкент.-53-58ст.
6. Шадиметов Х. М, Жалолов О.И, Шадманова К.У., Шамсиев Ж. Ш. Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева // East European Scientific Journal. Wydrukowano w «Aleje Jerozolimskie . 85/21, 02-001 Warszawa, Polska». -2016. -162ст.
7. Шадиметов ХМ., Жалолов О.И. Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№1.2016 март. -Ташкент. -100-106 ст.
8. Жалолов О.И. Верхная оценка нормы функционала погрешности кубатурной формуы типа Эрмита в пространстве С.Л.Соболева // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Научный журнал. -№3.2017. -Ташкент. -70-78 ст.

МУНДАРИЖА

I-ШЎЪБА. МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА СОНЛИ УСУЛЛАР