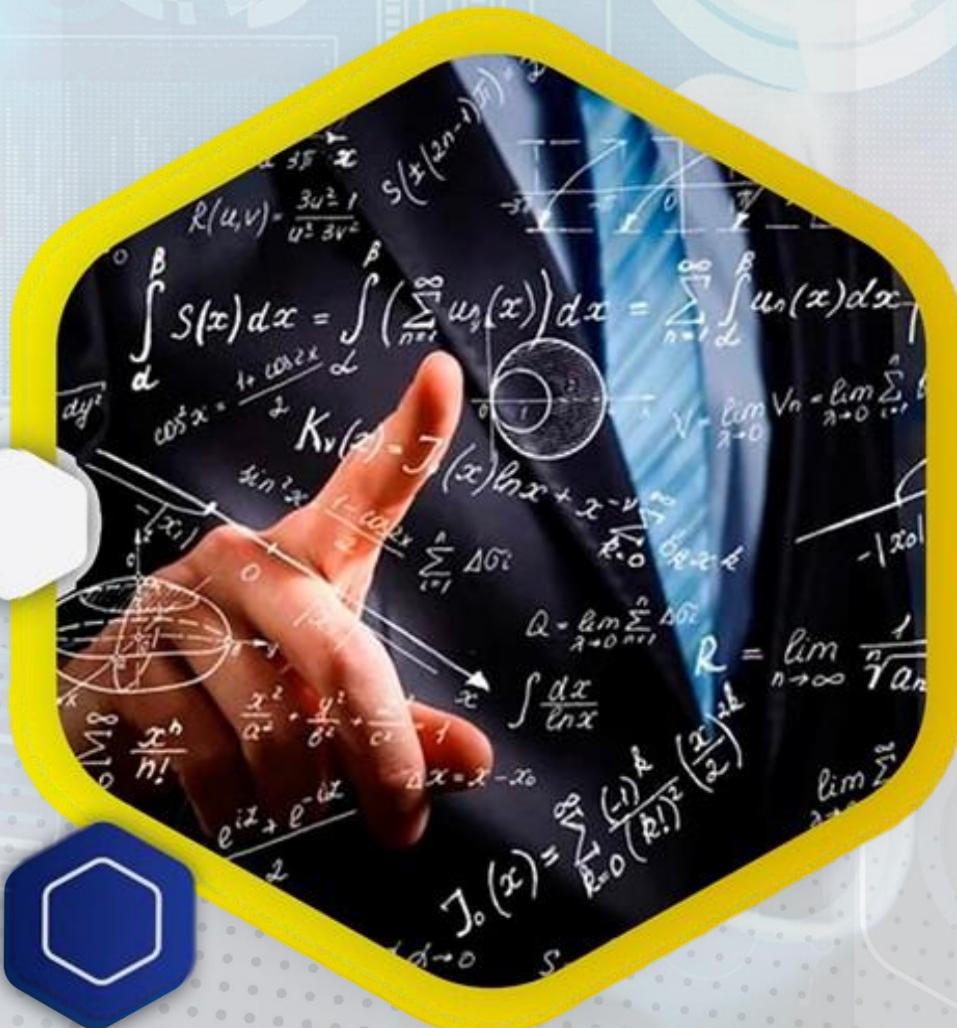


“FIZIKA, MATEMATIKA VA SUN'IY INTELLEKT TEXNOLOGIYALARINING DOLZARB MUAMMOLARI”

XALQARO ILMIY-NAZARIY ANJUMAN MATERILLARI





CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL
CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Bukhra-2025

**ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ
ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ
СОБОЛЕВА $W_2^m(R)$.**

Жалолов Озоджон Исомидинович
Бухарский государственный университет,
o.i.jalolov@buxdu.uz

Махмудов Миржалил Мақсуд ўғли
Бухарский государственный университет

В одномерном случае С.Л. Соболев свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $p(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ решению системы из $2m-2$ уравнений.

В этой работе рассматриваются квадратурные формулы, которые участвует значения функции и значения ее производных некоторого порядка.

Если нам известны не только значения функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_N на отрезке $[0,1]$, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции, т.е. такие формулы называются квадратурные формулы типа Эрмита (см.[7],[8],[9],[10],[11]).

В настоящей работе именно рассматривается весовые квадратурные формулы типа Эрмита и займёмся нахождением экстремальной функции, существование и единственности этих формул в непериодическом пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

Определение 1. Пространство $W_2^m(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме ([1,10])

$$\|f(x)|W_2^m(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1} \left[\mu(y) \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Если выполняется условия

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1} \left(\frac{1}{\mu^2(y)} \right) \right)(x) \in L_2(R),$$

где

$$\mu(y) = (1-y^2)^{\frac{m}{2}} \text{ и } \mu^2(y) = (1-y^2)^m,$$

то пространство $W_2^m(R)$ вкладывается в пространство непрерывных функций $C(R)$.

Рассмотрим следующую весовую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 p(x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_{\beta}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x_{\beta}), \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) p(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_{\beta}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x-x_{\beta}), \quad (2)$$

где соответственно, $C_{\beta}^{(\alpha)}$ и x_{β} называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1) и $p(x)$ весовая функция, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака и назовем ее квадратурную формулу типа Эрмита. Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m^*}(R) \right\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \left\| \ell_N^{(\alpha)}(f) \right\| \left\| f(x) | W_2^m(R) \right\|. \quad (3)$$

Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β .

Если

$$\left\| \ell_N^{0(\alpha)}(x) | W_2^{m^*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m^*}(R) \right\|, \quad (4)$$

то говорят, что функционал $\ell_N^{0(\alpha)}$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $W_2^m(R)$. В работе [8] вычислена коэффициентов оптимальных решетчатых весовых квадратурных формул в пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

В настоящей работе мы занимаемся вычислением нормы $\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m^*}(R) \right\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ и нахождения экстремальная функция функционала погрешности весовой квадратурной формулы типа Эрмита и существованием и единственности.

Таким образом следует

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) является

$$\psi_\ell^{(\alpha)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(y) v_m^{(\alpha)}(x-y) dy - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} v_m^{(\alpha)}(x-h\beta) \quad (5)$$

квадрат нормы функционала погрешности в пространстве $W_2^m(R)$ имеет вид

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m^*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varepsilon_{[0,1]}(y) v_\ell^{(\alpha)}(x-y) dy - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N C_\beta^{(\alpha)} v_m^{(\alpha)}(x-h\beta) \right|^2 dx, \quad (6)$$

где

$$v_m(x) = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2} (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k. \quad (7)$$

Справедливо следующая.

Лемма. Система $\left\{ v_{m/2}^{(\alpha)}(x-\beta h) \right\}_{\beta=0}^N$ является линейно независимой системой в пространстве $L_2(R)$ и линейная оболочка этой системы является $(N+1)$ мерным подпространством в $L_2(R)$.

Решение системы

$$\sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} v_m^{(\alpha)}(x-h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) v_m^{(\alpha)}(h\theta-y) dy, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

есть оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1).

Из леммы и существование и единственности наилучшего приближения подпространством следует следующая

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула, коэффициенты которой является решением системы линейных уравнений (8) в пространстве Соболева $W_2^m(R)$, существует и она является единственная.

Литература

1. С.Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М: Наука, 1979. – 256с.
3. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. Матем. заметки, 6:4 (1969), 475–481с
4. Н. Е. Лушпай, “Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций с интегрируемой r-й производной”, Изв. вузов. Матем., 1975, № 3, 59–71

5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. –М: Наука, 1979. – 256с.
- 6.Хайтов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, №5.
7. Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$. Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 1114–1128.
8. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 2016. № 2, с. 9.
9. Jalolov O.I. Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space. AIP Conference Proceedings 2781 (1), 020066 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0144837>.
10. Волевич Л.Р. , Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, 20, вып. I, 1965, 3-74.
11. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Наука, физ-мат, М.1963. 1100 с.

MS EXCELDA CHIZIQLI EMAS TENGLAMALARINI YECHISH ALGORITMI

Iroda Boltaboyeva

*Ajiniyaz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
matematika-informatika yo'nalishi 4-kurs talabasi*

Abdullayev Alisher

*Ajiniyaz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
Informatika o'qitish metodikasi kafedrasi, dotsent*

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada MS Excel dasturidan foydalanib chiziqli bo'lmagan tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish algoritmlari yoritilgan. Asosiy e'tibor iteratsion yondashuvlarga, xususan, Nyuton-Rafson usuli hamda Microsoft Excelning 'Goal Seek' funksiyasiga qaratilgan. **Kalit so'zlar:** tenglama, ildizlar, grafik, funksiya, usullar, katak, Nyuton-Rafson, algoritm

Chiziqli bo'lmagan tenglama – bu ifodaning o'zgaruvchisi chiziqli bo'lmagan ko'rinishda qatnashadigan tenglamadir. Masalan, quyidagi tenglama chiziqli bo'lmagan tenglama hisoblanadi: $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$

Bunday tenglamalarning ildizlarini topishda grafik usullar, analitik yechimlar yoki sonli iteratsion yondashuvlar qo'llaniladi. Ko'p hollarda Microsoft Excel foydalanuvchilar sonli usullardan foydalanadilar. 'Goal Seek' funksiyasi – bu Microsoft Excel dasturining 'What-If Analysis' menyusiga joylashtirilgan oddiy, ammo kuchli vositadir. Bu funksiya yordamida foydalanuvchi natija (masalan, 0 qiymat) erishilishi kerak bo'lgan formulani tanlaydi va shu natijani olish uchun qanday x qiyomat kerakligini aniqlaydi.

Masalan: $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Dastlab A1 katakka x ning taxminiy qiyamatini, A2 katakka esa formulani kiritamiz: =A1^3 - 2*A1 - 5

So'ngra 'Data' → 'What-If Analysis' → 'Goal Seek' menyusiga o'tamiz.

| A1 | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|----|-----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $f(x) = x^3 - 2x - 5$ | | | | | | | | |
| 2 | -1 | | | | | | | | |

Excel avtomatik ravishda A1 katakdagi qiyamatni o'zgartirib, A2 natijani 0 ga yaqinlashtiradi. Bu orqali ildiz topiladi. Nyuton-Rafson usuli – chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishda eng mashhur sonli yondashuvlardan biridir. Uning formularsi quyidagicha: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

MS Excelda bu usulni qatorlar orqali avtomatik tarzda yaratish mumkin. Buning uchun quyidagilar amalga oshiriladi:

| | |
|--|-----|
| Гульнар Сулаймон кызы Ибрагимли, Махир Джалаал оглы Джалаалов Элементарный математический представлений у детей в дошкольных образовательных учреждениях | 128 |
| O'rolova O, Quljonov O'.N., Ostonov Q. Maktabda o'quvchilarda matematika darslarida kvantorlar va ularga bog'liq tushunchalarni shakllantirish | 130 |
| SECTION 4: COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING | |
| Babaev Samandar Samiyevich, Polvonov Sarvarbek Zafar ugli The algorithm for numerically solving the fredholm integral equation using a weighted optimal quadrature formula | 133 |
| Mirkamol Berdimuradov Comparative Analysis of Unknown Parameters of the Gamma Distribution under Right-Censoring Using MLE and Bayesian Methods | 134 |
| Rahela Abdul Rahim, Zahreddin Muminov, Javlon Karimov Upper bound limit value using non linear difference equations | 136 |
| Абдумумин Маликович Маликов Неравенство типа колмогорова и его некоторые приложения в пространстве $L_{2,\mu}$ | 141 |
| Болтаев Азиз Кузиевич, Мухаммадова Зулфия Аскар кизи Система для нахождения коэффициентов натуральных сплайнов | 142 |
| Sayfullayeva Maftuxa Zafrullayevna, Tadjibayeva Shaxzadaxan Ergashevna, Abduganiyeva Ozoda Ismagilovna Uch karrali integralni hisoblashning algoritmlari va ularning aerodinamik modellashtirishda qo'llanilishi | 144 |
| Azamov Siroj Sobirovich Finding the form of optimal coefficients in the space $W_2^{(2,1,0)}(0,1)$ | 146 |
| Жалолов Фарход Исомидинович, Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўғли Алгоритм нахождении коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в пространстве Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$ | 147 |
| Жалолов Икром Исомиддинович, Мухсинова Мехринисо Шавкатовна Оценка погрешности, существовании и единственности оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$. | 149 |
| Жалолов Озоджон Исомиддинович, Исомиддинов Бекзоджон Озоджон ўғли Практичные асимптотические оптимальные весовые кубатурные формулы с заданием производных в пространстве Соболева | 152 |
| Mukhiddin I. Muminov, Zafar Z. Jumaev Approximate solution of initial value problems for first-order differential equations using a combined runge-kutta and piecewise constant argument method | 154 |
| Khayriyev Umedjon N., Xiromon Yunus qizi Yusufzoda Constructing a Derivative Optimal Interpolation Formula in Hilbert Space | 156 |
| Khudoyberdiev Azizjon Norjigit o'g'li Quantum stability of the SHA-3 hash function: analysis, vulnerabilities and perspectives | 157 |
| Жалолов Озоджон Исомиддинович, Махмудов Миржалол Мақсуд ўғли Оценка погрешности, существовании и единственности оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $W_2^m(R)$ | 159 |
| Iroda Boltaboyeva, Abdullayev Alisher Ms excelda chiziqli emas tenglamalarni yechish algoritmi | 161 |
| Muminov Mukhiddin Eshqobilovich, Usmonov Navruz Muzaffarovich | 162 |

CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Muharrir:

E.Eshov

Tex. muharrir:

D.Abduraxmonova

Musahhih:

M.Shodiyeva

Badiiy rahbar:

M.Sattorov

Nashriyot litsenziyası № 022853. 04.03.2022.

Original maketdan bosishga ruxsat etildi: 16.05.2025.

Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. “Times New Roman” garnitura 1/16.

Elektrografik usulda. Oddiy bosma qog‘ozi.

Bosma tabog‘i 28. Adadi 100. Buyurtma №



KAMOLOT

“BUXORO DETERMINANTI” MCHJ

bosmaxonasida chop etildi.

Buxoro shahar Namozgoh ko‘chasi 24-uy

Tel.: + 998 91 310 27 22