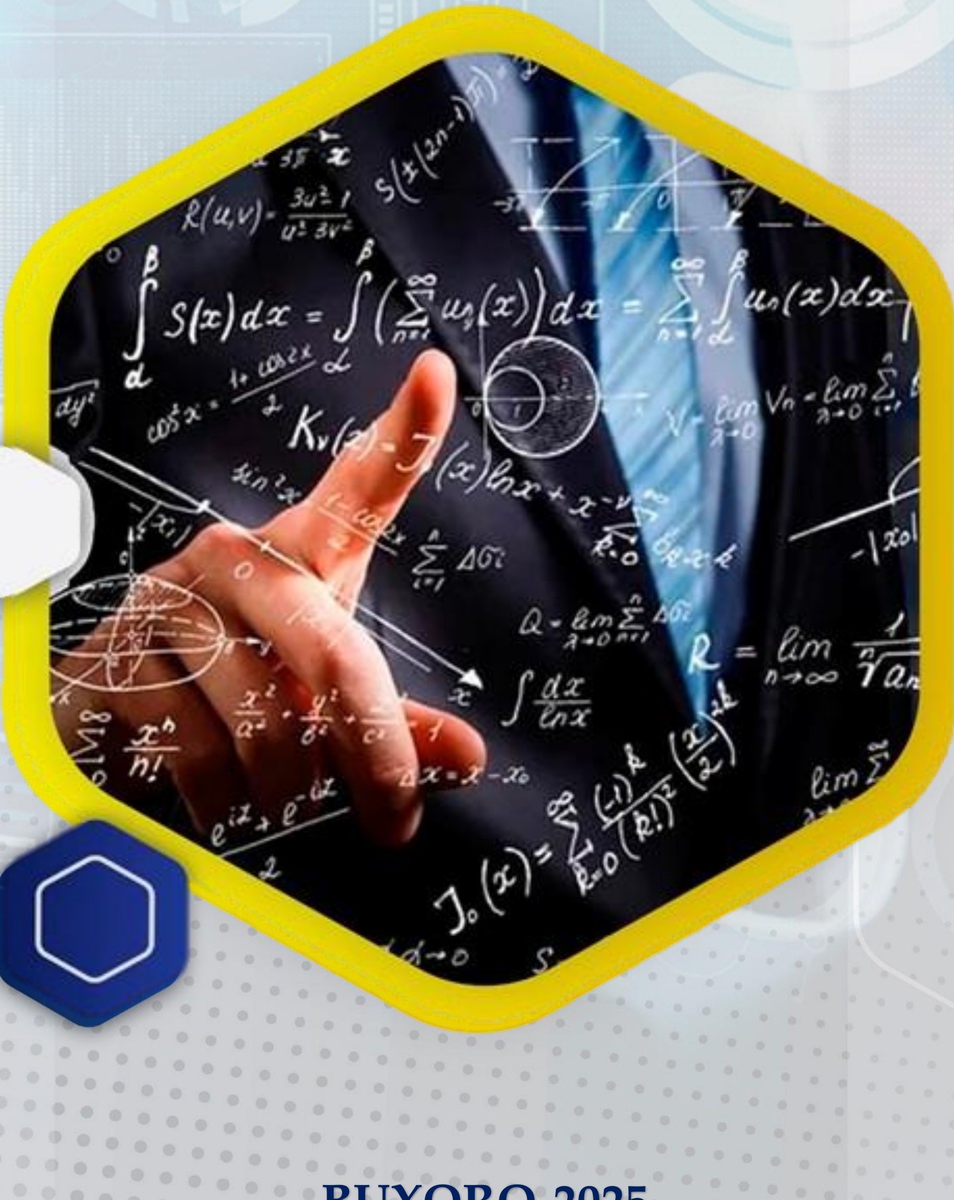
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR
VAZIRLIGI

BUXORO
DAVLAT
1930 UNIVERSITETI

"FIZIKA, MATEMATIKA VA SUN'IY INTELLEKT TEXNOLOGIYALARINING DOLZARB MUAMMOLARI"

XALQARO ILMIY-NAZARIY ANJUMAN MATERILLARI



BUXORO-2025

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR
VAZIRLIGI

BUXORO
DAVLAT
1930 UNIVERSITETI

CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Bukhra-2025

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $W_2^m(R)$.

Жалолов Озоджон Исомидинович
Бухарский государственный университет,
o.i.jalolov@buxdu.uz
Махмудов Миржалол Мақсуд ўғли
Бухарский государственный университет

В одномерном случае С.Л. Соболев свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $p(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ решению системы из $2m-2$ уравнений.

В этой работе рассматривается квадратурные формулы, которые участвует значения функции и значения ее производных некоторого порядка.

Если нам известны не только значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, ..., x_N$ на отрезке $[0,1]$, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции, т.е. такие формулы называется квадратурные формулы типа Эрмита (см.[7],[8],[9],[10],[11]).

В настоящей работе именно рассматривается весовые квадратурные формулы типа Эрмита и займёмся нахождением экстремальной функции, существование и единственности этих формул в непериодическом пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

Определение 1. Пространство $W_2^m(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме ([1,10])

$$\left\| f(x) | W_2^m(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left[\mu(y) \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Если выполняется условия

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(y)} \right) \right)(x) \in L_2(R),$$

где

$$\mu(y) = \left(1-y^2\right)^{\frac{m}{2}} \text{ и } \mu^2(y) = \left(1-y^2\right)^m,$$

то пространство $W_2^m(R)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(R)$.

Рассмотрим следующую весовую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 p(x) f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x_\beta), \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) p(x) - \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_\beta^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x_\beta), \tag{2}$$

где соответственно, $C_\beta^{(\alpha)}$ и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1) и $p(x)$ весовая функция, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака и назовем ее квадратурную формулу типа Эрмита. Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) \middle| W_2^{m*}(R) \right\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \left| \ell_N^{(\alpha)}(f) \right| \left\| f(x) \middle| W_2^m(R) \right\|. \tag{3}$$

Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β . Если

$$\left\| \ell_N^{0(\alpha)}(x) \middle| W_2^{m^*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) \middle| W_2^{m^*}(R) \right\|, \tag{4}$$

то говорят, что функционал $\ell_N^{0(\alpha)}$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $W_2^m(R)$. В работе [8] вычислена коэффициентов оптимальных решетчатых весовых квадратурных формул в пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

В настоящей работе мы занимаемся вычислением нормы $\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) \,|\, W_2^{m*}(R) \right\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ и нахождения экстремальная функция функционала погрешности весовой квадратурной формулы типа Эрмита и существованием и единственности.

Таким образом следует

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) является

$$\psi_\ell^{(\alpha)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(y) \nu_m^{(\alpha)}(x-y)dy - \sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x-h\beta) \tag{5}$$

квадрат нормы функционала погрешности в пространстве $W_2^\mu(R)$ имеет вид

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) \,|\, W_2^{m*}(R) \right\| = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varepsilon_{[0,1]}(y) \nu_\ell^{(\alpha)}(x-y)dy - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m^{(\alpha)}(x-h\beta) \right|^2 dx, \tag{6}$$

где

$$\nu_m(x) == \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k. \tag{7}$$

Справедливо следующая.

Лемма. Система $\left\{ \nu_{m/2}^{(\alpha)}(x-\beta h) \right\}_{\beta=0}^{N}$ является линейно независимой системой в пространстве $L_2(R)$ и линейная оболочка этой системы является $(N+1)$ мерным подпространством в $L_2(R)$.

Решение системы

$$\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x-h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \nu_m^{(\alpha)}(h\theta - y)dy, \ \alpha = 0,1,...,N. \tag{8}$$

есть оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (1).

Из леммы и существование и единственности наилучшего приближения подпространством следует следующая

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула, коэффициенты который является решением системы линейных уравненный (8) в пространстве Соболеа $W_2^m(R)$, существует и она является единственная.

Литература

1. С.Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М: Наука, 1979. – 256с.
3. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функции. Матем. заметки, 6:4 (1969), 475–481с
4. Н. Е. Лушпай, “Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций с интегрируемой r-й производной”, Изв. вузов. Матем., 1975, № 3, 59–71

5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. –М: Наука, 1979. – 256с.

6.Хаитов Т.И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, №5.

7. Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$. Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 1114–1128.

8. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 2016. № 2, с. 9.

9. Jalolov O.I. Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space. AIP Conference Proceedings 2781 (1), 020066 (2023). *DOI*: https://doi.org/10.1063/5.0144837.

10. Волевич Л.Р. , Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, 20, вып.I, 1965, 3-74.

11. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произ-ведений. Наука, физ-мат, М.1963. 1100 с.

MS EXCELDA CHIZIQLI EMAS TENGLAMALARNI YECHISH ALGORITMI

Iroda Boltaboyeva
Ajiniyaz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
matematika-informatika yo'nalishi 4-kurs talabasi
Abdullayev Alisher
Ajiniyaz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
Informatika o'qitish metodikasi kafedrasi, dotsent

Annotatsiya. Ushbu ilmiy maqolada MS Excel dasturidan foydalanib chiziqli bo'lmagan tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish algoritmlari yoritilgan. Asosiy e'tibor iteratsion yondashuvlarga, xususan, Nyuton-Rafson usuli hamda Microsoft Excelning 'Goal Seek' funksiyasiga qaratilgan. **Kalit so'zlar:** tenglama, ildizlar, grafik, funksiya, usullar, katak, Nyuton-Rafson, algoritm

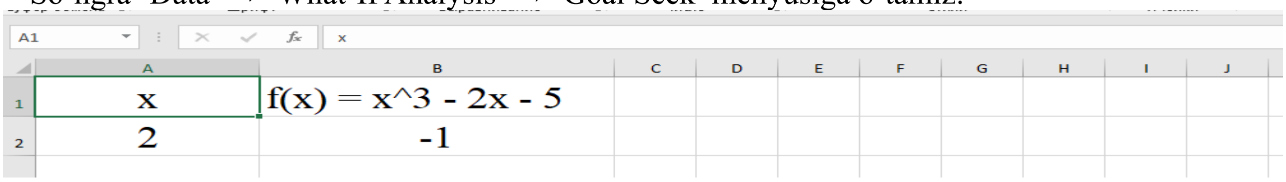
Chiziqli bo'lmagan tenglama – bu ifodaning o'zgaruvchisi chiziqli bo'lmagan ko'rinishda qatnashadigan tenglamadir. Masalan, quyidagi tenglama chiziqli bo'lmagan tenglama hisoblanadi: $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$

Bunday tenglamalarning ildizlarini topishda grafik usullar, analitik yechimlar yoki sonli iteratsion yondashuvlar qo'llaniladi. Ko'p hollarda Microsoft Excel foydalanuvchilari sonli usullardan foydalanadilar. 'Goal Seek' funksiyasi – bu Microsoft Excel dasturining 'What-If Analysis' menyusiga joylashtirilgan oddiy, ammo kuchli vositadir. Bu funksiya yordamida foydalanuvchi natija (masalan, 0 qiymat) erishilishi kerak bo'lgan formulani tanlaydi va shu natijani olish uchun qanday x qiymat kerakligini aniqlaydi.

Masalan: $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Dastlab A1 katakka x ning taxminiy qiymatini, A2 katakka esa formulani kiritamiz: =A1^3 - 2*A1 - 5

So'ngra 'Data' → 'What-If Analysis' → 'Goal Seek' menyusiga o'tamiz.



Excel avtomatik ravishda A1 katakdagi qiymatni o'zgartirib, A2 natijani 0 ga yaqinlashtiradi. Bu orqali ildiz topiladi. Nyuton-Rafson usuli – chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishda eng mashhur sonli yondashuvlardan biridir. Uning formulasi quyidagicha: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

MS Excelda bu usulni qatorlar orqali avtomatik tarzda yaratish mumkin. Buning uchun quyidagilar amalga oshiriladi:

CURRENT PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND THEORETICAL CONFERENCE

(May 16-17, 2025)

Muharrir:	E.Eshov
Tex. muharrir:	D.Abduraxmonova
Musahhih:	M.Shodiyeva
Badiiy rahbar:	M.Sattorov

Nashriyot litsenziyasi № 022853. 04.03.2022.
Original maketdan bosishga ruxsat etildi: 16.05.2025.
Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. “Times New Roman” garnitura 1/16.
Elektrografik usulda. Oddiy bosma qog‘ozi.
Bosma tabog‘i 28. Adadi 100. Buyurtma №

KAMOLOT

“BUXORO DETERMINANTI” MCHJ
bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahar Namozgoh ko‘chasi 24-uy
Tel:. + 998 91 310 27 22