BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

ISSN 2181-6833

PEDAGOGIK MAHORAT

MS 2022

ISSN 2181-6833
9 772181 683301

ISSN 2181-6883

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal

MAXSUS SON
(2022-yil, dekabr)

Jurnal 2001-yildan chiqa boshlagan

Buxoro – 2022

PEDAGOGIK MAHORAT

Ilmiy-nazariy va metodik jurnal
2022, MAXSUS SON

Jurnal O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi OAK Rayosatining 2016-yil 29-dekabrdagi qarori bilan **pedagogika** va **psixologiya** fanlari bo'yicha dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2001-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 6 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2016-yil 22-fevral № 05-072-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

ЖАЛОЛОВ Озоджон Исомидинович
доцент Бухарского государственного университета

НАСРИДДИНОВА Халима Фарход қизи
магистрант Бухарского государственного университета

РАСУЛОВА Камола Хаким қизи
магистрант Бухарского государственного университета

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

В работе исследование ведется для кубатурных формул в функциональных пространствах Соболева $L_2^{(m)}$ и L_2^m для функций заданных в n- мерной единичной сфере. Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности и оценить ее. В связи с этим в пространстве L_2^m вычислена нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита и найдена экстремальная функция. Получена оценку сверху для нормы функционала погрешности кубатурных формул и на основе теоремы Бахвалова в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ построена оптимальная по порядку сходимости кубатурная формула для функций заданных в n- мерной единичной сфере.

Если нам известны не только значения функции $f(\theta)$ в некоторых точках области S, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции.

Ключевые слова: *кубатурная формула, функционал погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональная пространство, экстремальная функция.*

SOBOLEV FAZOSIDA YAQINLASHISH TARTIBI BO’YICHA ERMIT TIPIDAGI OPTIMAL KUBATUR FORMULANI QURISH METODLARI

Ushbu maqolada n o'lchovli birlik sferada aniqlangan funktsiyalar uchun $L_2^{(m)}$ va L_2^m Sobolev fazolarida kubatur formulalar o’rganilgan. Kubatur formulaning sifati xatolik funksional normasi bilan tavsiflanadi va noma'lum koeffitsientlar va tugunlarning funktsiyasidir. Shuning uchun, hisoblash amaliyoti uchun xatolik funktsionali normasini hisoblash va uni baholash uchun foydalidir. Shu munosabat bilan L_2^m fazosida Ermit tipidagi kubatur formulalarning xatolik funksionali normalari hisoblab chiqiladi va ekstremal funksiya topiladi. Kubatur formulalarning xatolik funksionali normasi uchun yuqori chegara olinadi va $L_2^{(m)}(S)$ fazodagi Baxvalov teoremasi asosida n o‘lchovli birlik sferada berilgan funksiyalar uchun yaqinlashish tartibi bo‘yicha optimal kubatur formulasi tuziladi.

Agar biz S sohaning ba'zi nuqtalarida nafaqat $f(\theta)$ funktsiyasining qiymatlarini, balki uning bir yoki boshqa tartibdagi hosilalarining qiymatlarini ham bilsak, tabiiyki, bu ma'lumotlarning barchasidan to'g'ri foydalanish bilan biz buni amalga oshirishimiz mumkin va aniqroq natijaga erishishimiz mumkin.

Kalit so'zlar: *kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, ekstremal funksiya.*

METHODS FOR THE CONSTRUCTION OF OPTIMAL IN THE ORDER OF CONVERGENCE CUBATE FORMULA OF THE HERMITIS TYPE IN THE SOBOLEV SPACE

In this paper, the study is carried out for cubature formulas in the Sobolev function spaces $L_2^{(m)}$ and L_2^m for functions defined in the n-dimensional unit sphere. The quality of the cubature formula is characterized by the norm of the error functional, and is a function of unknown coefficients and nodes. Therefore, it is useful for computational practice to be able to calculate the norm of the error functional and evaluate it. In this connection, in the L_2^m space, the norms of the error functional of Hermite-type cubature *formulas are calculated and the extremal function is found. An upper bound is obtained for the norm of the error functional of cubature formulas, and on the basis of Bakhvalov's theorem in the space* $L_2^{(m)}(S)$, *an optimal cubature formula in terms of the order of convergence is constructed for functions given in the* n*-dimensional unit sphere.*

If we know not only the values of the function $f(\theta)$ *at some points of the region* S, *but also the values of its derivatives of one order or another, then naturally, with the correct use of all these data, we can expect a more accurate result than in the case of using only the values of the function.*

Keywords: *cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, extremal function.*

Введение. Последнее время много работ (см. например, [1-11]) посвящены построению кубатурных формул для приближенного вычисления интегралов по поверхности сфер, точных для сферических гармоник некоторого порядка. Пусть функции $f(\theta)$, заданные на единичной сфере *S*, принадлежат некоторому Банаховому пространству *B*, вложенному в пространство $C(S)$ непрерывных функций на *S*. Функции $f(\theta)\in B$ продолжим на все пространство R^n, считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы *S* и будем обозначать через $\overline{f}(\theta)$, где *S* $n-$ мерная единичная сфера.

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S f(\theta)d\theta \approx \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \tag{1}$$

на функциях из *B*:

$$<\ell_N^{(\alpha)}, f> = \int_S f(\theta)d\theta - \sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n}\ell_N^{(\alpha)}(\theta) f(\theta)d\theta, \tag{2}$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\delta_s(1-r)-\sum_{|\alpha|\le t}\ \sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \tag{3}$$

$\delta_S(1-r)$, $\delta\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right)$ - дельта - функции Дирака, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$,

$\sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ и $0\le t\le m$,

где $\Gamma(n/2) = \left(\dfrac{n}{2}-1\right)!$.

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданным на B, и в силу предположения вложенности $B\to C(S)$ этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ будет непрерывным.

Постановка задачи. До сих пор мы рассматривали кубатурные формулы, при помощи которых приближенно вычисляют определенный интеграл от функции, когда известны значения этой функции в отдельных точках-узлах кубатурной формулы. Но возможны более общие кубатурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения ее производных того или иного порядка.

В пространстве B^* норма функционала $\ell_N^{(\alpha)}$ определяются по формуле

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)} \mid B^*\right\| = \sup_{f\in B, \|f\|\ne 0}\frac{\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f>\right|}{\|f \mid B\|}.$$

Функция $f_0\in B$, для которой имеет место равенство

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f_0>\right| = \left\|\ell_N^{(\alpha)} \mid B^*\right\|\cdot\left\|f_0 \mid B\right\|,$$

называется *экстремальной функцией* $\ell_N^{(\alpha)}$.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства B, равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы.

Для решения этой задачи в качестве B возьмём пространство $L_2^m(S)$.

Определение. Пространство $L_2^m(S)$ определяется как пространство функций, заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m, норма которых определяется равенством $[9]$

$$\left\| f \mid L_2^m(S) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \tag{4}$$

где $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и предположим, что $2m > n$, здесь

$Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ и $\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2)$, т.е. число линейно независимых сферических гармоник.

Вычисление нормы функционала погрешности кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^m(S)$

Качество кубатурной формулы характеризуется нормой функционала погрешности, и является функцией неизвестных коэффициентов и узлов. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить норму функционала погрешности (3) и оценить ее.

Справедлива следующая

Теорема 1. Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$ кубатурной формулы типа Эрмита (1) над пространством $L_2^m(S)$ равна

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} / L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t} \sum_{\lambda=1}^{N} (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Известно [9], что если $f(\theta) \in L_2^m(S)$, то для абсолютной и равномерной сходимости ряда $f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta)$, где $Y_k(\theta)$ - сферические гармоники порядка k, достаточно выполнение условия $2m > n$.

Таким образом, функция $f(\theta) \in L_2^m$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell} Y_{k,\ell}(\theta), \tag{5}$$

где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - сферические гармоники порядка k вида ℓ, $a_{k,\ell} = \int_S Y_{k,\ell}(\theta) f(\theta) d\theta$ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник, т.е.

$$\sigma(n,k) = \frac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!}(n+2k-2).$$

Подставляя (5) в левую часть (2), находим

$$<\ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta)>=<\delta_S(1-r)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>=$$

$$=<\delta_S(1-r), \sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>-<\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta)>=$$

$$=\int_S \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)d\theta-<\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)>=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}\int_S Y_{k,\ell}(\theta)d\theta-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}<\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right), Y_{k,\ell}(\theta)>=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]. \qquad (6)$$

Если в правой части (6) $a_{k,\ell}$ умножить на $k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}$, а кубатурную сумму разделить на этот множитель и применить неравенство Коши, то с учетом равенства (4) получаем

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)}, f>\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}(-1)^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^{\frac{m}{2}}(k+n-2)^{\frac{m}{2}}}\le$$

$$\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}a_{k,\ell}^2k^m(k+n-2)^m\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\|f/L_2^m(S)\right\|\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(7)

Из (7) следует

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/L_2^{m*}(S)\right\|\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Покажем, что в (8) равенство достигается для функции

$$U(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}b_{k,\ell}Y_{k,\ell}(\theta)$$

(9)

из $L_2^m(S)$, где $$b_{k,\ell}=\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^{\alpha}C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m(n+k-2)^m}.$$

(10) Действительно, так как для сферических функций имеет место оценка [10]

$$\max\left|Y_k(\theta)\right| \le C(n)k^{-m+\frac{n}{2}-1}\left\|f(\theta)/L_2^m(S)\right\|,$$

то из определения (10) коэффициентов ряда (9) следует, что $U(\theta)\in L_2^m(S)$.

Вычислив погрешность (6) кубатурной формулы для этой функции, получим следующее равенство:

$$\left|<\ell_N^{(\alpha)},U>\right| = \left|<\delta_S(1-r)p(\theta)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m(k+n-2)^m}Y_{k,\ell}(\theta)>\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m(k+n-2)^m}\cdot\left[<\delta_S(1-r),Y_{k,\ell}(\theta)>-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}<\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right),Y_{k,\ell}(\theta)>\right]\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m(k+n-2)^m}\cdot\left[\int_S Y_{k,\ell}(\theta)d\theta-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\left[\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)\right]^2}{k^m(k+n-2)^m}\right| = \left\|U \mid L_2^m(S)\right\|^2.$$

(11)

Сопоставляя (8) и (11) находим, что $\left\|\ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{m*}(S)\right\| = \left\|U \mid L_2^m(S)\right\|$, где $U(\theta)$ является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1), т.е. $U(\theta)$ - функция Рисса для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$, что и требовалось доказать. Из (11) следует следующая

Теорема 2. Функция $$U(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)}\frac{\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}(-1)^\alpha C_\lambda^{(\alpha)}Y_{k,\ell}^{(\alpha)}\left(\theta^{(\lambda)}\right)}{k^m(n+k-2)^m}Y_{k,\ell}(\theta)$$

является экстремальной функцией для кубатурной формулы (1) и $U(\theta)\in L_2^m(S)$, где $Y_{k,\ell}(\theta)$ - ортонормированная сферическая гармоника порядка k, вида ℓ и $\sigma(n,k)$ - число линейно независимых сферических гармоник порядка k.

Оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(S)$.

В настоящем разделе рассматривается кубатурной формулы (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\varepsilon_s(\theta)-\sum_{|\alpha|\le t}\sum_{\lambda=1}^{N}C_\lambda^{(\alpha)}\delta^{(\alpha)}\left(\theta-\theta^{(\lambda)}\right) \qquad (12)$$

Пусть функционалы погрешностей одномерных весовых квадратурных формул типа Эрмита имеют вид

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i)=\varepsilon_{\Omega_i}(\theta_i)-\sum_{\alpha_i=1}^{m}\sum_{\lambda_i=1}^{N_i}C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)}\delta^{(\alpha_i)}\left(\theta_i-\theta_i^{(\lambda_i)}\right), \qquad p(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p_i(\theta_i)$$

где $$\Omega_i=\begin{cases}[0,2\pi], & i=n\ ,\\ [0,\pi], & i=\overline{1,(n-1)}\ ,\end{cases}$$

и функционал погрешности (12) кубатурной формулы вида (1) представляется в виде:

$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1)\cdot\ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n)$. Оobозначим $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i)$.

В работе Г.Н.Салихова [8] показано, что пространство $L_2^m(S)$ по составу своих элементов совпадает с аналогичным пространством $L_2^{(m)}(S)$ С.Л.Соболева нормой

$$\left\| f/L_2^{(m)}(S)\right\|=\left\{\int_S\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}\left(D^\alpha f(\theta)\right)^2 d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В одномерном случае для $f_i\in L_2^{(m)}(\Omega_i)$ норма определяется так:

$$\left\| f_i/L_2^{(m)}(\Omega_i)\right\|=\left\{\int_{\Omega_i}\left(\frac{d^m}{d\theta_i^m}f(\theta_i)\right)^2 d\theta_i\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма. Если $f(\theta)$ из пространства $L_2^{(m)}(S)$ ($2m>n$) и для функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ кубатурной формулы вида (1) выполняются условия

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1)\cdot\ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n) \quad \text{и}$$

$$\left\|\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}\mid L_2^{(m)}(\Omega_i)\right\|\le K_iN_i^{-m}$$

(13)

где $$\Omega_i=\begin{cases}[0,2\pi], & i=n,\\ [0,\pi], & i=\overline{1,n-1},\end{cases}$$

то $$\left\|\ell_N^{(\alpha)}\mid L_2^{(m)*}(S)\right\|\le\sum_{i=1}^{n}K_i^1N_i^{-m}.$$

Теорема 3. Пусть справедливо

$$\left\|\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}\mid L_2^{(m)*}(\Omega_i)\right\|\le K_iN_i^{-m},$$

кроме того, $N_1=N_2=\ldots=N_n$ и $\prod_{i=1}^{n}N_i=N$,

тогда кубатурная формула вида (1) с функционалом погрешности

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta)=\ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1)\cdot\ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n).$$

является оптимальной по порядку сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(S)$, т.е.

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/L_2^{(m)*}(S)\right\|=O\left(N^{-\frac{m}{n}}\right).$$

Доказательство. На основе леммы, так как $N_1=N_2=\ldots=N_n$, то из

$$\prod_{i=1}^{n}N_i=N \quad \text{имеем} \quad N_1=N^{\frac{1}{n}}. \tag{14}$$

Учитывая (14) получаем

$$\left\|\ell_N^{(\alpha)}/L_2^{(m)*}(S)\right\|\le N^{-\frac{m}{n}}\sum_{i=1}^{n}K_i^1. \tag{15}$$

Вывод. Исследование для получения оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита показывает, что вычисляя значение функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ на функции $U(\theta)$, получили равенство для нормы функционала $\ell_N^{(\alpha)}(\theta)$ в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(S)$ и нормы функции $U(\theta)$ в пространстве $L_2^{(m)}(S)$. Это равенство действительно подтверждает, что $U(\theta) \in L_2^{(m)}(S)$ является экстремальной функцией для кубатурных формул типа Эрмита. Таким образом применяя метод повторного интегрирования, т.е. используя одномерных квадратурных формул, построена оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева для функций заданных в n-мерной единичной сферы.

Литература:

1. Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы. СМЖ, 1962, т.3, №5, с.769-796.
2. Мысовских И.П. О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы, СМЖ, 1964,т. 5,№3,с.721-723.
3. Лебедов В.И. О квадратурах на сфере ЖВМ и МФ,1976,т.16,№2, с.293-306.
4. McLaren D.A.Optimal numerical integration a Sphere.-math.Comp.1963,t.83, S.361-383.
5. Freeden W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere- computing, 1980.t.23, N2., -Pp.131-146.
6. Freeden W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the Sphere. Bull. Geod. (1978)52,11. 165-175.
7. Соболев С. Л, Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск. 1996,-483с.
8. Салихов Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985.
9. Салихов Г.Н. Оценка погрешности кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(S)$ // Докл.АН СССР. –Москва, 1975. -Т.223, № 6. - С.1318-1321.
10. Шадиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Диссертация доктора физ.-мат. наук. Ташкент, 2002. - 218с.
11. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука, 1974. - 808 с.
12. Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.-O. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 (2020), 112713.
13. Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0057015.

АТАЕВА Гулсина Исроиловна

Старший преподаватель
кафедры информационных систем и
цифровых технологий
Бухарского государственного
университета

МАХМАДИЕВ Хасан

Студент 4-курса направления
образования “Прикладная математика и
информатика”
Бухарского государственного
университета

РОЛЬ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ОБРАЗОВАНИИ

Понятие искусственного интеллекта пришло в нашу жизнь с появлением компьютеров, когда воплотились в жизнь возможности машин, заменяющих работу человеческого мозга. В современном мире искусственный интеллект стоит на важной точке пути своего развития, позволяющего переопределить многие ценности современного мира, включая образовательную систему. Конечной целью многих исследователей в области искусственного интеллекта является разработка систем искусственного интеллекта, способных равняться и превосходить весь спектр человеческого познания, мы, вероятно, все еще находимся на расстоянии нескольких десятилетий от такой технологии.

Ключевые слова: *машинное обучение, экспертные системы, информационные технологии, данные, принятие решений.*

TA'LIMDA SUN’IY INTELLEKTNING O'RNI

Sun'iy intellekt tushunchasi hayotimizga kompyuterlarning paydo bo'lishi va inson miyasi ishini bajara oladigan mashinalarning imkoniyatlari yuzaga chiqqanda kirib keldi. Hozirgi kunda sun'iy intellekt zamonaviy dunyoning ko'plab qadriyatlarini, shu jumladan, ta'lim tizimini qayta ishlab chiqishga imkon beradigan rivojlanish yo'lidagi muhim nuqtada turibdi. Ko'pgina sun'iy intellekt tadqiqotchilarining asosiy maqsadi inson idrokining butun spektriga teng keladigan va undan oshib ketadigan sun'iy intellekt tizimlarini ishlab chiqishdir. Ehtimol biz hali ham bunday texnologiyadan bir necha o'n yillar uzoqlikda turgandirmiz.

Kalit so'zlar: *mashinani o'rganish, ekspert tizimlari, axborot texnologiyalari, ma'lumotlar, qaror qabul qilish.*

THE ROLE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION

The concept of artificial intelligence came into our lives with the advent of computers, when the possibilities of machines that replace the work of the human brain came to life. In the modern world, artificial intelligence stands at an important point on the path of its development, which allows redefining many values of the modern world, including the educational system. The ultimate goal of many researchers in the field of artificial intelligence is to develop artificial intelligence systems capable of equaling and surpassing the entire spectrum of human cognition, we are probably still several decades away from such technology.

Keywords*: machine learning, expert systems, information technology, data, decision-making.*

Введение. На данный момент искусственный интеллект является узким или слабым, состоящим из машин и систем с программированием под конкретные задачи. Первоначально так называемые “экспертные системы” разрабатывались с помощью обширных правил программирования в компьютерах. Однако в последнее время ИИ развивается за счет использования машинного обучения или ML — наблюдения и сбора большого количества данных, выявления корреляций, которые не были бы сразу понятны людям, и использования этих шаблонов для принятия решений.

В области технологий искусственного интеллекта сделано немало важных шагов в области принятия решений, хотя важно заметить, что принятие решений у машин далеко не идеальны (хотя люди тоже много ошибаются при принятии решений.) В последнее время сделано очень много разработок в области алгоритмов искусственного интеллекта, что позволяет осуществлять выбор систем обучения и разнообразных данных.