BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

11/2024

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
11/2024

E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2024, № 11, noyabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari boʻyicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari boʻyicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar boʻyicha, **tarix** fanlari boʻyicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab Oʻzbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruriy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan. Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

MATEMATIKA *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА

УДК 517.516.87

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТ РИССА И НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА

Жалолов Озоджон Исомидинович,
доцент, заведующий кафедрой Прикладной математики и технологий программирования,
Бухарский государственный университет, 200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан
o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz
Мухсинова Мехринисо Шавкатовна,
Бухарский государственный университет докторант,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматривается вопрос о вычислении интегралов типа Фурье, где подынтегральная функция имеет с ограниченным числом экстремальных точек в интервале интегрирования и в качестве весовой функции берем быстро колеблющаяся функция. При небольших значениях параметра быстро колеблющаяся функции интеграл можно вычислить по обычным формулам механических квадратур но если значение параметра велико, это становится затруднительным из-за частого колебания множителя.

Поэтому для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придется делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющаяся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера.

Ключевые слова: квадратурная формула, функционал погрешность, пространство Хёрмандер, обобщённая функция, функциональная пространство, норма, экстремальная функция.

ALGORITHM FOR FINDING THE RIESZ ELEMENT AND THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL OF THE QUADRATURE FORMULA FOR CALCULATING FOURIER INTEGRALS IN A NONPERIODIC HÖRMANDER SPACE

In this paper, the problem of calculating Fourier-type integrals is considered, where the integrand has a limited number of extreme points in the integration interval and a rapidly oscillating function is taken as the weight function. For small values of the parameter of the rapidly oscillating function, the integral can be calculated using the usual formulas of mechanical quadrature, but if the value of the parameter is large, this becomes difficult due to the frequent oscillation of the multiplier. Therefore, to apply the usual formulas of mechanical quadrature, the integration interval must be divided in advance into a large number of parts, which makes the calculation almost impossible. Here, a method for calculating such integrals for specific rapidly oscillating functions is proposed, i.e. for Fourier-type integrals in the L. Hörmander space.

Key words: quadrature formula, error functional, Hörmander space, generalized function, functional space, norm, extremal function.

DAVRIY BO‘LMAGAN XYORMANDER FAZOSIDA FURE INTEGRALLARINI HISOBLASH UCHUN KVADRATUR FORMULA RISS ELEMENTINI VA XATOLIK FUNKSIONAL NORMASINI TOPISH ALGORITMI

Ushbu ishda Fure tipidagi integrallarni hisoblash masalasi ko'rib chiqiladi, bunda integral ostidagi funksiya integrallash oraliqda chegaralangan ekstremal nuqtalarga ega va vazn funksiyasi sifatida tez tebranuvchi funksiya olinadi. Tez tebranuvchi funksiya parametrining kichik qiymatlari uchun integralni mexanik kvadraturaning odatiy formulalari yordamida hisoblash mumkin, ammo parametrning qiymati katta bo'lsa, bu ko'paytirgichning tez-tez tebranishi tufayli qiyinlashadi.

Shuning uchun, mexanik kvadraturaning odatiy formulalarini qo'llash uchun integrallash oralig'ini oldindan ko'p sonli qismlarga bo'lish kerak, buni hisoblash esa deyarli imkonsiz. Bu yerda maxsus tez tebranuvchi funksiyalar uchun, ya'ni L. Xyormander fazosida Fure tipidagi integrallar uchun bunday integrallarni hisoblash usuli taklif qilingan.

Kalit so'zlar: kvadratur formula, xatolik funksionali, Xyormander fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funktsiya.

1. Введение. Вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики и теории вычислений.

С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством $L_2^{(m)}\left(R^n\right)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа (см[1]). В одномерном случае, т.е. в пространстве $L_2^{(m)}\left(R\right)$, непрерывная задача Винера – Хопфа решена З.Ж. Жамоловым (см [2]).

Работы многих авторов посвящена построением оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом предложенных С.Л. Соболевым (см [2], [3], [4], [5]).

В приложениях часто встречаются так называемый интегралы типа Фурье вида (1).

$$\left.\begin{aligned} I_1(\sigma) &= \int_a^b f(x)\cos\sigma x dx, \\ I_2(\sigma) &= \int_a^b f(x)\sin\sigma x dx, \\ I_3(\sigma) &= \int_a^b f(x)e^{i\sigma x} dx, \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

При небольших значениях параметра σ эти интегралы можно вычислить по классическим квадратурным формулам трапеция, Симпсона, Гаусса и т.д. Но, если значение σ велико, то вычисления становятся затруднительными из-за сильной осцилляции множителей $\cos\sigma x$ и $\sin\sigma x$.

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном [6]. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только $f(x)$ предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек. Формула Файлона является аналогом формулы Симпсона и переходит в нее при $\sigma \to 0$.

В настоящее время для вычисления интегралов (1), (2) проведено много исследований, в частности получены аналоги формул прямоугольников [7], трапеций [8], Ньюнона-Котеса [9], Гаусса [10]. Также построены оптимальные квадратурные формулы для некоторых классов функций [11,12].

Эйнарсон [13] для вычисления интегралов (1), (2) применил интерполяционный кубический сплайн типа 1 [14, 15, 16]. Как отмечает автор, во многих случаях его формула дает лучшей результат, чем формула Файлона, в формуле Эйнарсона присутствуют сплайновые моменты M_0 и M_N, которые надо заменить через вторые производные $f''(a)$ и $f''(b)$ (с некоторой точностью) или же найти из системы уравнений, определяющей параметры кубического сплайна. Если считать $M_0 = M_N = 0$, то погрешность формулы Эйнарсона будет иметь порядок h^3 и в этом случае формула Файлона является более точной, нежели формула Эйнарсона. В некоторых задачах в узлах x_k могут быть известны не только значения функции, но и значения ее производных. Эта дополнительная информация дает возможность построит квадратурные формулы более высокой степени точности. В работе [17] приведены такие квадратурные формулы, основанные на интерполяционной формуле Эрмита.

Известно, что из формул Файлона и Эйнарсона при $\sigma = 0$ получается формула Симпсона. А из формулы (4) при $\sigma = 0$ получаем совершенно другую формулу, а именно формулу трапеций с концевой поправкой, исследованную К.Ланцошем [18].

Постановка задачи. В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 e^{2\pi i\sigma x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{1}$$

где соответственно, C_β и x_β называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1), $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ [19] и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.

Определения 1. Пространство $H_2^\mu(R)$ определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убивающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\left\| f \left| H_2^\mu(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}[\mu(\xi)\cdot F[f^c(x)](\xi)](x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right.,$$

где $f^c(x)$ класс функций, следы которых в области R совпадают, F -преобразование Фурье, $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируемая, $\mu > 0$, R и F^{-1} прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx \quad , \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \,,$$

Отметим, что условие

$$\nu_m(x) = \left(F^{-1}\left(\frac{1}{\mu(\xi)} \right) \right)(x) \in L_2(R)$$

обеспечивает вложение пространстве $H_2^\mu(R)$ в $C(R)$ - непрерывные функции.

Условие вложения пространства $H_2^\mu(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимом условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Так как в этой работе рассмотрим квадратурную формулу типа Фурье вида (1), то погрешностью квадратурной формулы называется разность

$$\ell(f) = \langle \ell_N, f(x) \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i\sigma x} f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{2}$$

и этой разности (2) соответствует функционал погрешности $\ell_N(x)$, который имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)e^{2\pi i\sigma x} - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta) \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка [0,1], $\delta(x)-$ дельта функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (1) будет линейным и непрерывным функционалом из пространства $H_2^{\mu*}(R)$, сопряженного пространство $H_2^\mu(R)$, т.е. $\ell_N(x) \in H_2^{\mu*}(R)$.

Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве B мы взяли пространство Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu*}(R) \right\| \right. = \sup_{f(x)\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\left\| f \left| H_2^\mu(R) \right\| \right.} . \tag{4}$$

Норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β. Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить нормы функционала погрешности оценить ее. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по C_β и x_β есть задача на исследование функции одной переменной на экстремум.

Если

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N \mid H_2^{\mu*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{\left| < \ell_N(x), f(x) > \right|}{\left\| f \mid H_2^{\mu}(R) \right\|}$$

то говорят , что функционала $\overset{0}{\ell}_N(x)$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $H_2^{\mu}(R)$.

Основная цель настоящей работы является нахождении экстремальной функции и нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье вида (1) в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu*}(R)$.

Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье и его норма.

Для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $H_2^{\mu*}(R)$ используется его экстремальная функция.

Определение 2. Функция $\psi_\ell(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N(x)$, если

$$<\ell_N, \psi_\ell> = \left\| \ell_N \left| H_2^{\mu*}(R) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell \left| H_2^{\mu}(R) \right\| . \qquad (5)$$

Так как пространство $H_2^{\mu}(R)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см [13]) существует единственная функция $\psi_\ell(x) \in H_2^{\mu}(R)$ для которой

$$<\ell_N, f> = <\psi_\ell, f> \qquad (6)$$

и $\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*}(R) \right\| = \left\| \psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R) \right\|$, где $<\psi_\ell(x), f(x)>$ - скалярное произведение двух функций $\psi_\ell(x)$ и $f(x)$ из пространства $H_2^{\mu}(R)$. Напомним, что скалярное произведение $<\psi_\ell, f>$ определяется следующим образом:

$$<\psi_\ell, f> = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[\psi_\ell(x)](\xi)\right] \times F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[f(x)](\xi)\right] \mathrm{dx}.$$

В частности, из (6) при $f(x) = \psi_\ell(x)$ имеем

$$<\ell_N, f> = <\psi_\ell, f> = \left\| \psi_\ell \mid H_2^{\mu}(R) \right\|^2 =$$

$$= \left\| \psi_\ell \mid \ H_2^{\mu}(R) \right\| \cdot \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*}(R) \right\| = \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*}(R) \right\|^2$$

Отсюда видно, что решения $\psi_\ell(x)$ уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией.

Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности $\ell_N(x)$, сперва надо решить уравнение (6) т.е. найти экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ а потом вычислить скалярные произведение $<\ell_N, f> = \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*}(R) \right\|^2$

Ниже мы будем находит экстремальную функцию другим путём.

Из теории преобразования Фурье обобщенных функций имеем

$$<\ell_N, f> = \left(F[\ell_N](\xi), F[f](\xi)\right) = \left(\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi), \mu(\xi)F[f](\xi)\right) =$$

$$= \left(F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\}, F^{-1}\left\{\mu(\xi)F[f](\xi)\right\}\right). \qquad (7)$$

Если в этом равенстве (7) полагать

$F^{-1}\left\{\mu\ (\xi)F[\psi_\ell](\xi)\right\} = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\right\}$, т.е. если полагать

$f = \psi_\ell = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x)$,

То будем иметь:

$< \ell_N, \psi_\ell > = < \psi_\ell, \psi_\ell > = \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|^2$.

Отсюда следует, во-первых, что

$$\psi_\ell(x) = F^{-1}\left\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\right\}(x) = \left[e^{2\pi i\sigma x}\cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)\right] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x-h\beta), \quad (8)$$

где $\nu_m(x) = F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x)$, так как $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией функционала погрешности (3);

во-вторых

$$\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_\ell\right|^2 dx. \quad (9)$$

Этим доказана следующая.

Теорема 1. Элемент Рисса функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_\ell(x) = [e^{2\pi i\sigma x}\cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x-h\beta), \quad (10)$$

квадрат нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$ в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ имеет следующий вид

$$\left\| \ell_N \left| H_2^{\mu *}(R) \right.\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [e^{2\pi i\sigma x}\cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x-h\beta) \right|^2 dx, \quad (11)$$

где

$$\nu_m(x) == \frac{\pi\cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!}|x|^k$$

Заключение. Для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придется делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющаяся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера.

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только $f(x)$ предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек.

В настоящей работы рассматривается приближенное вычисление интегралов Фурье, которые называется квадратурные формулы типа Фурье. Таким образом, найдена экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ функционала погрешности (3) квадратурной формулы вида (1) и вычислена норму функционала погрешности $\ell_N(x)$ оптимальной квадратурные формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.

2. Жамолов З.Ж., Салихов Г.Н., Шарипов Т.Х., Приближенное интегрирование гладких функций, Математический анализ и смежные вопросы математики, Наука, Сиб. Отд., Новосибирск, 1978.

3. Рамазанов М.Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. / ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа: Дизайн Полиграф Сервис, 2009.178с.

4. Х.М.Шадиметов. О вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул. ДАН СССР, 1980, №4.

5. Т.Х.Шарипов, А.Р.Хаётов., Универсально – оптимальные кубатурные формулы и их связь с другими задачами вычислительной математики, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения , численные методы и приложения, УФА , 1996.

6. Filon N. G. On a quadrature for trigonometric integrals. –Pr0s. ROY.Soc. Edinburgh, 1928, 49, P.38-47

7. Исраилов М. И., Нуриддинов М. Приближенное вычисление интегралов с быстроколеблющимся подынтегральным выражением. Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент: ИК с ВЦ АН УзССР, 1972, вып. 14, с. 103-116.

8. Tuck. E. O. A simple Filon- trapezoidaol rule- Matematics of compution, 1967, 21, p. 239-241.

9. Luke Y. L. On the computation of oscillatory integrals, Part 2 –Proc.combridge Pilos.soc; 1954, 50, p 267-277.

10. Бахвалов Н. С., Васильева Л. Г. Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратур Гаусса. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, т.8, с. 175-181.

11. Жилейкин Я. М., Кукаркин А. Б. Об оптимальном вычислении интегралов от быстро осциллирующих функций. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978, т.18, №2, с. 294-301.

12. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. – Киев: Наукова думко, 1983. – 213 с.

13. Einarsson B. Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines. – BIT, 1968, 8, p. 279-286.

14. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972 – 316 с.

15. Стечкин С. Б. , Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.

16. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функции. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

17. Крылов В. И., Кругликова Л. Г. Справочная книга по численному гармоническому анализу. – Минск: Наука и техника, 1968 – 165 с.

18. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961 – 524 с.

19. Валевич Л.Р. и Панеяк Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. УМН. XX,1(121),165,3.