

# BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

Научный вестник Бухарского государственного университета  
Scientific reports of Bukhara State University

11/2024



11/2024



**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI**  
**SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY**  
**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Ilmiy-nazariy jurnal**  
**2024, № 11, noyabr**

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

**Muassis: Buxoro davlat universiteti**

**Tahririyat manzili:** 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.  
Elektron manzil: nashriyot\_buxdu@buxdu.uz

**TAHRIR HAY'ATI:**

**Bosh muharrir:** Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Bosh muharrir o'rinnbosari:** Rasulov To'lqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor  
**Mas'ul kotib:** Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

**Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich**, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Mordova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

**Danova M.**, filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

**Margianti S.E.**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

**Minin V.V.**, kimyo fanlari doktori (Rossiya)

**Tashqarayev R.A.**, texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

**Mo'minov M.E.**, fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

**Mengliyev Baxtiyor Rajabovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**Adizov Baxtiyor Rahmonovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Abuzalova Mexriniso Kadirovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Amonov Muxtor Raxmatovich**, texnika fanlari doktori, professor

**Barotov Sharif Ramazonovich**, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

**Baqoyeva Muhabbat Qayumovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich**, biologiya fanlari doktori, professor

**Jumayev Rustam G'aniyevich**, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

**Djurayev Davron Raxmonovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Durdiev Durdimurod Qalandarovich**, fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Olimov Shirinboy Sharofovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Qahhorov Siddiq Qahhorovich**, pedagogika fanlari doktori, professor

**Umarov Baqo Bafoyevich**, kimyo fanlari doktori, professor

**Murodov G'ayrat Nekovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**O'ravayeva Darmonoy Saidjonovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Hayitov Shodmon Ahmadovich**, tarix fanlari doktori, professor

**To'rayev Halim Hojiyevich**, tarix fanlari doktori, professor

**Rasulov Baxtiyor Mamajonovich**, tarix fanlari doktori, professor

**Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich**, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

**Quvvatova Dilrabo Habibovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Axmedova Shoira Nematovna**, filologiya fanlari doktori, professor

**Bekova Nazora Jo'rayevna**, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

**Amonova Zilola Qodirovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Hamroyeva Shahlo Mirjonovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Nigmatova Lola Xamidovna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Boboyev Feruz Sayfullayevich**, tarix fanlari doktori

**Jo'rayev Narzulla Qosimovich**, siyosiy fanlar doktori, professor

**Xolliyev Askar Ergashovich**, biologiya fanlari doktori, professor

**Artikova Hafiza To'ymurodovna**, biologiya fanlari doktori, professor

**Hayitov Shavkat Ahmadovich**, filologiya fanlari doktori, professor

**Qurbanova Gulnoz Negmatovna**, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

**Ixtiyarova Gulnora Akmalovna**, kimyo fanlari doktori, professor

**Rasulov Zubaydullo Izomovich**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

**Mirzayev Shavkat Mustaqimovich**, texnika fanlari doktori, professor

**Samiyev Kamoliddin A'zamovich**, texnika fanlari doktori, dotsent

**Esanov Husniddin Qurbonovich**, biologiya fanlari doktori, dotsent

**Zaripov Gulmurot Toxirovich**, texnika fanlari nomzodi, professor

**Jumayev Jura**, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

**Klichev Qybek Abdurasulovich**, tarix fanlari doktori, dotsent

**G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna**, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

| <b>MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS</b>                                     |  |    |
|--|--|----|
| <b>MATEMATIKA *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА</b>                                 |  |    |
| <b>Abduolimova G.M., Sharipova S.T.</b>  | Differensial-ayirmalni tenglamalarni yechish usullari  | 4  |
| <b>Turdiyev H.H., Sulaymonova G.X.</b>   | $0 < \alpha \leq 1$ tartibli, $0 \leq \beta \leq 1$ tipli hilfer hosilasi qatnashgan kasr to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala              | 9  |
| <b>Маматов Т.Ю.</b>  | Метод конечных элементов решения дробно-дифференциального уравнения  | 16 |
| <b>Abdullahayev S.A.</b>   | Chiziqli tenglamalar sistemasi orqali bazi bir iqtisodiy masalalarni yechish   | 23 |
| <b>Ikromov I.A., Jo'raqulov A.J.</b>   | Gipersirtdagi o'lchov bilan kesuvchi funksiya o'ramasining baholari  | 27 |
| <b>Kuliev K.D., Turaqulov T.D.</b>   | Diskret hardy tipidagi tafsizliklar uchun yangi shartlar   | 34 |
| <b>Каландаров У.Х., Маматов З.У., Ирсалиев Р.Х., Нурманова М.У., Заиров С.Х.</b> | Математические моделирование нестационарные колебания кругового цилиндрического слоя с несжимаемой жидкостью   | 42 |
| <b>Qo'shaqova D.O', G'anijonova G.A., Anorboyeva M.N.</b>                        | Muntazam tetraeksaedr qirralari bo'ylab uch quvlovchi va bir qochuvchining tutish differensial o'yini  | 48 |
| <b>Жалолов О.И., Мухсинова М.Ш.</b>  | Алгоритм нахождения элемент рисса и нормы функционала погрешности квадратурной формулы для вычислении интегралов фурье в непериодическом пространстве хёрганда | 55 |
| <b>Abdullahayev J.I., Ikromova D.I.</b>  | Umumlashgan fridrixs modelining diskret spektri  | 61 |
| <b>Muxtarov Y., Miyassarov A.A.</b>  | Umumlashgan bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini tadqiqlash   | 66 |
| <b>Istamov J.Z., Daminova M.S.</b>   | Chekli o'lchamli simpleksda aniqlangan ba'zi bistoxastik operatorlar oilasi dinamikasi   | 70 |
| <b>Nodirov Sh.D., Shodmonova D.G', To'rayev J.T.</b>                             | $R^2$ da yuqori darajali nochiziqli operatorlarning qo'zg'almas nuqtalari  | 76 |
| <b>Yangiboyev Z.Sh., Abdumurodova Sh.A.</b>                                      | G'ovak yarim fazoda sh to'lqinli tenglama uchun teskari dinamik masalaning turg'unligi haqida  | 81 |
| <b>Xamroyeva D.N., Toxirov F.J.</b>  | Interval aniqmaslikka ega bo'lgan masalalarni octave dasturining interval paketidan foydalanim yechish   | 88 |

**АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТ РИССА И НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА  
ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ  
ФУРЬЕ В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ХЁРМАНДЕРА**

**Жалолов Озоджон Исомидинович,**

доцент, заведующий кафедрой Прикладной математики и технологий программирования,  
Бухарский государственный университет, 200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан

*o\_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz*

**Мухсинова Мехринисо Шавкатовна,**

Бухарский государственный университет докторант,  
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан

В данной работе рассматривается вопрос о вычислении интегралов типа Фурье, где подынтегральная функция имеет с ограниченным числом экстремальных точек в интервале интегрирования и в качестве весовой функции берем быстро колеблющаяся функция. При небольших значениях параметра быстро колеблющаяся функции интеграл можно вычислить по обычным формулам механических квадратур но если значение параметра велико, это становится затруднительным из-за частого колебания множителя.

Поэтому для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придется делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющаяся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера.

**Ключевые слова:** квадратурная формула, функционал погрешность, пространство Хёрмандер, обобщённая функция, функциональное пространство, норма, экстремальная функция.

**ALGORITHM FOR FINDING THE RIESZ ELEMENT AND THE NORM OF THE ERROR  
FUNCTIONAL OF THE QUADRATURE FORMULA FOR CALCULATING FOURIER  
INTEGRALS IN A NONPERIODIC HÖRMANDER SPACE**

In this paper, the problem of calculating Fourier-type integrals is considered, where the integrand has a limited number of extreme points in the integration interval and a rapidly oscillating function is taken as the weight function. For small values of the parameter of the rapidly oscillating function, the integral can be calculated using the usual formulas of mechanical quadrature, but if the value of the parameter is large, this becomes difficult due to the frequent oscillation of the multiplier. Therefore, to apply the usual formulas of mechanical quadrature, the integration interval must be divided in advance into a large number of parts, which makes the calculation almost impossible. Here, a method for calculating such integrals for specific rapidly oscillating functions is proposed, i.e. for Fourier-type integrals in the L. Hörmander space.

**Key words:** quadrature formula, error functional, Hörmander space, generalized function, functional space, norm, extremal function.

**DAVRIY BO'LMAGAN XYORMANDER FAZOSIDA FURE INTEGRALLARINI  
HISOBLASH UCHUN KVADRATUR FORMULA RISS ELEMENTINI VA XATOLIK  
FUNKSIONAL NORMASINI TOPISH ALGORITMI**

Ushbu ishda Fure tipidagi integrallarni hisoblash masalasi ko'rib chiqiladi, bunda integral ostidagi funksiya integrallash oraliqda chegaralangan ekstremal nuqtalarga ega va vazn funksiyasi sifatida tez tebranuvchi funksiya olinadi. Tez tebranuvchi funksiya parametrining kichik qiyatlari uchun integralni mexanik kvadraturaning odatiy formulalari yordamida hisoblash mumkin, ammo parametrning qiymati katta bo'lsa, bu ko'paytirgichning tez-tez tebranishi tufayli qiyinlashadi.

Shuning uchun, mexanik kvadraturaning odatiy formulalarini qollash uchun integrallash oralig'ini oldindan ko'p sonli qismlarga bo'lish kerak, buni hisoblash esa deyarli imkonsiz. Bu yerda maxsus tez tebranuvchi funksiyalar uchun, ya'ni L. Xyormander fazosida Fure tipidagi integrallar uchun bunday integrallarni hisoblash usuli taklif qilingan.

**Kalit so'zlar:** kvadratur formula, xatolik funksionali, Xyormander fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funktsiya.

**1. Введение.** Вычисление определенных интегралов с возможно большой точностью является одной из актуальных задач вычислительной математики и теории вычислений.

С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решетчатых формул над пространством  $L_2^{(m)}(R^n)$  и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа (см[1]). В одномерном случае, т.е. в пространстве  $L_2^{(m)}(R)$ , непрерывная задача Винера – Хопфа решена З.Ж. Жамоловым (см [2]).

Работы многих авторов посвящена построением оптимальных квадратурных и кубатурных формул методом предложенных С.Л. Соболевым (см [2], [3], [4], [5]).

В приложениях часто встречаются так называемый интегралы типа Фурье вида (1).

$$\left. \begin{aligned} I_1(\sigma) &= \int_a^b f(x) \cos \sigma x dx, \\ I_2(\sigma) &= \int_a^b f(x) \sin \sigma x dx, \\ I_3(\sigma) &= \int_a^b f(x) e^{i\sigma x} dx, \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

При небольших значениях параметра  $\sigma$  эти интегралы можно вычислить по классическим квадратурным формулам трапеция, Симпсона, Гаусса и т.д. Но, если значение  $\sigma$  велико, то вычисления становятся затруднительными из-за сильной осцилляции множителей  $\cos \sigma x$  и  $\sin \sigma x$ .

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном [6]. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только  $f(x)$  предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек. Формула Файлона является аналогом формулы Симпсона и переходит в нее при  $\sigma \rightarrow 0$ .

В настоящее время для вычисления интегралов (1), (2) проведено много исследований, в частности получены аналоги формул прямоугольников [7], трапеций [8], Ньютона-Котеса [9], Гаусса [10]. Также построены оптимальные квадратурные формулы для некоторых классов функций [11,12].

Эйнарсон [13] для вычисления интегралов (1), (2) применил интерполяционный кубический сплайн типа 1 [14, 15, 16]. Как отмечает автор, во многих случаях его формула дает лучший результат, чем формула Файлона, в формуле Эйнарсона присутствуют сплайновые моменты  $M_0$  и  $M_N$ , которые надо заменить через вторые производные  $f''(a)$  и  $f''(b)$  (с некоторой точностью) или же найти из системы уравнений, определяющей параметры кубического сплайна. Если считать  $M_0 = M_N = 0$ , то погрешность формулы Эйнарсона будет иметь порядок  $h^3$  и в этом случае формула Файлона является более точной, нежели формула Эйнарсона. В некоторых задачах в узлах  $x_k$  могут быть известны не только значения функции, но и значения ее производных. Эта дополнительная информация дает возможность построить квадратурные формулы более высокой степени точности. В работе [17] приведены такие квадратурные формулы, основанные на интерполяционной формуле Эрмита.

Известно, что из формул Файлона и Эйнарсона при  $\sigma = 0$  получается формула Симпсона. А из формулы (4) при  $\sigma = 0$  получаем совершенно другую формулу, а именно формулу трапеций с концевой поправкой, исследованную К.Ланцошем [18].

**Постановка задачи.** В настоящей работе рассмотрим следующую квадратурную формулу:

$$\int_0^1 e^{2\pi i \sigma x} f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta), \quad (1)$$

где соответственно,  $C_\beta$  и  $x_\beta$  называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы (1),  $f(x)$  является элементом гильбертова пространства Хёрмандера  $H_2^\mu(R)$  [19] и назовем ее квадратурную формулу типа Фурье.

**Определения 1.** Пространство  $H_2^\mu(R)$  определяется как замыкания пространства бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой отрицательной степени, которая норма функций определяется следующим образом:

$$\|f|H_2^\mu(R)\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[f^c(x)](\xi)](x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где  $f^c(x)$  класс функций, следы которых в области  $R$  совпадают,  $F$ -преобразование Фурье,  $\mu(\xi)$  бесконечно дифференцируемая,  $\mu > 0$ ,  $R$  и  $F^{-1}$  прямое и обратное преобразование Фурье:

$$F[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx, \quad F^{-1}[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx,$$

Отметим, что условие

$$\nu_m(x) = \left( F^{-1}\left( \frac{1}{\mu(\xi)} \right) \right)(x) \in L_2(R)$$

обеспечивает вложение пространства  $H_2^\mu(R)$  в  $C(R)$  - непрерывные функции.

Условие вложения пространства  $H_2^\mu(R)$  в пространство непрерывных функций  $C(R)$  является необходимым условием функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Так как в этой работе рассмотрим квадратурную формулу типа Фурье вида (1), то погрешностью квадратурной формулы называется разность

$$\ell(f) = \langle \ell_N, f(x) \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i \sigma x} f(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta), \quad (2)$$

и этой разности (2) соответствует функционал погрешности  $\ell_N(x)$ , который имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) e^{2\pi i \sigma x} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta) \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_{[0,1]}(x)$  - индикатор отрезка  $[0,1]$ ,  $\delta(x)$  – дельта функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (1) будет линейным и непрерывным функционалом из пространства  $H_2^{\mu^*}(R)$ , сопряженного пространство  $H_2^\mu(R)$ , т.е.  $\ell_N(x) \in H_2^{\mu^*}(R)$ .

Как известно, задача оценки погрешности квадратурной формулы на функциях некоторого пространства  $B$  равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к  $B$  пространстве  $B^*$  или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной квадратурной формулы. Для решения этой задачи в качестве  $B$  мы взяли пространство Хёрмандера  $H_2^\mu(R)$ .

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\|\ell_N|H_2^{\mu^*}(R)\| = \sup_{f(x) \neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\|f|H_2^\mu(R)\|}. \quad (4)$$

Норма функционала погрешности  $\ell_N(x)$  зависит от коэффициентов  $C_\beta$  и узлов  $x_\beta$ . Поэтому для вычислительной практики полезно уметь вычислить нормы функционала погрешности оценить ее. Отыскание минимума нормы функционала погрешности по  $C_\beta$  и  $x_\beta$  есть задача на исследование функции одной переменной на экстремум.

Если

$$\left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N(x), f(x) \rangle|}{\|f | H_2^\mu(R)\|}$$

то говорят, что функционала  $\ell_N(x)$  соответствует оптимальной квадратурной формуле в  $H_2^\mu(R)$ .

Основная цель настоящей работы является нахождении экстремальной функции и нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье вида (1) в пространстве Хёрмандера  $H_2^{\mu^*}(R)$ .

**Экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы типа Фурье и его норма.**

Для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве  $H_2^{\mu^*}(R)$  используется его экстремальная функция.

**Определение 2.** Функция  $\psi_\ell(x)$  называется экстремальной функцией функционала  $\ell_N(x)$ , если

$$\langle \ell_N, \psi_\ell \rangle = \left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | H_2^\mu(R) \right\|. \quad (5)$$

Так как пространство  $H_2^\mu(R)$  является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см [13]) существует единственная функция  $\psi_\ell(x) \in H_2^\mu(R)$  для которой

$$\langle \ell_N, f \rangle = \langle \psi_\ell, f \rangle \quad (6)$$

и  $\left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\| = \left\| \psi_\ell | H_2^\mu(R) \right\|$ , где  $\langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle$  - скалярное произведение двух функций  $\psi_\ell(x)$  и  $f(x)$  из пространства  $H_2^\mu(R)$ . Напомним, что скалярное произведение  $\langle \psi_\ell, f \rangle$  определяется следующим образом:

$$\langle \psi_\ell, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[\psi_\ell(x)](\xi)] \times F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[f(x)](\xi)] dx.$$

В частности, из (6) при  $f(x) = \psi_\ell(x)$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell_N, f \rangle &= \langle \psi_\ell, f \rangle = \left\| \psi_\ell | H_2^\mu(R) \right\|^2 = \\ &= \left\| \psi_\ell | H_2^\mu(R) \right\| \cdot \left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\| = \left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\|^2 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что решения  $\psi_\ell(x)$  уравнения (6) удовлетворяет уравнению (5) и является экстремальной функцией.

Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности  $\ell_N(x)$ , сперва надо решить уравнение (6) т.е. найти экстремальную функцию  $\psi_\ell(x)$  а потом вычислить скалярные произведение  $\langle \ell_N, f \rangle = \left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\|^2$

Ниже мы будем находить экстремальную функцию другим путём.

Из теории преобразования Фурье обобщенных функций имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell_N, f \rangle &= (F[\ell_N](\xi), F[f](\xi)) = (\mu^{-1}(\xi) F[\ell_N](\xi), \mu(\xi) F[f](\xi)) = \\ &= \left( F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi) F[\ell_N](\xi)\}, F^{-1}\{\mu(\xi) F[f](\xi)\} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Если в этом равенстве (7) полагать

$$F^{-1}\{\mu(\xi)F[\psi_\ell](\xi)\} = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N](\xi)\}, \text{ т.е. если полагать}$$

$$\psi_\ell = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\}(x),$$

То будем иметь:

$$\langle \ell_N, \psi_\ell \rangle = \langle \psi_\ell, \psi_\ell \rangle = \left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\|^2.$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\psi_\ell(x) = F^{-1}\{\mu^{-1}(\xi)F[\ell_N(x)](\xi)\}(x) = \left[ e^{2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x) \right] * v_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta v_m(x-h\beta), \quad (8)$$

где  $v_m(x) = F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x)$ , так как  $\psi_\ell(x)$  является экстремальной функцией функционала погрешности (3);

во-вторых

$$\left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\ell|^2 dx. \quad (9)$$

Этим доказана следующая.

**Теорема 1.** Элемент Рисса функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид

$$\psi_\ell(x) = [e^{2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * v_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta v_m(x-h\beta), \quad (10)$$

квадрат нормы функционала погрешности  $\ell_N(x)$  в пространстве Хёрмандера  $H_2^\mu(R)$  имеет следующий вид

$$\left\| \ell_N | H_2^{\mu^*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| [e^{2\pi i \sigma x} \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * v_m(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta v_m(x-h\beta) \right|^2 dx, \quad (11)$$

где

$$v_m(x) = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k$$

**Заключение.** Для применения обычных формул механических квадратур промежуток интегрирования придется делить предварительно на большое число частей, из-за чего вычисление становится почти невозможным. Здесь предполагается метод вычисления таких интегралов для конкретных быстро колеблющихся функций, т.е. для интегралов типа Фурье в пространстве Л. Хёрмандера.

В этом случае для вычисления интегралов с необходимой точностью промежуток интегрирования приходится делить на большее число частей. Поэтому для вычисления таких интегралов разработаны квадратурные формулы, которые заранее учитывают наличие указанных осциллирующих множителей. Впервые метод построения таких формул был предложен Файлоном. Он заключался в замене квадратичным трехчленом на всей подынтегральной функции, а только  $f(x)$  предположении, что она на отрезке интегрирования имеет ограниченное число экстремальных точек.

В настоящей работе рассматривается приближенное вычисление интегралов Фурье, которые называются квадратурные формулы типа Фурье. Таким образом, найдена экстремальную функцию  $\psi_\ell(x)$  функционала погрешности (3) квадратурной формулы вида (1) и вычислена норму функционала погрешности  $\ell_N(x)$  оптимальной квадратурные формулы в пространстве Л. Хёрмандера  $H_2^\mu(R)$ .

#### **ЛИТЕРАТУРА:**

1. С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.

2. Жамолов З.Ж., Салихов Г.Н., Шарипов Т.Х., *Приближенное интегрирование гладких функций, Математический анализ и смежные вопросы математики*, Наука, Сиб. Отд., Новосибирск, 1978.
3. Рамазанов М.Д. *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. / ИМВЦ УНЦ РАН*. Уфа: Дизайн Полиграф Сервис, 2009. 178с.
4. Х.М.Шадиметов. *О вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул*. ДАН СССР, 1980, №4.
5. Т.Х.Шарипов, А.Р.Хаётов., *Универсально – оптимальные кубатурные формулы и их связь с другими задачами вычислительной математики, Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения, УФА*, 1996.
6. Filon N. G. *On a quadrature for trigonometric integrals*. –Pr0s. ROY.Soc. Edinburgh, 1928, 49, P.38-47
7. Исраилов М. И., Нуридинов М. *Приближенное вычисление интегралов с быстроколеблющимся подынтегральным выражением. Вопросы вычислительной и прикладной математики*. – Ташкент: ИК с ВЦ АН УзССР, 1972, вып. 14, с. 103-116.
8. Tuck. E. O. *A simple Filon- trapezoidal rule- Mathematics of computation*, 1967, 21, p. 239-241.
9. Luke Y. L. *On the computation of oscillatory integrals, Part 2 –Proc.combridge Pilos.soc*; 1954, 50, p 267-277.
10. Бахвалов Н. С., Васильева Л. Г. *Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратур Гаусса*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, т.8, с. 175-181.
11. Жилейкин Я. М., Кукаркин А. Б. *Об оптимальном вычислении интегралов от быстро осциллирующих функций*. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978, т.18, №2, с. 294-301.
12. Задирака В. К. *Теория вычисления преобразования Фурье*. – Киев: Наукова думко, 1983. – 213 с.
13. Einarsson B. *Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines*. – BIT, 1968, 8, p. 279-286.
14. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*. – М.: Мир, 1972 – 316 с.
15. Стечкин С. Б. , Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике*. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
16. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функции*. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
17. Крылов В. И., Кругликова Л. Г. *Справочная книга по численному гармоническому анализу*. – Минск: Наука и техника, 1968 – 165 с.
18. Ланцюж К. *Практические методы прикладного анализа*. – М.: Физматгиз, 1961 – 524 с.
19. Валевич Л.Р. и Панеяк Б.П. *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения*. УМН. XX,1(121),165,3.