E-ISSN 2181-1466
9 772181 146004

ISSN 2181-6875
9 772181 687004

@buxdu_uz @buxdu1 @buxdu1 www.buxdu.uz

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
10/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI 1930

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI

10/2023

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal
2023, № 11, dekabr

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari boʻyicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari boʻyicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar boʻyicha Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim boʻlgan zaruruiy nashrlar roʻyxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.
Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal Oʻzbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan roʻyxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti
Tahririyat manzili: 200117, Oʻzbekiston Respublikasi,Buxoro shahri Muhammad Iqbol koʻchasi, 11-uy.
Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
ANIQ VA TABIIY FANLAR * EXACT AND NATURAL SCIENCES *** ТОЧНЫЕ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**		

Самиев К.А.	Снижение теплопотерь через светопрозрачное ограждение зданий с использованием энергосберегающего оконного блока	3
Hikmatov B.A., Mirzayev M.S., Fayziyev Sh.Sh.	Majburiy konveksiyali quyosh quritgichlarida tajriba tadqiqotlari natijalari	8
Ibodullayev M.X.	Kimyo va neft-gazni qayta ishlash sanoatlarda issiqlik almashinish apparatlarini intensivlash usullari va hisoblari	14
Kengboyev S.A., Safarov N.M.	Vakuum muhitida elektron nur bilan (yuqori sifatli U9A po`lat) tikuv jihozining mokisini azotlash ustida olib borilgan tadqiqotlar	22
Ochilov L.I., Mirzayev M.S., Fayziyev Sh.Sh., Samiyev K.A.	Passiv quyosh isitish tizimiga ega turar-joy binolarida issiqlik quvuridan foydalanish imkoniyatini baholash	29
Rasulov X.R.	Uzluksiz vaqtli qat’iy novolterra dinamik sistemasining sifatiy tahlili haqida	34
Kengboyev S.A., Safarov N.M.	Tikuv mashinalari transport mexanizmi va ulardagi mumkin bo’lgan muammolarni bartaraf etish usullari	40
Shafiyev T.R.	Zararli moddalarning atmosferada ko‘chishi va diffuziya jarayonini monitoring va bashoratlash uchun matematik model va hisoblash algoritmini ishlab chiqish	44
Жумаев Ж., Авезов А.А.	Естественная конвекция между двумя вертикально расположенными стержнями	54
Назаров Э.С., Торемуратова А.Б.	Особенности и сферы применения наполненных полимерных композиционных материалов	59
Назаров М.Р., Назарова Н.М.	К раскрытию понятий энергия и энтропия	64
Sulaymanova Z.A., Umarov B.B., Mirzayeva G.A., Atoyeva M.O.	Ferrosen asosida oraliq metall komplekslari sintezi va IQ spektroskopik tadqiqoti	71
Abdieva G.B.	Tizimli xavfsizlikning amaliy masalalari	77
Qodirov J.R.	Takomillashgan tabiiy konveksiyali bilvosita quyosh quritgichining tajribaviy tadqiqotlari	81
Raxmatov I.I., Samiyev K.A., Mirzayev M.S.	Buxoro davlat universitetida 300 kw quvvatga ega tarmoqqa ulangan quyosh fotoelektrik tizimining samaradorlik tahlili	90
Sobirov J.A., Jumayev S.S., Begmurodov O.A.	Galiley geometriyasi elementlaridan foydalanib uchburchaklarning yuzini topish	97
Узаков О.Ҳ.	Теория вакуума и материя	103
Назарова С.М.	Суғориладиган ўтлоқи тупроқларда озуқа моддалар миқдори	108

Кадиров Ж.Р., Мирзаев Ш.М., Мавлонов У.М.	Методика разработки и экспериментального исследования воздушного коллектора для солнечной сушилки косвенного действия с естественной конвекцией	112
Исомиддинов Б.О.	Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве	123
Жалолов О.И., Нуруллаева Н.И.	Верхняя оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$	128
Джураев Ш. И., Аблокулов Ш.З.	К вопросу о колебаниях упругозакрепленного корпуса при несовпадении его центра тяжести с центром упругости	134
Авезов Қ.Ғ., Умаров Б.Б., Ганиев Б.Ш., Эргашова Б.З.	2-трифторацетилциклогексанон бензоилгидразонининг кристалл тузилиши, DFT ҳисоблашлари, Ҳиршфельд юзаси таҳлили ва молекуляр докинги	141
Khayriev U.N., Nutfullayeva A.Kh.	The norm for the error functional of the quadrature formula with derivative in the space $\widetilde{W}_2^{(2,1)}$ of periodic functions	149
Khudayarov S.S., Absalamov A.T.	Quadratic stochastic dynamical systems of the type $(\sigma \mid D)$	157
Khakimova N.Kh.	Formation and properties of agricultural irrigated layers of watered lands of Fergana	162
Ibodullayev M.X., Norqulov J.F., Yo‘lliyev Sh.R.	Havoni konditsiyalashni o‘lchamli ko‘rsatgichlar bilan eksergetik tahlil qilish	170
Doliyev Sh.Q.	Elektr tarmoqlarida elektr energiya isrofini kamaytirish tahlili va ularning ekonometrik modelini tuzish	180
Esanov H.Q., Barotova M.O.	Buxoro vohasi yuksak o‘simliklarining biomorfologik tahlili	184
Bahronova D.M., Atayeva G.I.	MySQLda ketma-ketliklarni shakllantirish va ulardan foydalanish	188
Absalamov A.T., Khudayarov S.S.	Dynamics of a cooperative system with order one in the plane	193
Зуннунов Р.Т.	Об одной задаче со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области	197
Умаров О.Р.	Изменение агрохимических и микробиологических показателей луговых почв Бухарской области в зависимости от степени засоления	204
Umarov B.B., Amonov M.M., Xayrullayev F.N.	5,5-dimetil-2,4-dioksokseksan kislota etil eter para-almashingan aroilgidrazonining NI(II) kompleksi sintezi va kristall tuzilishi	209
Muzafarov F.I., Mardonov O`.M., Ganiyev B.Sh.	Vanadil(IV) karboksilatlarining iq spektroskopik tahlili	215
Хаятов Х.Y	Построение оптимальной весовой квадратурной формулы типа эрмита в пространстве периодических функций соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_1)$	220

УДК 517.518.392

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $\overline{L}_2^m(K_n)$

Жалолов Озоджон Исомидинович,
Бухарский государственный университет,
доцент, заведующий кафедрой
Прикладной математики и технологий программирования,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.
o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz
Нуруллаева Нодира Иззатуллоевна,
Бухарский государственный университет, магистрант,
200114, улица М.Икбол 11, Бухара, Узбекистан.

Аннотация. *Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например [1–10]. В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определённого пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1]. Многомерные кубатурные формулы отличаются от одномерных двумя особенностями:*

1) бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования;

2) быстро растёт число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства. Проблема 2) требует особого внимания к построению наиболее экономных формул.

В настоящей работе получена верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $\overline{L}_2^m(K_n)$.

Ключевые слова: *кубатурная формула, функционал погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональная пространство, норма, экстремальная функция.*

UPPER ESTIMATE FOR THE NORM OF THE FUNCTIONAL ERROR OF CUBATURAL FORMULAS IN THE SPACE $\overline{L}_2^m(K_n)$.

Abstract. *The modern formulation of the problem of optimization of approximate integration formulas consists in minimizing the norm of the error functional of the formula on selected normed spaces, for example [1–10]. These works study the problem of optimality with respect to some specific space. Most of them are considered in Sobolev space [1]. Multidimensional cubature formulas differ from one-dimensional ones in two features:*

1) the forms of multidimensional integration domains are infinitely diverse;

2) the number of integration nodes grows rapidly with increasing dimension of space.

Problem 2) requires special attention to constructing the most economical formulas.

In this paper, we obtain an upper bound for the norm of the error functional of cubature formulas in the space

Keywords: *cubature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, norm, extremal function.*

$\overline{L}_2^m(K_n)$ FAZODA KUBATUR FORMULALARNING XATOLIK FUNKSIONALI NORMASI UCHUN YUQORI BAHO

Annotatsiya. *Integrallarni taqribiy hisoblash formulalarini optimallashtirish muammosining zamonaviy metodlari tanlangan normalangan fazolarda formulaning xatolik funksionali normasini minimallashtirishdan iborat [1-10]. Bu ishlarda muayyan fazolarda nisbatan optimallik muammosi*

o'rganiladi. Ularning aksariyati Sobolev fazosida ko'rib chiqiladi[1]. Ko'p o'lchovli kubatura formulalari bir o'lchovli kvadratura formulalaridan ikkita xususiyat bilan farq qiladi:

1) ko'p o'lchovli integral sohalarining ko'rinishlari cheksiz xilma-xildir;

2) integrallash tugunlari soni fazo hajmining oshishi bilan tez o'sib boradi.

Muammo 2) eng tejamkor formulalarni tuzishga alohida e'tibor berishni talab qiladi.

Ushbu ishda $\overline{L}_2^m(K_n)$ *Sobolev fazosida kubatur formulaning xatolik funksionali normasi uchun yuqoridan baho olingan.*

Kalit so'zlar: *kubatur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funksiya.*

1. Введение.

В настоящей работе рассматриваются формулы именно с учётом этого требования. Как известно, что выражением Н.С. Бахвалова такие формулы называется “практичные формулы” [5]

Пусть $B(\Omega)$ - пространство Банаха, компактно вложенное в $C(\Omega)$, $B^*(\Omega)$ сопряжённое к $B(\Omega)$ пространство. Интеграл от функции по области Ω:

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int \varepsilon_\Omega(x) f(x)\,dx$$

является линейным функционалом над ***B***. Его приближённое выражение

$$\sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) = \int_\Omega \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right) f(x)\,dx$$

будет некоторым другим функционалом.

Линейным функционалом является и погрешность кубатурной формулы.

$$\int \varepsilon_\Omega(x) f(x)\,dx - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) = \int \left[\varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right)\right] f(x)\,dx = <\ell(x), f(x)>$$

где $\ell(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right)$ - обобщённая функция которая называется функционалом погрешности кубатурной формулы

$$\int_\Omega f(x)\,dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right)$$

и $\delta(x)$ - функция Дирака, $\varepsilon_\Omega(x)$ - индикатор области Ω.

c_λ и $x^{(\lambda)}$ - коэффициенты и узлы кубатурной формулы.

2. Постановка задачи.

В настоящей работе рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{K_n} f(x)\,dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$,

где K_n - n - мерный единичный куб.

Кубатурной формулы (1) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

и назовём её функционалом погрешности.

Определение. Пространства $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$ - определяется как пространство функций заданных на n - мерном единичном кубе K_n и имеющих обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме

$$\left\| f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x^{m_n}} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

со скалярным произведением

$$\left(f(x),\varphi(x)\right)\overline{L}_2^{(m)}(K_n) = \int_{K_n} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right)\left(\frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x^m} \right) dx,$$

где $\partial x^m = \partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}$ $\qquad m = m_1 + m_2 + \dots m_n,\ dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Как известно [1], что норма функции в пространстве $L_2^{(m)}(K_n)$ - определяется формулой:

$$\left\| f(x)/\overline{L}_2^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^{|\alpha|} f(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \alpha_n!$ и $D^{|\alpha|} f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть в (4) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда отсюда получим, что

$$\int_{K_\alpha} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right)^2 dx = \int_{K_2} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha! \alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx =$$

$$= \int_{K_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx \right]. \quad (5)$$

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (3) принимает следующий вид

$$\left\| f(x)/\overline{L}_2^{(2)}(K_n) \right\|^2 = \int_{K_2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Очевидно, что для правая часть (6) меньше вычислений чем (5) и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\overline{L}_2^{(m)}(K_2)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше чем в пространстве $L_2^{(2)}(K_2)$, так как в норме (6) участвует только смешенные производные.

3. Оценка сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\overline{L}_2^{(m)^*}(K_n)$.

Теперь докажем следующую теорему который является основным результатом.

<u>Теорема.</u> Если для функционала погрешности (2) весовой кубатурной формулы (1) над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$ выполняется условие

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \cdot \ell_{N_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i)/\overline{L}_2^{(m_i)}(0,1) \right\| \le c_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \qquad c_i - \text{константы}, \quad (7)$$

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i)/\overline{L}_2^{(m_i)^*}(0,1) \right\| \le c_i O\left(h^{m_i}\right), \quad c_i - \text{константы}, \left(i = 1, \overline{n}\right), \quad (8)$$

то

$$\left\| \ell_N(x)/\overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le c \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i}}, \qquad c - \text{константа}, \quad (9)$$

или

$$\left\| \ell_N(x) \big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le c \cdot O\left(h^m\right) \tag{10}$$

где $\quad \ell_{N_i}(x_i) = \varepsilon_{K_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta\left(x_i - x_i^{(\lambda_i)}\right)$

$c = \prod_{i=1}^{n} c_i$, $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$ и m_i - произвольны $\left(i = \overline{1,n}\right)$ т.е. $0 \le m_i \le m$

Доказательство ведём методом математической индукции.

Пусть $n = 2$, тогда

$x = (x_1, x_2)$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $\quad m = m_1 + m_2$, $\quad dx = dx_1 dx_2$, $\quad f(x) = f(x_1, x_2)$, $\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \cdot \ell_{N_2}(x_2)$.

Если полагать в (3) $n = 1$ то, получим

$$\left\| f(x_i) \big/ \overline{L}_2^{(m_i)}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\partial^{m_i} f(x_i)}{\partial x_i^{m_i}} \right)^2 dx_i \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} \left| < \ell_N(x_1, x_2), f(x_1 x_2) > \right| = \left| < \ell_{N_2}(x_1), f(x_1, x_2) > \right| \le \\ \left\| \ell_{N_2}(x_2) \big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) > \big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \end{gathered} \tag{11}$$

Вычислим следующую норму:

$$\left\| < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1.x_2) > \big/ L_2^{(m_2)}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) > \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| < \ell_{N_1}(x_1), \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) > \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}(x_1) \big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \big/ \overline{L}_2^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) \big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1, x_2) \right]^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) \big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) \big/ \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \text{ где } x = (x_1, x_2) \text{ и } m = m_1 + m_2. \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (12) получим

$$\begin{gathered} \left| < \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) > \right| \le \left\| \ell_{N_2}(x_2) \big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot \\ \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) \big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) \big/ \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \end{gathered} \tag{13}$$

Имея в виду (3) из (13) получим

$$\left\| \ell_N(x) \big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) \big/ \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) \big/ \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\|, \tag{14}$$

Учитывая (7) из (14) имеем

$$\left\| \ell_N(x) \big/ \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_3 O\left(h^{m_1}\right) \cdot O\left(h^{m_2}\right), \qquad (15)$$

где $d_3 = d_1 \cdot d_2$

При $n = k$ имеем [6]

$$\left| < \ell_N(x), f(x) > \right| = \left| < \ell_N(x_1, x_2, ..., x_k), f(x_1, x_2, ..., x_n) > \right| =$$
$$\left| < \ell_{N_k}(x_k), < \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), ... < \ell_{N_2}(x_2), < \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, ..., x_k) >, ..., > \right| \le$$
$$\le \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) / \overline{L}_2^{(m_{k-1})^*}(0,1) \right\| ...$$
$$\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, ..., x_k) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \le$$
$$\le \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| ... \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(x_1) \right\| . \left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_k) \right\| .$$

(16)

Из (16) учитывая (3) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| ... \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \qquad (17)$$

Тогда имея в виду (7) из (17) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_k^{m_k}} \qquad (18)$$

или учитывая (8) из (18) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) ... O\left(h^{m_k}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k} d_i$$

Используя из справедливость утверждения теорема при $n = k$ докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1$.

Таким образом, пусть $n = k + 1$, тогда учитывая (3) из (17) имеем

$$\left| < \ell_{N_{k+1}}(x_1, x_2, ..., x_{k+1}), f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) > \right| =$$
$$= \left| < \ell_{N_1}(x_1), < \ell_{N_2}(x_2), <, ... < \ell_{N_k}(x_k), < \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) > ... > \right| \le$$
$$\le \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| ... \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot$$
$$\left\| < \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) > / \overline{L}_2^{(m_{k+1})}(0,1) \right\| \qquad (19)$$

Имея в виду (3) и (17) из (19) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| ...$$
$$\cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / \overline{L}_2^{(m_{k+1})^*}(0,1) \right\|, \qquad (20)$$

Используя (7) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_{k+1}^{m_{k+1}}}, \qquad (21)$$

или учитывая (15) и (21) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) ... O\left(h^{m_{k+1}}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i .$$

В заключение отметим, что таким образом получим неравенство (9) и (10),

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} ... N_n^{m_n}}, \qquad d - \text{константа}. \qquad (22)$$

Или учитывая (8) из (22) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_n}\right)$$

(23)

где $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Так как $O\left(h^{m_1}\right) \dots O\left(h^{m_n}\right) = O\left(h^{m_1+m_2+\dots+m_n}\right) = O\left(h^m\right)$, то из (23) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^m\right), \qquad d - \text{константа}, \tag{24}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\overline{L}_2^{(m)^*}(K_n)$.

Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности кубатурной формулы (1) над фактор пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)}(K_n)$ и в результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \to \infty$, но хотя норма функции определена разными, это подтверждается неравенством (24).

Для иллюстрации берём конкретный один пример при $n = 2$.

Пусть

$$f(x_1, x_2) = e^{ax_1}\left(\frac{1}{2} - x_2^2\right)^{3/2}$$

Очевидно, что производные

$\dfrac{\partial^{m-1} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{m-1}}$ и $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ непрерывны K_2, но $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ имеет особенность на K_2. Поэтому из условия $m = m_1 + m_2$ видно, что

$m_1 = m - 1$ и $m_2 = 1$, так как $m - 1 + 1 = m$.

Отсюда следует, что $f(x_1, x_2) \in \overline{L}_2^{(m)}(K_2)$, при $m_1 = m - 1$, $m_2 = 1$ и $f(x_1, x_2) \overline{\in} L_2^{(m)}(K_2)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. – 808с.*
2. *Салихов Г.Н., Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985 – 104 с.*
3. *Шарипов Т.Х. Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования кандидатская диссертация. Ташкент 1975 – 102с.*
4. *Шодиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Докторская диссертация. Ташкент 202. - 218с.*
5. *Бахвалов Н.С. Численные методы, т.1,М, Наука, 1973.*
6. *Соболев С.Л. Некоторые применения функционального в математической физике, М., Наука, 1988 – 333с.*
7. *Jalolov O.I. "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 (2021), https://doi.org/10.1063/5.0057015*
8. *Жалолов О.И., Хаятов Х.У. Алгоритм построения оптимальной интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики № 1(46) 2023.*
9. *Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О. Практичные асимптотические оптимальные кубатурные формулы в пространстве Соболева для n - мерной единичной сферы. Проблемы вычислительной и прикладной математики №3/1(50) 2023.*
10. *Jalolov O.I. Weighted optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space L_P(m)(Kn). AIP Conference Proceedings 2781, 020066 (2023) https://doi.org/10.1063/5.0144837*

"SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY"

The journal was composed in the Editorial and Publishing Department of Bukhara State University.

Editorial address:
Bukhara, 200117
Bukhara State University, main building, 2nd floor, room 219.
Editorial and Publishing Department.
https://buxdu.uz/32-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/131/131-buxoro-davlat-universiteti-ilmiy-axboroti/
e-mail:
nashriyot_buxdu@buxdu.uz

Printing was permitted 30.12.2023 y. Paper format 60x84,1/8. Printed in express printing method. Conditional printing plate – 35,30. Circulation 70. Order № 30. Price is negotiable.
Published in the printing house "BUKHARAHAMD PRINT" LLC
Address: Bukhara, K.Murtazayev street, 344