№ 6(45) 2022 ISSN 2181-8460

HISOBLASH VA AMALIY MATEMATIKA MUAMMOLARI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

PROBLEMS OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS

RAQAMLI TEXNOLOGIYALAR VA
SUN'IY INTELLEKTNI RIVOJLANTIRISH
ILMIY-TADQIQOT INSTITUTI

ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

№ 6(45) 2022

Журнал основан в 2015 году.
Издается 6 раз в год.

Учредитель:
Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта.

Журнал зарегистрирован в Агентстве информации и массовых коммуникаций при Администрации Президента Республики Узбекистан.
Регистрационное свидетельство №0856 от 5 августа 2015 года.

ISSN 2181-8460, eISSN 2181-046X

Адрес редакции:
100125, г. Ташкент, м-в. Буз-2, 17А.
Тел.: +(99871) 231-92-45.
E-mail: info@pvpm.uz.
Сайт: www.pvpm.uz.

Дизайн и компьютерная вёрстка:
Шарипов Х.Д.

Отпечатано в типографии НИИ РЦТИИ.
Подписано в печать 28.12.2022 г.
Формат 60x84 1/8. Заказ №6. Тираж 100 экз.

Содержание

Аннакулова Г.К., Саидов С.А.
Устойчивость двухпозиционной гидравлической системы с учетом сухого и вязкого трений на стенках гидроцилиндра . . . 8

Икрамов А.М., Одилов Ж.К.
Вычислительный алгоритм определения напряженного состояния двумерных стержневых металлоконструкций . . . 18

Назирова Э.Ш., Неъматов А., Шукурова М.
Численное моделирование задачи двухфазной фильтрации в системе «нефть-газ» . . . 26

Хасанов Ж.О.
Математическое моделирование описанных процессов по кросс-диффузионной источником и переменной плотностью . . . 39

Равшанов Н., Турсунов У.
Математическое моделирование процесса ионообменной экстракции суспензии с учетом эффекта бародиффузии . . . 48

Курбонов Н.М.
Численное моделирование задачи фильтрации газа в пористой среде при наличии массообмена сквозь границы . . . 68

Шафиев Т.Р., Собирова Д.О.
Нелинейная математическая модель и численный алгоритм для мониторинга и прогнозирования концентрации вредных веществ в атмосфере . . . 82

Нормуродов Ч.Б., Турсунова Б.А.
Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом . . . 95

Болтаев А.К.
Об одной дискретной системе типа Винеры-Хопфа оптимальной квадратуроной формулы . . . 101

Жалолов И.И.
Алгоритм построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ . . . 114

Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.
Нижняя оценка нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространстве $H_P^{\mu}(\Omega)$ . . . 132

Равшанов Н., Пекось О.А., Абдуллаева С.Я., Ахмедов Д.Д.
Мобильные технологии и методы искусственного интеллекта в кардиореабилитации: обзор актуальных задач . . . 148

Раббимов И.М.
Алгоритм построения ансамбля деревьев решений для сентиментального анализа текста . . . 164

УДК 518.517.392

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $H_P^\mu(\Omega)$

Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.
o_jalolov@mail.ru
Бухарский государственный университет,
200114, Узбекистан, Бухара, улица М. Икбол, 11.

С.Л.Соболев дал алгоритм построения кубатурных формул, названных им формулами с регулярным пограничным слоем. Он доказал асимптотическую оптимальность этих формул и оценил сверху с выделением главного члена норму функционала ошибки в пространстве $U_2^m(\Omega)$. Аналогичные утверждения для пространств $H_2^\mu(\Omega)$ были доказаны В.Д.Чарушниковым и утверждена справедливость подобных результатов для пространств $H_P^\mu(\Omega)$ Т.Х.Шариповым. М.Д.Рамазоновым установлена оптимальность формулы прямоугольников среди кубатурных формул на заданной решетке, заданных в одной из эквивалентных нормировок над пространством периодических функций, компактно вложенном в пространство непрерывных функций, и с нормой, инвариантной по сдвигам аргументов функций. Целью настоящей работы является получит нижнюю оценку (т.е. оценку снизу) для любого функционала погрешности решетчатых кубатурных формул для пространств $H_P^\mu(\Omega)$.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство, норма, функционал погрешности, оптимальная кубатурная формула, экстремальная функция.

Цитирование: *Жалолов О.И., Исомиддинов Б.О.* Нижняя оценка нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространстве $H_P^\mu(\Omega)$ // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2022. – №6(45). – С. 132-147.

1 Введение

С.Л.Соболев в работах [1,2] дал алгоритм построения кубатурных формул, названных им формулами с регулярным пограничным слоем и оценил сверху с выделением главного члена норму функционала ошибки в пространстве $U_2^m(\Omega)$. Этот же результат был получен в пространствах $H_2^\mu(\Omega)$ в работах [3,4] и в статье [5] утверждена справедливость подобных результатов для пространств $H_P^\mu(\Omega)$. При оценке нормы функционала ошибки таких формул авторы пользовались явным видом экстремальной функции периодического функционала $\ell_\infty(x) = 1 - h^n \sum\limits_\gamma \delta(x - hH_\gamma)$ в этих пространствах и свойством гильбертовости таких пространств. В случае Банаховых пространств исследование поведения таких формул представляет очень трудную задачу. В работе[6] пойдет речь о наилучшем приближении интеграла по периоду от периодических функций нескольких переменных при помощи конечной суммы – линейной комбинации значений функции в точках заданной правильной решетки.

1.1 Обозначения и предварительные сведения

$E_n - n-$ мерное вещественное Евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, ... $\alpha, \beta, \gamma, ...$ точки с целочисленными координатами

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i = 0, \pm1, \pm2, ..., \quad (i = 1, 2, ...n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

Скалярное произведение n- мерных векторов x и y обозначается $x \cdot y$:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

C обозначает пространство непрерывных функции с нормой

$$\|f(x)|C\| = \max_x \, |f(x)| \, .$$

F- оператор преобразование Фурье,

$$F[f(x)](\xi) = \int\limits_{E_n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int\limits_{E_n} f(x_1, ..., x_n) e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + ... + x_n \xi_n)} dx_1 ... dx_n.$$

$$F^{-1}[f(x)](\xi) = \int\limits_{E_n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Для абсолютно интегрируемых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ свертка определяется;

$$f(x) * \varphi(x) = \int\limits_{E_n} f(x-y) \varphi(y) dy.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться основными фактами из теории обобщенных функции[7].
В качестве пространства основных функций возьмем пространство S, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций убивающих на бесконечность в месте со всеми производными быстрее любой отрицательной степени $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пространства обобщенных функций над S, как обычно обозначим через S' [8]. Действие обобщенной функции $\ell(x)$ на основную функцию $f(x)$ обозначается $< \ell(x), f(x) >$.

Пусть H – матрица порядка $n \times n$, $det H = 1$. Обычную функцию $f(x)$, определенную в E_n мы называем периодической функцией с основной матрицей периодов $H(\overset{\uparrow}{h}^{(1)}, ...\overset{\uparrow}{h}^{(n)})$ (H-периодической), если для любого $\beta \in Z$

$$f(x + H\beta) = f(x),$$

где каждый период $\overset{\uparrow}{h}^{(k)}$, $k = 1, 2, ..., n$ есть вектор столбец:

$$\overset{\uparrow}{h}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overset{\uparrow}{h}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \overset{\uparrow}{h}_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим пространство точек E_n; отождествляем в нем все точки отличающиеся на вектора $H\beta$, $\beta \in Z$. Z – множество всех векторов с целыми координатами. Полученное многообразие эквивалентных точек представляет собой n- мерный тор θ. Этот тор мы назовем фундаментальной областью для периодических функций.

При помощи нескольких разрезов такой тор может бить превращен в односвязную область и притом разными способами. Один из способов приводит к параллелепипеду. Иногда мы будем называть фундаментальной областью в E_n любой область, отображаемую однозначно на весь тор. Обозначив через $\varepsilon_{\Omega_0}(x)$ характеристическую функцию точек областей Ω_0, мы будем записать необходимое и достаточное условия того, что Ω_0 будет фундаментальной областью в E_n в виде:

$$\sum_{\beta\in Z}\varepsilon_{\Omega_0}(x+H\beta)=1.$$

Таким образом, между матрицей H и областью Ω_0 установлена связь, вообще говоря, неоднозначная.
Здесь из таких фундаментальных областей определенных матрицей H мы будем рассматривать только параллелепипед.
Если $u\,(x)$– обобщенная или обычная H – периодическая, а $\varphi(x)\in\tilde{C}^{\infty},\ \ H$ – периодическая функция, то

$$< u(x),\varphi(x) > \underset{\Omega_0}{\overset{def}{=}} \int\limits_{\Omega_0} u(x)\varphi(x)dx.$$

Обобщенную функцию $u\,(x)$ мы будем называть периодической с основной матрицей периодов H, если равенство

$$< u(x),\varphi(x) >=< u(x),\varphi(x-H\beta) >$$

выполняется для любой функции $\varphi(x)\in S$.
Над обобщенными периодическими функциями определим следующие основные понятия.
Рядом Фурье обобщенной или обычной H – периодической функции мы будем называть ряд вида

$$f(x)=\sum_{\gamma\in Z}\hat{f}[\gamma]\,e^{2\pi i(\gamma,H^{-1}x)}.$$

Коэффициенты Фурье $\hat{f}[\gamma]$ вычисляется по формуле

$$\hat{f}[\gamma]=< f(x),e^{-2\pi i(\gamma,H^{-1}x)} > \underset{\Omega_0}{\overset{def}{=}} \int\limits_{\Omega_0} f(x)\,e^{-2\pi i(\gamma,H^{-1}x)}$$

Скалярное произведение двух обычных периодических функций определяется как:

$$(u(x),f(x))=\int\limits_{\Omega_0} u(x)f(x)dx$$

(если последний имеет смысл).
Формула Парсеваля выглядит

$$(u(x),f(x))=\sum_{\gamma}\hat{u}[\gamma]\cdot\overline{\hat{f}[\gamma]}.$$

Здесь $\overline{\hat{f}[\gamma]}$ - комплексно сопряженное к $\hat{f}[\gamma]$
Свертка для обычных периодических функции определяется следующим образом

$$u(x)*f(x)=\int\limits_{\Omega_0} u(x-y)f(y)dy=\int\limits_{\Omega_0} u(y)f(x-y)dy.$$

Для обобщенных функций свертку определим, как:

$$< u(x) * f(x), \varphi(x) >= \int\limits_{\Omega_0} \int\limits_{\Omega_0} u(z) f(y) \varphi(x - (y + z)) dy dz.$$

1.2 Пространства $\tilde{H}_p^\mu(\Omega_0)$

Пусть $\mu(x)$, непрерывная рост которой не выше степенной. Пространство $\tilde{H}_p^\mu(\Omega_0)$ определим как пространство H – периодических обобщенных функций с нормой

$$\left\| f(x) | \tilde{H}_p^\mu(\Omega_0) \right\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_\gamma \mu(H_\gamma^{-1}) \hat{f}(\gamma) e^{-2\pi i(\gamma, H_x^{-1})} \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

при $1 \leqslant p < \infty$

$$\left\| f(x) | \tilde{H}_p^\mu(\Omega_0) \right\| = \sup_\gamma \left\{ \left| \hat{f}(\gamma) \right| \mu(H_\gamma^{-1}) \right\}$$

при $p = \infty$.
Очевидно, что пространство $\tilde{H}_p^\mu(\Omega_0)$ является изометрически изоморфным пространству $L_p(\Omega_0)$.

1.3 Весовые функции

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $B(n, p)$ (см. [9]) обозначим класс функций $\mu(\xi) = \mu(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in C^\infty$ таких, что при некоторой постоянной $m = m(\mu)$

$$\mu_p^p \left(\mu(\xi + n) / \mu(\xi) \right) \leqslant \eta \left(1 + |\eta|^2 \right)^{m/2}$$

для любого $n \in E_n$ и тоже самое справедливо для $\mu^{-1}(\xi)$. Из определения следует, что функции $\mu(\xi)$, $\mu^{-1}(\xi)$ суть мультипликаторы в пространстве S, т.е. $\mu(\xi) \cdot \varphi(\xi) \in S$ как только $\varphi(\xi) \in S$; поскольку $\mu(\xi) \in C^\infty$ и $\mu^{-1}(\xi), \mu(\xi) \leqslant (1 + |\xi|^2)^{m/2}$, которое следует из того, что $\mu_p^p \in L_\infty$.

1.4 Пространство $H_p^\mu(E_n)$

Мы скажем, что обобщенная функция $u(x) \in S'$ принадлежит пространству $H_p^\mu(E_n)$, если

$$\nu(x) = F^{-1} \left\{ \mu(\xi) F[u(x)](\xi) \right\}(x) \in L_p(E_n).$$

Введя норму

$$\left\| u(x) | H_p^\mu(E_n) \right\| = \left\| \nu(x) | L_p(E_n) \right\|, \ u(x) \in H_p^\mu(E_n)$$

мы получим пространство изометрически изоморфное пространству $L_p(E_n)$.

1.5 Пространство $H_p^\mu(\Omega)$

Пусть Ω - ограниченная область с достаточно хорошей границей $\partial\Omega$ в E_n. Через $\overset{o}{H}{}_p^\mu(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\left\| \cdot | H_p^\mu(E_n) \right\|$ и введем пространство

$$H_p^\mu(\Omega) = H_p^\mu(E_n) / \overset{o}{H}{}_p^\mu(E_n \backslash \overline{\Omega})$$

с нормой

$$\left\| u(x) | H_p^\mu(\Omega) \right\| = \inf \left\| u^c(x) | H_p^\mu(E_n) \right\|, \ u(x) \in H_p^\mu(\Omega),$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям элемента $u(x) \in H_p^\mu(\Omega)$ до элемента $u^c(x) \in H_p^\mu(E_n)$. Тогда $H_p^\mu(\Omega)$ становится Банаховым пространством.

2 Постановка задачи

2.1 Кубатурные формулы

Кубатурными формулами называют формулы вида:

$$\int_\Omega f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda f(x^{(\lambda)}). \tag{1}$$

Здесь Ω ограниченная область с достаточно хорошей границей $\partial\Omega$, C_λ- коэффициенты (веса), $x^{(\lambda)}$ - узлы, N – число узлов.
Здесь мы рассмотрим кубатурные формулы с узлами расположенными на решетке: $\{q_0 + A\gamma;\ \gamma \in Z\}$, где q_0 фиксированной вектор и γ пробегает все Z – множество целочисленных векторов, обозначает матрицу $n \times n$, $\det A \neq 0$.
Кубатурной формуле (1) поставим в соответствие функционал

$$\ell(f) = \int_\Omega f(x)dx - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda f(x^{(\lambda)}), \tag{2}$$

так называемый функционал погрешности.
Этому функционалу соответствует обобщенная функция

$$\ell(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} C_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}), \tag{3}$$

где $\varepsilon_\Omega(x)$ - характеристическая функция области Ω, $\delta(x - x^{(\lambda)})$ - дельта функция сосредоточенная в точке $x^{(\lambda)}$.

2.2 Кубатурные формулы в пространстве периодических функций $\tilde{H}_p^\mu(\Omega_0)$

Известно, что оптимальная формула в этих пространствах имеет вид: $\int\limits_{\Omega_0} f(x)dx \approx \sum\limits_{\substack{0\leqslant\lambda_i<N_i \\ i=1,2,..,n}} C_{\lambda_i} f(h\lambda_i)$, где Ω_0- единичный куб, $h > 0$, малый параметр, $N = h^{-n}$ т.е. $N = \frac{mes\Omega_0}{h^n}$, $C_\lambda^u = C_0$ - постоянны. Найдены их выражения, которые здесь не приводим. Напомним, что формула называется оптимальной, когда норма функционала погрешности наименьшее:

$$\inf_{C_\lambda} \left\| \ell(x) | \tilde{H}_p^\mu(\Omega_0) \right\|.$$

Норма функционала погрешности оптимальной кубатурной формулы имеет вида:

$$\left\| \overset{0}{\ell}(x) | \tilde{H}_p^{\mu *}(\Omega_0) \right\| = \left\{ \int_{\Omega_0} \left| \frac{1}{\mu(0)} - C_0 \sum_\gamma \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
Известно также, что формула прямоугольников

$$\int\limits_{\Omega_0} f(x)dx \approx h^n \sum_{\substack{0\leqslant\lambda_i<N_i \\ i=1,2,..,n}} f(h\lambda_i) \tag{5}$$

является асимптотически оптимальной, т.е. отношение нормы кубатурной формулы прямоугольников к норме оптимальной кубатурной формулы стремиться к 1 когда $h\to 0$.
Норма функционала погрешности кубатурной формулы прямоугольников имеет вид:

$$\left\|\ell(x)|\tilde{H}_p^{\mu *}(\Omega_0)\ \right\| = \left\{\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{6}$$

Нас в дальнейшем интересует экстремальная функция функционала погрешности кубатурной формулы прямоугольников в пространстве $\tilde{H}_p^{\mu}(\Omega_0)$, т.е. функция на которой достигается наибольше значение функционала погрешности. Экстремальная функция функционала погрешности кубатурной формулы прямоугольников $\ell_{np}(x)$ имеет вид:

$$u_\infty(x) = \sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} * \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^{q-1} sign\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \tag{7}$$

Эта функция является h- периодической по каждой переменной. Функция

$$u(x) = \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^{q-1} sign\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \tag{8}$$

также является h- периодической по каждой переменной (hE , где E – единичная матрица) или $H=hE$ – периодической.
В работе [10] была получена верхняя оценка нормы функционала погрешности с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем в пространствах $H_p^{\mu}(\Omega)$. Основная задача настоящей работы является, получит нижнюю оценку (т.е. оценку снизу) для любого функционала погрешности решетчатых кубатурных формул для пространств $H_p^{\mu}(\Omega)$:

$$(mes\Omega)^{\frac{1}{q}}\left\{\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}[1+O(1)] \leqslant \left\|\ell(x)|\tilde{H}_p^{\mu *}(\Omega)\ \right\| \tag{9}$$

Поскольку $\left\|\ell_{\text{опт}}(x)|H_p^{\mu *}(\Omega)\ \right\| \leqslant \left\|\ell(x)|H_p^{\mu *}(\Omega)\ \right\|$ то достаточно показать оценку снизу для функционала оптимальной кубатурной формулы, т.е. для $\ell_{\text{опт}}(x)$. Функция

$$u(x) = \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^{q-1} \cdot sign\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \tag{10}$$

является экстремальной функцией функционала

$$< \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}, f(x) >_{\Omega_0}, \quad f(x) \in \tilde{L}_p(\Omega_0)$$

Этот функционал принимает значения равные нулю в подпространстве постоянных пространства $\tilde{L}_p(\Omega_0)$ - пространство периодических функций суммируемых с степенью p по кубу. Следовательно он достигает своего наибольшего значения в подпространстве $\tilde{L}_p(\Omega_0)$ т.е. на функции коэффициент $\hat{f}[0]$ которых равен нулю.
Поэтому $u(x)$ имеет вид:

$$u(x) = \sum_{\gamma\neq 0} \hat{u}[\gamma] e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)} \tag{11}$$

где $\hat{u}[\gamma] = \int\limits_{\Omega_0} u(x) e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)} dx$, $\hat{u}\,[0] = 0$ Функцию $u_\infty(x)$, также (как h - периодической) можно представить в виде ряда Фурье:

$$u_\infty(x) = \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\hat{u}[\gamma] \cdot e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}, \ \hat{u}_\infty\,[0] = 0 \tag{12}$$

$u_\infty(x)$ является непрерывной функцией.

3 Нижняя оценка нормы функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в $H_p^\mu(\Omega)$

В работах [5] и [10] была получена верхняя оценка нормы функционала погрешности с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем в пространствах $H_p^\mu(\Omega)$ т.е. обратное неравенство к неравенству для функционала погрешности к.ф. $\ell_{p.n.c}\,(x)$ с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем. В настоящей работе получим оценку снизу для произвольного функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространствах $H_p^\mu(\Omega)$.

Теорема 1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\quad \mu(\xi) \in B_{n,p}^*$ (см. [5] , [10]) $\quad \mu(-\xi) = \mu(\xi)$, тогда для любого функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространствах $H_p^\mu(\Omega)$ справедлива следующая оценка

$$\left\| \ell(x) | H_p^{\mu *}(\Omega) \right\| \geqslant (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} [1 + O(1)]. \tag{13}$$

Доказательство основано на трех леммах.
Поскольку для нормы функционала погрешности оптимальной решетчатой кубатурной формулы справедливо неравенство

$$\left\| \ell_{\text{опт}}(x) | H_p^{\mu *}(\Omega) \right\| \leqslant \left\| \ell(x) | H_p^{\mu *}(\Omega) \right\|$$

то нам достаточно доказать теорему для функционала погрешности оптимальной кубатурной формулы.
Построим функцию, которая позволит нам получит нижнюю оценку. Для простоты, не ограничивая общности в дальнейшем считаем $\mu(0) = 1$.
Для этого рассмотрим функцию

$$\overset{0}{u}(x) = \sum_{\gamma\neq 0} \hat{u}[\gamma] e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)} - C(h) = u(x) - C(h)$$

где $C(h) = \sum\limits_{\gamma\neq 0} \frac{\hat{u}[\gamma]}{\mu(h^{-1}\gamma)}$.

Построим функцию

$$\vartheta(x) = \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{\Omega'}(x)\right],$$

где $\Omega^{'}$ - область совокупность всех кубиков с ребрами длиной h, которые пересекаются с $\overline{\Omega}$. На область Ω положим еще условие: мера погранично слоя толщины кратной h является величиной $O(h)$. Это условие было положено и при получении верхней оценки нормы функционала погрешности с регулярным пограничным слоем.

Оценим норму $\vartheta(x)$ в $H_p^{\mu}(\Omega)$:

$$\left\|\vartheta(x)|H_p^{\mu}(\Omega)\right\| = \left\{\int\limits_{E_n} \left|F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[\vartheta(x)]\right]\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{E_n} \left|F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot F[\upsilon(x) * [\overset{0}{u}(x)\cdot\varepsilon_{\Omega'}(x)]]\right]\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{E_n} \left|F^{-1}\left[\mu(\xi)\cdot\frac{1}{\mu(\xi)}F[\overset{0}{u}(x)\cdot\varepsilon_{\Omega'}(x)]\right]\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{E_n} \left|\overset{0}{u}(x)\cdot\varepsilon_{\Omega'}(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int\limits_{\Omega'} \left|\overset{0}{u}(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{\Omega'} |u(x) - C(h)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int\limits_{\Omega'} |u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_{\Omega'} \left|\left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^{q-1}\cdot sign\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) =$$

$$= \left\{\sum_{\beta\in B}\int\limits_{\Omega_{h,\beta}} \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) =$$

$$= \left\{\sum_{\beta\in B} h^n\int\limits_{\Omega_0} \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) =$$

$$= \left\{\sum_{\beta\in B} h^n\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{\Omega_0} \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) =$$

$$= \left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h))\left\{\int\limits_{\Omega_0} \left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{p}} + |C(h)|\cdot\left(mes\Omega^{'}\right)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)). \tag{14}$$

Здесь B - множество таких β для которых все кубики $\Omega_{h,\beta}$ пересекаются с областью $\overline{\Omega}$: $\Omega_{h,\beta}\bigcap\overline{\Omega}=\varnothing$ и $\Omega_{h,\beta}=\{x: h\beta_k\leqslant x_k<h(\beta_k+1)\}$.
Справедлива следующая
Лемма 1. Имеет место следующее равенство

$$-C(h)=\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx \tag{15}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 1 используем следующие леммы. Действительно, с начало рассмотрим следующую
Лемма 2. Справедливо следующее равенство

$$\upsilon(x)*\overset{0}{u}(x)=\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\hat{u}[\gamma]}{\mu(h^{-1}\gamma)}e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}-C(h) \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x)\in S$, тогда используя равенство Парсеваля и имея ввиду, что $F^{-1}\left[\frac{1}{\mu(\xi)}\delta(\xi-h\gamma)\right]=\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}$ получим

$$\begin{gathered}<\upsilon(x)*\overset{0}{u}(x),\varphi(x)>=<F[\upsilon(x)*\overset{0}{u}(x)](\xi),F[\varphi(x)](\xi)>=\\
=<F[\upsilon(x)](\xi)*F[\overset{0}{u}(x)](\xi),F[\varphi(x)](\xi)>=\\
=<\frac{1}{\mu(\xi)}\cdot\left[\sum_{\gamma\neq 0}\hat{u}(\gamma)F\left[e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}\right]-F[C(h)]\right],\ F[\varphi(x)](\xi)>=\\
=<\frac{1}{\mu(\xi)}\cdot\sum_{\gamma\neq 0}\hat{u}(\gamma)\delta(\xi-h\gamma)-\frac{1}{\mu(\xi)}\cdot C(h)\delta(\xi),\ F[\varphi(x)](\xi)>=\\
=<\sum_{\gamma\neq 0}\frac{1}{\mu(\xi)}\cdot\hat{u}(\gamma)\delta(\xi-h\gamma)-\frac{C(h)}{\mu(\xi)}\cdot\delta(\xi),\ F[\varphi(x)](\xi)>=\\
=<\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\hat{u}(\gamma)}{\mu(h^{-1}\xi)}\cdot e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}-C(h),\ \varphi(x)>\end{gathered} \tag{17}$$

этим доказана лемма 2.
Вводим обозначения

$$u_\infty(x)=\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\hat{u}[\gamma]e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}=\upsilon(x)*u(x)$$

и

$$\overset{0}{u}_\infty(x)=\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\hat{u}[\gamma]e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}-C(h)$$

Функции $u_\infty(x)$ и $\overset{0}{u}_\infty(x)$ является экстремальными функциями для функционала

$$1-h^n\sum_{\gamma}\delta(x-h\gamma). \tag{18}$$

Предварительно докажем следующую лемму
Лемма 3. Для функционала $1-h^n\sum\limits_{\gamma}\delta(x-h\gamma)$ имеет место следующее равенство

$$\left[1-\sum_{\gamma\neq 0}h^n\delta(x-h\gamma)\right]*\upsilon(x)=\sum_{\gamma\neq 0}\frac{e^{2\pi i h^{-1}(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in S$.
Тогда используясь равенством Парсеваля имеем во-первых:

$$< F\left[\sum_\gamma \delta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\right](\xi),\ F[\varphi(x)](\xi) >=< \sum_\gamma \delta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right), \varphi(x) >=$$

$$= h^n < \sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right), \varphi(hy) >=< h^n F\left[\sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right)\right](\xi),\ F[\varphi(hy)](\xi) >=$$

$$= h^n < \sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right), F[\varphi(hy)](\xi) > .$$

Так как

$$F[\varphi(hy)](\xi) = \int\limits_{E_n} \varphi(hy)e^{2\pi i\xi y}dy = h^{-n}\int\limits_{E_n} \varphi(z)e^{2\pi i\xi z h^{-1}}dz = h^{-n}F[\varphi(z)](h^{-1}\xi).$$

то имеем

$$< F\left[\sum_\gamma \delta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\right](\xi),\ F[\varphi(x)](\xi) >= h^n < \sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right), F[\varphi(x)](h^{-1}y) >=$$

$$= h^n < \sum_\gamma \delta\left(\frac{z}{h}-\gamma\right), F[\varphi(x)](z)h^{-n} >=< \sum_\gamma \delta\left(\frac{z}{h}-\gamma\right), F[\varphi(x)](z) >$$

из этого равенства следует, что

$$F\left[\sum_\gamma \delta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)\right](\xi) = \sum_\gamma \delta\left(\frac{\xi}{h}-\gamma\right) \tag{20}$$

Далее имеем

$$< F\left[1-\sum_\gamma h^n\delta\left(x-h\gamma\right)\right](\xi),\ F[\varphi(x)](\xi) >=< 1-h^n\sum_\gamma \delta\left(x-h\gamma\right), \varphi(x) >=$$

$$=< 1-\sum_\gamma \delta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right), \varphi(x) >= h^n < 1-\sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right), \varphi(hy) >=$$

$$= h^n < F\left[1-\sum_\gamma \delta\left(y-\gamma\right)\right](\xi),\ F[\varphi(hy)](\xi) >= h^n < \delta(\xi)-\sum_\gamma \delta\left(\xi-\gamma\right),\ F[\varphi(hy)](\xi) >=$$

$$= h^n < \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(\xi-\gamma\right),\ F[\varphi(hy)](\xi) >= h^n < \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(\xi-\gamma\right),\ h^{-n}F[\varphi(z)](h^{-1}\xi) >=$$

$$=< \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(\xi-\gamma\right),\ F[\varphi(z)](h^{-1}\xi) >= h^n < \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(x-h\gamma\right),\ F[\varphi(z)](x) >=$$

$$=< \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(x-h^{-1}\gamma\right),\ h^{-n}F[\varphi(z)](x) > .$$

Отсюда следует, что

$$F\left[1-\sum_\gamma h^n\delta\left(x-h\gamma\right)\right](\xi) = \sum_{\gamma\neq 0} \delta\left(x-h^{-1}\gamma\right) \tag{21}$$

Используя (21) получим

$$
\begin{gathered}
<\left[1-\sum_{\gamma} h^{n} \delta(x-h \gamma)\right] * \upsilon(x), \varphi(x)>= \\
=<F\left[1-\sum_{\gamma} h^{n} \delta(x-h \gamma)\right](\xi) \cdot F[\upsilon(x)](\xi), F[\varphi(x)](\xi)>= \\
=<\sum_{\gamma \neq 0} \delta\left(\xi-h^{-1} \gamma\right) \cdot \frac{1}{\mu(\xi)}, F[\varphi(x)](\xi)>= \\
=<\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}, \varphi(x)>
\end{gathered} \tag{22}
$$

Из этого равенства следует доказательство леммы 3.

Так как функции $u_{\infty}(x)$ и $\overset{0}{u}_{\infty}(x)$ являются экстремальными функциями для функционала $1-h^{n} \sum\limits_{\gamma} \delta(x-h \gamma)$, то используя лемму 3 имеем

$$
\begin{gathered}
<1-h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma), u_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}}=<1-\sum_{\gamma} h^{n} \delta(x-h \gamma), \upsilon(x) * u(x)>_{\Omega_{0}}= \\
=<\left[1-\sum_{\gamma \neq 0} h^{n} \delta(x-h \gamma)\right] * \upsilon(x), u(x)>_{\Omega_{0}}=<\left[\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}\right], u(x)>_{\Omega_{0}}= \\
=<\left[\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}\right],\left|\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}\right|^{q-1} sign \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}>_{\Omega_{0}}= \\
\int_{\Omega_{0}}\left|\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i h^{-1}(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}\right|^{q} d x .
\end{gathered} \tag{23}
$$

Равенство (23) доказывает, что

$$
\left\|1-h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma) | \tilde{H}_{p}^{\mu *}\left(\Omega_{0}\right)\right\|^{q}=\int_{\Omega_{0}}\left|\sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2 \pi i(\gamma, x)}}{\mu\left(h^{-1} \gamma\right)}\right|^{q} d x \tag{24}
$$

Теперь докажем другое равенство:

$$
\begin{gathered}
<1-h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma), \overset{0}{u}_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}}= \\
<1, \overset{0}{u}_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}}-<h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma), \overset{0}{u}_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}}= \\
=\int_{\Omega_{0}} \overset{0}{u}_{\infty}(x) d x=-C(h) .
\end{gathered} \tag{25}
$$

Здесь мы учли, что $\overset{0}{u}_{\infty}(h \gamma)=0$ и $\int\limits_{\Omega_{0}} u_{\infty}(x) d x=0$

Но учитывая равенство

$$
<1-h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma), \overset{0}{u}_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}}=<1-h^{n} \sum_{\gamma} \delta(x-h \gamma), u_{\infty}(x)>_{\Omega_{0}} \tag{26}
$$

имеем

$$-C(h) = \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h\gamma)} \right|^q dx.$$

Из лемм 2 и 3 следует доказательство леммы 1.
Из (14) и (15) следует:

$$\left\| \vartheta(x)/H_p^{\mu}(\Omega) \right\| = (mes\ \Omega)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+(mes\ \Omega)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx =$$

$$= (mes\ \Omega)^{\frac{1}{p}}(1+O(h)) \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left(1 + \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \right) =$$

$$= (mes\ \Omega)^{\frac{1}{p}}(1+O(1)) \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{27}$$

Здесь мы имели ввиду, что

$$\left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left(1\right).$$

Далее, мы покажем, что

$$< \ell_{\text{опт}}(x), \vartheta(x) >= (mes\ \Omega)^{\frac{1}{p}}(1+O(1)) \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma \neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \tag{28}$$

Для этого видоизменим $\vartheta(x)$:

$$\vartheta(x) = \upsilon(x) * \vartheta(x) = \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{\Omega'}(x) \right] =$$

$$\upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \left[\varepsilon_{\Omega'}(x) + \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) - \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) \right] \right] =$$

$$= \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{E_n}(x) \right] - \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) \right] =$$

$$= \upsilon(x) \cdot \overset{0}{u}(x) - \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) \right] = \overset{0}{u}_{\infty}(x) - \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) \right]$$

Таким образом

$$< \ell_{\text{опт}}(x),\ \vartheta(x) >=< \ell_{\text{опт}}(x),\ \overset{0}{u}_{\infty}(x) > - < \ell_{\text{опт}}(x),\ \upsilon(x) * \left[\overset{0}{u}(x) \cdot \varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) \right] >=$$

$$=<\varepsilon_\Omega(x)-\sum_{\beta\in B'}\overset{0}{C}_\beta\delta(x-h\beta),\overset{0}{u}_\infty(x)\cdot\varepsilon_{\Omega'}(x)>-<\ell_{\text{опт}}(x),$$

$$\upsilon(x)*\left[\overset{0}{u}(x)\cdot\varepsilon_{E_n/\Omega'}(x)\right]>$$

Поскольку $\overset{0}{u}_\infty(h\beta)=0$, то первое слагаемое

$$<\varepsilon_\Omega(x)-\sum_{\beta\in B'}\overset{0}{C}_\beta\delta(x-h\beta),\ \overset{0}{u}_\infty(x)>=\int_\Omega\overset{0}{u}_\infty(x)=-C(h)\cdot mes\ \Omega$$
$$=mes\Omega\int_{\Omega_0}\left|\sum_{\gamma\neq0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx \tag{29}$$

Покажем, что второе слагаемое:

$$<\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x),\ \overset{0}{u}(x)\varepsilon_{E_n/\Omega'}(x)>=O(-C(h)). \tag{30}$$

Действительно, во-первых

$$<\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x),\ \overset{0}{u}(x)\varepsilon_{E_n/\Omega'}(x)>=\int_{E_n/\Omega'}[\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)][u(x)-C(h)]dx=$$
$$=\int_{E_n/\Omega'}[\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)]u(x)dx-C(h)\int_{E_n/\Omega'}[\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)]dx=$$
$$=\sum_{\beta'\in Z/B}\int_{\Omega_{h,\beta'}}[\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)]u(x)dx-C(h)\sum_{\beta'\in Z/B}\int_{\Omega_{h,\beta'}}[\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)]dx\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\beta'\in Z/B}\left\{\int_{\Omega_{h,\beta}}|\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_{\Omega_{h,\beta}}|u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}+C(h)*$$
$$*\sum_{\beta'\in Z/B}h^{\frac{n}{p}}\left\{\int_{\Omega_{h,\beta}}|\ell_{\text{опт}}(x)*\upsilon(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{31}$$

Из-за h – периодичности $u(x)$ все
$\left\{\int\limits_{\Omega_{h,\beta}}|u(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$ равны между собой и равны $\left\{h^n\int\limits_{\Omega_0}\left|\sum\limits_{\gamma\neq0}\frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)}\right|^q dx\right\}^{\frac{1}{p}}$

Поэтому из (31) имеем

$$< \ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x),\ \overset{0}{u}(x)\varepsilon_{E_n/\Omega'}(x) > \leqslant \left\{ h^n \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\beta'\in Z/B} \left\{ \int\limits_{\Omega_{h,\beta'}} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} + |C(h)|\, h^{\frac{n}{p}} \sum_{\beta'\in Z/B} \left\{ \int\limits_{\Omega_{h,\beta}} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left\{ h^n \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n/\Omega'} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} + \tag{32}$$

$$+ |C(h)|\, h^{\frac{n}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n/\Omega'} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left\{ h^{\frac{n}{p}} \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ |C(h)|\, h^{\frac{n}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n} |\ell_{\text{опт}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ h^{\frac{n}{p}} \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n} |\ell_{\text{p.n.c}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ |C(h)|\, h^{\frac{n}{p}} \left\{ \int\limits_{E_n} |\ell_{\text{p.n.c}}(x) * \upsilon(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \tag{33}$$

$$\left\{ h^{\frac{n}{p}} \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} (1 + O(1)) +$$

$$|C(h)| \left\{ h^{\frac{n}{p}} \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{p}} (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} (1 + O(1)) =$$

$$h^{\frac{n}{p}} (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\} + h^{\frac{n}{p}} |C(h)| (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx =$$

$$= h^{\frac{n}{p}} (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} |C(h)| + h^{\frac{n}{p}} (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} |C(h)|^2 =$$

$$= h^{\frac{n}{p}} |C(h)| (1 + |C(h)|) (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} = O(-|C(h)|).$$

Из (29), (30), (31) и (32) следует доказательство теоремы 1.
Отметим, что в работе [10] для кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем доказана следующая

Теорема 2. если $1 \leqslant p < \infty$, $\mu(\xi) \subset B(n,p)$ то в пространстве $H_p^{\mu}(\Omega)$ норма функционала погрешности кубатурной формулы с регулярным смысле С.Л.Соболева пограничным слоем удовлетворяет неравенству

$$\left\|\ell(x)|H_p^{\mu*}(\Omega)\;\right\| \leqslant (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{exp\,(2\pi i h^{-1}H^{-1}x)}{\mu(\gamma H^{-1})} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} + O(h^{m+1}), \qquad (34)$$

при $h \to 0$. Здесь H - матрица $n \times n$, $|H| = 1$, Ω_0 - фундаментальная область, определяемая матрицей H.

Из доказанной теоремы 1 и результатов [5, 10], т.е. в частности из теоремы 2 следует:

Теорема 3. Если $1 \leqslant p < \infty$, $\quad \mu(\xi) \in B^*_{n,p}$ $\mu(-\xi) = \mu(\xi)$, тогда кубатурная формула с регулярным смысле С.Л.Соболева пограничным слоем является асимптотически оптимальной в пространстве $H_p^{\mu}(\Omega)$.

4 Заключение

В настоящей работе найдена экстремальная функция функционала погрешности кубатурной формулы прямоугольников в пространстве $\tilde{H}_p^{\mu}(\Omega_0)$ и получим оценку снизу для произвольного функционала погрешности решетчатых кубатурных формул в пространствах $H_p^{\mu}(\Omega)$.

$$\left\|\ell(x)\middle|H_p^{\mu*}(\Omega)\right\| \geqslant (mes\Omega)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\Omega_0} \left| \sum_{\gamma\neq 0} \frac{e^{2\pi i(\gamma,x)}}{\mu(h^{-1}\gamma)} \right|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} [1 + O(1)].$$

В теорема 3 доказана кубатурная формула с регулярным смысле Соболева пограничным слоем является асимптотически оптимальной в пространстве $H_p^{\mu}(\Omega)$.

Литература

[1] *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул. ч2, Новосибирск, – 1965.

[2] *Соболев С.Л.* Кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем. ДАНСССР, № 3, – 1965. – С. 587–590.

[3] *Чарушников В.Д.* Асимптотика погрешности кубатурных формул с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем. ДАН СССР, 170, № 5, – 1966. – С. 1032–1034.

[4] *Чарушников В.Д.* Асимптотическая оптимальность кубатурных формул с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем. ДАН СССР, 179, № 2, – 1967. – С. 297–299.

[5] *Шарипов Т.Х.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в пространстве $H_p^{\mu}(\Omega)$. ,Сб. "Вопросы вычислительной и прикладной математики", вып. 14, – 1972. Ташкент.

[6] *Рамазанов М.Д.* Оптимальный функционал ошибки над периодическими функциями из пространства $\tilde{H}_p^{\mu}$. ,Сиб. Матем. Ж., XIII, №1 – 1972.

[7] *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул., ч1, Новосибирск, – 1965.

[8] *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, – 1974. – 808 с.

[9] *Волевич Л.Р.* Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, 20, вып.I, – 1965. – С. 3–74.

[10] *Шарипов Т.Х.* Верхняя оценка норма функционала ошибки кубатурных формул с регулярным в смысле С.Л.Соболева пограничным слоем в пространствах $H_p^{\mu}(\Omega)$. ДАН СССР, №1 – 1972. – С. 51–53.

[11] *Hayotov A.R., Boboev S.S.* Optimal quadrature formulas for compating of Fourier integrals in a Hilbert space. Problems of computational and applied matematics , – 2020, No.4, – P. 73–85.

[12] *Hayotov A.R., Jeon S., Lee Ch.O.* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 372 – 2020. 112713.

[13] *Jalolov O.I.* "Weight optimal order of convergence cubature formulas in sobolev space AIP Conference Proceedings 2365, 020014 – 2021. https://doi.org/10.1063/5.0057015.

Поступила в редакцию 17.11.2022

UDC 518.517.392

LOWER BOUND FOR THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL OF LATTICE CUBATURE FORMULAS IN THE SPACE $H_P^\mu(\Omega)$

Jalolov O.I., Isomiddinov B.O.
o_jalolov@mail.ru
Bukhara State University,
11, M.Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan.

S.L.Sobolev gave an algorithm for constructing cubature formulas, which he called formulas with a regular boundary layer. He proved the asymptotic optimality of these formulas and estimated from above the norm of the error functional in the space $U_2^m(\Omega)$ with separation of the leading term. Similar assertions for the spaces $H_2^\mu(\Omega)$ were proved by V.D.Charushnikov and confirmed the validity of similar results for the spaces $H_P^\mu(\Omega)$ T.Kh.Sharipov. M.D.Ramazonov established the optimality of the rectangle formula among cubature formulas on a given lattice, defined in one of the equivalent normalizations over the space of periodic functions, compactly embedded in the space of continuous functions, and with a norm that is invariant with respect to shifts of function arguments. The purpose of this work is; obtains a lower bound (that is, a lower bound) for any error functional of lattice cubature formulas for the spaces $H_P^\mu(\Omega)$.

Keywords: generalized function, space, norm, error functional, optimal cubature formula, extremal function.

Citation: Jalolov O.I., Isomiddinov B.O. 2022. Lower bound for the norm of the error functional of lattice cubature formulas in the space $H_P^\mu(\Omega)$. *Problems of Computational and Applied Mathematics.* 6(45): 132-147.