

О.И. ЖАЛОЛОВ, Б.О. ИСОМИДДИНОВ

**О ПОСТРОЕНИИ ПРАКТИЧНО-АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ
ВЕСОВЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ
С.Л. СОБОЛЕВА $\bar{L}_2^{(m)}(S_n)$**

Аннотация. При решении многих вопросов в теории приближенного интегрирования и дифференциальных уравнений именно правильный выбор пространств является залогом успеха. Очень ярко подобранный подход был продемонстрирован в известных работах С.Л. Соболева по полигармоническому уравнению. С.Л. Соболев поставил и решил вариационным методом первую краевую задачу для уравнения $\Delta^\ell u = f$ с граничными условиями на поверхностях различных размерностей.

Проблемы оптимизации формул приближенного интегрирования заключаются в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах и большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева.

До сих пор мы рассматривали кубатурные формулы, при помощи которых приближенно вычисляется определенный интеграл от функции, когда значения этой функции в отдельных точках узлов кубатурной формулы неизвестны. Но возможны более общие кубатурные формулы, в которые входят как значения функции, так и значения ее производных того или иного порядка.

Если нам известны не только значения функции в некоторых точках n -мерной единичной сферы, но и значения ее производных того или иного порядка, то естественно, что при правильном использовании всех этих данных, мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции.

В настоящей работе рассматриваются кубатурные формулы, которые требуют особого внимания к построению наиболее экономных формул; по выражению Н.С. Бахвалова такие формулы называются практичными.

Ключевые слова: обобщенная функция, пространство, норма, функционал погрешности, интерполяционная формула, экстремальная функция.

УДК: 517.518.392

DOI: 10.26907/0021-3446-2025-4-21-31

ВВЕДЕНИЕ

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближенного интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах (например, [1]–[22]).

В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определенного пространства. Многие из них рассмотрены в пространстве Соболева [1].

Многомерные кубатурные формулы отличаются от одномерных двумя особенностями:

Поступила в редакцию 12.03.2024, после доработки 12.03.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

1) бесконечно разнообразны формы многомерных областей интегрирования;
 2) быстро растет число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства.
 Проблема 2) требует особого внимания к построению наиболее экономных формул.

В настоящей работе рассматриваются формулы именно с учетом этого требования. Как известно [23], по выражению Н.С. Бахвалова такие формулы называются “практичными формулами”.

Разработку алгоритмов и построение кубатурных формул для некоторых многогранников по предложенному способу выполнили Л.В. Войтишек и Н.И. Блинов [6].

В работе Х.М. Шадиметов, Н.Х. Маматова [24] вариационным методом в пространстве Соболева построены составные решетчатые оптимальные кубатурные формулы. В работе [25] этих же авторов вычисляется точная верхняя оценка погрешности интерполяционной формулы в пространстве Соболева. Доказываются существование и единственность оптимальной интерполяционной формулы, которая дает наименьшую погрешность. Приводится алгоритм нахождения коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы. Реализовав этот алгоритм, находятся оптимальные коэффициенты.

Пусть функции $f(\theta)$, заданные на единичной сфере S , принадлежат некоторому банаховому пространству B , вложенному в пространство $C(S)$ непрерывных функций на S .

При интегрировании функций по сфере вместо задачи о вычислении интеграла от данной удобно рассматривать задачу о вычислении интеграла от функции со средним значением по сфере, равным нулю.

Поскольку любая суммируемая функция на сфере представима в виде суммы постоянной функции, равной ее среднему значению по сфере, и функции со средним значением, равным нулю, то указанные выше две задачи эквивалентны, так как рассматриваемые нами кубатурные формулы константу интегрируют точно.

Если некоторая функция $f(\theta)$ задана на поверхности единичной сферы S , то будем считать ее продолженной на все пространство R^n (за исключением нуля и бесконечности) и на сферический слой $S_\delta = \{1 - \delta \leq r \leq \delta\}$ так, что она остается постоянной на лучах, выходящих из центра сферы.

Продолженную функцию обозначим через $\bar{f}(x)$ и введем обозначения

$$D^\alpha f(\theta) = \frac{\partial^{|\alpha|} \bar{f}(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (1)$$

где производные берутся по декартовым координатам точки $\theta \in S$ в $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Через $L_2^{(m)}(S)$ обозначим пространство функций, заданных на S и продолженных так, как только что было указано, и для которых норма определяется равенством

$$\|f(\theta)|L_2^{(m)}(S)\| = \left\{ \int_{S_\delta} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(\theta))^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В настоящей работе рассматриваются формулы, названные практично-асимптотически оптимальными весовыми кубатурными формулами типа Эрмита, которые относительно нормы функции являются наиболее экономными для использования формулами в пространстве С.Л. Соболева.

Работы многих авторов (например, [9]–[11]) посвящены квадратурным и кубатурным формулам, в которые входят значения производных интегрируемых функций. Если известны не только значения функции $f(x)$ в узлах кубатурных формул, но и значения ее производных некоторых порядков, то можно ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функций.

Рассмотрим погрешность весовой кубатурной формулы типа Эрмита

$$\int_S p(\theta) f(\theta) d\theta \approx \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \quad (3)$$

на функциях из B :

$$\ell_N^{(\alpha)}[f] = \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle = \int_S p(\theta) f(\theta) d\theta - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) = \int_{R^n} \ell_N^{(\alpha)}(x) f(x) dx, \quad (4)$$

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \delta_S(1-r)p(x) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - \theta^{(\lambda)}), \quad (5)$$

$\delta_S(1-r), \delta(x - \theta^{(\lambda)})$ — дельта-функции Дирака, $C_\lambda^{(\alpha)}$ и $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ — коэффициенты и узлы кубатурной формулы (1), $\|\theta\| = 1$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$,

$$\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \hat{p}_{0,0}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{и} \quad p(\theta) \in L(S), \quad 0 \leq t \leq m, \quad \hat{p}_{0,0} -$$

нулевой коэффициент Фурье $p(\theta)$.

Погрешность (4) кубатурной формулы (3), очевидно, является функционалом, заданным на B в силу предположения вложенности $B \rightarrow C(S)$ [1], этот функционал $\ell_N^{(\alpha)}$ (5) будет непрерывным. Поэтому он и его норма определяются по формуле [2]

$$\|\ell_N^{(\alpha)}|B^*\| = \sup_{f \in B, f \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f|B\|}.$$

Функция $f_0 \in B$, для которой имеет место равенство

$$|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle| = \|\ell_N^{(\alpha)}|B^*\| \cdot \|f_0|B\|,$$

называется *экстремальной*.

Таким образом, задача оценки погрешности весовой кубатурной формулы типа Эрмита на функциях некоторого пространства B равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряженном к B пространстве B^* или, что то же самое, нахождению экстремальной функции для данной весовой кубатурной формулы типа Эрмита. Для решения этой задачи в качестве B возьмем пространство $L_2^m(S)$.

Определение 1. Пространство $L_2^m(S)$ определяется как пространство функций, заданных на S и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка m , норма которых определяется равенством

$$\|f|L_2^m(S)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \quad (6)$$

где $a_{k,\ell} = \int_S f(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta$. Здесь $Y_{k,\ell}(\theta)$ — сферическая гармоника порядка k вида ℓ , индекс ℓ получен в результате нумерации сферических функций одного и того же порядка k и меняется в пределах $1 \leq \ell \leq \sigma(n, k)$, $\sigma(n, k) = (2k + n - 2) \frac{(k + n - 3)!}{(k - 2)!k!}$ — число линейно независимых сферических гармоник порядка k , предположим, что $2m > n$.

В работе [3] доказано, что если для функции $f(\theta)$ норма (6) конечна, то для нее будет конечной и норма (2), и наоборот.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}$ весовой кубатурной формулы типа Эрмита (3) над пространством $L_2^{m*}(S)$ равна*

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[\hat{p}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta) \right]^2}{k^m (k + n - 2)^m} \right\}^{1/2}.$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пусть функционалы погрешностей одномерных весовых квадратурных формул типа Эрмита имеют вид

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta_i) = p(\theta_i) \delta_{\omega_i}(1 - r) - \sum_{\alpha_i=1}^m \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)} \delta^{(\alpha_i)}(\theta_i - \theta_i^{(\lambda_i)}) \quad (i = \overline{1, n}),$$

в одномерном случае для $f_i \in L_2^{(m)}(\omega_i)$ норма определяется в виде:

$$\left\| f_i | L_2^{(m)}(\omega_i) \right\| = \left\{ \int_{\omega_i} \left(\frac{d^m}{d\theta_i^m} f(\theta_i) \right)^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n; \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Так как n -мерную единичную сферу обозначим через S_n , то весовая кубатурная формула типа Эрмита (3) принимает следующий вид:

$$\int_{S_n} p(\theta) f(\theta) d\theta \approx \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^{\alpha} C_{\lambda}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \quad (7)$$

над пространством $L_2^m(S)$, где S_n — n -мерная единичная сфера, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\|\theta\| = 1$ и $\sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)} \hat{p}_{0,0}$, $\delta^{(\alpha)}(\theta)$ — дельта-функция Дирака, $C_{\lambda}^{(\alpha)}$ и $\theta^{(\lambda)}$ — коэффициенты и узлы весовой кубатурной формулы типа Эрмита (7), $\hat{p}_{0,0}$ — нулевой коэффициент Фурье $p(\theta)$.

Весовую кубатурную формулу типа Эрмита (7) сопоставим с обобщенной функцией

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \varepsilon_{S_n}(\theta)p(\theta) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(\theta - \theta^{(\lambda)}) \quad (8)$$

и назовем ее функционалом погрешности, где $\delta^{(\alpha)}(\theta)$ — дельта-функция Дирака, $C_\lambda^{(\alpha)}$ и $\theta^{(\lambda)}$ — коэффициенты и узлы весовой кубатурной формулы типа Эрмита (7).

В работе Г.Н. Салихова [3] показано, что пространство $L_2^m(S)$ по составу своих элементов совпадает с аналогичным пространством $L_2^{(m)}(S)$ С.Л. Соболева нормой

$$\|f|L_2^{(m)}(S_n)\| = \left\{ \int_{S_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(\theta))^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

где S_n — n -мерная единичная сфера, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ и

$$D^{|\alpha|} f(\theta) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1^{\alpha_1} \partial \theta_2^{\alpha_2} \dots \partial \theta_n^{\alpha_n}}.$$

Значит, нормы (6) и (9) являются эквивалентными нормировками.

Определим норму в $\bar{L}_2^{(m)}(S_n)$.

Определение 2. Пространство $\bar{L}_2^{(m)}(S_n)$ определяется как пространство функций, заданных на S_n , и норма функций, которая определяется следующим равенством:

$$\|f(\theta)|\bar{L}_2^{(m)}(S_n)\| = \left\{ \int_{S_n} \left(\frac{\partial^m f(\theta)}{\partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2} \dots \partial \theta_n^{m_n}} \right)^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, $m_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, со скалярным произведением

$$(f(\theta), \varphi(\theta))_{\bar{L}_2^{(m)}(S_n)} = \int_{S_n} \left(\frac{\partial^m f(\theta)}{\partial \theta^m} \right) \left(\frac{\partial^m \varphi(\theta)}{\partial \theta^m} \right) d\theta,$$

где $\partial \theta^m = \partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2} \dots \partial \theta_n^{m_n}$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n$.

В (9) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{S_\alpha} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f(\theta)}{\partial \theta^m} \right)^2 d\theta &= \int_{S_2} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1^{\alpha_1} \partial \theta_2^{\alpha_2}} \right)^2 d\theta = \\ &= \int_{S_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1^2} \right)^2 \right] d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (10) принимает вид

$$\|f(\theta)|\bar{L}_2^{(2)}(S_2)\|^2 = \int_{S_2} \left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2}} \right)^2 d\theta. \quad (12)$$

Очевидно, что для правой части (12) необходимо проводить меньше вычислений, чем для (11), и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\bar{L}_2^{(2)}(S_2)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше, чем в пространстве $L_2^{(2)}(S_2)$, так как в норме (12) участвуют только смешанные производные.

Докажем следующую теорему, которая является основным результатом.

Теорема 2. *Если для функционала погрешности (8) весовой кубатурной формулы типа Эрмита (7) в пространстве $\bar{L}_2^{(m)}(S_n)$ выполняется условие*

$$\ell_N^{(\alpha)}(\theta) = \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) \cdot \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) \cdot \dots \cdot \ell_{N_n}^{(\alpha_n)}(\theta_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} | \bar{L}_2^{(m_i)*}(\omega_i) \right\| \leq c_i \frac{1}{N_i^{m_i}} \quad (i = \overline{1, n}), \quad c_i - \text{константы}, \quad (13)$$

т. е.

$$\left\| \ell_{N_i}^{(\alpha_i)} | \bar{L}_2^{(m_i)*}(\omega_i) \right\| \leq c_i O(h_i^{m_i}) \quad (i = \overline{1, n}), \quad h_i = \frac{1}{N_i}, \quad (14)$$

то

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*}(S_n) \right\| \leq c \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i^{m_i}}, \quad c - \text{константы}, \quad (15)$$

или

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*}(S_n) \right\| \leq c O(h_1^{m_1}) \cdot O(h_2^{m_2}) \cdot \dots \cdot O(h_n^{m_n}), \quad (16)$$

где

$$\ell_{N_i}^{(\alpha_i)}(\theta) = \delta_{\omega_i}(1-r) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} C_{\lambda_i}^{(\alpha_i)} \delta^{(\alpha_i)}(\theta_i - \theta_i^{(\lambda_i)}),$$

$$c = \prod_{i=1}^n c_i, \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad m_i \geq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

и

$$\omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & i = n; \\ [0, \pi], & i = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Доказательство ведем методом математической индукции.

Пусть $n = 2$, тогда $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $m = m_1 + m_2$, $d\theta = d\theta_1 d\theta_2$, $f(\theta) = f(\theta_1, \theta_2)$, $p(\theta) = p(\theta_1, \theta_2)$ и $\ell_N(\theta) = \ell_{N_1}(\theta_1) \otimes \ell_{N_2}(\theta_2)$.

Если полагать, что в (3) $n = 1$, то

$$\left\| f(\theta_i) | \bar{L}_2^{(m_i)}(\omega_i) \right\| = \left\{ \int_{\omega_i} \left(\frac{\partial^{m_i} f(\theta_i)}{\partial \theta_i^{m_i}} \right)^2 d\theta_i \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2), f(\theta_1, \theta_2) \rangle \right| &= \left| \langle \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2), \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2) \rangle \right| \leq \\ &\leq \left\| \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) | \bar{L}_2^{(m_2)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2) \rangle | \bar{L}_2^{(m_2)*}(\omega_i) \right\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычислим следующую норму:

$$\begin{aligned}
\left\| \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2) \rangle | \bar{L}_2^{(m_2)*}(\omega_i) \right\| &= \left\{ \int_{\omega_i} \left| \frac{d^{m_2}}{d\theta_2^{m_2}} \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2) \rangle \right|^2 d\theta_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\{ \int_{\omega_i} \left| \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), \frac{d^{m_2}}{d\theta_2^{m_2}} f(\theta_1, \theta_2) \rangle \right|^2 d\theta_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left\{ \int_{\omega_i} \left[\left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \frac{d^{m_2}}{d\theta_2^{m_2}} f(\theta_1, \theta_2) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \right]^2 d\theta_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\{ \int_{\omega_i} \left\{ \int_{\omega_i} \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2}} f(\theta_1, \theta_2) \right]^2 d\theta_1 \right\} d\theta_2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\{ \int_{\omega_i} \int_{\omega_i} \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial \theta_1^{m_1} \partial \theta_2^{m_2}} f(\theta) \right]^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| f(\theta) | \bar{L}_2^{(m)}(S_2) \right\|, \tag{18}
\end{aligned}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $m = m_1 + m_2$. Таким образом, из (17) и (18) получим

$$\begin{aligned}
&\left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2), f(\theta_1, \theta_2) \rangle \right| \leq \\
&\leq \left\| \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) | \bar{L}_2^{(m_2)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| f(\theta) | \bar{L}_2^{(m)}(S_2) \right\|. \tag{19}
\end{aligned}$$

С учетом (10) из (19) получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(\theta) | \bar{L}_2^{(m)*}(\omega_i) \right\| \leq \left\| \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2) | \bar{L}_2^{(m_2)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\|. \tag{20}$$

В силу (13) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*}(S_2) \right\| \leq c_1 \cdot c_2 \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2}}.$$

Согласно (14)

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*}(S_2) \right\| \leq c \cdot O(h_1^{m_1}) \cdot O(h_2^{m_2}), \text{ где } c = \prod_{i=1}^2 c_i.$$

При $n = k$

$$\begin{aligned}
&\left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle \right| = \left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \rangle \right| = \\
&= \left| \langle \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k), \langle \ell_{N_{k-1}}^{(\alpha_{k-1})}(\theta_{k-1}), \dots, \langle \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2), \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \rangle \dots \rangle \right| \leq \\
&\leq \left\| \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k) | \bar{L}_2^{(m_k)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}^{(\alpha_{k-1})}(\theta_{k-1}) | \bar{L}_2^{(m_{k-1})*}(\omega_i) \right\| \dots \\
&\dots \left\| \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \rangle | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k) | \bar{L}_2^{(m_k)*}(\omega_i) \right\| \dots \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) | \bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| f(\theta) | \bar{L}_2^{(m)}(\omega_i) \right\|, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & \text{если } i = k; \\ [0, \pi], & \text{если } i = \overline{1, k-1}. \end{cases}$$

Из (21) ввиду (10) имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} |\bar{L}_2^{(m)*}(S_k) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) |\bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \dots \left\| \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k) |\bar{L}_2^{(m_k)*}(\omega_i) \right\|. \quad (22)$$

Тогда в силу (13) из (22) получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} |\bar{L}_2^{(m)*}(S_k) \right\| \leq \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_k^{m_k}} \quad (23)$$

или, учитывая (14), из (23) имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} |\bar{L}_2^{(m)*}(S_k) \right\| \leq c \cdot O(h_1^{m_1}) \dots O(h_k^{m_k}), \text{ где } c = \prod_{i=1}^k c_i.$$

Используя справедливость утверждения теоремы при $n = k$, докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1$.

Таким образом, пусть $n = k + 1$, тогда согласно (10) из (21) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k+1}), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k+1}) \rangle \right| = \\ & \left| \langle \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1), \langle \ell_{N_2}^{(\alpha_2)}(\theta_2), \dots \langle \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k), \langle \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})}(\theta_{k+1}), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k+1}) \rangle \dots \rangle \right| \leq \\ & \leq \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) |\bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \dots \left\| \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k) |\bar{L}_2^{(m_k)*}(\omega_i) \right\| \times \\ & \times \left\| \langle \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})}(\theta_{k+1}), f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k+1}) \rangle |\bar{L}_2^{(m_{k+1})*}(\omega_i) \right\|. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом (10) и (22) из (24) получим

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})} |\bar{L}_2^{(m_{k+1})*}(S_{k+1}) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}^{(\alpha_1)}(\theta_1) |\bar{L}_2^{(m_1)*}(\omega_i) \right\| \dots \\ & \dots \left\| \ell_{N_k}^{(\alpha_k)}(\theta_k) |\bar{L}_2^{(m_k)*}(\omega_i) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})}(\theta_{k+1}) |\bar{L}_2^{(m_{k+1})*}(\omega_i) \right\|, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\omega_i = \begin{cases} [0, 2\pi], & \text{если } i = k + 1; \\ [0, \pi], & \text{если } i = \overline{1, k}. \end{cases}$$

Используя (13), из (25) имеем

$$\left\| \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})} |\bar{L}_2^{(m_{k+1})*}(S_{k+1}) \right\| \leq c \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_{k+1}^{m_{k+1}}} \quad (26)$$

или ввиду (14) и (26) получим

$$\left\| \ell_{N_{k+1}}^{(\alpha_{k+1})} |\bar{L}_2^{(m_{k+1})*}(S_{k+1}) \right\| \leq c \cdot O(h_1^{m_1}) \dots O(h_{k+1}^{m_{k+1}}), \text{ где } c = \prod_{i=1}^{k+1} c_i.$$

Таким образом, получены неравенства (15) и (16).

Далее,

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} |\bar{L}_2^{(m)*}(S_n) \right\| \leq c \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_n^{m_n}}, \quad c - \text{константа}, \quad (27)$$

или, учитывая (16), из (27) имеем

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*} (S_n) \right\| \leq c \cdot O(h_1^{m_1}) \dots O(h_n^{m_n}), \quad h_i = \frac{1}{N_i} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (28)$$

где $c = \prod_{i=1}^n c_i$.

Если в (27) или (28) полагать $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n$, $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ и $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, то получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | L_2^{(m)*} (S_n) \right\| \leq c \cdot N^{-\frac{m}{n}}$$

или

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} | \bar{L}_2^{(m)*} (S_n) \right\| \leq c \cdot O(h^m), \quad c — \text{константа} \quad \left(h = N^{-\frac{1}{n}} \right),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (8) весовой кубатурной формулы типа Эрмита (7) в пространстве $\bar{L}_2^{(m)*} (S_n)$. Такая же оценка ранее была получена для нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы типа Эрмита (7) над фактор-пространством С.Л.Соболева $L_2^{(m)} (S_n)$ [9]. В результате мы получим одинаковый порядок сходимости к нулю при $N \rightarrow \infty$, хотя нормы функции определены разными способами, это подтверждается неравенством (27) и результатами работы [23]. Таким образом, отсюда следует, что весовые кубатурные формулы типа Эрмита (7) над фактор-пространством С.Л. Соболева $L_2^{(m)} (S_n)$ с функционалом погрешности (8) являются асимптотически-оптимальными. По выражению Н.С. Бахвалова такие формулы называются “практичными” [23].

Для иллюстрации берем конкретный пример при $n = 2$.

Пусть

$$f(\theta_1, \theta_2) = e^{a\theta_1} \left(\frac{1}{2} - b\theta_2^2 \right)^{3/2}, \quad \text{где} \quad a \neq 0 \quad \text{и} \quad b \neq 0.$$

Очевидно, что производные $\frac{\partial^{m-1} f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^{m-1}}$ и $\frac{\partial f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$ непрерывны на S_2 , но $\frac{\partial^2 f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$ имеет особенность на S_2 . Поэтому из условия $m = m_1 + m_2$ видно, что $m_1 = m - 1$, $m_2 = 1$, так как $m - 1 + 1 = m$. Отсюда следует $f(\theta_1, \theta_2) \in \bar{L}_2^{(m)} (S_2)$ при $m_1 = m - 1$, $m_2 = 1$. Таким образом, понятно, что $\frac{\partial^2 f(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2}$ не является непрерывным на S_2 , поскольку при $m_1 = m - 2$ и $m_2 = 2$ $f(\theta_1, \theta_2) \notin L_2^{(m)} (S_2)$, но условие $m = m_1 + m_2$ выполняется, т. е. $m - 2 + 2 = m$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблемы приближенного вычисления определенных интегралов с возможно большей точностью связаны с тем, что большинство задач науки и техники приводятся к интегральным и дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определенных интегралов, которые, во многих случаях, невозможно вычислить точно. Такими задачами занимались многие математики и имеется несколько методов построения оптимальных кубатурных формул. В наших исследованиях рассматриваются весовые кубатурные формулы типа Эрмита в функциональном пространстве С.Л. Соболева $\bar{L}_2^{(m)} (S_n)$ и получена оценка сверху для нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы типа

Эрмита. Таким образом, на основе теоремы Н.С. Бахвалова доказано, что рассматриваемые весовые кубатурные формулы типа Эрмита являются асимптотически-оптимальными на этом пространстве. Для многомерных кубатурных формул быстро растет число узлов интегрирования с увеличением размерности пространства. Эта проблема требует особого внимания к построению наиболее экономных формул. В настоящей работе рассматриваются формулы именно с учетом этого требования, Н.С. Бахвалов называл эти формулы “практичными” [23].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).
- [2] Рамазанов М.Д. *Лекции по теории приближенного интегрирования* (Баш.ГУ, Уфа, 1973).
- [3] Салихов Г.Н. *Кубатурные формулы для многомерных сфер* (Фан, Ташкент, 1985).
- [4] Шарипов Т.Х. *Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования* (Дисс. канд. физ.-матем. наук., Ташкент, 1975).
- [5] Шадиметов Х.М. *Оптимальные решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах Соболева* (Дис. док. физ.-матем. наук, Ташкент, 2002).
- [6] Под ред. Соболева С.Л. *Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики* (Наука, Новосибирск, 1973).
- [7] Носков М.В. *О декартовых произведениях кубатурных формул*, Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Наука, Новосибирск, 114–116 (1980).
- [8] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике* (Наука, М., 1988).
- [9] Никольский С.М. *Квадратурные формулы* (Наука, М., 1979).
- [10] Хайтов Т.И. *Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае*, ДАН СССР **189** (5), 955–958 (1969).
- [11] Шайнжуров Ц.Б. *Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных* (Дисс. докт. физ.-матем. наук, Улан-Удэ, 1980).
- [12] Жалолов О.И. *Весовые оптимальные по порядку сходимости кубатурные формулы над фактор пространством С.Л. Соболева*, Узб. матем. журн. (1), 40–50 (2011).
- [13] Шадиметов Х.М., Жалолов О.И., Шадманова К.У., Шамсиев Ж.Ш. *Оптимальные по порядку сходимости весовые кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\bar{L}_p^{(m)}(K_n)$* , Восточно-европейский науч. журн. **6** (3), 162–166 (2016).
- [14] Жалолов О. И. *Верхняя оценка нормы функционала погрешности кубатурной формулы типа Эрмита в пространстве С.Л. Соболева*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. (3), 70–78 (2017).
- [15] Jalolov O.I. *The lower bound for the norm of the error functional of lattice cubature formulas in the space $H_p^\mu(\omega)$* , Abstracts VI Inter. sci. conf. Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018, 149–150 (2018).
- [16] Khayatov Kh. *Algorithm for finding the norm of the error functional of Hermite-type interpolation formulas in the Sobolev space of periodic functions*, AIP Conf. Proc. **2781** (1), 020063 (2023), DOI: 10.1063/5.0144842.
- [17] Жалолов О.И. *Вычисление нормы функционала погрешности и построение оптимальных по порядку сходимости весовых кубатурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева*, Пробл. вычисл. и прикл. матем. **1**, 100–105 (2016).
- [18] Жалолов О.И. *Об одном классе оптимальных по порядку сходимости кубатурных формул над $L_2^{(m)}(S)$* , Вопр. вычисл. матем. Сб. науч. тр., Ташкент **125**, 57–74 (2010).
- [19] Jalolov O. *Weight optimal order of convergence cubature formulas in Sobolev space*, AIP Conf. Proc. **2365** (1), 020014 (2021), DOI: 10.1063/5.0057015.
- [20] Jalolov O. *Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space $\bar{L}_p^{(m)}(K_n)$* , AIP Conf. Proc. **2781** (1), 020066 (2023), DOI: 10.1063/5.0144837.
- [21] Jalolov Ikr. *The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution*, AIP Conf. Proc. **2365** (1), 020015 (2021), DOI: 10.1063/5.0057025.
- [22] Jalolov Ikr. *Algorithm for constructing a discrete analogue $D_4[\beta]$ of a differential operator*, AIP Conf. Proc. **2781** (1), 020041 (2023), DOI: 10.1063/5.0144834.
- [23] Бахвалов Н.С. *Численные методы*, Т. 1 (Наука, М., 1973).

- [24] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *Составные кубатурные формулы на решетке*, Изв. вузов. Матем. (11), 59–74 (2023), DOI: 10.26907/0021-3446-2023-11-59-74.
- [25] Шадиметов Х.М., Маматова Н.Х. *О задаче оптимального интерполирования функций*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–70 (2023), DOI: 10.26907/0021-3446-2023-12-59-70.

Озоджон Исомидинович Жалолов

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Бекзоджон Озоджон угли Исомиддинов

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

O.I. Jalolov and B.O. Isomiddinov

On the construction of practically asymptotically optimal weighted cubature formulas of Hermite type in the space of S.L. Sobolev $\bar{L}_2^{(m)}(S_n)$

Abstract. When solving many problems in the theory of approximate integration and differential equations, it is the correct choice of spaces that is the key to success. A very clearly chosen approach was demonstrated in the famous works of S.L. Sobolev on the polyharmonic equation. S.L. Sobolev posed and solved by the variational method the first boundary value problem for the equation $\Delta^\ell u = f$ with boundary conditions on surfaces of various dimensions.

Problems of optimization of approximate integration formulas consist in minimizing the norm of the error functional of the formula on selected normalized spaces, and most of them are considered in the Sobolev space.

Until now, we have considered cubature formulas, with the help of which a definite integral of a function is approximately calculated when the values of this function at individual points of the nodes of the cubature formula are unknown. But more general cubature formulas are possible, which include both the values of the function and the values of its derivatives of one order or another.

If we know not only the values of a function at some points of the n – dimensional unit sphere, but also the values of its derivatives of one order or another, then it is natural that if all this data is used correctly, we can expect a more accurate result than if we use only function values.

This paper examines cubature formulas, which require special attention to the construction of the most economical formulas; according to N.S. Bakhvalov, such formulas are called practical.

Keywords: Generalized function, space, norm, error functional, interpolation formula, extremal function.

Ozodjon Isomidinovich Jalolov

Bukhara State University,

11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Bekzodjon Ozodjon o'g'li Isomiddinov

Bukhara State University,

11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz