

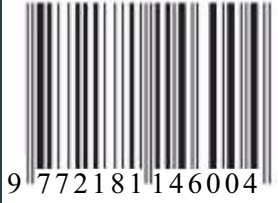
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI



Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University

1/2025

E-ISSN 2181-1466



9 772181 146004

ISSN 2181-6875



9 772181 687004



@buxdu_uz



@buxdu1



@buxdu1



www.buxdu.uz

1/2025

<https://buxdu.uz>

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI
SCIENTIFIC REPORTS OF BUKHARA STATE UNIVERSITY
НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ilmiy-nazariy jurnal

2025, № 1, yanvar

Jurnal 2003-yildan boshlab **filologiya** fanlari bo'yicha, 2015-yildan boshlab **fizika-matematika** fanlari bo'yicha, 2018-yildan boshlab **siyosiy** fanlar bo'yicha, **tarix** fanlari bo'yicha 2023-yil 29-avgustdan boshlab O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiya ishlari natijalari yuzasidan ilmiy maqolalar chop etilishi lozim bo'lgan zaruriy nashrlar ro'yxatiga kiritilgan.

Jurnal 2000-yilda tashkil etilgan.

Jurnal 1 yilda 12 marta chiqadi.

Jurnal O'zbekiston matbuot va axborot agentligi Buxoro viloyat matbuot va axborot boshqarmasi tomonidan 2020-yil 24-avgust № 1103-sonli guvohnoma bilan ro'yxatga olingan.

Muassis: Buxoro davlat universiteti

Tahririyat manzili: 200117, O'zbekiston Respublikasi, Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.

Elektron manzil: nashriyot_buxdu@buxdu.uz

TAHRIR HAY'ATI:

Bosh muharrir: Xamidov Obidjon Xafizovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Bosh muharrir o'rinbosari: Rasulov To'liqin Husenovich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor

Mas'ul kotib: Shirinova Mexrigiyo Shokirovna, filologiya fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Kuzmichev Nikolay Dmitriyevich, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor (N.P. Ogaryov nomidagi Moldova milliy tadqiqot davlat universiteti, Rossiya)

Danova M., filologiya fanlari doktori, professor (Bolgariya)

Margianti S.E., iqtisodiyot fanlari doktori, professor (Indoneziya)

Minin V.V., kimyo fanlari doktori (Rossiya)

Tashqarayev R.A., texnika fanlari doktori (Qozog'iston)

Mo'minov M.E., fizika-matematika fanlari nomzodi (Malayziya)

Mengliyev Baxtiyor Rajabovich, filologiya fanlari doktori, professor

Adizov Baxtiyor Rahmonovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Abuzalova Mexriniso Kadirovna, filologiya fanlari doktori, professor

Amonov Muxtor Raxmatovich, texnika fanlari doktori, professor

Barotov Sharif Ramazonovich, psixologiya fanlari doktori, professor, xalqaro psixologiya fanlari akademiyasining haqiqiy a'zosi (akademigi)

Baqoyeva Muhabbat Qayumovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bo'riyev Sulaymon Bo'riyevich, biologiya fanlari doktori, professor

Jumayev Rustam G'aniyevich, siyosiy fanlar nomzodi, dotsent

Djurayev Davron Raxmonovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Durdiyev Durdimurod Qalandarovich, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Olimov Shirinboy Sharofovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Qahhorov Siddiq Qahhorovich, pedagogika fanlari doktori, professor

Umarov Baqo Bafoyevich, kimyo fanlari doktori, professor

Murodov G'ayrat Nekovich, filologiya fanlari doktori, professor

O'rayeva Darmonoy Saidjonovna, filologiya fanlari doktori, professor

Navro'z-zoda Baxtiyor Nigmatovich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Hayitov Shodmon Ahmadovich, tarix fanlari doktori, professor

To'rayev Halim Hojiyevich, tarix fanlari doktori, professor

Rasulov Baxtiyor Mamajonovich, tarix fanlari doktori, professor

Eshtayev Alisher Abdug'aniyevich, iqtisodiyot fanlari doktori, professor

Quvvatova Dilrabo Habibovna, filologiya fanlari doktori, professor

Axmedova Shoiri Nematovna, filologiya fanlari doktori, professor

Bekova Nazora Jo'rayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

Amonova Zilola Qodirovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Hamroyeva Shahlo Mirjonovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Nigmatova Lola Xamidovna, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Boboyev Feruz Sayfullayevich, tarix fanlari doktori

Jo'rayev Narzulla Qosimovich, siyosiy fanlar doktori, professor

Xolliyev Askar Ergashovich, biologiya fanlari doktori, professor

Artikova Hafiza To'ymurodovna, biologiya fanlari doktori, professor

Norboyeva Umida Toshtemirovna, biologiya fanlari doktori, professor

Hayitov Shavkat Ahmadovich, filologiya fanlari doktori, professor

Qurbonova Gulnoz Negmatovna, pedagogika fanlari doktori (DSc), professor

Ixtiyarova Gulnora Akmalovna, kimyo fanlari doktori, professor

Rasulov Zubaydullo Izomovich, filologiya fanlari doktori (DSc), dotsent

Mirzayev Shavkat Mustaqimovich, texnika fanlari doktori, professor

Samiyev Kamoliddin A'zamovich, texnika fanlari doktori, dotsent

Esanov Husniddin Qurbonovich, biologiya fanlari doktori, dotsent

Raupov Soyib Saidovich, tarix fanlari nomzodi, professor

Zaripov Gulmurot Toxirovich, texnika fanlari nomzodi, professor

Jumayev Jura, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Klichev Qybek Abdurasulovich, tarix fanlari doktori, dotsent

G'aybulayeva Nafisa Izattullayevna, filologiya fanlari doktori (DSc), professor

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS		
МАТЕМАТИКА *** MATHEMATICS *** МАТЕМАТИКА		
G'anijonova G.A.	Representation of the solution of one dynamic system on the plane	3
Maxammadzokirov Sh.Sh.	Application of matrix exponential in one control problem	10
Ortiqova R.B.	On some problems of the theory of one-dimensional bifurcation	15
Жалолов О.И., Махмудов М.М.	О нахождении элемента Рисса и нормы функционала погрешности квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $W_2^m(R)$	20
Abduraxmonova R.A.	On a linear differential evasion game with many pursuers and one evader in the Hilbert space l_2	26
Vasiyeva G.A.	Time-optimal control problem for an infinite system of binary differential equations	33
Сатторов Э.Н., Пулатов О.У.	Формула Карлемана для двумерного гравитационного поля в ограниченной области	42
Husenova J.T.	Funksional tenglamaga keltiriladigan spektral masalalar	48
Boboxonov Sh.S.	Proving the Corona theorem for $A(z)$ -analytic functions using the Bezout formula in case $n=2$	53
Сатторов Э.Н., Актамов Х.С.	О продолжении магнитного потенциала в двумерной ограниченной области	57
FIZIKA *** PHYSICS *** ФИЗИКА		
Икрамов Р.Ғ., Мўминов Х.А.	Тобланган a-Si:H нинг ҳаракатчанлик тирқишининг температурага боғланиши	61
Djurayev D.R., Nasirova N.G., Fayziyev Sh.Sh.	Ferrit granatlarning fizik xususiyatlari haqida	66
Jaraqov A.I., Vapayev M.E., Davletov I.Y., Boltaev G.S.	Ikki elementli litiy ftor qotishmasi sirtida hosil qilingan plazmaning parametrlarini tadqiq qilish	73

Nishonov I.E., Karshiboev Sh.E., Tolibjanov T.X., Jiyanov Sh.E., Fayziyev F.G'.	O'zgartirilgan Chaplygin gazi bilan o'ralgan zaryadlangan qora tuynuk	81
Ro'ziyev F.M.	Yarim shaffof organik quyosh elementlarida D18 asosidagi donor polimerlarning optik va fotovoltaik parametrlari	86
KIMYO *** CHEMISTRY *** ХИМИЯ		
Zokirov B.U., Ashurov M.M.	Qoramol va cho'chqadan olingan jelatinni UPLC-QTOF va ATR-FTIR spektroskopiyasi yordamida farqlash va miqdorini aniqlash	94
Raximov A.X., Mutalov Sh.A.	Tarkibida kislota bo'yoqlari mavjud to'qimachilik oqava suvlarini tozalashda elektrokoagulyatsiya jarayonlarining ahamiyati	101
Xusanova D.X.	Nikel nanokatalizatorlarining notekis perilen molekulalari klasterlanishiga ta'siri	108
BIOLOGIYA *** BIOLOGY *** БИОЛОГИЯ		
Evatov G'.X., To'libayeva X.E.	Tokning ximera kasalligiga qarshi kurashish choralari	114
Юнусов Р., Шодиева С.Н.	Урожайность и качество плодов яблони в зависимости от способа и степени обрезки	118
Egamberdiyeva M.X.	Meva va sabzavotlar iste'molining salomatlikka ta'siri tadqiqi	122
INFORMATIKA *** INFORMATICS *** ИНФОРМАТИКА		
Усмонов Ф.С.	Автоматизация диспетчерского управления на водораспределительных сооружениях	126
TEKNIKA *** TECHNIQUE *** ТЕХНИКА		
Тўйчиев А.Ж., Султонов З.Н.	Применение насосов в пищевой промышленности	131

О НАХОЖДЕНИИ ЭЛЕМЕНТА РИССА И НОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ
КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $W_2^m(R)$

Жалолов Озоджон Исомидинович,
заведующий кафедрой

Прикладной математики и технологий программирования
Бухарского государственного университета, доцент

o_jalolov@mail.ru, o.i.jalolov@buxdu.uz

Махмудов Миржалол Максуд угли,
независимый исследователь Бухарского государственного университета

Аннотация. Как известно, приближённое вычисление определённых интегралов с максимальной точностью является одной из наиболее актуальных задач вычислительной математики. Это связано с тем, что большинство задач науки и техники сводятся к интегральным и дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определённых интегралов, которые во многих случаях не могут быть точно вычислены. Многие математики изучали эти проблемы. Существует несколько методов построения оптимальных квадратурных формул.

В настоящей работе рассматриваются квадратурные формулы типа Эрмита и нахождение экстремальной функции, т.е. элементы Рисса и нормы функционала погрешности в неперiodическом пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

Ключевые слова: квадратурная формула, функциональная погрешность, пространство Соболева, обобщённая функция, функциональное пространство, норма, экстремальная функция.

ON FINDING THE RIESSE ELEMENT AND THE NORM OF THE ERROR FUNCTIONAL
OF A HERMITE-TYPE QUADRATURE FORMULA IN SOBOLEV SPACE $W_2^m(R)$

Abstract. It is known that the high-precision approximation of definite integrals is one of the most pressing problems in mathematics. This is because most problems in science and technology are reduced to integral and differential equations, and their solutions are expressed using definite integrals, which in most cases cannot be calculated exactly. Many mathematicians have studied these problems. There are several ways to construct optimal quadrature formulas. In this article, we consider quadrature formulas of the Hermitian type and find the extremal function, i.e. the Riesz element, and the norm of the error functional in a non-periodic Sobolev space.

Keywords: quadrature formula, error functional, Sobolev space, generalized function, functional space, norm, extremal function.

$W_2^m(R)$ SOBOLEV FAZOSIDA ERMIT TIPIDAGI KVADRATUR FORMULANING RISS
ELEMENTINI VA XATOLIK FUNKSIONALI NORMASINI TOPISH

Annotatsiya. Ma'lumki, aniq integrallarni yuqori aniqlikda taqribiy hisoblash, matematikaning eng dolzarb muammolaridan biridir. Buning sababi shundaki, fan va texnikadagi aksariyat masalalar integral va differensial tenglamalarga keltiriladi va ularning yechimlari aniq integrallar yordamida ifodalanadi, ko'p hollarda ularni aniq hisoblab bo'lmaydi. Ko'pgina matematiklar bu muammolarni o'rganishgan. Optimal kvadratura formulalarini qurishning bir necha usullari mavjud.

Ushbu maqolada biz Ermit tipidagi kvadratura formulalarini ko'rib chiqamiz va davriy bo'lmagan $W_2^m(R)$ Sobolev fazosida ekstremal funktsiyani, ya'ni Riss elementini va xatolik funksionali normasini topamiz.

Kalit so'zlar: kvadratur formula, xatolik funksionali, Sobolev fazosi, umumlashgan funksiya, funksional fazo, norma, ekstremal funktsiya.

Введение. Работы многих авторов посвящены построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул методами, предложенными С.Л.Соболевым (смотрите: [4],[5],[6],[12],[13],[14],[15]). На основе этого метода в работах (смотрите: [16], [17], [18]) разработан

алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве С.Л. Соболева $W_2^{(m)}(R)$, и доказано существование и единственности этих формул.

В работе [18] вычислены коэффициенты оптимальных решётчатых весовых квадратурных формул в пространстве С.Л. Соболева $W_2^m(R)$. Если нам известны не только значения функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_N$ на отрезке $[0, 1]$, но и значения её производных того или иного порядка, то, естественно, что при правильном использовании всех этих данных, мы можем ожидать более точный результат, чем в случае использования только значений функции, т.е. такие формулы называются квадратурными формулами типа Эрмита (смотрите [7], [8], [9], [10], [11]).

В настоящей работе рассматриваются именно квадратурные формулы типа Эрмита и нахождение экстремальной функции, т.е. элементы Рисса и нормы функционала погрешности в непериодическом пространстве С.Л. Соболева $W_2^m(R)$.

Определение 1. Пространство $W_2^m(R)$ определяется как замыкание бесконечно дифференцируемых функций, заданных в R и убывающих на бесконечность быстрее любой отрицательной степени в норме ([1], [19])

$$\|f(x)\|_{W_2^m(R)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1} \left[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[f(x)](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Здесь F и F^{-1} прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i y x} dx \text{ и } F^{-1}[f(x)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx.$$

При выполнении условия $v_{m/2}(x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-m/2}](x) \in L_2(R)$ пространство $W_2^m(R)$ вкладывается в пространство непрерывных функции $C(R)$. Условие вложения пространства $W_2^m(R)$ в пространство непрерывных функций $C(R)$ является необходимым условием в функциональном подходе к теории квадратурных и кубатурных формул.

Скалярное произведение в $W_2^m(R)$ определяется как:

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[\varphi(x)](y)] \cdot F^{-1}[(1+y^2)^{m/2} \cdot F[\psi(x)](y)] dy.$$

2. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается следующая квадратурная формула:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_{\beta}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x_{\beta}), \quad (1)$$

где соответственно, $C_{\beta}^{(\alpha)}$ и x_{β} называют коэффициентами и узлами квадратурной формулы.

Погрешностью квадратурной формулы называется разность:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_{\beta}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x_{\beta}) &= \int_0^1 f(x) dx - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_{\beta}^{(\alpha)} \langle \delta^{(\alpha)}(x - x_{\beta}), f(x) \rangle = \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_{\beta}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x_{\beta}) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_{\beta}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x_{\beta}) \right] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ell_N^{(\alpha)}(x) f(x) dx = \ell_N^{(\alpha)}(f). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ - функционал погрешности квадратурной формулы (1), т.е.

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_{\beta}^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - x_{\beta}), \quad (3)$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - индикатор отрезка $[0, 1]$, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака и $f(x)$ является элементом гильбертова пространства Соболева $W_2^m(R)$ [1], назовем её квадратурной формулой типа Эрмита.

Погрешность квадратурной формулы будет линейным и непрерывным функционалом из пространства $W_2^{m*}(R)$, сопряжённого к пространству $W_2^m(R)$, т.е. $\ell_N^{(\alpha)}(x) \in W_2^{m*}(R)$.

Качество квадратурной формулы оценивается при помощи нормы функционала погрешности:

$$\|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\| = \sup_{f \in P \neq 0} \frac{|\ell_N^{(\alpha)}(f)|}{\|f(x)|W_2^m(R)\|}. \quad (4)$$

Норма функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ зависит от коэффициентов C_β и узлов x_β . Если

$$\left\| \ell_N^{(0)}(x) | W_2^{m*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m*}(R) \right\|, \quad (5)$$

то говорят, что функционал $\ell_N^{(0)}$ соответствует оптимальной квадратурной формуле в $W_2^m(R)$.

Таким образом, задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{m*}(R)$, - это вычисления следующей величины:

$$\left\| \ell_N^{(0)} | W_2^{m*}(R) \right\| = \inf_{C_\beta, x_\beta} \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) \rangle|}{\|f(x)|W_2^m(R)\|}, \quad (6)$$

где $W_2^{m*}(R)$ - сопряжённое пространство к пространству $W_2^m(R)$.

Эта задача состоит из двух частей: сначала мы должны вычислить норму $\|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$ в пространстве $W_2^{m*}(R)$, а потом минимизировать его по коэффициентам $C_\beta^{(\alpha)}$ и узлам x_β . Полная библиография приведена в [18]. В настоящей работе мы занимаемся решением первой части задачи, т.е. вычислением нормы $\|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\|$ функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$.

Для этого мы используем понятие экстремальной функции функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$, введённое С.Л. Соболевым [1].

Определения 2. Функция $\psi_\ell(x)$, для которой выполняется равенство:

$$\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) \rangle = \|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\| \cdot \|\psi_\ell(x)|W_2^m(R)\|, \quad (7)$$

называется экстремальной функцией функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$.

Так как пространство $W_2^m(R)$, является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала (см[1]) существует единственная функция $\psi_\ell(x) \in W_2^m(R)$, для которой

$$\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) \rangle = \langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle \quad (8)$$

и $\|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\| = \|\psi_\ell(x)|W_2^m(R)\|$, где $\langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle$ - скалярное произведение двух функций $\psi_\ell(x)$ и $f(x)$ из пространства $W_2^m(R)$. Напомним, что скалярное произведение $\langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle$ определяется следующим образом:

$$\langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[\psi_\ell(x)](\xi)] \times F^{-1}[\mu(\xi) \cdot F[f(x)](\xi)]$$

В частности, из (7) при $f(x) = \psi_\ell(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) \rangle &= \langle \psi_\ell(x), f(x) \rangle = \|\psi_\ell(x)|W_2^m(R)\|^2 = \\ &= \|\psi_\ell(x)|W_2^m(R)\| \cdot \|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\| = \|\ell_N^{(\alpha)}(x)|W_2^{m*}(R)\|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда видно, что решения $\psi_\ell(x)$ уравнения (8) удовлетворяет уравнению (7) и являются экстремальной функцией.

Таким образом, для того чтобы вычислить норму функционала погрешности $\ell_N^{(\alpha)}(x)$, сперва надо решить уравнение (8) т.е. найти экстремальную функцию $\psi_\ell(x)$ а потом вычислить скалярное произведение $\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) \rangle = \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m*}(R) \right\|^2$.

Ниже мы найдём экстремальную функцию другим путём, т.е. с помощью преобразования Фурье обобщённых функций можно найти экстремальную функцию [19].

Далее, из теории преобразования Фурье обобщённых функций имеем:

$$\begin{aligned} \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), f(x) \rangle &= \left(F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi), F[f(x)](\xi) \right) = \left(\mu^{-1}(\xi) F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi), \mu(\xi) F[f(x)](\xi) \right) = \\ &= \left(F^{-1} \left\{ \mu^{-1}(\xi) F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi) \right\}, F^{-1} \left\{ \mu(\xi) F[f(x)](\xi) \right\} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Если в этом равенстве (10) полагать:

$$F^{-1} \left\{ \mu(\xi) F[\psi_\ell(x)](\xi) \right\} = F^{-1} \left\{ \mu^{-1}(\xi) F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi) \right\}, \text{ т.е. если полагать}$$

$$f(x) = \psi_\ell(x) = F^{-1} \left\{ \mu^{-1}(\xi) F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi) \right\}(x),$$

где $\mu(\xi)$ - нигде не обращающаяся в нуль действительная значная функция, т.е. $\mu(\xi) > 0$.

То будем иметь:

$$\langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \psi_\ell(x) \rangle = \langle \psi_\ell(x), \psi_\ell(x) \rangle = \left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m*}(R) \right\|^2. \quad (11)$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\begin{aligned} \psi_\ell(x) &= F^{-1} \left\{ \mu^{-1}(\xi) F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi) \right\}(x) = F^{-1} \left[\mu^{-1}(\xi) * F^{-1} \left\{ F[\ell_N^{(\alpha)}(x)](\xi) \right\}(x) \right] = \\ &= \nu_m(x) * \ell_N^{(\alpha)}(x) = \nu_m(x) * \left[\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^{(\alpha)} C_\beta^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - h\beta) \right] = \\ &= \left[\varepsilon_{[0,1]}(x) \right] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(y) \nu_m(x - y) dy - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \nu_m(x) = F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)](x), \text{ здесь } \mu(\xi) = (1 + y^2), \text{ тогда } \nu_m(x) = F^{-1} \left[\left(\frac{1}{1 + y^2} \right)^m \right](x).$$

Как известно, что $\nu_m(x)$ - является фундаментальным решением дифференциального оператора,

$$\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi)^2 dx^2} \right)^m, \quad (13)$$

удовлетворяющим равенство:

$$\left(1 - \frac{d^2}{(2\pi)^2 dx^2} \right)^m \nu_m(x) = \delta(x), \quad (14)$$

где [20]

$$\nu_m(x) = \frac{\pi e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2} (m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)! (4\pi)^k}{k! (m-k-1)!} |x|^k \quad (15)$$

$$\text{и } \delta[\beta] = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 0, & \beta \neq 0. \end{cases}, \text{ т.е. } \delta[\beta] \text{ - дискретная дельта функция Дирака.}$$

Таким образом экстремальная функция имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{[0,1]}(y) \nu_m(x - y) dy - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\alpha=0}^{m-1} C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) \quad (16)$$

Так как $\psi_\ell(x)$ является экстремальной функцией функционала погрешности (3);

во-вторых, нормы функционала погрешности имеют следующий вид:

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) | W_2^{m*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \varepsilon_{[0,1]}(y) \nu_m(x - y) dy - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N C_\beta^{(\alpha)} \nu_m^{(\alpha)}(x - h\beta) \right|^2 dx, \quad (17)$$

где

$$v_m(x) = \frac{\pi \cdot e^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!(2\pi)^k}{k!(m-k-1)!} |x|^k$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема. Экстремальная функция функционала погрешности (3) квадратурной формулы (1) имеет вид (16), квадрат нормы функционала погрешности над пространством $W_2^{m*}(R)$ имеет вид (17).

Заключение. Большинство задач науки и техники сводятся к интегральным и дифференциальным уравнениям, а их решения выражаются с помощью определённых интегралов, которые во многих случаях не могут быть точно вычислены. Многие математики изучали эти проблемы. Существует несколько методов построения оптимальных квадратурных формул.

С.Л. Соболев рассмотрел проблему построения оптимальных решётчатых формул над пространством $L_2^{(m)}(R^n)$ и нахождение оптимальных коэффициентов свёл к решению дискретной задачи типа Винера – Хопфа (смотрите [1]).

В одномерном случае, т.е. в пространстве $L_2^{(m)}(R)$, непрерывная задача Винера – Хопфа решена З.Ж. Жамоловым (см[2]). С.Л. Соболев, исследуя дискретную задачу типа Винера – Хопфа, доказал существование и единственность решения этой задачи и дал алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов кубатурных формул. В одномерном случае он свёл нахождение оптимальных коэффициентов квадратурных формул при $P(x)=1$ в пространстве $L_2^{(m)}(R)$ к решению системы из $2m-2$ уравнений.

В работе рассматриваются квадратурные формулы, которые участвуют значения функции и значения её производных некоторого порядка, такие квадратурные формулы являются квадратурными формулами типа Эрмита.

В настоящей работе рассматриваются именно квадратурные формулы типа Эрмита и нахождение экстремальной функции, т.е. элементы Рисса и нормы функционала погрешности в непериодическом пространстве Соболева $W_2^m(R)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. С.Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул, М.1974.
2. Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas. // American J. of Math. 1949. LXXI. -pp. 80-91.
3. Coman Gh. Formule de quadrature de tip Sard. Univ. Babes -Bolyai. Ser. math.-mech., 17. 1972. №2. -pp. 73-77.
4. Жамолов З.Ж., Салихов Г.Н., Шарипов Т.Х., Приближенное интегрирование гладких функций, Математический анализ и смежные вопросы математики, Наука, Сиб. Отд., Новосибирск, 1978.
5. Рамазанов М.Д. Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. / ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа: Дизайн Полиграф Сервис, 2009.178с.
6. Х.М. Шадиметов. О вычислении коэффициентов оптимальных квадратурных формул. ДАН СССР, 1980, №4.
7. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. Успехи математических наук, 1950, т. 5, вып. 2(36), с. 165-177.
8. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функции. Матем. Заметки 1969,6. Вып 4, стр. 475-480.
9. Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций с интегрируемой производной. Изв. Вузов, 1975, №3, с 59-71
10. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 256с.
- 11 Хаитов Т. И. Кубатурные формулы с заданием производных в периодическом случае. ДАН СССР, 1969, т.189, №5.
12. Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$. // Journal of Computational and Applied Mathematics 235. 2011. 1114–1128 pp.

13. A.R. Hayotov, G.V. Milovanovic, Kh.M. Shadimetov, *On an optimal quadrature formula in the sense of Sard*, Numerical Algorithms 57 (2011) 487-510.
14. Шойнжуров Ц.Б. *Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах*. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. С.146-157.
15. Jalolov O.I. *Weight Optimal Order of Convergence Cubature Formulas in Sobolev Space*. AIP Conference Proceedings 2781 (1), 020066 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0144837>.
16. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. *Об одном алгоритме построения оператора $D_h^m[\beta]$ для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул пространстве $W_2^m(R)$* // Уз. Матем. Журнал, 2010, №3. –Ташкент. -с.178-187.
17. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. *Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева*. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 2016. № 2, с. 9.
18. Ikrom I. Jalolov. "The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution AIP Conference Proceedings 2365, 020015 (2021), <https://doi.org/10.1063/5.0057025>.
19. Волевич Л.Р., Панях Б.П. *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения*, УМН, 20, вып. I, 1965, 3-74.
20. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений*. Наука, физ-мат, М.1941.