Моя профессиональная карьера

Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №25 (том 4)
(апрель, 2022)

Международный научно-образовательный
электронный журнал
«ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

УДК 37
ББК 94

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №25 (том 4) (апрель, 2022). Дата выхода в свет: 30.04.2022.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Миссия научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает работников сферы образования (воспитателей, педагогов, учителей, руководителей кружков) и школьников, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

ФИО авторов: *Бахронов Бекзод Ислом угли*
Бухарский государственный университет
Физико-математический факультет
Журакулова Фарангис Мурат кизи
Бухарский государственный университет
Физико-математический факультет
Название публикации: «КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПРИМЕРЫ»

Аннотация: В этой статье рассматривается понятие квадратного корня для произвольного самосопряженного положительного оператора в гильбертовом пространстве и примеры квадратного корня из положительных операторов.
Ключевые слова: пространство Гилберта, самосопряженный оператор, положительный оператор, Неравенство Коши-Буняковского, монотонно возрастающая последовательность, монотонно убывающая последовательность, квадратный корень.

Пусть H - Гильбертово пространство и $A: H \to H$ самосопряженный оператор.
Определение. Если для произвольного $x \in H$ элемента $(Ax, x) \geq 0$ неравенство справедливо, а для хотя бы одного $x_0 \in H$ элемента $(Ax_0, x_0) > 0$ неравенство виполняется, тога A называется положительным оператором и обозначается в виде $A > 0$.

Определение. Если для любого положительного оператора B справедливо равенство $B^2 = A$, тогда **о**ператор B называется квадратным корнем оператора A.

Теорема 1. Произвольный положительный оператор A имеет причём единственный квадратный корень B. Если оператор A является коммутатором оператора с, то B томе является коммутатором C.

Доказательство. Пуст $A \le E$ (в общем случал оператора A можно заменить с оператором $\frac{A}{\|A\|}$) считаем $B_0 = 0$ и введем обозначение

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

В соответствии с выбором все операторы B_n являются самосопряженными и имеют свойство коммутативности с операторами A. В частности, $B_n B_m = B_m B_n$. Следующие равенство

$$E - B_{n+1} = \frac{1}{2}(E - B_n^2) + \frac{1}{2}(E - A) \tag{2}$$

и

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{2}[(E - B_{n-1}) + (E - B_n)](B_n - B_{n-1}) \tag{3}$$

могут быть легко проверены. Из равенства (2) следует, что все для всех n $B_n \le E$. Также можно убедиться, что это $B_n \le B_{n+1}$. Если $n = 0$ то справидливо следующее неравенство.

$$B_1 = \frac{1}{2}A > 0 = B$$

Если $B_n - B_{n-1} \ge 0$, тогда $B_{n+1} - B_n \ge 0$. Так что это $B_n \le B_{n+1}$ во всех n. Значит, $\{B_n\}$-монотонно возрастающая ограниченная самосопреженная последовательность положительных операторов.

При $n \to \infty$ из равенство (1) следует что

$$B = B + \frac{1}{2}(A - B^2), \quad B^2 = A.$$

Теперь из того, что оператор B обладает свойством коммутаторной с A, следует, что оператор B_n обладает таким свойством. Таким образом, оператор B удовлетворяет всем требуемым свойствам и доказано, что оператор A имеет положительный квадратный корень.

Докажем, что квадратный корень из A является единственном. Предположим, B_1– A-является положительном квадратный кормом $B_1B = BB_1$, от суда следует для любого $x \in H$ и $y = (B - B_1)x$, то

$$(By, y) + (B_1y, y) = ((B + B_1)y, y) = ((B + B_1)(B - B_1)x, y) = ((B^2 - B_1^2)x, y) = 0$$

поскольку B и B_1 являются положительными операторами $(By, y) = (B_1y, y) = 0$ равенство справедливо. Значит, $B = C^2$, C-самосопряженный оператор. Если

$$\| Cy \|^2 = (C^2 y, y) = (By, y) = 0,$$

то $Cy = 0$. Значит, $By = C(Cy) = 0$. Тогда $B_1y = 0$. Тогда

$$\| B_1x - Bx \|^2 = ((B - B_1)^2 x, x) = ((B - B_1)y, x) = 0,$$

то есть,

$$Bx = B_1x$$

доказана единственность квадратного корня.

Теорема 2. Для любого линейно ограниченного оператора A, AA^* и A^*A являются положительными операторами.

Доказательство. Действительно, для всех $x \in H$

$$(AA^* x, x) = (A^* x, A^* x) = \| A^* x \|^2 \geq 0$$

и

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = \| Ax \|^2 \geq 0.$$

Введем понятие модуля оператора с помощью этой теоремы: оператор $| A | = \sqrt{AA^*}$ называется модулем оператора A.

Пример 1. Найти квадратный корень из положительного оператора:

$$A : l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1, \frac{1}{2^2} x_2, \ldots, \frac{1}{n^2} x_n, \ldots),\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2.$$

Решение: Рассмотрим оператор

$$B : l_2 \to l_2,\ Bx = (x_1, \frac{1}{2} x_2, \ldots, \frac{1}{n} x_n, \ldots),\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$$

и доказываем, что $B^2 = A$. Действительно,

$$B^2x = B(Bx) = B(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}\frac{1}{n}x_n, \ldots)$$

$$= (x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \ldots, \frac{1}{n^2}x_n, \ldots) = Ax,\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2.$$

Пример 2. Найти квадратный корень из положительного оператора:

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Ax)(t) = (t+1)x(t),\ x \in L_2[0,1].$$

Решение. Рассмотрим следующий оператора B.

$$B: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Bx)(t) = \sqrt{t+1}\,x(t),\ x \in L_2[0,1],$$

тогда

$$(B^2x)(t)B((Bx)(t)) = B(\sqrt{t+1}x(t)) = \sqrt{t+1}\sqrt{t+1}\,x(t) = (t+1)x(t) = (Ax)(t).$$

равенство выполняется для всех $x \in L_2[0,1]$. Значит, оператор B квадратный корень из оператора A

Пример 3. Найти квадратный корень из положительного оператора:

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Ax)(t) = t^2\int_0^1 s^2x(s)ds,\ x \in L_2[0,1].$$

Решение. Рассмотрим следующий оператора B.

$$B: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Bx)(t) = kt^2\int_0^1 s^2x(s)ds,\ x \in L_2[0,1],$$

в этом случае k - некая постоянная неизменяемое, которая можно найти из условие $B^2 = A$ и $B \geq 0$.

$$(B^2x)(t) = (B(Bx))(t) = B\left(kt\int_0^1 sx(s)ds\right) = kt^2\int_0^1 s^2\left(ks^2\int_0^1 s'x(s')ds'\right)ds$$

$$= \frac{k^2}{5}t^2\int_0^1 s^2x(s)ds = t^2\int_0^1 s^2x(s)ds = (Ax)(t).$$

Из этого следует, что $k = \sqrt{5}$. Значит, квадратный корень оператора A

$$(Bx)(t) = \sqrt{5}t^2\int_0^1 s^2x(s)ds$$

Пример 4. Найти квадратный корень из положительного оператора:

$$A: m \to m,\ Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, 50x_{50}, 0, \ldots),\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in m.$$

Решение: Рассмотрим оператора

$$B: l_2 \to l_2,\ Bx = (x_1, \sqrt{2}x_2, \ldots, \sqrt{50}x_{50}, 0, \ldots),\ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in m$$

и доказываем, что $B^2 = A$. Действительно,

$$B^2 x = B(Bx) = B(x_1, \sqrt{2}x_2, \ldots, \sqrt{50}x_{50}, 0, \ldots) =$$

$$= (x_1, \sqrt{2}\sqrt{2}x_2, \ldots, \sqrt{50}\sqrt{50}x_{50}, 0, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, 50x_{50}, 0, \ldots) = Ax.$$

При написании данной статьи были использованы приемы, приведенные в работе [1-6].

Примеры самостоятельной работы

Найти квадратный корень из положительных операторов.

1. $A: L_2[-1,1] \to L_2[-1,1], (Ax)(t) = \int_{-1}^{1}(t + s + ts)x(s)ds.$

2. $A: C[0,\pi] \to C[0,\pi], (Ax)(t) = \int_{0}^{\pi} sin(t + s)\, x(s)ds.$

3. $A: l_1 \to l_1, \quad Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \ldots, \frac{n}{n+1}x_n, \ldots\right).$

4. $A: C[0,1] \to C[0,1], (Ax)(t) = \int_{0}^{1}(t^2 s + ts^2)x(s)ds.$

В заключение отметим, что понятие квадратного корня для произвольного самосопряженного положительного оператора в гильбертовом пространстве и примеры квадратного корня из положительных операторов имеет широкий спектр применений [7-11].

Следует отметить, что в настоящее время целесообразно использовать интерактивные методы при преподавании специальных предметов. Также, важно предоставить информацию об эффективном преподавании математики и ее применении на практике, использовании ряда передовых педагогических технологий [12-39] и интеграции с другими дисциплинами [12-14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исмоилова Д.Э. Метод формирования в преподавании темы Евклидовых пространств // Проблемы педагогики. 51:6 (2020). с. 89-91.

2. Исмоилова Д.Э. О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированного с обобщенной моделью Фридрихса // Наука и образование сегодня. 60:1 (2020). с. 21-24.

3. Дилмуродов Э.Б. (2016). Числовой образ матрицы размера 3х3 в частных случаях, Молодой ученый, 10, С. 5-7.

4. Дилмуродов Э.Б. (2016). Формула для числового образа трехдиагональной матрицы размера 3х3, Молодой ученый, 10, С. 3-5.

5. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Историзм в процессе обучения математике. Вестник науки и образования, 17-2 (95), 2020, С. 70-73.

6. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования. 96:18 (2020), часть 2, С 5-7.

7. Ходжиев С., Соҳибов Д.Б., Тағоев А.Н., Рахимова З.З. Muhandislik grafikasi fani va uning vazifalari proyeksiyalash usullari // Ученый XXI века, 82:2 (2022), с.3-6.

8. Ходжиев С., Жураева Н.О. Некоторые методические советы при решении степенно показательных уравнений и неравенств. Проблемы педагогики, 6(57), 2021. стр. 23-29.

9. Хайитова Х.Г. (2020). Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ». Вестник науки и образования, 16 2 (94). С. 25-28.

10. Хайитова Х.Г. (2021). Преимущества использования метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ». Проблемы педагогики, 53:2, С. 35-38.

11. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.

12. Расулов Х.Р., Раупова М.Х., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

13. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), С. 7-10.

14. Умиркулова Г.Х. (2021). Существенный и дискретный спектры семейства моделей Фридрихса. Наука и образование сегодня. № 1 (60), С. 17-20.
15. Сайлиева Г.Р. Использование метода «Математический рынок» в организации практических занятий по «Дискретной математике». Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 27-30.
16. Умиркулова Г.Х. (2020). Использование MathCad при обучении теме «Квадратичные функции». Проблемы педагогики. 51:6, С. 93-95.
17. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с. 16-19.
18. Умарова У.У. (2020). Роль современных интерактивных методов в изучении темы «Множества и операции над ними», Вестник науки и образования. 94:16, часть 2, С. 21-24.
19. Умарова У.У. (2020). Использование педагогических технологий в дистанционном обучении моодле. Проблемы педагогики 51:6, С. 31-34.
20. Muhitdinov R.T., Do’stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), 114-127.
21. Сайлиева Г.Р. Использование новых педагогических технологий в обучении предмету «Аналитическая геометрия». Вестник науки и образования. – 2020. – №. 18-2 (96). – С. 68-71.
22. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
23. Jo’raqulova F.M. (2021) Matematika darslarida axborot komunikatsion texnologiyalardan foydalanib kasbga yo’naltirish. Scientific progress 2 (6), 1672-1679.
24. Rasulov T.H., Rashidov A.Sh. (2020). The usage of foreign experience in effective organization of teaching activities in Mathematics. International Journal of Scientific & Technology Research. 9:4, pp. 3068-3071.
25. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2019). Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject. Journal of Global Research in Mathematical Archives, 6:10, pp. 43-45.

26. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.
27. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020), С. 29-32.
28. Дустова Ш.Б. (2020). Решение систем уравнения высшей степени при помощи программы Excel. Наука, техника и образование, 8 (72), С. 36-39.
29. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o‘qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.
30. Avezov A.X. Ta’limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.
31. Бобоева М.Н. (2020). Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными. Наука, техника и образование, 73:9, С. 48-51.
32. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. Academy. 55:4, pp. 68-71.
33. Ахмедов О.С. Основные требования к языку учителя математики. Наука, техника и образование. 2021. № 2 (77). Часть 2. стр. 74-75.
34. Ахмедов О.С. (2020). Метод «Диаграммы Венна» на уроках математики. Наука, техника и образование. №8 (72), С. 40-43.
35. Марданова Ф.Я. (2021). Нестандартные методы обучения высшей математике. Проблемы педагогики, 53:2, С. 19-22.
36. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. (2020). Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. Academy. 55:4, pp. 65-68.
37. Расулов Т.Х. (2020). Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения. Наука, техника и образование. 73:9, С. 74-76.

38. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
39. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений. Молодой ученый, 2015, 90:10, С. 16-20.