Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2023, № 7, с. 1–10 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Б.И. БАХРОНОВ, Т.Х. РАСУЛОВ, М. РЕХМАН

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГАМИЛЬТОНИАНА МОДЕЛИ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ РЕШЕТКИ

Аннотация. В данной статье представлен гамильтониан $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$, модели трехчастичной решетки с использованием нелокального потенциала. Рассматриваемый гамильтониан действует как тензорная сумма двух моделей Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$, что охватывает возмущения ранга 2, ассоциированные с системой трех квантовых частиц на d-мерной решетке. Исследуется число собственных значений, ассоциированных с гамильтонианом. Кроме того, даются подходящие условия существования собственных значений, локализованных внутри, в промежутке и снизу существенного спектра $H_{\mu,\lambda}$.

Ключевые слова: гамильтониан модели, решетка, возмущение, нелокальный потенциал, тензорная сумма, модель Фридрихса, спектр.

УДК: 517.984

DOI:

Введение

Дискретные операторы Шрёдингера действуют как аналоги трехчастичного оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^3$, возникающего в моделях физики твердого тела (см. [1]–[4]). Операторы такого типа также возникают в решеточной квантовой теории поля, за дальнейшими деталями мы отсылаем читателя к источнику [5]. В работах [6]–[8] были представлены модели гамильтонианов, ассоциированные с системами трех квантовых частиц, движущихся по трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, исследовался их существенный спектр и число собственных значений. Большой объем исследований, которые можно найти в литературе, посвящен конечности собственных значений таких моделей гамильтонианов.

Присутствие локальных потенциалов, т. е. умножение операторов на функцию, типично используется в литературе по физике. Но, с другой стороны, потенциалы могут действовать нелокально, например, в случае теории псевдо-потенциалов, см. [9]. Что касается периодических операторов, они действуют как сумма локального и конечномерного потенциалов. Нелокальные отделимые взаимодействия двух тел часто использовались в ядерной физике и задаче многих тел, поскольку уравнение Шрёдингера для двух тел для них легко решается, что влечет к замкнутым выражениям для широкого класса таких взаимодействий.

В данной статье рассматривается тензорная сумма $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$, двух моделей Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$ с возмущениями ранга 2. Интересующий нас гамильтониан ассоциирован с системой трех квантовых частиц на d-мерной решетке. Такие операторы обычно возникают в модели Хаббарда [10]. Нашей целью является исследование числа и расположения собственных

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 07.05.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

значений $H_{\mu,\lambda}$. Мы приводим доказательство существования собственных значений, локализованных внутри, в промежутке и снизу существенного спектра гамильтониана.

1. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса

Пусть $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначают соответственно множества всех комплексных, вещественных, целых и положительных целых чисел. Для $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ будет d-мерным тором. “Сложение” и “умножение на (вещественный) скаляр” элементов из $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ будут рассматриваться как операции на $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z}^1)^{\mathrm{d}}$. Например, если $\mathrm{d} = 4$ и

$$a = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad b = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \in \mathbb{T}^4,$$

то

$$a + b = \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad 6a = (\pi, \pi, 0, 0) \in \mathbb{T}^4.$$

Пусть $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ — гильбертово пространство, состоящее из (комплексных) функций с интегрируемым квадратом, заданных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Рассмотрим ограниченную и самосопряженную модель Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$, действующую на гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формуле

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2,$$

где $h_{0,0}$ — оператор умножения на функцию $u(\cdot)$:

$$(h_{0,0}g)(x) = u(x)g(x),$$

k_α, $\alpha = 1, 2,$ — нелокальные (интегральные) операторы взаимодействия:

$$(k_\alpha g)(x) = v_\alpha(x) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t)g(t)dt, \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь $g \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, $\mu, \lambda > 0$ — положительные вещественные числа, $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2,$ — вещественнозначные непрерывные функции, заданные на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Заметим, что самосопряженные модели Фридрихса, в которых существенный спектр может содержать лакуны, исследовались в [11]. Была получена формула для подсчета числа собственных значений, находящихся в произвольном интервале вне существенного спектра этого оператора. Найдено достаточное условие конечности дискретного спектра. Применение формулы для числа собственных значений дало возможность показать, что для частной модели Фридрихса существует бесконечное число собственных значений в лакуне, получена их асимптотика. В [12] было доказано существование единственного собственного значения снизу существенного спектра модели Фридрихса $h_\mu(p)$ для всех нетривиальных значений p при предположении, что $h_\mu(0)$ обладает резонансом порога реакции (виртуальный уровень) или пороговым собственным значением. Более того, также получено разложение порога реакции для определителя Фредгольма, ассоциированного с семейством моделей Фридрихса. Число, расположение и условия существования собственных значений обобщенной модели Фридрихса изучаются в [13], [14]. Для обобщенной модели Фридрихса существование на пороговых значениях, виртуальный уровень (резонанс порога реакции) и собственные значения, расположенные по обеим сторонам существенного спектра, исследовались в [15]–[17]. Существование так называемого двустороннего эффекта Ефимова для двумерной матрицы оператора, ассоциированного с решеточными системами для трехчастичных взаимодействий без сохранения числа частиц доказывается с использованием результатов из [17]. В [18] с помощью пороговых собственных значений и виртуальных уровней исследуется численный диапазон обобщенной модели Фридрихса. Вычисление существенного спектра сверху и снизу двумерной матрицы оператора относительно размерности тора и константы взаимодействия выполнено в [19].

В данной работе, в отличие от вышеупомянутых исследований, мы по большей части изучаем собственные значения модели Фридрихса $h_{\mu,\lambda}$, расположенные слева и справа от существенного спектра. Здесь и на протяжении статьи спектр, существенный спектр и дискретный спектр, соответствующие самосопряженным операторам, обозначаются соответственно через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\rm ess}(\cdot)$ и $\sigma_{\rm disc}(\cdot)$.

По определению возмущение $-\mu k_1 + \lambda k_2$ оператора $h_{0,0}$ действует как самосопряженный оператор ранга 2. По теореме Вейля [20] об инвариантности существенного спектра при конечных возмущениях ранга 2 существенный спектр оператора $h_{\mu,\lambda}$ совпадает со спектром $h_{0,0}$:

$$\sigma_{\rm ess}(h_{\mu,\lambda}) = \sigma(h_{0,0}) = [m; M],$$

здесь величины m и M заданы формулами

$$m := \min_{x\in\mathbb{T}^{\rm d}} u(x), \quad M := \max_{x\in\mathbb{T}^{\rm d}} u(x).$$

Определим аналитические функции $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$ (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $h_{\mu,\lambda}$) в $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ равенством

$$\Delta_{\mu,\lambda}(z) := \Delta^{(1)}_{\mu}(z)\Delta^{(2)}_{\lambda}(z) + \mu\lambda(I_{12}(z))^2,$$

где функции $\Delta^{(1)}_{\mu}(\cdot)$ и $\Delta^{(2)}_{\lambda}(\cdot)$ заданы на $\mathbb{C}\setminus[m;M]$ как

$$\Delta^{(1)}_{\mu}(z) := 1 - \mu I_{11}(z), \quad \Delta^{(2)}_{\lambda}(z) := 1 + \lambda I_{22}(z),$$

причем

$$I_{ij}(z) := \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v_i(t)v_j(t)dt}{u(t)-z}, \quad i,j=1,2.$$

Следующая лемма 1 характеризует соотношение между собственными значениями операторов $h_{\mu,\lambda}$ и нулями функции $\Delta_{\mu,\lambda}(\cdot)$.

Лемма 1. *Число $z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$ является собственным значением $h_{\mu,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\lambda}(z)=0$.*

Доказательство. Пусть число $z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$ является собственным значением $h_{\mu,\lambda}$, а $g\in L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ — соответствующая собственная функция. Тогда функция g удовлетворяет уравнению вида

$$(u(x)-z)g(x) - \mu v_1(x)\int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_1(t)g(t)dt + \lambda v_2(x)\int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_2(t)g(t)dt = 0. \tag{1}$$

Можно легко заметить, что для любого $z\in\mathbb{C}\setminus[m;M]$ соотношение $u(x)-z\neq 0$ верно при всех $x\in\mathbb{T}^{\rm d}$. Тогда уравнение (1) влечет

$$g(x) = \frac{\mu v_1(x)d_1 - \lambda v_2(x)d_2}{u(x)-z}, \tag{2}$$

где

$$d_\alpha := \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_\alpha(t)g(t)dt, \quad \alpha=1,2. \tag{3}$$

Подставляя выражение (2) для $g(\cdot)$ в равенство (3), мы заключаем, что уравнение (1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0$. □

Таким образом, из леммы 1 следует, что для дискретного спектра $h_{\mu,\lambda}$ выполняется равенство
$$\sigma_{\rm disc}(h_{\mu,\lambda}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0\}.$$
Поэтому
$$\sigma(h_{\mu,\lambda}) = [m; M] \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0\}.$$

Для исследования спектральных свойств оператора $h_{\mu,\lambda}$ рассмотрим ограниченные самосопряженные операторы (модель Фридрихса с возмущением ранга 1) $h_\mu^{(1)}$, $h_\lambda^{(2)}$, действующие на $L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ по правилу
$$h_\mu^{(1)} := h_{0,0} - \mu k_1, \quad h_\lambda^{(2)} := h_{0,0} + \lambda k_2. \tag{4}$$

Лемма 2. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением $h_\mu^{(1)}$ $\Big(h_\lambda^{(2)}\Big)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu^{(1)}(z) = 0$ $\Big(\Delta_\lambda^{(2)}(z) = 0\Big)$.*

Из леммы 2 получаем
$$\sigma_{\rm disc}(h_\mu^{(1)}) = \Big\{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta_\mu^{(1)}(z) = 0\Big\};$$
$$\sigma_{\rm disc}(h_\lambda^{(2)}) = \Big\{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : \Delta_\lambda^{(2)}(z) = 0\Big\}.$$

Для исследования условий существования собственных значений $h_{\mu,\lambda}^{(1)}$ будем использовать в этой статье еще следующее дополнительное предположение.

Предположение 1. *Предположим, что*
$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0, \tag{5}$$
где $\mathrm{mes}(\cdot)$ *— мера Лебега на* $\mathbb{R}$, *а* $\mathrm{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ *— носитель функции* $v_\alpha(\cdot)$.

Следующая лемма 3 устанавливает связь между собственными значениями $h_{\mu,\lambda}$ и $h_\mu^{(1)}$, $h_\lambda^{(2)}$.

Лемма 3. *Пусть выполняется предположение* 1. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением $h_{\mu,\lambda}$ тогда и только тогда, когда z является собственным значением одного из операторов $h_\mu^{(1)}$ или $h_\lambda^{(2)}$.*

Доказательство. По лемме 1 число $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ является собственным значением $h_{\mu,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\lambda}(z) = 0$. Если предположение 1 верно, то $I_{12}(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{R} \setminus [m; M]$. Поэтому $\Delta_{\mu,\lambda}(z) = \Delta_\mu^{(1)}(z)\Delta_\lambda^{(2)}(z)$. Применение леммы 2 завершает доказательство леммы 3. $\square$

По лемме 3, если выполняется предположение 1, дискретные спектры $h_{\mu,\lambda}$ и $h_\mu^{(1)}$, $h_\lambda^{(2)}$ связаны равенством
$$\sigma_{\rm disc}(h_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\rm disc}\Big(h_\mu^{(1)}\Big) \cup \sigma_{\rm disc}\Big(h_\lambda^{(2)}\Big).$$

Легко проверить, что операторы $h_\mu^{(1)}$ и $h_\lambda^{(2)}$ имеют более простую структуру, чем $h_{\mu,\lambda}$. Ввиду этого последнее равенство играет важную роль в дальнейшем изучении спектра $h_{\mu,\lambda}$.

Замечание 1. Пусть предположение 1 выполняется. Оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет не более одного простого собственного значения $E_\mu^{(1)}$ слева от m и не более одного простого собственного значения $E_\lambda^{(2)}$ справа от M.

2. Спектр гамильтониана трехчастичной модели

Обозначим гильбертово пространство симметричных комплекснозначных функций с интегрируемым квадратом, действующих на $\left(\mathbb{T}^{\rm d}\right)^2$, через $L_2^{\rm s}\big(\left(\mathbb{T}^{\rm d}\right)^2\big)$. Рассмотрим модель гамильтониана в виде

$$H_{\mu,\lambda}: L_2^{\rm s}((\mathbb{T}^{\rm d})^2) \to L_2^{\rm s}((\mathbb{T}^{\rm d})^2), \quad H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11}+V_{12}) + \lambda(V_{21}+V_{22}), \tag{6}$$

где $H_{0,0}$ — оператор умножения на функцию $u(x)+u(y)$:

$$(H_{0,0}f)(x,y) = (u(x)+u(y))f(x,y),$$

а $V_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$ — нелокальные операторы взаимодействия:

$$(V_{\alpha 1}f)(x,y) = v_\alpha(x)\int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_\alpha(t)f(t,y)dt, \quad (V_{\alpha 2}f)(x,y) = v_\alpha(y)\int_{\mathbb{T}^{\rm d}} v_\alpha(t)f(x,t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь $f \in L_2^{\rm s}\big(\left(\mathbb{T}^{\rm d}\right)^2\big)$. По определению операторы $V_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$ — частичные интегральные операторы с вырожденным ядром ранга 1.

Очевидно, что оператор $H_{\mu\,\lambda}$ является ограниченным и самосопряженным в $L_2^{\rm s}\big(\left(\mathbb{T}^{\rm d}\right)^2\big)$.

Поскольку функции $I_{ii}(\cdot)$, $i = 1,2$, монотонно возрастают на интервалах $(-\infty; m)$ и $(M;+\infty)$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости существуют следующие конечные или бесконечные пределы

$$I_{11}(m) = \lim_{z\to m-0} I_{11}(z), \quad I_{22}(M) = \lim_{z\to M+0} I_{22}(z). \tag{7}$$

Предположение 2. *Предположим, что*

$$|I_{11}(m)| < +\infty, \quad |I_{22}(M)| < +\infty. \tag{8}$$

Примеры, приведенные ниже, показывают, что класс функций $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$, удовлетворяющих предположениям 1 и 2, не пуст. Чтобы доказать этот факт для случая ${\rm d} = 1$, рассмотрим функции следующего вида:

$$\begin{aligned} &u(x) = 1-\cos x;\\ &v_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x\in[0;\pi];\\ 0 & \text{в противном случае};\end{cases}\\ &v_2(x) = \sin x - v_1(x), \quad x\in\mathbb{T}.\end{aligned} \tag{9}$$

Тогда $m = 0$, $M = 2$ и

$$I_{11}(0) = \int_{\mathbb{T}} \frac{v_1^2(t)dt}{u(t)} = \int_0^\pi \frac{(\sin t)^2 dt}{1-\cos t} = \int_0^\pi (1+\cos t)dt = \pi;$$

$$I_{22}(2) = \int_{\mathbb{T}} \frac{v_2^2(t)dt}{u(t)-2} = \int_{-\pi}^0 \frac{(\sin t)^2 dt}{1-\cos t-2} = -\int_{-\pi}^0 (1-\cos t)dt = -\pi.$$

Положим

$$\mu_0 := (I_{11}(m))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_{22}(M))^{-1}. \tag{10}$$

Нашим главным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть предположения* 1 *и* 2 *выполняются, тогда*

(i) *для любых* $0<\mu\le\mu_0$ *и* $0<\lambda\le\lambda_0$ *имеем*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2m;2M], \quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \emptyset;$$

(ii) *для любых* $\mu > \mu_0$ *и* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *число* $2E_\mu^{(1)}$ *является простым собственным значением* $H_{\mu,\lambda}$ *и*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = \Big[E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M\Big] \cup [2m; 2M], \quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \Big\{2E_\mu^{(1)}\Big\};$$

(iii) *для любых* $0 < \mu \le \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$ *число* $2E_\lambda^{(2)}$ *является простым собственным значением* $H_{\mu,\lambda}$ *и*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2m; 2M] \cup \Big[E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M\Big], \quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \Big\{2E_\lambda^{(2)}\Big\};$$

(iv) *для любых* $\mu > \mu_0$ *и* $\lambda > \lambda_0$ *числа* $2E_\mu^{(1)}$ *и* $2E_\lambda^{(2)}$ *являются простыми собственными значениями* $H_{\mu,\lambda}$*. Более того, выполняются равенства*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = \Big[E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M\Big] \cup [2m; 2M] \cup \Big[E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M\Big];$$

$$\sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \Big\{2E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)}; 2E_\lambda^{(2)}\Big\}.$$

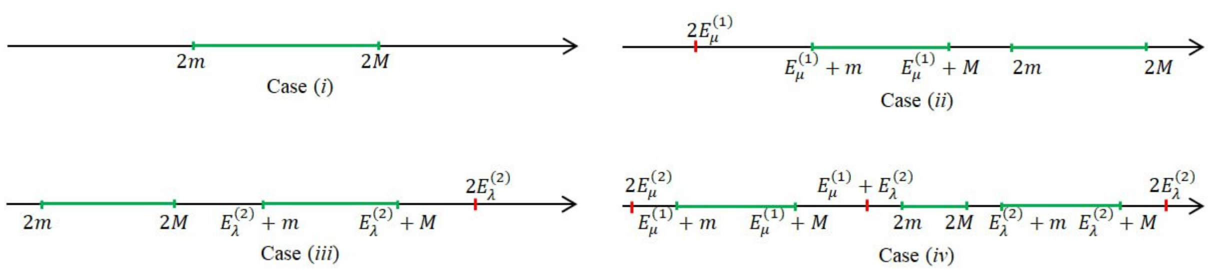

Рис. 1. Спектр $H_{\mu,\lambda}$.

Доказательство теоремы 1. Из определений $H_{\mu,\lambda}$ и $h_{\mu,\lambda}$ получаем представление

$$H_{\mu,\lambda} = h_{\mu,\lambda} \otimes I + I \otimes h_{\mu,\lambda},$$

где I — тождественный оператор на $L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$.

Поэтому с использованием теоремы о спектре тензорной суммы двух операторов получаем

$$\sigma(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(h_{\mu,\lambda}) + \sigma(h_{\mu,\lambda}). \tag{11}$$

Пусть выполняются предположения 1 и 2, тогда легко увидеть, что

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\mu^{(1)}(z) = \lim_{z \to +\infty} \Delta_\mu^{(1)}(z) = 1; \tag{12}$$

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\lambda^{(2)}(z) = \lim_{z \to +\infty} \Delta_\lambda^{(2)}(z) = 1. \tag{13}$$

(i) Пусть $0 < \mu \le \mu_0$. Функция $\Delta_\mu^{(1)}(\cdot)$ монотонно убывает на $(-\infty; m)$. Поэтому для всех $z \in (-\infty; m)$ имеем

$$\Delta_\mu^{(1)}(z) > \Delta_\mu^{(1)}(m) \ge \Delta_{\mu_0}^{(1)}(m) = 1 - \mu_0 I_{11}(m) = 0. \tag{14}$$

В соотношении, заданном равенством (14), можно увидеть, что $\Delta_\mu^{(1)}(z) > 0$ для всех $z < m$ и $\mu \in (0; \mu_0]$. По лемме 2 оператор $h_\mu^{(1)}$ не имеет собственных значений, лежащих слева от m.

Аналогично $\Delta_\lambda^{(2)}(z) > 1$ для всех $z < m$ и $\lambda > 0$. По лемме 2 оператор $h_\lambda^{(2)}$ не имеет собственных значений, лежащих слева от m.

Пусть $0 < \lambda \leq \lambda_0$. Функция $\Delta_\lambda^{(2)}(z)$ монотонно растет на интервале $(M;+\infty)$. Таким образом, для всех $z \in (M;+\infty)$ имеем

$$\Delta_\lambda^{(2)}(z) > \Delta_\lambda^{(2)}(M) \geq \Delta_{\lambda_0}^{(2)}(M) = 1 + \lambda_0 I_{22}(M) = 0. \tag{15}$$

Из соотношения (15) очевидно, что $\Delta_\lambda^{(2)}(z) > 0$ для всех $z > M$ и $\lambda \in (0;\lambda_0]$. По лемме 2 оператор $h_\lambda^{(2)}$ не имеет собственных значений, лежащих справа от M.

Заметим, что $\Delta_\mu^{(1)}(z) > 1$ для всех $z > M$ и $\mu > 0$. По лемме 2 оператор $h_\mu^{(1)}$ не имеет собственных значений, лежащих справа от M.

Таким образом, если $0 < \mu \leq \mu_0$ и $0 < \lambda \leq \lambda_0$, то по лемме 3 оператор $h_{\mu,\lambda}$ не имеет собственных значений из множества $\mathbb{R} \setminus [m;M]$. Отсюда получаем, что

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}) = \emptyset, \quad \sigma(h_{\mu,\lambda}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(h_{\mu,\lambda}) = [m;M],$$

откуда с учетом соотношения (11) можно заключить, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2m;2M], \quad \sigma_{\mathrm{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \emptyset.$$

(ii) Рассмотрим $\mu > \mu_0$. По определению $\Delta_\mu^{(1)}(m)$ и μ_0 получаем

$$\Delta_\mu^{(1)}(m) < \Delta_{\mu_0}^{(1)}(m) = 0.$$

Монотонный рост и непрерывность функции $\Delta_\mu^{(1)}(\cdot)$ на интервале $(-\infty, m)$ обеспечивают существование числа $E_\mu^{(1)} \in (-\infty, m)$ такого, что $\Delta_\mu^{(1)}\left(E_\mu^{(1)}\right) = 0$. По лемме 2 это число $E_\mu^{(1)}$ является собственным значением $h_\mu^{(1)}$.

В случае (i) наша цель — показать, что для любого $\lambda > 0$ оператор $h_\lambda^{(2)}$ не имеет собственных значений из интервала $(-\infty, m)$, а для любых $\mu > 0$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$ операторы $h_\mu^{(1)}$ и $h_\lambda^{(2)}$ не имеют собственных значений из интервала (M, ∞).

Следовательно по лемме 3 для любых $\mu > \mu_0$ и $0 < \lambda \leq \lambda_0$ оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет единственное собственное значение $E_\mu^{(1)}$ и

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(h_{\mu,\lambda}) = \left\{E_\mu^{(1)}\right\}, \quad \sigma(h_{\mu,\lambda}) = \left\{E_\mu^{(1)}\right\} \cup [m;M].$$

Ввиду равенства (11) для любых $\mu > \mu_0$ и $0 < \lambda \leq \lambda_0$ число $2E_\mu^{(1)}$ является простым собственным значением $H_{\mu,\lambda}$ и

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = \left[E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M\right] \cup [2m;2M], \quad \sigma_{\mathrm{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \left\{2E_\mu^{(1)}\right\}.$$

(iii) Пусть $0 < \mu \leq \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$. Тогда оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений из интервала $(-\infty, 0)$, а оператор $h_\mu^{(1)}$ не имеет собственных значений из интервала (M, ∞), см. случай (i).

Пусть $\lambda > \lambda_0$. Тогда

$$\Delta_\lambda^{(2)}(M) < \Delta_{\lambda_0}^{(2)}(M) = 0.$$

Функция $\Delta_\lambda^{(2)}(\cdot)$ монотонно убывает и непрерывна на интервале (M, ∞), поэтому существует число $E_\lambda^{(2)}$ такое, что выполняется равенство $\Delta_\lambda^{(2)}\left(E_\lambda^{(2)}\right) = 0$. По лемме 2 число $E_\lambda^{(2)}$

является собственным значением оператора $h_\lambda^{(2)}$, и в то же время по лемме 3 это число является собственным значением $h_{\mu,\lambda}$. Итак, если $0 < \mu \le \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$, то по лемме 3 оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет единственное собственное значение $E_\lambda^{(2)}$, лежащее вне отрезка $[m, M]$, и

$$\sigma_{\rm disc}(h_{\mu,\lambda}) = \left\{E_\lambda^{(2)}\right\}, \quad \sigma(h_{\mu,\lambda}) = [m; M] \cup \left\{E_\lambda^{(2)}\right\}.$$

Из равенства (11) получаем, что для любых $0 < \mu \le \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$ получаем, что число $2E_\lambda^{(2)}$ является простым собственным значением $H_{\mu,\lambda}$ и

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = [2m; 2M] \cup \left[E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M\right], \quad \sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \left\{2E_\lambda^{(2)}\right\}.$$

(iv) Пусть $\mu > \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$. Тогда оператор $h_{\mu,\lambda}$ имеет единственное собственное значение $E_\mu^{(1)}$ из интервала $(-\infty; m)$ и единственное собственное значение $E_\lambda^{(2)}$ из $(M; +\infty)$ (см. случаи (ii) и (iii)). В свою очередь отсюда следует, что

$$\sigma_{\rm disc}(h_{\mu,\lambda}) = \left\{E_\mu^{(1)}\right\} \cup \left\{E_\lambda^{(2)}\right\}, \quad \sigma(h_{\mu,\lambda}) = \left\{E_\mu^{(1)}\right\} \cup [m; M] \cup \left\{E_\lambda^{(2)}\right\},$$

а из соотношения (11) получаем, что для любых $\mu > \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$ числа $2E_\mu^{(1)}$ и $2E_\lambda^{(2)}$ являются простыми собственными значениями $H_{\mu,\lambda}$. Более того, выполняются равенства

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = \left[E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M\right] \cup [2m; 2M] \cup \left[E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M\right];$$

$$\sigma_{\rm pp}(H_{\mu,\lambda}) = \left\{2E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)}; 2E_\lambda^{(2)}\right\}.$$

□

В утверждении (iv) расположение собственного значения $E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)}$ оператора $H_{\mu,\lambda}$ зависит от значения параметров $\mu > 0$ и $\lambda > 0$. С помощью выбора $\mu > 0$ и $\lambda > 0$ можно получить $E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)} \in \sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})$.

Заключение. В этой статье мы показали существование таких критических значений μ_0 и λ_0 параметров μ и λ, что $\mu > \mu_0$, $\lambda > \lambda_0$ и эти значения располагаются слева и справа от существенного спектра модели Фридрихса. Результаты относительно спектра тензорной суммы двух операторов позволяют нам определить существенный спектр и дискретный спектр для гамильтониана трехчастичной решетки. Кроме того, нами показано, что гамильтониан трехчастичной решетки имеет ровно два собственных значения при любых $\mu > \mu_0$ и $\lambda > \lambda_0$.

Литература

[1] Graf G.M., Schenker D. 2-*Magnon Scattering in the Heisenberg Model*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67**, 91–107 (1997).

[2] Faria P.A. da Veiga, Ioriatti L., O'Carroll M. *Energy-Momentum Spectrum of Some Two-Particle Lattice Schrödinger Hamiltonians*, Phys. Rev. E. **66** (3), 016130 (2002).

[3] Mattis D. *The few-body problem on a lattice*, Rev. Modern Phys. **58** (2), 361–379 (1986).

[4] Mogilner A.I. *Hamiltonians of Solid State Physics at Few-Particle Discrete Schrödinger Operators: Problems and Results*, Advances in Sov. Math. **5**, 139–194 (1992).

[5] Malyshev V.A., Minlos R.A. *Linear Infinite-Particle Operators. Translations of Mathematical Monographs* (American Mathematical Society, Providence, 1995).

[6] Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. *The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles*, Rep. Math. Phys. **63** (3), 359–380 (2009).

[7] Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. *On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices*, Russ. J. Math. Phys. **14** (4), 377–387 (2007).

[8] Rasulov T.Kh., Mukhitdinov R.T. *The finiteness of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice*, Russian Math. (Iz. VUZ) **58** (1), 52–59 (2014).

[9] Heine V., Cohen M., Weaire D. *The Pseudopotential Concept* (Academic Press, New York–London, 1970).
[10] Karpenko B.V., Dyakin V.V., Budrina G.A. *Two electrons in Hubbard model*, Fiz., Met., Metalloved. **61** (4), 702–706 (1986).
[11] Muminov M.I. *Expression for the Number of Eigenvalues of a Friedrichs Model*, Math. Notes **82** (1), 67–74 (2007).
[12] Albeverio S., LakaevS.N., Muminov Z.I. *The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations*, J. Math. Anal. Appl. **330**, 1152–1168 (2007).
[13] Albeverio S., Lakaev S.N., Rasulov T.H. *On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics*, J. Stat. Phys. **127** (2), 191–220 (2007).
[14] Muminov M.I., Rasulov T.H., Tosheva N.A. *Analysis of the discrete spectrum of the family of* 3×3 *operator matrices*, Comm. Math. Anal. **23** (1), 17–37 (2020).
[15] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Eigenvalues and virtual levels of a family of* 2×2 *operator matrices*, Methods of Functional Analysis and Topology **25** (1), 273–281 (2019).
[16] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Analysis of the spectrum of a* 2×2 *operator matrices. Discrete spectrum asymptotics*, Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics **11** (2), 138–144 (2020).
[17] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Infinite number of eigenvalues of* 2×2 *operator matrices: Asymptotic discrete spectrum*, Theoret. and Math. Phys. **205** (3), 1564–1584 (2020).
[18] Rasulov T.Kh., Dilmurodov E.B. *Investigations of the numerical range of a operator matrix*, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. and Math. Sci. **35** (2), 50–63 (2014).
[19] Rasulov T.H., Dilmurodov E.B. *Estimates for the Bounds of the Essential Spectrum of a* 2×2 *Operator Matrix*, Contemporary Mathematics **1** (4), 170–186 (2020).
[20] Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators* (Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978).

Бекзод Ислом углы Бахронов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 705018, Узбекистан,

e-mail: b.i.bahronov@buxdu.uz

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 705018, Узбекистан,

e-mail: t.h.rasulov@buxdu.uz

Мутти-Ур Рехман

Университет AKFA,
ул. Миллий бог, д. 264, Ташкент, 111221, Узбекистан;
Суккурский институт делового администрирования,
65200, Суккур, Пакистан,

e-mail: m.rehman@akfauniversity.org, mutti.rehman@iba-suk.edu.pk

B.I. Bahronov, T.H. Rasulov, and M. Rehman

Conditions for the existence of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian

Abstract. In this article, we present a three-particle lattice model Hamiltonain $H_{\mu,\lambda}$, $\mu, \lambda > 0$ by making use of non-local potential. The Hamiltonian under consideration acts as a tensor sum of two Friedrichs models $h_{\mu,\lambda}$ which comprises a rank 2 perturbation associated with a system of three quantum particles on a d-dimensional lattice. The current study investigates the number of eigenvalues associated with the Hamiltonian. Furthermore, we provide the suitable conditions on the existence of eigenvalues localized inside, in the gap and below the bottom of the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}$.

Keywords: model Hamiltonian, lattice, perturbation, non-local potential, tensor sum, Friedrichs model, spectrum.

Bekzod Islom ugli Bahronov

Bukhara state university,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 705018 Uzbekistan,

`e-mail:` b.i.bahronov@buxdu.uz

Tulkin Husenovich Rasulov

Bukhara state university,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 705018 Uzbekistan,

`e-mail:` t.h.rasulov@buxdu.uz

Mutti-Ur Rehman

Akfa University,
264 Milliy bog str., Tashkent, 111221 Uzbekistan;
Sukkur IBA University,
Sukkur, 65200 Pakistan,

`e-mail:` m.rehman@akfauniversity.org, mutti.rehman@iba-suk.edu.pk