РОСКОМНАДЗОР
СВИДЕТЕЛЬСТВО ПИ № ФС 77-50836
ISSN (pr) 2312-8267 ISSN (el) 2413-5801

3MINUT.RU

НАУКА, ТЕХНИКА И ОБРАЗОВАНИЕ

SCIENCE, TECHNOLOGY AND EDUCATION

СЕНТЯБРЬ
2020
№ 8 (72)

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ «НАУКА, ТЕХНИКА И ОБРАЗОВАНИЕ» № 8(72) 2020 ISSN 2312-8267

ISSN 2312-8267 (печатная версия)
ISSN 2413-5801 (электронная версия)

Наука, техника и образование

2020. № 8 (72)

Москва
2020

Содержание

21. *Расулов Т.Х.* О дискретном спектре одного модельного оператора в пространстве Фока // Теорет. матем. физика. 152:3, 2007. С. 518-528.
22. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра // Функциональный анализ и его приложения, 37:1, 2003. С. 81.
23. *Лакаев С.Н., Расулов Т.Х.* Модель в теории возмущений существенного спектра многочастичных операторов // Математические заметки, 73:4, 2003. С. 556-564.

О ВИРТУАЛЬНОМ УРОВНЕ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Бахронов Б.И. Email: Bahronov1172@scientifictext.ru

Бахронов Бекзод Ислом угли – преподаватель,
кафедра математического анализа, физико-математический факультет,
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *данная статья посвящена исследованию виртуального уровня модели Фридрихса H с двумерным возмущением в гильбертовом пространстве. Этот модель является ограниченной и самосопряженной. В данном случае модель Фридрихса H соответствует оператору энергии системы двух квантовых частиц на трехмерной решетке. Найдено критическое значение параметра взаимодействия. Определены условия существования так называемых виртуальных уровней модели Фридрихса H относительно параметра взаимодействия и параметр функции.*
Ключевые слова: *модель Фридрихса, виртуальный уровень, параметр взаимодействия, оператор энергии, система частиц, критическое значение.*

ON THE VIRTUAL LEVEL OF A FRIEDRICHS MODEL WITH RANK TWO PERTURBATION

Bahronov B.I.

Bahronov Bekzod Islom ugli – Teacher,
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL ANALYSIS, FACULTY OF PHYSICS AND MATHEMATICS,
BUKHARA STATE UNIVERSITY, BUKHARA, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *the present paper is devoted to the investigations of the virtual level of a Friedrichs model H with rank two perturbation in the Hilbert space. This model is a bounded and self-adjoint. In this case the Friedrichs model H corresponding to the energy operator of the system of two quantum particles on the three-dimensional lattice. The critical values of the coupling parameter are found. An existence conditions of the virtual level of the Friedrichs model H are investigated with respect to the coupling parameter and parameter function.*
Keywords: *Friedrichs model, virtual level, coupling parameter, energy operator, system of particles, criticial value.*

УДК 517.958

В ряде задач анализа, математической физики и теории вероятностей возникают операторы, носящие название операторов Фридрихса [1]. В настоящей работе рассматривается модель Фридрихса H соответствующая гамильтониану системы двух квантовых частиц на трехмерной решетке. Данная модель является линейной, ограниченной и самосопряженной, причем оператор возмущения имеет ранг 2. Найдено критическое значение параметра взаимодействия. Определены условия существования так называемых виртуальных уровней модели Фридрихса H относительно параметра взаимодействия и параметр функции. В работах [2-4] исследованы дискретные и пороговые собственные значения, а также числовая область значений модели H. А работа [5] посвящена изучению трехчастичного модельного оператора, записывающихся как тензорная сумма моделей Фридрихса. Следует отметить, что в работах [6-23] рассматриваются модельные операторы, ассоциированных с системой трех частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, где роль двухчастичного оператора Шредингера играет модель Фридрихса.

Пусть $L_2(T^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на трехмерном торе T^3. Рассмотрим модель Фридрихса H, действующую в гильбертовом пространстве $L_2(T^3)$ по формуле

$$H := H_0 - V_1 + V_2, \qquad (1)$$

где операторы H_0 и $V_\alpha,\ \alpha = 1,2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p) = u(p)f(p), \quad (V_\alpha f)(p) = \mu_\alpha \upsilon_\alpha(p)\int_{T^d} \upsilon_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь $\mu_\alpha > 0, \alpha = 1,2$-параметр взаимодействия, $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot), \alpha = 1,2$-вещественнозначные, непрерывные функции на T^d. Здесь операторы $V_\alpha, \alpha = 1,2$ являются нелокальные операторы взаимодействия.

Легко можно проверить, что модель Фридрихса H, определенная по формуле (1), является ограниченным и самосопряженным оператором.

По определению оператор возмущения $-V_1 + V_2$ невозмущенного оператора H_0 является самосопряженным оператором ранга 2. В силу известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга получим, что для существенного спектра $\sigma_{ess}(H)$ оператора H имеет место равенство $\sigma_{ess}(H) = [E_1; E_2]$,

где числа E_1 и E_2 определяются по равенствам

$$E_1 := \min_{p \in T^3} u(p),\ E_2 := \max_{p \in T^3} u(p)$$

Пусть $\mathrm{supp}\{v(\cdot)\}$ - носитель функции $v(\cdot)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$ - мера Лебега множества $\Omega \subset T^3$. Всюду в работе предположим, что функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 \in T^3$, имеет единственный невырожденный максимум в точке $p_2 \in T^3$, для $\alpha = 1,2$ функция $v_\alpha(\cdot)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $p_\alpha \in T^3$.

В этом случае существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1 |p - p_\alpha|^2 \le |u(p) - E_\alpha| \le C_2 |p - p_\alpha|^2,\ p \in U_\delta(p_\alpha); \qquad (2)$$

$$|u(p) - E_\alpha| > C_3,\ p \notin U_\delta(p_\alpha); \qquad (3)$$

где

$$U_\delta(p_\alpha) := \{p \in T^3 : |p - p_\alpha| < \delta\}.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега вытекает, что

$$\lim_{z \to E_1 - 0} \int_{T^3} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - z} = \int_{T^3} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - E_1},\quad \lim_{z \to E_2 + 0} \int_{T^3} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - z} = \int_{T^3} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - E_2}.$$

Учитывая оценки (2), (3) и непрерывность функции $v_\alpha(\cdot)$ имеем, что последние интегралы конечны. Положим

$$\mu_\alpha^0 := (-1)^{\alpha+1}\left(\int_{T^3}\frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t)-E_\alpha}\right)^{-1}.$$

Пусть $C(T^3)$ (соответственно $L_1(T^3)$) – банахово пространство непрерывных (соответственно интегрируемых) функций, определенных на T^3.

Определение. Пусть $\alpha = 1{,}2$. Говорят, что оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$, если число 1 является собственным значением интегрального оператора

$$(G_\alpha\psi_\alpha)(p) = \int_{T^3}\frac{\mu_1 v_1(p)v_1(t) - \mu_2 v_2(p)v_2(t)}{u(t)-E_\alpha}\psi_\alpha(t)dt, \psi_\alpha \in C(T^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ_α удовлетворяет условию $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$.

Теорема. Пусть $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$ и $\alpha \in \{1,2\}$. Число 1 является собственным значением интегрального оператора G_α тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$. Следовательно, число $z = E_\alpha$ является виртуальном уровнем оператора H тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$. В этом случае, значение параметра взаимодействия $\mu_\beta > 0$, $\beta \neq \alpha$ произвольна.

Заметим, что если для $\alpha \in \{1,2\}$ оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$, то решение уравнение $G_\alpha\psi_\alpha = \psi_\alpha$ при условии $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$ равно (с точностью до константы) функции $v_\alpha(\cdot)$.

Отметим, что в определении виртуального уровня требование наличия собственного значения $\lambda = 1$ оператора G_α соответствует существованию решения уравнения $Hf = E_\alpha f$, а из условия $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$ следует, что решения f этого уравнения не принадлежит пространству $L_2(T^3)$. Точнее, если оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$, то функция

$$f_\alpha(p) = (-1)^{\alpha+1}\frac{\mu_\alpha^0 v_\alpha(p)}{u(p)-E_\alpha}$$

удовлетворяет уравнению $Hf_\alpha = E_\alpha f_\alpha$ и $f_\alpha \in L_1(T^3) \setminus L_2(T^3)$.

Список литературы / References

1. *Friedrichs K.O.* Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators // Math. Ann., 115:1, 1938, 249-272.
2. *Бахронов Б.И.* Дискретные и пороговые собственные значения модели Фридрихса с двумерным возмущением // Вестник науки и образования. 94:16, 2020. Часть 2. С. 9-13.
3. *Bahronov B.I., Rasulov T.H.* Structure of the numerical range of Friedrichs model with rank two perturbation // European science. 51:2, 2020. P . 15-18.