Моя профессиональная карьера

Научно-образовательный электронный журнал

ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ

Выпуск №25 (том 4)
(апрель, 2022)

Международный научно-образовательный
электронный журнал
«ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ»

УДК 37
ББК 94

Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №25 (том 4) (апрель, 2022). Дата выхода в свет: 30.04.2022.

Сборник содержит научные статьи отечественных и зарубежных авторов по экономическим, техническим, философским, юридическим и другим наукам.

Миссия научно-образовательного электронного журнала «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ» состоит в поддержке интереса читателей к оригинальным исследованиям и инновационным подходам в различных тематических направлениях, которые способствуют распространению лучшей отечественной и зарубежной практики в интернет пространстве.

Целевая аудитория журнала охватывает работников сферы образования (воспитателей, педагогов, учителей, руководителей кружков) и школьников, интересующихся вопросами, освещаемыми в журнале.

Материалы публикуются в авторской редакции. За соблюдение законов об интеллектуальной собственности и за содержание статей ответственность несут авторы статей. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов статей. При использовании и заимствовании материалов ссылка на издание обязательна.

ФИО авторов: *Бахронов Бекзод Ислом угли*
Бухарский государственный университет
Физико-математический факультет
Журакулова Фарангис Мурат кизи
Бухарский государственный университет
Физико-математический факультет
Название публикации: «ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ПРИМЕРЫ»

Аннотация: В статье даны понятие положительности для произвольного самосопряжённого оператора в пространстве Гилберта и приведены примеры положительных операторов. При решение примеров не однократно применено обобщенное неравенство Коши-Буняковского.

Ключевые слова: пространство Гилберта, самосопряженный оператор, положительный оператор, неравенство Коши-Буняковского, монотонная возрастающая последовательность, монотонная убывающая последовательность.

Пусть H - гильбертово пространство и $A: H \to H$ самосопряженный оператор.
Если для произвольного $x \in H$ элемента $(Ax, x) \geq 0$ выполняется неравенство и для хотя бы одного $x_0 \in H$ элемента $(Ax_0, x_0) > 0$, тогда A называется положительным оператором и обозначается в виде $A > 0$.
Если для $A, B: H \to H$ самосопряженных операторов $A - B > 0$, тогда оператор A называется большим, чем оператор B и обозначается так $A > B$. Если $A > B$ или $A = B$, то это обозначаем $A \geq B$.
Операция неравенства, введенное в множестве самосопряженных операторов, имеет следующие свойства:
1) если $A \geq B,\ C \geq D$, тогда $A + C \geq B + D$;
2) если $A \geq 0,\ \ \alpha \geq 0$, тогда $\alpha A \geq 0$;

3) если $A \ge B,\ B \ge C$, тогда $A \ge C$;

4) если для $A > 0$ оператора существует A^{-1} оператор, тогда $A^{-1} > 0$;

Лемма 1. $A, B \in L(H)$ – неотрицательные операторы. Если α, β – неотрицательные действительные числа, тогда $\alpha A + \beta B$ оператор тоже неотрицательный.

Доказательство. Доказательства этой леммы следует из свойств скалярного умножения и определения неотрицательнго оператора

$$((\alpha A + \beta B)x, x) = \alpha(Ax, x) + \beta(Bx, x) \ge 0.$$

Лемма 2. Пусть A неотрицательный оператор. Тогда имеет место следующее обобщенное неравенство Коши-Буняковского:

$$|(Ax, y)| \le \sqrt{(Ax, x)}\sqrt{(Ay, y)}.$$

Доказательство. Вводим обозначение $[x, y] = (Ax, y)$. Следующие свойства можно легко проверить:

1) $[x, x] \ge 0$;

2) $[x, y] = \overline{[y, x]}$;

3) $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$ (для всех λ комплексных чисел);

4) $[x_1 + x_2, y] = [x_1, y] + [x_2, y]$.

Значить, функционал $[\cdot,\cdot]$ удовлетворяет всем условиям скалярного умножения, кроме одного, то есть отношение $[x, x] = 0$ могут не выполняться только при $x = 0$.

Верно следующее неравенство:

$$[x + \lambda y, x + \lambda y] \ge 0,\ x, y \in H,\ \lambda \in C.$$

Рассматриваем выражение слева как квадратичную функцию по отношению к λ :

$$[x, x] + 2\mathrm{Re}(\lambda [x, y]) + |\lambda|^2 [y, y] \ge 0. \tag{1}$$

Предположим, что $[y, y] = 0$. Для выполнение неравенство $[x, x] + 2\mathrm{Re}(\lambda [x, y]) \ge 0$ для любых чисел $\lambda \in C$ должно быть равным

$\mathrm{Re}([x,y])=0$. Подставляя λ в $i\lambda$ находим, что $\mathrm{Im}([x,y])=0$. Таким образом, если $[y,y]=0$, то выполняется $[x,y]=0$ равенства. В этом случае выполняется неравенство Коши-Буняковского, представленное в лемме 2.

Пусть теперь $[y,y]>0$ и $\lambda=-[x,y]/[y,y]$, то $\overline{\lambda}=-[y,x]/[y,y]$.

$$[x,x]-\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}-\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}+\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}\geq 0$$

формируем

$$[x,x]-\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}-\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}+\frac{|[x,y]|^2}{[y,y]}\geq 0$$

неравенство.

Упрощая последнее неравенство получим

$$|[x,y]|^2\leq[x,x][y,y].$$

Пример 1. Исследуйте на положительность оператора:

$$A:R^3\to R^3,\ Ax=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1),\ x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3.$$

Решение: Как известно, справедливо равенство

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

для произвольных элементов $x,y\in R^3$.

Проверяем заданный оператор на само сопряжённость:

$$(Ax,y)=(x_1+x_2)y_1+(x_2+x_3)y_2+(x_3+x_1)y_3$$

$$=x_1(y_1+y_2)+x_2(y_2+y_3)+x_3(y_3+y_1)=(x,Ay).$$

Оценим (Ax,x) для любых элементов из $x\in R^3$:

$$(Ax,x)=(x_1+x_2)x_1+(x_2+x_3)x_2+(x_3+x_1)x_3$$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^3+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geq 0.$$

Если элемент x_0 выбран как $x_0=(1,1,0)$, тогда

$$(Ax_0,x_0)=2+1=3>0.$$

Следовательно, A-положительный оператор.

Пример 2. Исследуйте на положительность оператора

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Af)(t) = (t+1)\, f(t),\ \ f \in L_2[0,1].$$

Решение: Известно, что для любых элементов $f, \varphi \in L_2[0,1]$ скалярное произведение определяется в виде

$$(f, \varphi) = \int_0^1 f(t)\overline{\varphi(t)}dt$$

Из этого равенство

$$(Af, \varphi) = \int_0^1 (Af)(t)\overline{\varphi(t)}dt = \int_0^1 (t+1)\, f(t)\overline{\varphi(t)}dt = \int_0^1 f(t)\overline{(t+1)\varphi(t)}dt = (f, A\varphi)$$

справедливо для произвольных элементов $f, \varphi \in L_2[0,1]$, A оператор самосопряжены. A по определению оператора

$$(Af, f) = \int_0^1 (Af)(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^1 (t+1)\, f(t)\overline{f(t)}dt = \int_0^1 (t+1)\, |\, x(t)\,|^2 dt \ge 0$$

справедливо. Для элемента $f_0(t) \equiv 1$

$$(Af_0, f_0) = \int_0^1 (t+1)dt = (\frac{t^2}{2} + t)\,|_0^1 = \frac{3}{2} > 0$$

отношение справедливо. Следовательно, A-положительный оператор..

Пример 3. Проверьте оператора на положительность:

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ (Ax)(t) = t^2 \int_0^1 s^2 x(s)ds,\ x \in L_2[0,1].$$

Решение: Пусть $x, y \in L_2[0,1]$ являются произвольными элементами, тогда имеет место

$$(Ax, y) = \int_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}dt = \int_0^1 \left(t^2 \int_0^1 s^2 x(s)ds \right)\overline{y(t)}dt = \int_0^1\int_0^1 t^2 s^2 x(s)\overline{y(t)}dsdt$$

$$= \int_0^1 x(t)\overline{\left(t^2 \int_0^1 s^2 y(s)ds \right)}dt = (x, Ay).$$

Отсюда следует, что Aоператор самосопряжено.

Вычисляем (Ax, x) для $x \in L_2[0,1]$ произвольного элемента:

$$(Ax,x)=\int_0^1\left(t^2\int_0^1 s^2x(s)ds\right)\overline{x(t)}dt=\int_0^1 s^2x(s)ds\overline{\left(\int_0^1 s^2x(s)ds\right)}=\left|\int_0^1 s^2x(s)ds\right|^2\geq 0.$$

Для элемента $x_0(t)\equiv 1$

$$(Ax_0,x_0)=\left|\int_0^1 s^2ds\right|^2=\frac{1}{9}>0.$$

Следовательно, A-положительный оператор.

Пример 4. Проверьте оператора на положительность:

$$A:m\to m,\ Ax=(x_1,2x_2,\ldots,10x_{10},0,\ldots),\ x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in m.$$

Решение: Для любых $x,y\in m$ справедливо равенство $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$. С учетом этого, исследуем на самосопряжённость оператора

$$(Ax,y)=\sum_{n=1}^{10}nx_n\overline{y_n}=\sum_{n=1}^{10}x_n\overline{(ny_n)}=(x,Ay).$$

По определение самосопряжённого оператора A отношение

$$(Ax,x)=\sum_{n=1}^{10}n\,|\,x_n\,|^2\geq 0$$

выполняется для произвольного $x\in m$. Если положить $x_0=(1,0,\ldots,0,\ldots)\in m$, тогда $(Ax_0,x_0)=1>0$. Следовательно, A-положительный оператор.

При написании данной статьи были использованы приемы, приведенные в работе [1-6].

Примеры для самостоятельной работы

Исследовать операторов на положительность.

1. $A: l_2\to l_2,\quad Ax=(x_1,2x_2,\ldots,50x_{50},0,\ldots).$

2. $A: l_2\to l_2,\quad Ax=\left(0,\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,\ldots,\frac{n-1}{n}x_n,\ldots\right).$

3. $A: C[0,1]\to C[0,1], (Ax)(t)=t^2\int_0^1 s^2x(s)ds.$

4. $A: C[0,\pi]\to C[0,\pi], (Ax)(t)=\int_0^{\pi} sin(t+s)\,x(s)ds.$

5. $A: l_1\to l_1,\quad Ax=\left(\frac{1}{2}x_1,\frac{2}{3}x_2,\ldots,\frac{n}{n+1}x_n,\ldots\right).$

Отметим, что вопросы, изученные в статье, объяснена понятными для студентов. Самосопряжённые операторы широко применяются не только в теории операторов функционального анализа, но и в области дифференциальных уравнений [7-33]. В дальнейшем рекомендуем изучить статьей посвщенных к приложению операторов в биологии [34-39].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исмоилова Д.Э. Метод формирования в преподавании темы Евклидовых пространств // Проблемы педагогики. 51:6 (2020). с. 89-91.

2. Исмоилова Д.Э. О свойствах определителя Фредгольма, ассоциированного с обобщенной моделью Фридрихса // Наука и образование сегодня. 60:1 (2020). с. 21-24.

3. Дилмуродов Э.Б. (2016). Числовой образ матрицы размера 3x3 в частных случаях, Молодой ученый, 10, С. 5-7.

4. Дилмуродов Э.Б. (2016). Формула для числового образа трехдиагональной матрицы размера 3x3, Молодой ученый, 10, С. 3-5.

5. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. Историзм в процессе обучения математике. Вестник науки и образования, 17-2 (95), 2020, С. 70-73.

6. Мамуров Б.Ж., Жураева Н.О. О первом уроке по теории вероятностей. Вестник науки и образования. 96:18 (2020), часть 2, С 5-7.

7. Хайитова Х.Г. (2020). Использование эвристического метода при объяснении темы «Непрерывные линейные операторы» по предмету «Функциональный анализ». Вестник науки и образования, 16 2 (94). С. 25-28.

8. Хайитова Х.Г. (2021). Преимущества использования метода анализа при изучении темы «Непрерывные функции» по предмету «Математический анализ». Проблемы педагогики, 53:2, С. 35-38.

9. Умиркулова Г.Х. (2020). Использование MathCad при обучении теме «Квадратичные функции». Проблемы педагогики. 51:6, С. 93-95.

10. Ходжиев С., Соҳибов Д.Б., Тағоев А.Н., Рахимова З.З. Muhandislik grafikasi fani va uning vazifalari proyeksiyalash usullari // Ученый XXI века, 82:2 (2022), с.3-6.
11. Ходжиев С., Жураева Н.О. Некоторые методические советы при решении степенно показательных уравнений и неравенств. Проблемы педагогики, 6(57), 2021. стр. 23-29.
12. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с. 16-19.
13. Умарова У.У. (2020). Роль современных интерактивных методов в изучении темы «Множества и операции над ними», Вестник науки и образования. 94:16, часть 2, С. 21-24.
14. Умарова У.У. (2020). Использование педагогических технологий в дистанционном обучении моодле. Проблемы педагогики 51:6, С. 31-34.
15. Avezov A.X. Oliy matematika fanini o'qitishda tabaqalash texnologiyasidan foydalanish imkoniyatlari // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.778-788.
16. Avezov A.X. Ta'limning turli bosqichlarida innovatsion texnologiyalardan foydalanish samaradorligini oshirish // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.789-797.
17. Бобоева М.Н. (2020). Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными. Наука, техника и образование, 73:9, С. 48-51.
18. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. Academy. 55:4, pp. 68-71.
19. Ахмедов О.С. Основные требования к языку учителя математики. Наука, техника и образование. 2021. № 2 (77). Часть 2. стр. 74-75.
20. Ахмедов О.С. (2020). Метод «Диаграммы Венна» на уроках математики. Наука, техника и образование. №8 (72), С. 40-43.

21. Марданова Ф.Я. (2021). Нестандартные методы обучения высшей математике. Проблемы педагогики, 53:2, С. 19-22.
22. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. (2020). Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. Academy. 55:4, pp. 65-68.
23. Muhitdinov R.T., Do'stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), 114-127.
24. Умиркулова Г.Х. (2021). Существенный и дискретный спектры семейства моделей Фридрихса. Наука и образование сегодня. № 1 (60), С. 17-20.
25. Сайлиева Г.Р. Использование метода «Математический рынок» в организации практических занятий по «Дискретной математике». Проблемы педагогики. 53:2 (2021), С. 27-30.
26. Сайлиева Г.Р. Использование новых педагогических технологий в обучении предмету «Аналитическая геометрия». Вестник науки и образования. – 2020. – №. 18-2 (96). – С. 68-71.
27. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
28. Jo'raqulova F.M. (2021) Matematika darslarida axborot komunikatsion texnologiyalardan foydalanib kasbga yo'naltirish. Scientific progress 2 (6), 1672-1679.
29. Rasulov T.H., Rashidov A.Sh. (2020). The usage of foreign experience in effective organization of teaching activities in Mathematics. International Journal of Scientific & Technology Research. 9:4, pp. 3068-3071.
39. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2019). Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject. Journal of Global Research in Mathematical Archives, 6:10, pp. 43-45.
31. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.

32. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020), С. 29-32.
33. Дустова Ш.Б. (2020). Решение систем уравнения высшей степени при помощи программы Excel. Наука, техника и образование, 8 (72), С. 36-39.
34. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики № 53:2 (2021), С. 7-10.
35. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
36. Расулов Х.Р., Раупова М.Х., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
37. Расулов Т.Х. (2020). Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения. Наука, техника и образование. 73:9, С. 74-76.
38. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
39. Расулов Т.Х., Нуриддинов Ж.З. Об одном методе решения линейных интегральных уравнений. Молодой ученый, 2015, 90:10, С. 16-20.