БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИКА ВА УНИ ЎҚИТИШНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

(мақолалар тўплами)

II

БУХОРО–2021

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗ КАФЕДРАСИ

МАТЕМАТИКА ВА УНИ ЎҚИТИШНИНГ ЗАМОНАВИЙ УСУЛЛАРИ

(мақолалар тўплами)

II

БУХОРО–2021

МУАЛЛИФЛАР ЖАМОАСИ. Математика ва уни ўқитишнинг замонавий усуллари (мақолалар тўплами). II-қисм. – Бухоро, 100 б.

Ушбу тўпламда математика фанини ўқитишда янги педагогик технологиялар ва интерфаол усуллар, шарқ алломаларининг математикага доир ишларидан таълим жараёнида жараёнида фойдаланиш, олий таълим ва касб-ҳунар таълими орасидаги узвийлик каби масалалар бўйича долзарб муаммолар, уларни ҳал этиш бўйича таклиф ва тавсияларга асосланган мақолалар жамланган.

Мақолалар тўплами Олий ва ўрта махсус таълими ҳамда умумтаълим мактаблари педагог ходимлари, таянч докторантлар, мустақил тадқиқотчилар, магистрантлар, бакалавр таълим йўналиши талабалари ҳамда ушбу соҳага қизиқувчилар фойдаланишлари мумкин.

Тўпламга киритилган мақолалар мазмуни ва далилларнинг ҳаққонийлиги учун муаллифлар масъулдирлар.

Мақолалар тўплами Бухоро давлат университети Математик анализ кафедрасининг 2021 йил 10 февралдаги йиғилиш қарори ва Физика-математика факультети Илмий кенгашининг 2021 йил 11 февралдаги навбатдан ташқари йиғилиши қарори билан нашрга тавсия этилган.

МАСЪУЛ МУҲАРРИРЛАР:

Т.Ҳ.Расулов – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.
Б.Ж.Мамуров – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.
Ҳ.Р.Расулов – БухДУ Математик анализ кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

ТЕХНИК МУҲАРРИРЛАР:

Д.Э.Дилмуродов – БухДУ Математик анализ кафедраси таянч докторанти
Ғ.Ғ.Қурбонов – БухДУ Математик анализ кафедраси таянч докторанти
Н.А.Тошева – БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси
Б.И.Баҳронов – БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

МАТЕМАТИКА СОҲАСИДА МАКТАБ-ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТИ ҲАМКОРЛИГИНИ РИВОЖЛАНТИРИШ ИСТИҚБОЛЛАРИ

Тўлқин РАСУЛОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Бобохон МАМУРОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Маълумки, 2020 йилда “Илм, маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш” Давлат дастурига мувофиқ янги Ўзбекистонни барпо этиш бўйича барча соҳалар билан бир қаторда таълим соҳасида ҳам изчил ислоҳотлар олиб борилди. Давлатимиз раҳбари Олий Мажлисга ва халқимизга йўлланган 2020 йилги Мурожаатномасида биз ўз олдимизга мамлакатимизда Учинчи Ренессанс пойдеворини барпо этишдек улуғ мақсадни қўйган эканмиз, бунинг учун янги Хоразмийлар, Берунийлар, Ибн Синолар, Улуғбеклар, Навоий ва Бобурларни тарбиялаб берадиган муҳит ва шароитларни яратишимиз кераклигини айтиб ўтдилар. Бунда, аввало, таълим ва тарбияни ривожлантириш, соғлом турмуш тарзини қарор топтириш, илм-фан ва инновацияларни тараққий эттириш миллий ғоямизнинг асосий устунлари бўлиб хизмат қилиши лозимлиги таъкидланди. Ушбу мақсад йўлида ёшларимиз ўз олдига катта марраларни қўйиб, уларга эришишлари учун кенг имкониятлар яратиш ва ҳар томонлама кўмак бериш – барчамиз учун энг устувор вазифа бўлиши зарурлиги яна бир бор айтиб ўтилди. Халқимизнинг асрий орзу-умидларини рўёбга чиқарадиган буюк ва қудратли кучга айланадиган ёшларни тарбиялаш мақсадида “Янги Ўзбекистон – мактаб остонасидан, таълим-тарбия тизимидан бошланади”, деган ғоя асосида кенг кўламли ислоҳотларни амалга оширилиши кўзда тутилмоқда.

2021 йилга мамлакатимизда “Ёшларни қўллаб-қувватлаш ва аҳоли саломатлигини мустаҳкамлаш йили” деб ном берилди. Таълим сифатини тубдан яхшилаш мақсадида, аввало, ўқув дастурлари, ўқитувчи учун методик қўлланмаларни илғор халқаро мезонларга мослаштириш лозим. Ўқувчиларнинг таҳлилий ва креатив фикрлаш қобилиятини ривожлантириш учун уларга учун сермазмун ва тушунарли дарсликлар яратиш вазифалари қўйилган. Умумтаълим мактабларидаги таълим сифати пойтахтда ҳам, олис қишлоқларда ҳам юқори бўлиши шарт. Бунинг учун чекка ҳудудларда мактабларни малакали кадрлар билан таъминлаш, таълим сифатини яхшилаш бўйича алоҳида дастур амалга оширилмоқда. Жумладан, бошқа тумандаги олис мактабга бориб, дарс берадиган ўқитувчилар ойлигига 50 фоиз, бошқа вилоятга бориб ишласа – 100 фоиз устама ҳақ тўланиши кўзда тутилган.

Ёшларнинг иқтидори ва салоҳиятини тўғри йўналтиришга алоҳида эътибор қаратиш лозим. Иқтидорли ўқувчиларнинг юқори технологиялар ва билимларни чуқур ўзлаштиришига кенг шароит яратиш ҳамда рақобатбардош миллий кадрларнинг янги авлодини тайёрлаш мақсадида Тошкент шаҳрида янги замонавий университет ташкил этилиб, унда чет элдаги етакчи олимлар ва профессор-ўқитувчилар жалб қилиши ҳам ёшларга энг замонавий дастурлар асосида таълим-тарбия бериш режалаштирилган.

Ҳаммамизга яхши маълумки, мамлакатимизда Математика ўтган 2020-йилдаги илм-фанни ривожлантиришнинг устувор йўналишларидан бири сифатида белгиланган эди. Ўтган давр ичида юртимизда Математика илм-фани ва таълимини янги сифат босқичига олиб чиқишга қаратилган қатор тизимли ишлар амалга оширилди. Шу билан бир бирга Математика соҳасидаги таълим сифатини оширишга қаратилган бир қатор чора-тадбирлар амалга оширилиши режалаштирилган.

Жумладан, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сонли Қарорида қуйидагилар таъкидлаб ўтилган:

– математика таълимотининг таълим олиш босқичлари ўртасидаги узвийлик тўлиқ таъминланмаган;

– умумтаълим мактабларида математика дарсликлари ўқувчиларнинг ёшига нисбатан фанни ўзлаштиришни қийинлаштирувчи мураккаб масалалардан иборат ва бошқа фанларда ўтиладиган мавзулар билан уйғунлаштирилмаган;

– математикага қизиқувчан, халқаро олимпиадалар ғолиблари бўлган аксарият иқтидорли ёшлар ҳудудлардан бўлишига қарамасдан уларнинг келгуси ривожланиши учун олий таълим ва илм-фан соҳасида зарур шарт-шароит яратиб берилмаган.

Мазкур Қарорда таълимнинг барча босқичларида математика фанини ўқитиш тизимини янада такомиллаштириш, педагогларнинг самарали меҳнатини қўллаб-қувватлаш, илмий-тадқиқот ишларининг кўламини кенгайтириш ва амалий аҳамиятини ошириш, халқаро ҳамжамият билан алоқаларни мустаҳкамлаш, шунингдек 2017-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича Ҳаракатлар стратегиясини “Илм, маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йили”да амалга оширишга оид давлат дастурида белгиланган вазифалар ижросини таъминлаш мақсадида қуйидагилар математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш, илмий-тадқиқотларни ривожлантириш ва илмий ишланмаларни амалиётга жорий қилишнинг устувор йўналишлари этиб белгиланган:

– мактабгача, умумий ўрта, ўрта махсус, профессионал, олий таълим ташкилотлари ва илмий муассасалар ўртасидаги яқин ҳамкорликни таъминловчи яхлит тизимни шакллантириш;

– илғор хорижий тажрибалар асосида мактабгача ёшдаги болаларда илк математик тасаввурларни шакллантириш бўйича замонавий педагогик технологияларни жорий қилиш;

– умумий ўрта ва ўрта махсус таълим муассасаларида математик фанларини ўқитиш сифатини ошириш, ҳудудларда математика фанига ихтисослаштирилган мактаблар фаолиятини ривожлантириш ҳамда янги мактабларни ташкил этиш;

– математика фани бўйича кадрларни, хусусан қишлоқ жойлардаги мактабларнинг кадрларини ва қайта тайёрлаш тизимини ривожлантириш, математика фани бўйича дарсликлар ва ўқув қўлланмаларни такомиллаштириш;

– иқтидорли ёшларни аниқлаш ҳамда уларнинг математика фани бўйича маҳаллий ва халқаро фан олимпиадаларида муваффақиятли иштирок этишини ҳамда совринли ўринларни эгаллашини таъминлаш;

– таълим беришнинг онлайн платформасини яратиш ва амалиётга тадбиқ этиш, масофадан ўқитиш тизими самарадорлигини ошириш, баҳолаш тизимининг шаффофлигини таъминлаш механизмларини жорий қилиш;

– Математика фанини билиш даражасини баҳолаш бўйича миллий сертификатлаштириш тизимини жорий қилиш, олий таълимнинг тегишли йўналишлари ва мутахассисликларида математика фани бўйича машғулотларини кўпайтириш ҳамда таълим бериш сифатини ошириш;

– математика соҳасидаги таълим олаётган ва илмий-тадқиқотлар билан шуғулланаётган иқтидорли ёшларни қўллаб-қувватлаш, чет элдаги олий таълим муассасалари ҳамда илмий ташкилотлар билан алоқаларни ривожлантириш;

– мамлакатимизнинг илмий ва таълим ташкилотларини босқичма-босқич жаҳоннинг математика фани бўйича етакчи илмий марказлари даражасига етказиш.

Давлатимиз раҳбарининг Олий Мажлисга ва халқимизга йўлланган 2020 йилги Мурожаатномасида келтирилган ва юқорида қайд қилинган Президент қарорида белгиланган кўплаб вазифаларни амалга оширишда мактаб-олий ўқув юрти ҳамкорлигини янада ривожлантириш алоҳида аҳамият касб этади.

Бизга яхши маълумки, Ўзбекистон Республикаси Президенти Админстрациясининг 2019 йил 11 октябрдаги топшириғи ижросини таъминлаш ҳамда “Таълим тўғрисида”ги қонун ва “Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури"даги ислоҳотлардан келиб чиқиб, мактабларга методик ёрдам бериш ҳамда ўқув-тарбия жараёнларининг сифатини ошириш мақсадида Республика миқиёсида олий таълим муассасалари умумтаълим муассасаларига бириктирилиб, "Мактаб-олий ўқув юрти" ҳамкорлиги яхши йўлга қўйилди. Бундан кўзланган асосий мақсад, умумтаълим мактаблари фаолиятини такомиллаштириш, фан ўқитувчиларининг касбий ва педагогик маҳоратини, мактаб ўқувчиларининг илм-фан ва касб-ҳунарга қизиқишини ошириш, олий таълим муассасалари ва умумтаълим мактаблари ўртасидаги ўзаро ҳамкорлик алоқаларини мустаҳкамлашдир.

Мактабларга ва унинг ўқитувчиларига берилган эътибор қандай натижалар берганлиги бизга ривожланган мамлакатлар тажрибасидан маълум. Олий таълим соҳасида етук мутахассис тайёрлашда олий ўқув юртига қабул қилинган талабанинг билим даражаси муҳим ўрин тутади.

Бошқача қилиб айтганда, мактаб ва олий таълим жоиз бўлса битта конвер(кластер)дамиз. Мактабларда билимли ўқувчилар тайёрланса, олий таълим янада етук кадрларни мактаблар ва ишлаб чиқаришга етказиб бериш мумкин, биз тайёрлаган етук кадрлар эса мактабларда ўқитиш жараёнининг сифатини оширишда асосий омиллардан бири ҳисобланади.

Шуларни инобатга олган ҳолда Бухоро давлат университети Математик анализ кафедраси профессор-ўқитувчилари томонидан вилоят ҳудудидаги мактабларга амалий ва услубий ёрдам кўрсатиш ҳамда ўзаро ҳамкорлик бўйича бир қатор ижобий ишлар амалга оширилмоқда. Натижада нафақат ўқувчи ёшлар, балки ўқитувчиларнинг ҳам касбий маҳорати ортиб, таълим муассасаларида ўқитиш сифати сезиларли даражада ортиб борётгани кузатилмоқда.

Таъкидлаш жоизки, мазкур ҳамкорликлар доирасида иқтидорли ўқувчилар орасидан ўқитувчиликка қобилияти бор, педагоглик касбини танлаш истагини билдирганлар билан алоҳида суҳбатлар ўтказиш яхши самара беради. Бундай давра суҳбатлари давомида фаннинг нозик қирралари ҳақида қатнашчиларга маълумот бериш билан бир қаторда уларни қизиқтирган саволларга ҳам атрофлича жавоб бериш орқали иқтидорли ўқувчиларни олий таълим муассасаларига жалб қилиш имконияти пайдо бўлади.

Мактабларда фаолият юритаётган ўқитувчилар билан ижодий суҳбатлар ўтказиш орқали эса фанларни ўқитишда қўлланиладиган интерфаол усуллар, нисбатан мураккаб мавзуларни ўқитиш методикаси, тўгаракларда ўқувчиларни Халқаро ва Республика фан олимпиадаларига тайёрлашда эътибор қаратилиши лозим бўлган жиҳатлари ҳақида сўз юритилишини айтиб ўтиш мумкин. Ҳозирги кунда эътибор қаратилиши лозим бўлган жиҳатлардан яна бири – бу ўқув машғулотларини самарали ташкил этишда хорижий технологияларнинг тутган ўрнидир. Мактабларда устоз сабоқлари номли ижодий кечалар ташкил этиб, уларга хорижий таълим муассасаларда малака оширган ва илмий-тадқиқот ишларини олиб борган профессор-ўқитувчиларни таклиф қилиш орқали ривожланган давлатлардаги таълим тизими, унинг ютуқ ва камчиликлари ҳақида ўқувчи ва ўқитувчиларга ахборот бериш мумкин.

Мактаблар билан ўзаро ҳамкорликни йўлга қўйишда кафедра филиалларини ташкил этиш муҳим аҳамият касб этади. Бундай филиалларнинг асосий мақсади сифатида мактабларни малакали кадрлар билан таъминлаш, фан ўқитувчиларига илмий-услубий кўрсатмалар бериш, ўқитишга илғор педагогик технологияларни жорий этиш, таълим мазмунини янги педагогик технологиялар асосида бойитиш, мактаб ўқитувчиларини илмий изланишларга жалб қилиш ва раҳбарлик қилишни санаб ўтиш мумкин. Бундан ташқари, мактаблардаги педагогларга бўлган эхтиёж ўрганилиб, ёш фан ўқитувчиларини магистратурага, қайта тайёрлаш ва малака ошириш курсларига юборишни тизимли йўлга қўйишдир. Мактабда ўтказиладиган фан ҳафталикларига, ноанъанавий дарсларга ва мактаб йиғилишларига тегишли кафедра профессор-ўқитувчиларини жалб қилиш, мактаб битирувчилари билан ОТМ бўйлаб экскурциялар уюштириш, касбга йўналтириш ишлари бўйича тарғибот-ташвиқот ишларини олиб бориш ОТМларга иқтидорли ўқувчиларни жалб қилишда алоҳида ўрин тутади.

Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва уларни қўллаб-қувватлашда фан олимпиадаларини ташкил этишнинг ўрни беқиёсдир. Бундай олимпиадалардан бири Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрларни тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2019 йил 3 майдаги ПҚ-4306 сонли қарорига асосан 2019 йил 13 октябрь куни Бухоро давлат университети ва Италиянинг Пиза университетлари ҳамкорликда ўтказган “Бухоро очиқ математика олимпиадаси”дир. 2019 йил 30 сентябрь куни ушбу олимпиадани ўтказиш тўғрисида Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирининг 319-сонли буйруғи имзоланди. Олимпиадани ўтказишдан кўзланган асосий мақсад иқтидорли ёшларни аниқлаш, уларнинг интелектуал салоҳиятини қўллаб-қувватлаш, рағбатлантириш ва математик саводхонлигини ошириш, жаҳон таълим соҳасида янада интеграциялашуви учун қўшимча шарт-шароитлар яратиш ҳамда ўқувчиларга математика фанидан ўтказиладиган халқаро ва Республика олимпиадалари ҳақида батафсил маълумот беришдан иборатдир. Умуман олганда, вилоят ҳудудида фаолият кўрсатаётган мактаблардаги иқтидорли ўқувчиларни аниқлаш мақсадида бундай олимпиадаларни туманлар кесимида ташкил қилиб ўтказиш яхши самара бериб, келажакда университетга иқтидорли ёшларни жалб қилишга хизмат қилмоқда.

ОТМ негизида Ёзги мактаблар ташкил қилиш бундай йўналишда амалга оширилиши лозим бўлган яна бир ишдир. У бир нечта асосий мақсадларни қамраб олади. Биринчидан, иқтидорли ёшларда Республика ва Халқаро олимпиадаларга тайёргарлик кўриш бўйича билим ва малакаларни шакллантириш, олимпиада масалаларини ечиш кўникмаларини ҳосил қилишдир. Иккинчидан эса, мураккаб мавзуларни олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари ёрдамида ўзлаштириш имконини беради. Учинчидан, мактаб ва олий таълим дастурлари орасидаги узвийлик билан танишиш имконига эга бўладилар. Тўртинчидан, ОТМда талабалар таҳсил олиши учун яратилган шароитлар ва имкониятлар билан танишадилар.

Мактаб ўқувчиларининг Бухоро давлат университетига саёҳатини ташкил қилиш орқали ўқув жараёнини кредит-модуль тизими асосида ташкил этиш элементлари билан таништириш мумкин. Бизга яхши маълумки, Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясида олий таълимни тизимли ислоҳ қилишнинг устувор йўналишларини белгилаш, замонавий билим ва юксак маънавий-ахлоқий фазилатларга эга, мустақил фиклайдиган юқори малакали кадрлар тайёрлаш жараёнини сифат жиҳатидан янги босқичга кўтариш, олий таълимни модернизация қилиш, илғор технологияларига асосланган ҳолда ижтимоий соҳа ва иқтисодиёт тармоқларини ривожлантириш асосий мақсад сифатида белгилаб берилган. Хусусан, олий таълим муассасаларида ўқув жараёнини босқичма-босқич кредит-модуль тизимига ўтказиш, халқаро тажрибалардан келиб чиқиб, олий таълимнинг илғор стандартларини жорий этиш, жумладан ўқув дастурларида назарий билим олишга йўналтирилган таълимдан амалий кўникмаларни шакллантиришга йўналтирилган таълим тизимига босқичма-босқич ўтиш кўзда тутилган. Шу нуқтаи назардан, ўқувчиларда бундай тизимда таҳсил олишнинг ўзига хос жиҳатлари ва имкониятлари ҳақида тасаввур пайдо қилиш ҳамда мустақил таълим ҳақида батафсил маълумот бериш бўлғуси талабалар учун тўғри танловни амалга оширишда муҳим ҳисобланади.

Мактаб-олий ўқув юрти ҳамкорлиги доирасида олий таълим муассасаларидаги таълим йўналишлари ҳамда қабул квоталари ҳақида ўқувчиларга кенг маълумот бериш, муайян соҳага қизиқиши юқори ёшларни ОТМга жалб этиш, ўқувчиларнинг ўз лаёқати ва қобилиятига номуносиб йўналишларда ўқишининг олдини олиш, профессор-ўқитувчиларнинг эса ўз устида кўпроқ ишлашига хизмат қилишига олиб келади.

Бу борада БухДУ “Математик анализ” кафедраси аъзолари ҳам ўзларининг тўғридан-тўғри вазифаси сифатида талабаларга ўз йўналишларида замон талабидаги билимларни бериш билан биргаликда умумтаълим мактаблари билан ҳамкорлик соҳасида қуйидаги ишларни олиб бормоқдалар:

- Бухоро вилоятининг қатор мактабларида кафедранинг филиаллари ташкил қилинган ва режа асосида фаолият кўрсатмоқда;
- Кафедранинг малакали ўқитувчилари вилоятдаги ИДУМларга бириктириб қўйилган;
- Вилоятдаги қатор мактаблар билан ҳамкорлик шартномалари тузилган;
- Малакали ўқитувчилар томонидан мактабларда маҳорат дарслари (кейинги пайтда ZOOM тизими орқали онлайн шаклда) ташкил қилинмоқда ва маслаҳатлар берилмоқда;
- Мактаб ўқитувчилари билан ҳамкорликда услубий қўлланмалар яратилмоқда;
- Кафедра ўқитувчилари томонидан мактаб ўқитувчилари учун услубий қўлланмалар тайёрланмоқда;
- Халқ таълими бошқармаси буюртмаси асосида битирув малакавий ишлари тайёрланмоқда;
- Қатор йиллардан бери мактаб ўқувчилари учун “Кенгуру” халқаро олимпиадаси даражасидаги “Қувноқ математика” мусобақаси ҳамда “Ментал арифметикадан очиқ олимпиада” ўтказиб келинмоқда;
- Ҳозирги кунга қадар Бухоро давлат университети Математик анализ кафедраси профессор-ўқитувчилари Ғиждувон тумани ва Қоровулбозор тумани Халқ таълими бўлими билан ҳамкорликда кафедра кунларини ташкил қилинди ва режа асосида барча туманларда ўтказилиши кўзда тутилган;
- Мактаб ўқитувчилари билан ҳамкорликда илмий мақолалар эълон қилинмоқда;
- Мактабда математикани ўқитиш муаммоларига бағишланган илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда (PhD диссертациялар тайёрланмоқда);

- Кафедранинг илмий-услубий семинар ва тўгаракларига мактаб ўқитувчилари ҳамда ўқувчилари ҳам таклиф қилинмоқда ва бошқалар.

Кафедра профессор-ўқитувчилари томонидан мактабгача таълим ташкилотлари, умумий ўрта таълим мактаблари ва ўрта махсус, касб-ҳунар коллежлари учун бир қанча ўқув-услубий қўлланмалар тайёрланган. Бундай қўлланмалардан иқтидорли ўқувчиларни фан олимпиадаларига ва турли танловларга тайёрлашда фойдаланиш мумкин. Қуйида биз улардан баъзиларини санаб ўтамиз:

1. T.H.Rasulov, Z.N.Hamdamov, E.B.Dilmurodov. Matematikadan olimpiada masalalari. Buxoro, Durdona nashriyoti, 2016.
2. T.H.Rasulov, N.N.Karimova. Matematikadan qiziqarli testlar. Buxoro, Durdona nashriyoti, 2017.
3. T.H.Rasulov, A.Sh.Rashidov, I.A.Sharipov. Iqtidorli o’quvchilar uchun matematikadan masalalar to’plami. I-qism. Buxoro, Durdona nashriyoti, 2018.
4. Б.Ж.Мамуров, Н.О.Жўраева. Анализга кириш: функция, интеграл, дифференциал. Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
5. У.Д.Дурдиев, М.Ф.Ахмедова. Математикани инглиз тилида ўрганамиз. Бухоро, Дурдона нашриёти, 2020 йил.
6. Н.А.Тўраева, Н.О.Жўраева, Д.Э.Исмоилова. Математик практикум. Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
7. А.Д.Қаландаров. Абу Али ибн Синонинг “Донишнома” асари (таржима). Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
8. А.Д.Қаландаров, З.Р.Бозоров. Математика тарихи. Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
9. А.Д.Қаландаров, М.Б.Аминова. Қизиқарли математика: мантиқ майдони. Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
10. Ш.Б.Меражова. Математикадан мураккаб масалаларни ечиш методикаси. Нашрга тавсия этилган, 2020 йил.
11. Н.А.Тўраева. Тенгсизликни ечинг. Бухоро, Дурдона нашриёти, 2019.

12. U.A.Rozikov, N.H.Mamatova. Matematika va turmush. Toshkent, Fan nashriyoti, 2020.

Бундан ташқари, профессор-ўқитувчилар томонидан мактаб математика дарсларини самарали ташкил этиш, уларда замонавий педагогик технологиялардан фойдаланиш ҳамда онлайн таълимни жорий қилишга оид бир қанча илмий-услубий мақолалар нашр қилинган. Уларнинг аксарияти “Физика, математика ва информатика”, “Педагогик маҳорат”, “Илм сарчашмалари”, “Фан ва жамият” ва яна кўплаб илмий-услубий журналларда ёритилган.

БухДУ “Математик анализ” кафедраси жамоаси мактаб-олий таълим ҳамкорлигининг янада самарали йўлларини излаб топишда, ёшлар билан доимий равишда мулоқот қилишда, уларнинг муаммо ва таклифлари билан қизиқишда, умуман, Янги Ўзбекистоннинг мактаб остонасидан бошланишига ўз ҳиссасини қўшишда давом этади. Чунки, бугунги ёшларга берилаётган таълим-тарбия сифати, шубҳасиз, келажакда ватанимиз тақдирини белгилаб беради.

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ИҚТИСОДДАГИ ТАДБИҚЛАРИ

Алижон АВЕЗОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси катта ўқитувчиси

Мафтуна НАМОЗОВА

БухДУ Математика таълим йўналиши 2-босқич талабаси

Азиза АМРИЛЛОЕВА

БухДУ Математика таълим йўналиши 2-босқич талабаси

1) Маълумки, ***меҳнат унумдорлиги*** иш куни мобайнида ўзгарувчи миқдордир. Меҳнат унумдорлиги $y = f(x)$ функция билан ифодалансин, бунда x иш кунининг бошланишидан ҳисобланган вақт оралиғи, $f(x)$ эса вақтнинг шу онидаги (моментидаги) ***меҳнат унумдорлигини*** билдиради.

Меҳнат унумдорлигининг иш кунининг 4-соатидаги ҳажмини ҳисоблаш масаласи қўйилган бўлсин.

Вақтнинг (3,4) оралиғини энг каттасининг узунлиги Δx бўлган оралиқларга бўламиз ва $f(x)$ функция бу кичик оралиқларда ўзгармас десак ишлаб чиқариш меҳнт унумдорлигини $f(x)\,\Delta x$ кўпайтмага тенг бўлади. Шундай қилиб, иш кунининг 4-соатидаги ишлаб чиқариш меҳнат унумдорлиги

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{3}^{4} f(x)\,\Delta x=\int_{3}^{4} f(x)dx$$

тенглик билан ифодаланади.

2) Маҳсулотлар омборига вақт бирлигида келтириладиган ***маҳсулот миқдорини*** $f(x)$ ва маҳсулот омборга келиб тушушидан бошланган вақт бирлиги x бўлса, x дан $x+\Delta x$ вақт оралиғидаги омборга $f(x)\,\Delta x$ бирлик маҳсулот келади. Демак, омборга маҳсулот узлуксиз келиб турса, ундаги ***товарнинг заҳираси***

$$\int_{0}^{x} f(s)ds$$

билан ифодаланади.

3) Машинасозлик саноати бирор хилдаги станокларни ишлаб чиқаради ва йиллик ишлаб чиқариши ўзгармас a га тенг бўлиб, x шу станоклар ишлаб чиқарилган йиллар бўлсин.

Вақтнинг t онидаги (моментидаги) станоклар сони (улар ишдан чиқмаган деб олинади).

$$\int_{0}^{t} adx=\left[ax\right]_{0}^{t}=at$$

бўлади. Агар ***маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми*** арифметик прогрессия бўйича ўсувчи яъни

$$f(x)=a_0+a_1x$$

бўлса, станоклар сони

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

ташкил этади.

` 4) Йиллик даромад t вақтнинг функцияси $D = f(x)$ бўлсин. Процент (фоиз) меъёри улуши i бўлиб, фоизлар устига қўшиб узлуксиз ҳисобланади. Даромаднинг t йилга ҳисобланган дисконтли ҳажмини топинг. Дисконт деб охири жами маблағ билан бошланғич маблағ орасидаги фарққа айтилади.

Бу миқдорни ҳисоблаш учун, вақт оралиғи t ни n та тенг бўлакларга ажратамиз. Вақтнинг жуда ҳам кичик Δt оралиғида даромадни ўзгармас деб $f(t)\Delta t$ га тенг қилиб олиш мумкин. Узлуксиз устига қўшиб ҳисобланган фоизларда дисконтли даромад қуйидагича ҳисобланади:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0,t)$ вақт оралиғидаги дисконтли даромад миқдори

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_0^t f(t) e^{-it} \Delta t = \int_0^t f(t) e^{-it} dt$$

бўлади.

Хусусий ҳолда, йиллик даромад ўзгармас бўлса, яъни $f(x) = a$ бўлса, дисконтли даромад

$$d = \int_0^t a e^{-it} dt = a \int_0^t f e^{-it} dt = a \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i}\left(1 - e^{-it}\right)$$

бўлади.

Аниқ интеграл билан ечиладиган баъзи бир иқтисодий масалалар қараймиз.

$z = f(x)$ функция қандайдир ишлаб чиқаришнинг вақт ўтиши билан маҳсулдорликнинг ўзгаришини ифодаласин. У ҳолда $[t_1, t_2]$ вақт оралиғида ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми $Q(t_1, t_2)$ қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$Q(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (1)$$

1-Масала. Ишлаб чиқаришга янги технологияни жорий этилгандан сўнг маҳсулдорликнинг ўзгариши $z=32-2^{-0,5t+5}$ функция билан берилган, бу ерда t - ойларда вақтнинг ўзгаришини ифодалайди. Янги технология жорий этилгандан сўнг ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмини ҳисобланг:

a) Биринчи ойда
b) Учинчи ойда
c) Олтинчи ойда
d) Йилнинг охирги ойида

Ечиш. (1) формулага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Q(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}(32-2^{-0,5t+5})dt=32(t_2-t_1)+\frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5t_2}-2^{-0,5t_1}).$$

У ҳолда

$$Q(0;1)=\int_0^1(32-2^{-0,5t+5})dt=32(1-0)+\frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5}-2^0)=4,95;$$

$$Q(2;3)=\int_2^3(32-2^{-0,5t+5})dt=32(3-2)+\frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5\cdot 3}-2^{-0,5\cdot 2})=18,48;$$

$$Q(5;6)=\int_5^6(32-2^{-0,5t+5})dt=32(6-5)+\frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5\cdot 6}-2^{-0,5\cdot 5})=27,22;$$

$$Q(11;12)=\int_{11}^{12}(32-2^{-0,5t+5})dt=32(12-11)+\frac{64}{\ln 2}(2^{-0,5\cdot 12}-2^{-0,5\cdot 11})=31,4.$$

Олинган натижаларни таққослаб, янги технолгия ишлаб чиқаришга жорий этиш асосан биринчи ярим йилда юз беради.

Турли факторларга боғлиқ равишда ишлаб чиқариш маҳсулдорлигининг ўзгариши масалан, Кобба-Дуглас функциясига боғлиқ. Бу ҳолда $f(t)$ маҳсулдорлик учта кўпайтувчининг кўпайтмаси шаклида ифодаланади:

$$f(t)=a_0A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t), \qquad (2)$$

бу ерда $A(t),L(t),K(t)$ функциялар мос равишда табиат ресурслари, меҳнат ва капитал сарфлари, a_0,α,β,γ - қандайдир сонлар.

2-Масала. Агар Кобба-Дуглас функциясида

$$A(t)=e^t,\ L(t)=t+1,\ K(t)=100-3t,\ a_0=1,\ \alpha=1,\ \beta=\gamma=0{,}5$$

бўлса, 5 йил давомида ишлаб чиқариладиган маҳсулот ҳажмини топинг (бу ерда, t - йилларда вақтнинг ўзгаришини ифодалайди.:

Ечиш. (1) формулада $f(t)$ функицяни (2) формулага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Q(0;5)=\int_0^5 e^t(t+1)(100-3t)dt=\int_0^5 e^t(-3t^2+97t+100)dt\,.$$

икки марта кетма-кет бўлаклаб интеграллашларни қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$Q(0;5)=e^t(-3t^2+97t+100)\Big|_0^5-(97-6t)e^t\Big|_0^5-6e^t\Big|_0^5=64825.$$

Жавоб. Q=64825

Аҳоли ўртасида даромаднинг нотекис тақсимланишини ифодаловчи $y=f(x)$ функцияни қараб чиқайлик, бу ерда y- x камбағал аҳоли томонидан олинадиган даромадлар. Ушбу функция графиги Лоренц эгри чизиғи дейилади.

$p=f(x)$ - қандайдир маҳсулотга бўлган D талаб эгри чизиғи ва $p=g(x)$ - S таклиф эгри чизиғи. Бу ерда p- маҳсулот баҳоси, x - талаб (таклиф) катталиги. (x_0,p_0) нуқта орқали бозор мувозанатини белгилаймиз.

x_0 миқдордаги маҳсулотни p_0 нарх билан реализация қилингандан сўнг фойда $x_0\cdot p_0$ га тенг. Агар нархни $p_0=f(0)$ баҳодан p_0 баҳога тушурсак, (талабга асосан), у вақтда фойда қуйидаги интеграл билан аниқланади.

$$\int_0^{x_0} f(x)dx$$

Истеъмолчиларнинг

$$C=\int_0^{x_0} f(x)dx-p_0x_0$$

тенглик билан аниқланувчи пул катталиклари истеъмолчининг ютуғи дейилади.

Шунга ўхшаш

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)dx$$

миқдор тадбиркорнинг ютуғи дейилади.

3-Масала. Фирма ишлаб чиқарган маҳсулотга талаб функцияси қуйидагича бўлсин:

$$p = 134 - x^2$$

Агар мувозанат баҳоси 70 бўлса, истеъмолчи ютуғини хисобланг?

Ечиш.

а) $p_0=70$, x_0 ни топамиз:

$70 = 134 - x^2$

$x^2 = 64; \quad x_0 = 8$

Энди истеъмолчи ютуғини ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 = \int_0^8 (134 - x^2)dx - 70 \cdot 8 = 341{,}3$$

Жавоб. C=341,3 сум

4-Масала. Агар корхонанинг кунлик ишлаб чиқарган маҳсулдорлик функцияси қуйидагича берилган:

$$f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$$

Корхонанинг бир йиллик (258 ишчи кунида) ишлаб чиқарган маҳсулот ҳажмини топинг

Ечиш. Бир кунлик ишлаб чиқарган маҳсулот миқдорини топамиз:

$$\int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96)dt = 164{,}269$$

Энди бир йиллик махсулот миқдорини ҳисоблаймиз:

$$Q = 164{,}269 \cdot 258 \approx 42381{,}402$$

Жавоб. Q=42381 маҳсулот бирлиги

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ф.Насриддинов "Иқтисодчилар учун математика".

2. Гаймназаров, Қосимов.С, "Иқтисодиётда математика".

3. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. М. ЮНИТИ. 2007.

4. Г.М.Фихтенгольц. Математик анализ асослари. 1–том, Ўқитувчи, Тошкент, 1970, 488 бет.

5. Г.Азларов, Х.Мансуров. Математик анализ асослари. 1–том, Ўқитувчи, Тошкент, 1986, 408 бет.

“МУЛОҲАЗАЛАР АЛГЕБРАСИ ФОРМУЛАЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ” МАВЗУСИНИ ЎҚИТИШДА МУАММОЛИ ТАЪЛИМ ТЕХНОЛОГИЯСИ

Олимжон АХМЕДОВ

БухДУ Метематик анализ кафедраси ўқитувчиси

Бугунги кунда ўқитувчининг вазифаси ўқув жараёнини ўқувчиларда фақат репродуктив фикрлашни эмас, балки ижодий фикрлашни ҳам шакллантирадиган йўсинда ташкил қилишдир. Бунда ўқитишнинг муаммоли усули қўл келади. Дастлаб муаммоли таълим ҳақида қисқача маълумотлар келтирамиз. **Муаммоли таълим** – ўқув материалини талаба онгида илмий изланиш асосида билиш вазифалари ва муаммоларини вужудга келтирадиган усулда ўргатиш услубидир. Талабанинг фикрлаш фаолиятида муаммоли вазиятлар вужудга келади ва улар объектив равишда изланиш ва мантиқий тўғри илмий хулосалар чиқаришга даъват этади. Муаммо – илмий билишни ривожлантириш зарурлигини ифодалашнинг субъектив шаклидир. У муаммоли вазиятда, яъни жамият ривожланиши жараёнида билиш ва билмаслик ўртасида объектив равишда вужудга келадиган зиддият. Муаммоли вазият талабанинг маълум психик ҳолатидир. Бундай ҳолат маълум топшириқларни бажариш (масала ечиш, саволга жавоб топиш) жараёнида зиддиятларни аниқлаш туфайли вужудга келади. Ана шу зиддиятни англаш талабаларда ишни бажаришнинг усули ёки шартлари тўғрисидаги янги билимларни излаш эҳтиёжини уйғотади.

Муаммоли ўқитиш технологик йўл билан ривожланди. Натижада муаммоли ўқитишнинг тўрт босқичдан иборат мантиқий шакли пайдо бўлди:

1) муаммонинг қўйилиши;

2) уни ечиш йўлларини аниқлаш;

3) муаммони ечишнинг энг мақбул йўлини танлаш;

4) муаммони ечиш.

«Муаммоли ўқитиш» атамаси асосида масала тушунчаси бўлиши мумкин эмас. Акс ҳолда, уни методологик жиҳатдан асослаш керак бўлади. Талабаларнинг ижодий қобилиятини шакллантириш учун уларни доимо савол беришга ундаш лозим. Йўқ жойдан саволнинг қандай пайдо бўлишини кўрсатиш, дарс охирида қарама-қаршиликлар ойдинлаштирилиб берилиши зарур. Бу борада шарқ мутафаккири Муҳаммад Мусо ал-Хоразмий шундай фикрларни баён этган:

● ўқитишда мустақиллик (ижодий фаоллик);

● кузатилган воқеа ва ҳодисаларни тушунтиришда мунтазамлик, кетма-кетлик;

● тажриба;

● ўқитишнинг ҳар бир вазиятли савол-жавоб шакли (методи) билиш жараёнини ривожлантиради.

Муаммоли методнинг моҳияти машғулотлар жараёнида муаммоли вазиятларни яратиш ва ечишдан иборат бўлиб, унинг асосида дидактик зиддиятлар ётади. Зиддиятларни бартараф этиш нафақат илмий билиш йўли, балки шу билан бирга ўқув йўли ҳамдир.

Муаммоли таълим концепциясининг асосий тушунчалари «муаммоли вазият», «муаммо», «муаммони топиш» кабилар ҳисобланади. Муаммоли вазият бу методнинг дастлабки кўриниши ҳисобланиб, ўзида субъектни аниқ ёки қисман тушуниб етилган муаммони ифодалайди, уни бартараф этиш янги билимлар, усуллар ва ҳаракат кўникмаларини ўзлаштиришни тақозо этади. Агар талабада қийинчиликларни йўқотиш йўлларини излаб топиш учун бошланғич маълумотлар бўлмаса, шубҳасиз, у муаммоли вазият ечимини қабул қилмайди, яъни муаммонинг ечими унинг онгида акс этмайди. Фикрлаш муаммо моҳиятининг тушуниб етилиши, ифодаланиши, мавжуд билим ва кўникмалар мажмуаси ҳамда изланиш тажрибаси асосида муаммоли вазиятни қабул қилиш биланоқ бошланади. Бу ҳолда муаммоли вазият муаммога айланади.

Муаммоли методни қўллашдаги ўқитувчи ва талабалар ҳаракатларини тавсифлаймиз.

Ўқитувчи фаолиятининг тузилмаси:

- ўқув материалига оид тафовутларнинг таклиф этилиши;
- муаммоли вазиятларни тузиш;
- муаммонинг мавжудлигини аниқлаб бериш;
- муаммоли топшириқларни лойиҳалаш.

Талабалар фаолиятининг тузилмаси:

- ўқув материали моҳиятининг англаб етилиши;
- муаммоли вазият юзасидан фикрлаш;
- мавжуд билимлар ва тажрибани қайта тиклаш;
- муаммоли масалага ўтказиш;
- топшириқни бажариш.

Юқорида келтирилган фикр-мулоҳазаларни инобатга олган ҳолда “Формулаларнинг асосий хоссалари” мавзусини муаммоли ўқитишда муаммони қуйидагича қўямиз. Маълумки, берилган формула учун чинлик жадвали тузиш мумкин. Формуланинг чинлик жадвалини тузишни биламиз. Энди тескари масала билан шуғулланайлик, яъни берилган чинлик жадвали бўйича формулани топишни муаммо қилиб қўяйлик. Бу формуланинг мукаммал шаклини топиш билан шуғулланамиз. Биламизки, n та элементар мулоҳазаларнинг айнан ёлғон формуласидан фарқли ҳар бир A формуласини мукаммал дизъюнктив нормал шаклга (МДНШ) келтириш мумкин. Ва n та элементар мулоҳазанинг айнан чин формуласидан фарқли ҳар бир A формулани мукаммал конъюнктив нормал шаклга (МКНШ) келтириш мумкин.

Бундан чинлик жадвалида “1” қийматларни МДНШ ва “0” қийматларни МКНШ қабул қилади. Масалан, x ва y элементар мулоҳазаларнинг қуйидаги чинлик жадвалларига эга бўлган A, B, C, D формулаларни топайлик:

x	y	A	B	C	D	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee D$	$B \vee D$	$A \vee B \vee C$	$A \vee B \vee C \vee D$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

1-жадвал

Маълумки,

$$A = x \wedge y\,; \quad B = x \wedge \overline{y}\,; \quad C = \overline{x} \wedge y\,; \quad D = \overline{x} \wedge \overline{y}\,. \tag{1}$$

(1) формулаларнинг ҳар бири учун жадвалнинг, мос равишда, 1,2,3,4, сатрида “1” қиймат ва қолган сатрларида “0” қиймат туради. (1) формулалар икки мулоҳазали конъюнктив конституентлардан иборат.

Энди шундай формулаларни топайликки, улар учун жадвалнинг 2 сатрида “1” қиймат ва икки сатрида “0” қиймат турган бўлсин. Бу талабга қуйидаги формулалар жавоб беради:

$$A \vee B = (x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}), \quad A \vee C = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y),$$

$$A \vee D = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}), \quad B \vee D = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}),$$

ва ҳ.к.

Шундай қилиб, ушбу қоида ўринли: 2- ва 4 - сатрда “1”, 1- ва 3 - сатрларда “0” қийматга эга бўлган формулани ҳосил қилиш учун, биттасининг “1” қиймати худди 2-сатрда ва иккинчисининг “1” қиймати худди 4-сатрда турган икки конъюнктив конституент дизъюнкциясини оламиз:

$$B \vee D = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})\,.$$

Худди шундай, 1-жадвалдаги учта конъюнктив конституент дизъюнкцияси учта сатрда “1” қийматга ва битта сатрда “0” қийматга эга бўлган формулани тасвирлайди. Масалан,

$$A \vee B \vee C = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Шундай қилиб, тўртта A, B, C, D конъюнктив конституент дизъюнкцияси тўртта сатрда ҳам “1” қийматга эга, яъни айнан чин:

$$E = A \vee B \vee C \vee D = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}).$$

Бу формула икки мулоҳазали тўлиқ мукаммал дизъюнктив нормал шаклдан иборат.

Демак, E нинг инкори

$$\overline{E} = \overline{(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)} = \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \overline{y}} \wedge \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$$

ёки

$$\overline{E} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee y)$$

айнан ёлғон формулани ифодалайди. Бу эса икки мулоҳазали тўлиқ мукаммал конъюнктив нормал шаклдир.

“Тенг кучлимас формулалар сони” мавзусини муаммоли ўқитишда муаммони қуйидагича қўямиз: n та элементар $x_1, x_2, ..., x_n$ мулоҳазаларнинг ўзаро тенг кучлимас, яъни ҳар хил формулалари мавжуд.

Икки x ва y элементар мулоҳазалар учун нечта тенг кучлимас формулалар борлигини кўрайлик. x ва y нинг $2^2 = 4$ қийматлар сатри учун:

4 та A, B, C, D формулалардан ҳар бирининг қийматларидан биттаси “1” ва учтаси “0” дан иборат устуни мавжуд. Бундай устунлар сони 4 та, яъни $C_4^1 = 4$. Ундан кейин, олтита $A \vee B$, $A \vee C$, ..., $C \vee D$ формулалардан ҳар қайсисининг қийматлари иккита “1” ва иккита “0” дан иборат устунни ҳосил қилади. Бундай устунлар сони $C_4^2 = 6$ га тенг. Яна тўртта $A \vee B \vee C$, $A \vee C \vee D$, $A \vee B \vee D$, $B \vee C \vee D$ формулалардан ҳар бирининг қийматлари учта “1” ва битта “0” дан ташкил этилган устунни беради. Бундай устунлар $C_4^3 = 4$ тадир. Ниҳоят, Е формуланинг қийматлари фақат “1” дан тузилган $C_4^4 = 1$ та устунни ташкил этади.

Шундай қилиб, 1-жадвалда $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 2^{2^2}$ устун мавжуд бўлади. Бундан эса худди шунча формула борлиги келиб чиқади. Устунларнинг ҳеч қайси иккитаси бир хил бўлмаганлигидан, ҳеч қайси иккита формула ҳам ўзаро тенг кучли эмасдир. Худди шундай фикр юритиш йўли билан x, y, z элементар мулоҳазаларнинг тенг кучлимас формулалар сони

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + \ldots\ldots + C_8^8 = 2^8 = 2^{2^3}$$

га тенглиги келиб чиқади. Тўртта x, y, z, f мулоҳазаларнинг ҳар хил формулалар сони 2^{2^4} га ва, умуман, n та мулоҳазанинг ҳар хил тенг кучлимас формулалар сони $C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \ldots\ldots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$ га тенг. Яъни, $N = 2^{2^n}$ га тенг.

Муаммоли ўқитишнинг афзалликларини қуйидагича хулосалаш мумкин:

● Қандай, нимага ва нима учун ўқитиш каби саволларга, шунингдек, қандай қилиб натижали ўқитиш саволига жавоб топилади.

● Ўқитувчининг иш, яъни меҳнат самарадорлигини оширади.

● Ўқитиш жараёнида ҳар бир талабанинг индивидуал хусусиятлари ва характерини инобатга олган ҳолда педагогик жараённи ташкил қилиш, ўқитиш натижасини баҳолашда эса хусусий (субъектив) баҳоланишдан ўқитувчини озод этиш имконини беради.

● Ўқитиш жараёни бўйича бош вазифаларни ўқитиш воситаларига юклаш орқали ўқитувчининг вақтини самарали қилади, шу боис ўқитувчи кўпроқ вақтини ҳар бир Талабанинг шахсий ривожланишига беришга имкон яратилади.

● Талабалар билим даражасини белгилаш, уни назорат қилиш ва мониторинг тизимида субъектив баҳолаш мезонларига имкон бермайди, улар объектив кечади, баҳолаш ва назоратда шаффофликка эришилади.

● Муаммоли ўқитиш методларида қуйидаги фикрлаш тарбияларининг ривожланишига замин яратилади: мантиқий фикрни риволантириш; танқидий фикрни ривожлантириш; ижодий фикрни ривожлантириш.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Тўраев Х. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т. Ўқитувчи. 2003.

2. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementleri. T., “Yangi asr avlodi”. 2006.

3. Umarova U.U. Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to’plami. O‘quv qo‘llanma, 2020.

4. Эрганова Н.Э. Педагогические технологии в профессиональном обучении: Учебник / Н.Э. Эрганова. - М.: Академия, 2018. - 224 с.

5. Мехамедов Ў.Х., Усмонбекова М.Ҳ., Рустамов С.С. Таълимни ташкил этишда замонавий интерфаол методлар. Ўқув услубий тавсиялар Т.:Ўзбекистон Республикаси ИИБ Академияси, 2016.-45 б.

6. А. Рахимов, М. Ҳамроева. “Интерфаол таълим ва унинг дидактик имкониятлари”. XXI Международная научно-практическая интернет-конференция 30–31 декабря, 2015.

7. Б.Ҳ. Рахимов. “Ўқув машғулотларини замонавий ташкил этиш ва ўтказиш технологиялари”. Фан ва технология.- 2016 й.136 б.

ФУНКЦИЯ ЭКСТРЕМУМЛАРИНИ АНИҚЛАШНИНГ БАЪЗИ УСУЛЛАРИ

Бекзод БАҲРОНОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Математиканинг кўплаб амалий масалаларида функсия бирор ораликда қабул қиладиган барча қийматлари орасидан максимум ва минимум қийматларни топиш билан боғлиқ бўлган масалаларни текширишга тўғри келади. Функциянинг максимум ҳамда минимуми умумий ном билан унинг экстремумлари, максимум ҳамда минимумга эришадиган нуқталари эса унинг экстремум нуқталари дейилади. Агар $f(x)$ функсиянинг $[a,b]$ кесмада монотон бўлса, у вақтда функция максимум ва минимум қийматларига кесманинг чегарисида эришади; хусусан, агар $f(x)$ ўсувчи функция бўлса, у ҳолда $f(a)$ мазкур $f(x)$ функциянинг минимум қиймати, $f(b)$ эса унинг максимум қиймати бўлади; агар $f(x)$ камаювчи функция бўлса, у ҳолда аксинча $f(a)$ бу $f(x)$ функциянинг максимум қиймати, $f(b)$ эса минимум қиймати бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада монотон бўлмасин, лекин $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва $[a,b]$ кесманинг кўпи билан чекли сондаги нуқталаридан ташқари барча нуқталарда ҳосилага эга бўлсин. Функция чекли сондаги стационар нуқталарга эга бўлсин. У ҳолда қаралаётган функциянинг $[a,b]$ кесмадаги максимум ва минимуми шу кесмага тегишли бўлган критик нуқталарида ва кесманинг чегараларида қабул қиладиган қийматлари тўпламига тегишли бўлади. Шундай қилиб, қаралаётган синфга тегишли бўлган $y = f(x)$ функциянинг максимум ва минимум қийматларини топиш ушбу $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $i = 1,2,...,n$ қийматларидан иборат чекли тўпламнинг максимум ва минимум қийматларини топишга келтирилади, бу ерда x_i, $i = 1,2,...,n$ - $f(x)$ функциянинг критик нуқталари.

Умуман олганда бундай турдаги масалалар математиканинг турли соҳаларида тез-тез учраб туради ва уларни ечишнинг бир қанча усуллари мавжуд. Ушбу мақолада бундай масалаларни тенгсизликлар ёрдамида ечиш усулини келтириб, мисолларда тадбиқ қиламиз. Мақолани расмийлаштиришда [1] мақолада баён қилинган маълумотлардан фойдаланилди.

Дастлаб Бернулли тенгсизлиги ҳақидаги теоремани келтирамиз.

1-теорема (Бернулли тенгсизлиги). Барча $x \ge -1$ ва $0 < \alpha < 1$ лар учун

$$(1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x \tag{1}$$

тенгсизлик ўринлидир. Агар $\alpha < 0$ ёки $\alpha > 1$ бўлса, у ҳолда

$$(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x \tag{2}$$

тенгсизлик ўринлидир. (1) ва (2) тенгсизликларда тенглик шарти фақат $x = 0$ да бажарилади.

<u>Исботи.</u> Дастлаб (1)-муносабатни исботлаймиз. Фараз қилайлик, α ратсионал сон ва $0 < \alpha < 1$ бўлсин. У ҳолда шундай m ва n натурал сонлар топилиб, $1 \le m < n$ ва $\alpha = m/n$ бўлади. Шартга кўра $1 + x \ge 0$. Бундан эса ушбу

$$(1+x)^{\alpha}=(1+x)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(1+x)^{m}\cdot 1^{n-m}}=\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)...(1+x)}_{m}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot ...\cdot 1}_{n-m}}\le$$

$$\le\frac{(1+x)+(1+x)+...+(1+x)+1+1+...+1}{n}=\frac{m(1+x)+n-m}{n}=\frac{n+mx}{n}=1+\frac{m}{n}x=1+\alpha x$$

муносабат ўринлидир. Бу ерда тенглик белгиси фақат илдиз остидаги кўпайтувчилар бир хил бўлганда, яни $1+x=1$ ёки $x=0$ бўлса бажарилади. $x\ne 0$ бўлса, $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$ тенгсизлик ўринлидир. Теореманинг биринчи қисми α - рационал сон бўлган ҳол учун исботланди. Энди $\alpha\in(0,1)$-иррационал сон бўлган ҳолни қараймиз. Фараз қилайлик, $p_1, p_2,..., p_n,...$ бирор рационал сонлар кетма-кетлиги бўлиб, $0<p_n<1$ ва

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\alpha$$

бўлсин. Юқорида исбот қилинган муносабга кўра исталган n натурал сони ва $x\ge -1$ учун $(1+x)^{p_n}\le 1+p_n x$ тенгсизлик ўринлидир. Демак,

$$(1+x)^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}(1+x)^{p_n}\le\lim_{n\to\infty}(1+p_n x)=1+\alpha x\,.$$

Ҳосил бўлган муносабат (1)-тенгсизлик $\alpha\in(0,1)$ иррационал сон бўлганда ҳам ўринли эканлигини билдиради. Энди α иррационал сон бўлганда $x\ne 0$ ва $0<\alpha<1$ лар учун $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$ тенгсизликни, яни (1)-тенгсизликда $x\ne 0$ бўлса, тенглик бажарилмаслигини исботлаймиз. Шу мақсадда $\alpha<p<1$ шартни қаноатлантирувчи p -рационал сонни оламиз. Қулайлик учун $(1+x)^{\alpha}$ ифодани

$$(1+x)^{\alpha}=\left[(1+x)^{\frac{\alpha}{p}}\right]^{p}$$

каби ёзиб оламиз. $0<\dfrac{\alpha}{p}<1$ бўлганлиги учун юқорида исботланган тасдиққа кўра $(1+x)^{\frac{\alpha}{p}}\le 1+\dfrac{\alpha}{p}x$ тенгсизлик ўринлидир. Шу сабабли $(1+x)^{\alpha}\le\left(1+\dfrac{\alpha}{p}x\right)^{p}$ га эга бўламиз. Агар $x\ne 0$ бўлса, у ҳолда $\left(1+\dfrac{\alpha}{p}x\right)^{p}<1+p\cdot\dfrac{\alpha}{p}x=1+\alpha x$, яни $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x$.

Шундай қилиб, теореманинг биринчи қисми тўлиқ исботланди.

Теоремадаги (2)-тенгсизликни ўқувчига мустақил исботлашни тавсия қиламиз.

2-теорема. Агар $a>0$, $\alpha>1$ ва $x\geq 0$ бўлса, у ҳолда $x^{\alpha}-ax$ функция $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ нуқтада $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ га тенг минимум қийматни қабул қилади.

Исбот. Теорема $\alpha=2$ ҳолда жуда оддий қилиб исботланади. $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ бўлганлиги учун қаралаётган функция $x=\frac{a}{2}>0$ нуқтада $-\frac{a^2}{4}$ га тенг минимум қийматни қабул қилади.

$\alpha>1$ ихтиёрий бўлган ҳолда теорема (2)-тенгсизлик ёрдамида исботланади. $\alpha>1$ бўлганлиги сабабли $(1+z)^{\alpha}\geq 1+\alpha z$, $z\geq -1$ тенгсизликлар ўринлидир, $z=0$ бўлганда теглик шарти бажарилади.Бу ерда $1+z=y$ деб олинса, ушбу

$$y^{\alpha}\geq 1+\alpha(y-1),\ y^{\alpha}-\alpha y\geq 1-\alpha,\ y\geq 0$$

Муносабатга келамиз. Бу муносабатда $y=1$ бўлганда тенглик шарти бажарилади. Охирги тенгсизликнинг ҳар иккала томонини c^{α} га кўпайтириб

$$(cy)^{\alpha}-\alpha c^{\alpha-1}(cy)\geq(1-\alpha)c^{\alpha}\ ,\ y\geq 0$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Агар ушбу белгилашларни киритсак, $x=cy$ ва $ac^{\alpha-1}=a$, $c=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ бўлади. Бундан ушбу, $x^{\alpha}-\alpha x\geq(1-\alpha)c^{\alpha}=(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

тенсизликга эга бўламиз. Мазкур ҳолда тенглик $x=c=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ бўлганда бажарилади. Шундай қилиб, $x^{\alpha}-\alpha x$, $\alpha>1$, $a>0$, $x\geq 0$ функция $x=\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ нуқтада $(1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ га тенг минимум қийматни қабул қилар экан. Теорема тўлиқ исботланди.

Энди юқоридаги келтирилган назарий маълумотларни мисоллар ечишда қўллаймиз.

1-мисол. $y = x^{\frac{5}{2}} - 20x$ функциянинг (0, 5) оралиқдаги минимум қийматини топинг.

Ечиш. Юқоридаги теоремадан фойдалани топамиз, функция $x = \left(\frac{20}{5/2}\right)^{\frac{1}{(5/2)-1}} = 4$ нуқтада $(1-\frac{5}{2})\left(\frac{20}{5/2}\right)^{\frac{1}{(5/2)-1}} = -48$ га тенг минимум қийматга эришади.

Изоҳ. Фараз қилайлик $\alpha > 1,\ \ a > 0,\ x \geq 0$ бўлсин. Шуни алоҳида такидлаш лозимки, $ax - x^{\alpha} = -\left(x^{\alpha} - ax\right)$ функция $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ нуқтада $(\alpha - 1)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ га тенг максимум қийматга эришади.

2-мисол. $y = \sin x(1 + \sin^2 x)\cos^2 x$ функциянинг максимум қийматини топинг.

Ечиш. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ айниятга кўра

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

тенглик ўринлидир, бундан ушбу

$$\sin x(1 + \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) = \sin x(1 - \sin^4 x) = t(1 - t^4)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. бу ерда $t = \sin x$ ва шу сабабли $-1 \leq t \leq 1$. У ҳолда $t(1 - t^4) = t - t^5$ функция $-1 \leq t < 0$ бўлганда манфий қийматларни қабул қилади, $t = 0$ бўлганда эса 0 га тенг қийматга эгадир. Худди шунингдек, $0 < t \leq 1$ бўлганда, берилган функция мусбат қийматларни қабул қилади. Шундай қилиб, қаралаётган функция $0 < t \leq 1$ оралиқда максимум қийматга эришади. 2-теоремага кўра $t - t^5$, $t \geq 0$ функция $t = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ нуқтада $(5-1)\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{5-1}} = 4\frac{1}{\sqrt[4]{5^5}}$ га тенг максимум қийматни қабул қилади.

Натижа. Фараз қилайлик $a > 0$, $\alpha < 0$ ва $x \geq 0$ бўлса, $x^{\alpha} + ax$ функция $x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ нуқтада $(1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ га тенг миниму қийматни қабул қилади.

Исбот. $\alpha<0$ бўлгани учун (2)-тенгсизликка кўра $(1+z)^{\alpha}\geq 1+\alpha z$ ўринли бўлиб, тенглик фақат $z=0$ бўлганда бажарилади. $1+z=y$, яни $z=y-1$ деб олиб, $y^{\alpha}\geq 1+\alpha(y-1)$, $y\geq 0$ ни ҳосил қиламиз. Бунда тенглик фақат $y=1$ бўлганда бажарилади. Охирги тенгсизликдан

$$y^{\alpha}-\alpha y\geq 1-\alpha,\ (cy)^{\alpha}-\alpha c^{\alpha-1}(cy)\geq(1-\alpha)c^{\alpha}$$

муносабатлар келиб чиқади. Энди $a=-\alpha c^{\alpha-1}$, $x=cy$ деб олиб

$$x^{\alpha}+ax\geq(1-\alpha)c^{\alpha}=(1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Бунда тенглик фақат $x=c=\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

бўлганда бажарилади. Шундай қилиб, $x^{\alpha}+ax$ функция $x=\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ нуқтада

$(1-\alpha)\left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ га тенг минимум қийматни қабул қилади.

3-мисол. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+8x$, $x>0$ функция $x=\left(\frac{8}{1/4}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{4}-1}}=\frac{1}{16}$ нуқтада $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{8}{1/4}\right)^{\frac{-1/4}{-1/4-1}}=\frac{5}{2}$ га тенг минимум қийматга эришади.

Қуйидаги мисолларни ўқувчилар мустақил ечишлари учун тавсия қиламиз:

M1. $y=(12-x)^{2}x$ функциянинг $(0;12)$ оралиқда максимум қийматини топинг.

M2. Қуйидаги функцияларнинг минимум қийматини топинг. $y=(e^{2x}-6)e^{x}$

M3. $y=\sin x(1-\sin^{2}x)$ максимум қийматини топинг.

M4. a параметрнинг қандай қийматларида $\sqrt{x}+\frac{a}{x^{2}}$ функция 1,25 га тенг минимум қийматга эришади?

M5. $a>0$, $0<\alpha<1$ ва $x\geq 0$ бўлганда $x^{\alpha}-ax$ функциянинг максимум қийматини топинг.

Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишдан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботланг.

М1. Агар $0 \le x \le 1$ ва $p > 1$ бўлса, $\frac{1}{2^p} \le x^p + (1-x)^p \le 1$ эканлигини исботланг.

М2. Барча $x \in (-\infty, +\infty)$ лар учун $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$ бажарилишини кўрсатинг.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Т.Ҳ.Расулов, З.Н.Ҳамдамов. Физика, математика ва информатика. 2016 й, 1-сон, 96-104 б.

2. П.П.Коровкин. Неравенства. Издательство «Наука», Москва, 1974.

3. А.У.Абдуҳамидов ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ асослари. “Ўқитувчи” нашриёти. Тошкент. 2011

4. Ш.Исмаилов, А.Қўчқоров, Б.Абдураҳмонов. Тенгсизликлар-I. Исботлашнинг классик усуллари. Тошкент, 2008.

5. Ш.Исмаилов, О.Ибрагимов. Тенгсизликлар-II. Исботлашнинг замонавий усуллари. Тошкент, 2008.

МАКТАБ ЎҚУВЧИЛАРИГА ФАЗОДА ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИ ЎҚИТИШДАГИ ТУШУНЧАЛАР

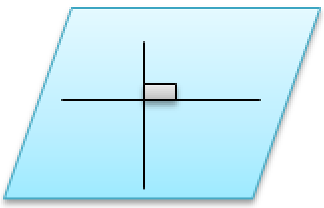
Дилором БЕШИМОВА

БухДУ Дифференциал тенгламалар кафедраси ўқитувчиси

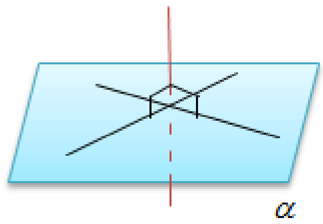
Мадина РАЖАБОВА

БухДУ Математика таълим йўналиши 2-босқич талабаси

Биз мактаб ўқувчиларига фазода перпендикуляр тўғри чизиқ ва текисликларни ўқитишда қуйидаги тавсиялар беришимиз мумкин. Маълумки, болаларда геометрик тасаввурларни шакллантиришга муҳим таъсир ўқувчиларнинг геометрик тасаввур шаклланишига оид фаолиятлари муҳим таъсир кўрсатади. Тушунчаларни ўзлаштириш бўйича фаолият ичида асосийлардан бири таърифлардир. Бироқ бошланғич синфларда геометрик тушунчалар билан танишишда таърифлардан фойдаланиш чегаралари ҳам аниқланмаган эди, чунки улар турли вариантларда турлича бўлиши мумкин. Геометрик элементларни ўргатишда қуйдаги методлардан масалан: геометрик моделлаштиршдан фойдаланиш, қоғоз, чўплар, пластин ва симлардан фигура (шакл) ларнинг моделларини ясаш, қоғозда геометрик шаклларни чизиш - болалар онгида геометрик тасввурни ривожлантиришга омил бўла олади. Бундай шароитда материалнинг тури, ранги, ўлчамлари, текисликдаги ҳолатини назарда тутмаган ҳолда шаклларни шундай танлаш керакки, болалар уларнинг асосий белгиларини (шакли, геометрик сифатларини) аниқлай олсинлар. Шуларга диққат қаратиш керакки, ўқувчилар геометрик фигураларнинг барча сифатларини ажрата билсинлар. Бу шакллар тасаввурнинг тўғри бўлишига ёрдам беради. Масалан тўғри бурчакли тўртбурчакни ўрганиш жараёнида болалар унинг икки асосий сифати; тўртбурчак эканлиги ва бурчаклари тўғри эканлигини тушуниб етишлари керак. Ўқитувчи шундай тушунтириши керакки ўқувчиларга бу тушунарли ва қизиқарли бўлиши лозим. Мисол учун: Фазода берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 90^0 га тенг бўлса, улар ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади. a ва b тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги $a \perp b$ тарзда ёзилади.



Текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр дейилади.

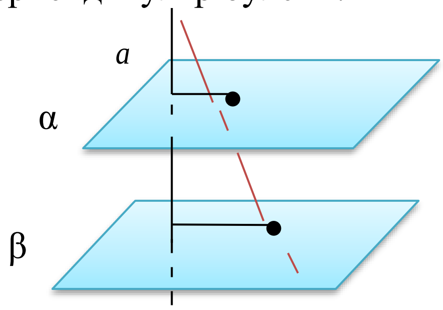


1-теорема. Агар икки тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, улар ўзаро параллел бўлади.

2-теорема. Агар тўғри чизиқ текисликда ётган икки кесишувчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

3-теорема. Агар тўғри чизиқ иккита параллел текисликнинг бирига перпендикуляр бўлса, иккинчисига ҳам перпендикуляр бўлади.

Исбот. Иккита α ва β параллел текисликлар берилган бўлсин. a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр бўлсин.



a тўғри чизиқ β текисликка ҳам перпендикуляр бўлишини исботлаймиз.

a тўғри чизиқда бирор H нуқта оламиз. Бу H нуқта орқали α текисликни M нуқтада кесиб ўтувчи b тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ β текисликни бирор M_1 нуқтада кесиб ўтсин. M ва M_1 нуқталар битта тўғри чизиқда ва параллел текисликларда ётгани учун M нуқтада α текисликка ва M_1 нуқтадан β текисликда ётувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар a тўғри чизиқ билан P ва P_1 нуқталарда кесишсин. Бунда $\angle HMP=\angle HM_1P_1$, $MP \| M_1P_1$. a тўғри чизиқ α текисликка перпендикулярлигидан, унинг MP тўғри чизиққа ҳам перпендикулярлиги келиб чиқади. Демак, MHP тўғри бурчакли учбурчак. Учбурчакларнинг ТБТ аломатига кўра $\angle HP_1M_1 =90^0$.

Натижада a тўғри чизиқнинг β текисликка перпендикуляр эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия Т. 2008 й.

2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Аналитик геометриядан масалалар тўплами. Т., Университет, 586 б., 2006 й.

3. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М., Наука, 1990.

4. Погорелов А.В. Аналитик геометрия. Т., Ўқитувчи, 1983.

5. М.А.Мирзааҳмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.Қ.Аманов, Б.Қ.Ҳайдаров "Математика 10" Тошкент, 2017.

МУСБАТ СОНЛАР УЧУН ЎРТА ҚИЙМАТЛАР ВА УЛАР ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

Муяссар БОБОЕВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Тўлқин РАСУЛОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Мазкур ишда иккита мусбат сон учун ўрта қийматнинг умумий таърифи ва уларнинг кўплаб турлари таҳлил қилинган. Иккита соннинг ўрта логарифмик қийматига алоҳида тўхталиб ўтилган. Ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта логарифмик қийматлар орасидаги боғланишлар баён қилинган. Маълумки, ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта вазни қийматлар билан боғлиқ масалалар мактаб дарсликларида ва олий ўқув юртларига кириш тест имтихонларда кўп учраб туради. Ўрта қийматлар, математик анализда, геометрияда, эҳтимоллар назарияси ва статистикада кўплаб тадбиқларга эга. Ишда келтирилган маълумотлардан умумтаълим мактабларида, академик лицей ва касб ҳунар коллежлари ҳамда олий таълим муассасалари талабаларига тўгараклар ва синфдан ташқари машғулотларни ташкил қилишда фойдаланиш мумкин. Бундан ташқари, мусбат сонлар учун ўрта қийматлар орасидаги боғланишлар ёрдамида кўплаб олимпиада масалаларини ечиш мумкинлигини алоҳида таъкидлаб ўтиш жоиз.

Ишда келтирилган маълумотларни шакллантиришда асосан инглиз тилида ёзилган [1-3] адабиётлардан фойдаланилди.

Математика фанида ишлатилишидан боғлиқ равишда мусбат сонлар учун ўрта қийматнинг турли хилдаги таърифлари мавжуд. Қуйида биз тшундай таърифлардан бирини келтирамиз.

R_+ орқали номанфий ҳақиқий сонлар тўпламини белгилаймиз.

Агар $m: R_+ \times R_+ \to R_+$ функция ушбу

1) $m(a,b) = m(b,a)$;

2) $\min(a,b) \le m(a,b) \le \max(a,b)$;

3) барча $\alpha > 0$ лар учун $m(\alpha a, \alpha b) = \alpha m(a,b)$;

4) $a \le c \Rightarrow m(a,b) \le m(c,b)$;

5) m-узлуксиз;

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда m функцияга ўрта қиймат дейилади.

a ва b мусбат сонлар учун ўрта қиймат турларига тўхталамиз.

Бизга $f: R_+ \to R_+$ тескариланувчан функция берилган бўлсин. Ушбу

$$m_f(a,b) = f^{-1}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2}\right)$$

миқдорга a ва b мусбат сонларнинг $f-$ ўрта қиймати дейилади.

Масалан, агар $f(x) = 2x+1$ бўлса, у ҳолда $m_f(2,8) = 5$ бўлади.

Баъзи хусусий ҳолларни қараймиз. Фараз қилайлик, $f(x) = x$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(x) = x$. Шу сабабли

$$m_x(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

тенглик ўринлидир. Ҳосил бўлган миқдорга a va b сонларнинг ўрта арифметик қиймати дейилади ва $A(a,b)$ каби белгиланади.

Иккинчи хусусий ҳол сифатида $f(x) = \ln x$ функцияни қараймиз.

Маълумки, $f^{-1}(x)=e^{x}$ тенглик ўринли бўлади. Содда ҳисоблашга кўра

$$m_{\ln x}(a,b)=\exp\left(\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)=\sqrt{\exp(\ln(ab))}=\sqrt{ab}$$

муносабатлар ўринлидир. Бундай усулда ҳосил қилинган миқдорга a va b сонларнинг ўрта геометик қиймати дейилади ва $G(a,b)$ каби белгиланади.

Энди $f(x)=1/x$ функцияни қараймиз. Бу ҳолда $f^{-1}(x)=1/x$ тенглик ўринли бўлиб, ҳосил бўлган

$$m_{1/x}(a,b)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}$$

миқдорга a ва b сонларнинг ўрта гармоник қиймати дейилади ва $H(a,b)$ каби белгиланади.

Агар $f(x)=x^{2}$ бўлса, у ҳолда $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ бўлади. Мазкур ҳолда

$$m_{x^2}(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

миқдорга a ва b сонларнинг ўрта квадратик илдиз қиймати дейилади ва $B_2(a,b)$ каби белгиланади.

Фараз қилайлик, $f(x)=x^{m}$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(x)=\sqrt[m]{x}$ бўлиб, ушбу

$$m_{x^m}(a,b)=\left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{1/m},\ -\infty<m<\infty$$

миқдорга a ва b сонларнинг ўрта биномиал, ўрта даражали ёки ўрта Гёльдер қиймати дейилади ва $B_m(a,b)$ каби белгиланади.

Бизга яхши маълумки, юқорида келтирилган ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлар математикада кўп учраб туради ва улар орасида

$$H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)$$

каби муносабатлар ўринлидир.

Аниқланишига кўра, агар m сони -1, 1 ва 2 га тенг бўлса, у ҳолда $B_m(a,b)$ сони мос равишда ўрта гармоник, ўрта арифметик ва ўрта квадрати илдиз қийматига тенг бўлади, яъни

$$B_{-1}(a,b) = H(a,b),\ B_1(a,b) = A(a,b),\ B_2(a,b) = B_2(a,b).$$

Бундан ташқари, агар $m \le n$ бўлса, у ҳолда $B_m(a,b) \le B_n(a,b)$ тенгсизлик ўринли бўлиб,

$$\min(a,b) = \lim_{m\to\infty} B_m(a,b),\ \max(a,b) = \lim_{m\to-\infty} B_m(a,b)$$

тенгликлар ўринли бўлишини осон текшириб кўриш мумкин.

Баҳоси a сўмлик m кг ва b сўмлик n кг маҳсулот берилган бўлса, бу маҳсулотлар аралашмасининг бир кг

$$\frac{a \cdot m + b \cdot n}{m+n}$$

сўм туради. Ҳосил бўлган миқдорга a ва b сонларнинг ўрта вазнли қиймати дейилади.

Математикада ўрта арифметик, ўрта геометрик, ўрта гармоник ва ўрта вазнли қийматлар кўп ишлатилади. Бироқ ўрта қийматнинг бундан бошқа яна кўплаб турлари мавжуддир. Мақоланинг қолган қисмида уларнинг ўзбек тилидаги адабиётларда кам учрайдиган турларига тўхталамиз. Ушбу

$$L(a,b) = \frac{a-b}{\ln a - \ln b},\ a \ne b,\ \left(L(a,a) = a\right)$$

сонга a ва b сонларнинг ўрта логарифмик қиймати дейилади [1,2]. Амалиётда қўллаш учун қулай бўлган $L(a,b)$ бошқа эквивалент формулалари ҳам мавжуддир. Улар

$$L(a,b) = \int_0^1 a^t b^{1-t}\,dt;\ \frac{1}{L(a,b)} = \int_0^1 \frac{dt}{at + b(1-t)};\ \frac{1}{L(a,b)} = \int_0^\infty \frac{dt}{(t+a)(t+b)}.$$

Кўриниб турибдики, агар $a \ne b$ бўлса, у ҳолда

$$G(a,b) < L(a,b) < A(a,b)$$

қатъий тенгсизлик ўринлидир.

Қуйидаги

$$H_\nu(a,b) = \frac{a^\nu b^{1-\nu} + a^{1-\nu} b^\nu}{2},\ 0 \le \nu \le 1$$

тенглик ёрдамида аниқланган сонга a ва b сонларнинг Heinz ўрта қиймати дейилади. Таърифдан кўриниб турибдики,

$$H_0(a,b)=H_1(a,b)=A(a,b),\ H_{1/2}(a,b)=G(a,b),\ H_{1-\nu}(a,b)=H_\nu(a,b).$$

Барча $0\le\nu\le1$ ларда

$$H_{1/2}(a,b)\le H_\nu(a,b)\le H_0(a,b)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини осон текшириш мумкин.

Бизга иккита x ва y ўзгарувчили f функция берилган бўлсин. Агар ҳар бир (x,y) вектор учун шундай M сони топилиб, $f(M,M)=f(x,y)$ шарт бажарилса, M сонига x ва y сонларнинг ўрта Chisini қиймати дейилади. Бу ўрта қиймат Oskar Chisini томонидан 1929 –йилда киритилган. Ўрта арифметик, ўрта геометрик ва ўрта квадратик илдиз қийматлар Chisini ўрта қийматларидир.

a ва b мусбат сонлари учун киритилган ушбу

$$C(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

миқдорга бу сонларнинг контра гармоник ўрта қиймати дейилади.

Киритилган ўрта қийматни характерловчи баъзи хоссаларни келтирамиз:

1-хосса. $C(a,b)\in[\min\{a,b\},\ \max\{a,b\}]$.

2-хосса. Барча $t>0$ лар учун $C(ta,ta)=tC(a,b)$ тенглик ўринлидир.

Таърифдан ва 2-хоссадан барча $k>0$ лар учун $C(k,k)=k$ тенглик ўринли эканлиги келиб чиқади. Одатда бундай хоссага қўзғалмас нуқта хоссаси дейилади.

3-хосса. Ихтиёрий a ва b мусбат сонлари учун

$$\min\{a,b\}\le H(a,b)\le G(a,b)\le L(a,b)\le A(a,b)\le B_2(a,b)\le C(a,b)\le\max\{a,b\}$$

тенгсизликлар ўринлидир. Агар $a=b$ бўлса, охирги муносабатларда $\le$ белги $=$ белгисига алмашади.

Ўрта арифметик, ўрта гармоник ва контра гармоник ўрта қийматлар учун формулалар ёрдамида

$$2A(a,b)-H(a,b)=a+b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a+b}=C(a,b)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Бундан ташқари қуйидаги қўшимча хоссалар ҳам ўринлидир:

$A(H(a,b), C(a,b)) = A(a,b)$;

$G(A(a,b),\ H(a,b)) = G(a,b)$;

$G(A(a,b),\ C(a,b)) = B_2(a,b)$.

Навбатдаги ўрта қиймат тури бу геометрик-гармоник ўрта қийматдир. Иккита a ва b мусбат сонлар учун геометрик-гармоник ўрта қиймат қуйидаги қоида орқали аниқланади. $g_0 = a$ ва $h_0 = b$ ларнинг ўрта геометрик қийматини g_1 орқали белгилаймиз, яъни $g_1 = \sqrt{ab}$; бундан ташқари, a ва b мусбат сонларнинг ўрта гармоник қийматини h_1 орқали белгилаймиз, яъни

$$h_1 = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

тенглик ўринлидир. Энди юқоридаги амалларни a нинг ўрнига g_1 ва b нинг ўрнига h_1 олиб итерация қиламиз, натижада бу усул ёрдамида иккита $\{g_n\}$ ва $\{h_n\}$ кетма-кетликлар қуйидаги муносабатлар орқали аниқланади:

$$g_{n+1} = \sqrt{g_n h_n},\quad h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{g_n} + \frac{1}{h_n}}.$$

Ҳосил бўлган кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, бир хил лимитга эга бўлади, бу лимитга a ва b сонларнинг геометрик-гармоник ўрта қиймати дейилади ва $GH(a,b)$ каби белгиланади.

Баъзи адабиётларда геометрик-гармоник ўрта қийматлар гармоник-геометрик ўрта қийматлар деб ҳам юритилади.

$\{g_n\}$ ва $\{h_n\}$ кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эканлигини Больцано-Вейерштрасс теоремасидан фойдаланиб кўрсатиш мумкин.

Геометрик-гармоник ўрта қиймат қуйидаги хоссаларга эга.

4-хосса. $GH(a,b)$ сони a ва b сонларнинг ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлари орасида ётади, яъни

$$G(x,y)\le GH(x,y)\le H(x,y).$$

5-хосса. Хусусий ҳолда $GH(a,b)$ сони a ва b сонларнинг орасида ётади. Масалан $x\le y$ бўлса, у ҳолда

$$x\le GH(x,y)\le y$$

бўлади.

6-хосса. Агар $r>0$ бирор сон бўлса, у ҳолда

$$GH(ra,rb)=rGH(a,b)$$

тенглик ўринлидир.

7-хосса. Агар $AG(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг арифметик-геометрик қиймати бўлса, у ҳолда

$$GH(a,b)=\frac{1}{AG\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)}$$

тенглик ўринлидир.

8-хосса. Қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

$$\min\{a,b\}\le H(a,b)\le GH(a,b)\le G(a,b)\le AG(a,b)\le A(a,b)\le \max\{a,b\}.$$

a ва b мусбат сонлари учун қуйидаги

$$HA(a,b)=\frac{1}{3}\left(a+\sqrt{ab}+b\right)$$

тенглик ёрдамида аниқланган миқдорга, бу сонларнинг Heronian ўрта қиймати дейилади. Бу тушунча Hero Alexandria шарафига қўйилган бўлиб, пирамида ёки конуснинг ҳажмини топишда фойдаланилади. a ва b сонарининг Heronian ўрта қиймати бу сонларнинг ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$HA(a,b)=\frac{2}{3}\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{ab}=\frac{2}{3}A(a,b)+\frac{1}{3}G(a,b).$$

a ва b мусбат сонлари учун

$$L_p(a,b)=\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}}$$

каби аниқланган миқдорга бу сонларнинг Lehmer ўрта қиймати дейилади. Бу тушунча Denrik Henry Lehmer шарафига қўйилгандир. Таъкидлаш жоизки, $L_p(a,b)$ функциянинг p ўзгарувчи бўйича ҳосиласи номанфийдир ва шу сабабли, айнан шу ўзгарувчиси бўйича монотон ўсувчи функция бўлади ҳамда $p\le q$ бўлганда $L_p(a,b)\le L_q(a,b)$ тенгсизлик бажарилади.

Қуйидаги хоссалар ўринлидир:

9-хосса. $\lim\limits_{p\to-\infty} L_p(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг кичигига тенг.

10-хосса. $L_0(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта гармоник қийматига тенг.

11-хосса. $L_{1/2}(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта геометрик қийматига тенг.

12-хосса. $L_1(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта арифметик қийматига тенг.

13-хосса. $L_2(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта контра гармоник қийматига тенг.

a ва b сонлари учун

$$S_p(a,b)=\begin{cases} a & \text{агар } a=b \\ \left(\dfrac{a^p-b^p}{p^{(a-b)}}\right)^{1/p} & \text{акс холда} \end{cases}$$

миқдорга бу сонларнинг Stolarskiy ўрта қиймати дейилади.

14-хосса. $\lim\limits_{p\to-\infty} S_p(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг кичигига тенг.

15-хосса. $S_{-1}(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта геометрик қийматига тенг.

16-хосса. $S_2(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг ўрта арифметик қийматига тенг.

17-хосса. $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p(a,b)$ миқдор a ва b сонларнинг каттасига тенг.

Хулоса қилиб айтганда, мусбат сонлар учун ўрта қийматнинг яна кўплаб киритиш мумкин бўлиб, улар орасидаги муносабатлар олимпиада тенгсизликларини исботлашда, функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини тенгсизликлар ёрдамида ҳисоблашда муҳим ўрин эгаллайди.

Фойдаланилган адабиётлар

1. R.Bhatia. The logarithmic mean. American Mathematical Monthly. Resonance. Pp. 583-594.

2. B.C.Carlson. The logaritmic mean. American Mathematical Monthly. Vol. 79, pp. 615-618.

3. G.Hardy, J.E.Littlewood, G.Poelya. Inequalities. Cambridge University Press. Second edition, 1952.

МАТЕМАТИК ТУШУНЧАЛАРНИ КИРИТИШНИНГ АБСТРАКТ-ДЕДУКТИВ МЕТОДИ

Муяссар БОБОЕВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Замонавий таълимни ташкил этишга қўйиладиган муҳим талаблардан бири ортиқча руҳий ва жисмоний куч сарф этмай, қисқа вақт ичида юксак натижаларга эришишдир. Қисқа вақт орасида муайян назарий билимларни ўқувчиларга етказиб бериш, уларда маълум фаолият юзасидан кўникма ва малакаларни ҳосил қилиш, шунингдек, ўқувчилар фаолиятини назорат қилиш, улар томонидан эгалланган билим, кўникма ҳамда малакалар даражасини баҳолаш ўқитувчидан юксак педагогик маҳорат ҳамда таълим жараёнига нисбатан янгича ёндашувни талаб этади.

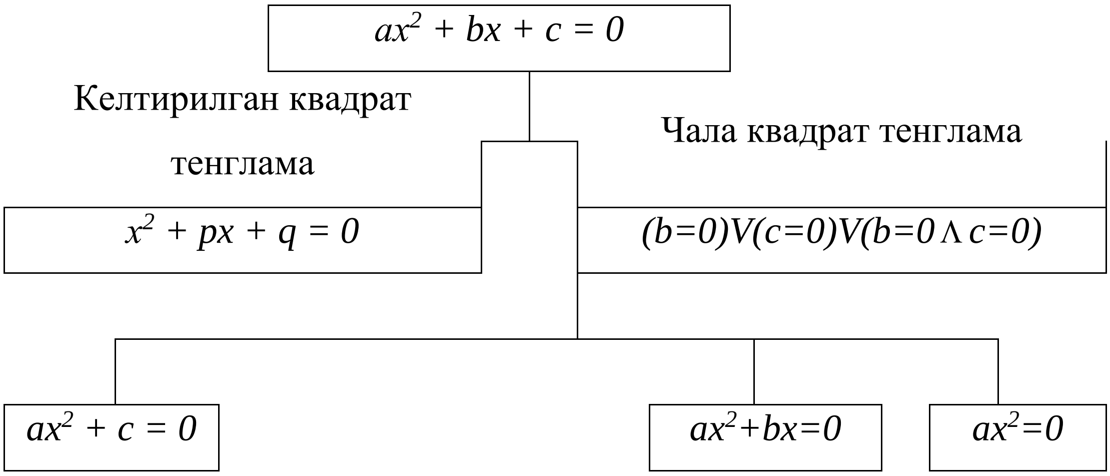
Математик тушунчаларни киритишнинг абстракт-дедуктив методида ўрганиладиган математик тушунча учун таъриф тайёр кўринишда олдиндан аниқ мисол ва масалалар ёрдамида тушунтирилмасдан киритилади. Масалан, мактаб математика дарсларида ўтиладиган тўла квадрат тенглама тушунчаси абстракт-дедуктив метод орқали киритилади.

1. Квадрат тенглама тушунчасига таъриф берилади.

Таъриф. $ax^2+bx+c = 0$ кўринишидаги тенгламалар тўла квадрат тенглама дейилади. Бу ерда x - ўзгарувчи, a, b, с- ихтиёрий ўзгармас сонлар, $a > 1$.

2. Квадрат тенгламанинг хусусий ҳоллари кўриб чиқилади. Буни жадвал тарзида ифодалаш мумкин.

Тўла квадрат тенглама



3. Ҳосил қилинган келтирилган ва чала квадрат тенгламаларга аниқ мисоллар келтирилади. Масалан

$2x^2 – 3x – 4 = 0,$ $x^2 – 5x – 6 = 0,$

$3x^2 + 5x = 0,$ $2x^2 + 7x = 0,$ $5x^2 = 0,$

4. Квадрат тенглама тадбиқига доир ҳаётий мисоллар келтириш керак. Масалан, $s = \frac{gt^2}{2}$ формула физика курсидан бизга маълум, бу тенгламани ечиш $gt^2–2s=0$ кўринишидаги чала квадрат тенглама ҳолига келтириб, сўнгра ечилади.

5. Квадрат тенгламанинг илдизларини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқариш.

1 - усул. $ax^2+bx+c=0$ тенглама илдизлари топилсин. Бунинг учун қуйидаги айний алмаштиришларни бажарамиз:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0;\quad a\neq 0$$

$$\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x_1=-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2 - усул:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$ax^2+bx=-c\mid\cdot 4a,$$

$$4a^2x^2+4abx=-4ac\mid+b^2,$$

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac;$$

$$2ax_{1,2}+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Агар $ax^2+bx+c=0$ да $a=1$ бўлса, $x^2+bx+c=0$ кўринишдаги квадрат тенглама ҳосил бўлиб, унинг ечимлари қуйидагича бўлади:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$$

Агар $b=p;\ c=q$ десак, $x^2+px+q=0$ бўлади, унинг ечимлари

$$x_1=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ \text{va}\ x_2=\frac{-p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

бўлади.

3 - усул. $x^2 + px + q = 0$ (1)

$b^2 = q; 2ab = p$ десак,

$$b=\pm\sqrt{q},\quad a=\pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

буларни (1) га қўйсак, у қуйидаги кўринишни олади.

$$x^2 + 2abx + b^2 = 0 \qquad (2)$$

(2) га a^2x^2 ни қўшсак ва айирсак $x^2+2abx+b^2+a^2x^2-a^2x^2=0$ бўлади, $a^2x^2+2abx+b^2-a^2x^2+x^2=0$ ёки $(ax+b)^2-a^2x^2+x^2=0$ белгилашга кўра $b=\pm\sqrt{q};\quad a=\pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$ эди, шунинг учун

$$\left(\frac{px}{2\sqrt{q}}+\sqrt{q}\right)^2-\frac{p^2}{4q}x^2+x^2=0;$$

$$(px+2q)^2-p^2x^2+4qx^2=0;$$

$$px+2q=\pm x\sqrt{p^2-4q};$$

$$2q=x(-p\pm\sqrt{p^2-4q});$$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}$$

1 - мисол. $x^2 - 3x - 4 = 0; p = -3; q = -4$

$$x_{1,2}=\frac{-p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2};$$

$$x_1=4;\ x_2=-1$$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}=\frac{2\cdot(-4)}{3\pm\sqrt{9+16}}=\frac{-8}{3\pm5};$$

$$x_1=\frac{-8}{-2}=4;\qquad x_2=\frac{-8}{8}=-1;$$

2 - мисол. $x^2 - 5x - 6 = 0;$

$p = -5; q = -6$

$$x_{1,2}=\frac{2q}{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}=\frac{2\cdot(-6)}{5\pm\sqrt{25+24}}=-\frac{12}{5\pm7};$$

$$x_1=-\frac{12}{12}=-1; \qquad x_2=\frac{-12}{-2}=6;$$

3 - мисол. $2x^2–5=0$ бўлса, $(2x^2=5)\Rightarrow\left(x^2=\frac{5}{2}\right)\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

4 - мисол. $2x^2-3x=0$ бўлса, $[x(2x-3)=0])\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1=0 \\ x_2=\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ бўлади.

5 - мисол. $2x^2=0$ бўлса, $x_{1,2}=0$ бўлади.

EXCEL ДАСТУРИНИНГ АМАЛИЙ МАСАЛАЛАР ЕЧИШДА ТАДБИҚИ

Шаҳло ДЎСТОВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Ҳозирги кунда таълим жараёнида инновацион педагогик ва ахборот технологияларидан кенг фойдаланиб, таълим самарадорлигини оширишга бўлган талаб кун сайин ортиб бормоқда. Математика дарсларида янги Ахборот-коммуникацион технологиялардан фойдаланиш вақтни тежаш, кўпрор масала ва мисоллар ечиш билан ўқувчиларнинг ҳар томонлама билимларини оширишга эришиш, уларнинг мустақил фикрлашига, масалада берилган шартларни мустақил бажариб, шу мавзуга доир тушунчаларни чуқур эгалашига ва ўз фикрини мустақил равишда ифода эта олишига ёрдам беради.

Баъзи мисол ва масалаларни ечишда Excel дастуридан фойдаланишда, анча қисқа вақт оралиғида аниқ ва содда ечимга эришилади. Шу билан бирга Excel дастури ойнасида системанинг аниқ ечими тасвири ҳосил бўлади. Бу эса ўз навбатида ўқувчиларнинг ҳам эшитиб, ҳам кўриб, ҳам бажариб ўрганишига сабаб бўлади.

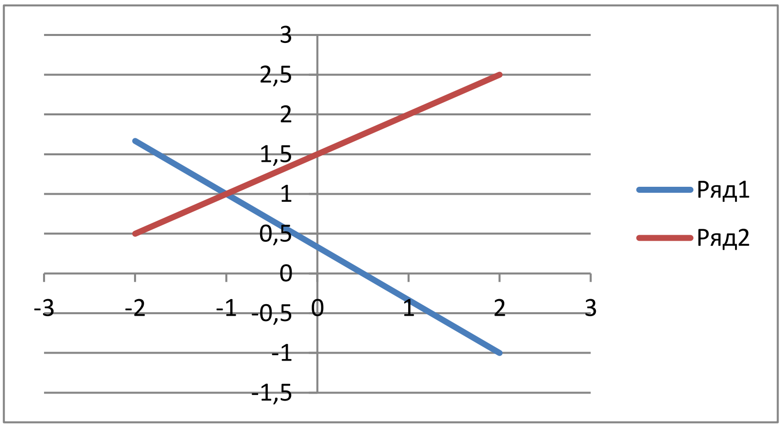
Қуйидаги мисол ва масалаларни Excel дастури ёдамида соддароқ усулда ҳал қилиш мумкин:

1-Мисол. Тенгламалар системасини график усулда ечинг:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Бу ечимни топиш учун биз дастлаб системанинг биринчи тенгламасидан у ни х орқали ифодалаб оламиз. Биринчи устунга х ва унинг тагидан х нинг қийматларини киритамиз, иккинчи устунининг биринчи катагига y_1 ни ва унинг тагидаги катакда эса системанинг биринчи тенгламасидаги у нинг х орқали ифодасини жойлаштирамиз ҳамда ”ENTER” тугмасини босамиз. Натижада бизга y_1 нинг х ўзгарувчисига боғлиқ қиймати келиб чиқади. Кейин шу катакнинг пастки ўнг бурчагига курсорни келтирамиз. Қалин қора курсор (крестик) пайдо бўлганда сичқончанинг чап тугмасини босамиз ва х нинг қиймати нечта катакка жойлаштирилган бўлса, y_1 устунининг ҳам шунча катагигача курсорни тортиб юритамиз. Натижада биз y_1 нинг х нинг берилган қийматларига мос келувчи барча қийматлари тўпламини топамиз. Учинчи устуннинг биринчи катагида эса системадаги иккинчи тенгламадаги у ни х орқали ифодасини киритамиз ва худди y_1 нинг қийматлари устуни қандай ҳосил қилинган бўлса, шу жараённи такрорлаймиз. Сўнгра ҳар уччала устунни белгилаб олиб, «Вставка» менюсидан «Точечная» буйруғини босамиз. Натижада бизга битта координата текислигида ҳар иккала тенгламанинг графиги ҳосил бўлади ва бу чизиқларнинг кесишиш нуқтаси системанинг ечими бўлади.

X	*Y₁*	*Y₂*
-2	1,666666667	0,5
-1	1	1
0	0,333333333	1,5
1	-0,333333333	2
2	-1	2,5

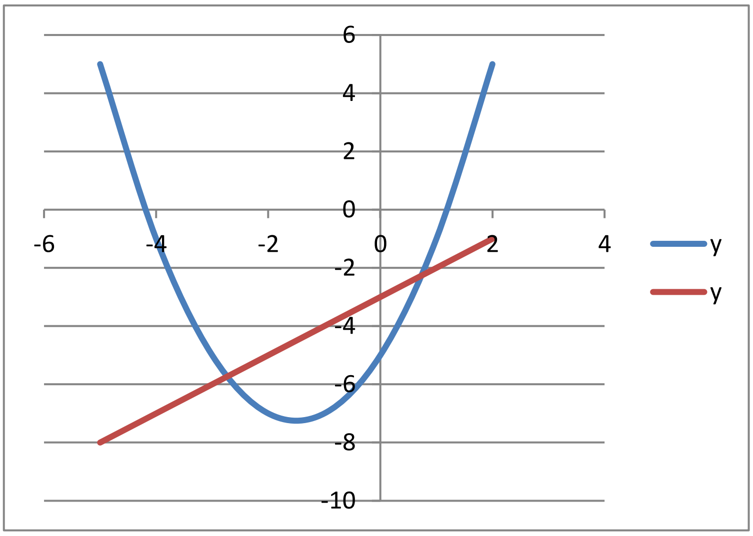


Демак, бу системанинг ечими (-1;1) экан.

2-Мисол. Худди шундай тенгламалар системаси нечта ечимга эга:

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

X	Y	Y
-4	-1	-7
-3	-5	-6
-2	-7	-5
-1	-7	-4
0	-5	-3
1	-1	-2



бу системани ечишда ҳам юқоридаги усулдан фойдаланамиз

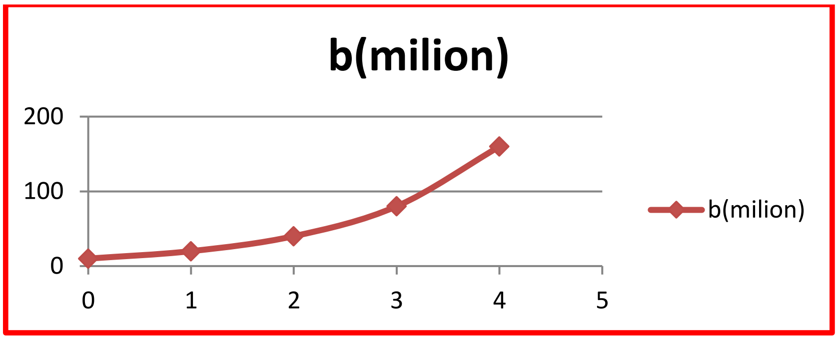
Демак, бу система иккита ечимга эга экан.

Бундан ташқари 10 – синф дарслигидаги “Кўрсаткичли функциялар ёрдамида моделлаштириш” мавзусида берилган масалаларни ечишда ҳам Excel дастуридан фойдаланиш айни муддао.

3-Масала. Бактерия маълум вақтдан сўнг иккига бўлинади ва бактериялар сони икки карра ортади. Навбатдаги вақтдан сўнг мазкур иккита бактерия ҳам иккига бўлинади ва популяция миқдори (бактериялар умумий сони) яна икки карра ортади; энди бактериялар сони тўртта бўлди. Бу кўпайиш жараёни қулай шароитларда давом этаверади. Фараз қилайлик , дастлаб 10 милионта бактерия борлиги, бундай бактериялар бир соатдан сўнг иккига бўлиниши маълум бўлсин. t= 1,2,3,4 соат ўтганда b популяция миқдори қандай ўзгаради?

Ушбу жадвални тузамиз ҳамда унга мос графикни ҳосил қиламиз:

t (соат)					
b(милион)	0	0	0	0	60



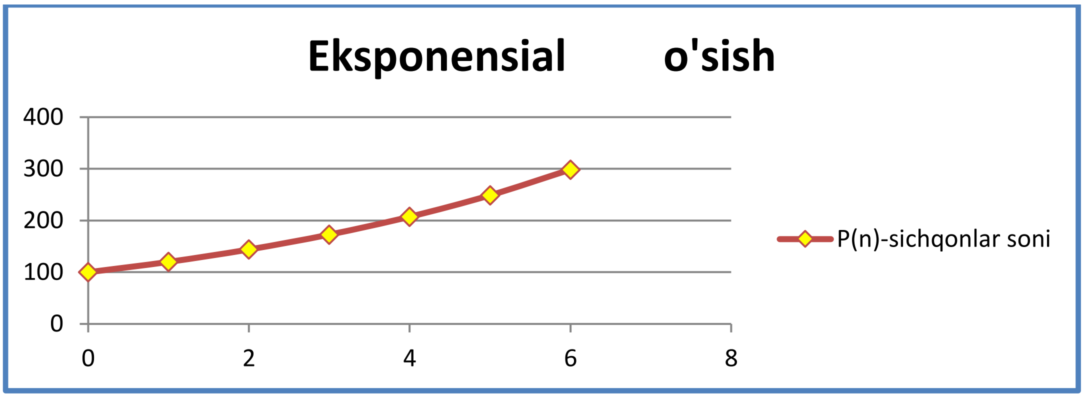
Таъриф: $\mathbf{b(t)=b_0\, a^t}$ қонуният билан ўзгарадиган миқдор (бунда $b_0>0$, $a>1$, $t\geq0$) экспоненциал ўсувчи миқдор дейилади.

“Экспоненциал ўсиш” ибораси одатда қандайдир шиддатли, тўхтовсиз ўсиш жараёнини ифодалайди.

4-Масала. Эпидимиология хизматининг маълумотига кўра, сичқонлар популяцияси миқдори қулай шароитларда ҳар ҳафтада 20% ортар экан. Дастлаб 100 та сичқон бўлса, уларнинг популяция миқдори қандай қонуният билан ўсишини топинг.

Excel дастурида ушбу жадвални тузамиз ҳамда унга мос графикни ҳосил қиламиз:

n -ҳафта	0	1	2	3	4	5	6
P(n)-сичқонлар сони	100	120	144	172,8	207,36	248,832	298,5984



Жавоб: Кўриниб турибдики, 6 ҳафтада популяция миқдори қарийб 3 марта ортар экан.

5-Масала. Энтомолог олим чигирткалар популяциясининг қишлоқ хўжалиги далаларига зарар етказишини ўрганганда зарар кўрган майдонлар юзи $A_n = 1000 \cdot 2^{0{,}2n}$ (га) қонуният билан ўзгаришини аниқлади, бу ерда n ҳафталар сони.

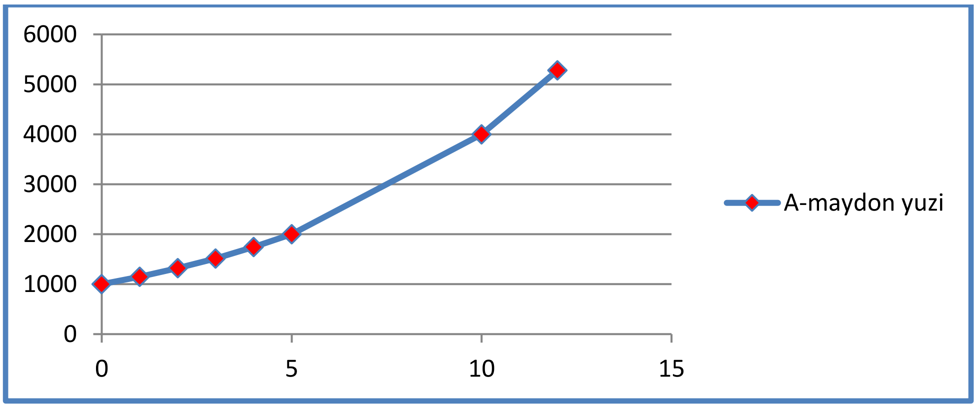
а) Дастлаб қандай майдонга зарар етказилган?

б) 5;10 ҳафтада қандай майдонга зарар етказилади?

с) Зарар кўрган майдон юзи билан ҳафталар сони орасидаги боғланиш қонуниятининг графигини чизинг?

Excel дастурида ушбу жадвални тузамиз ҳамда унга мос графикни ҳосил қиламиз:

n -ҳафталар сони	0	1	2	3	4	5	10	12
А-майдон юзи	1000	1149	1320	1516	1741	2000	4000	5278



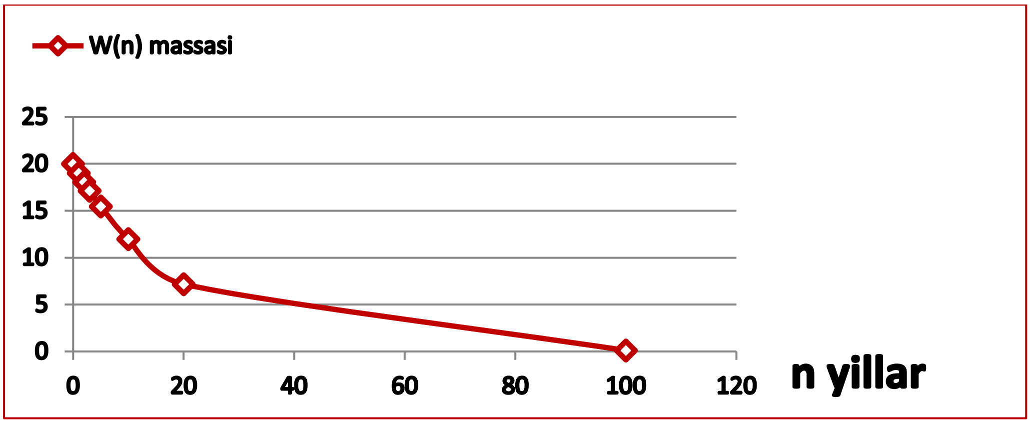
Жавоб: A(0)=1000 гектар A(5)=2000 гектар A(12)=5278 гектар тахминан 5280 га.

6-Масала. Радиактив емирилиш натижасида массаси 20 грамм бўлган радиактив модда ҳар йили 5% га камаяди. W_n деб модданинг n йилдаги массасини белгилаймиз.

$W_0=20$; $W_1= W_0*0,95$; $W_2=W_0*(0,95)^2$; $W_3=W_0*(0,95)^3$ … $W_n=20*(0,95)^n$

Excel дастурида ушбу жадвални тузамиз ҳамда унга мос графикни ҳосил қиламиз:

n (йиллар)	0		2	3	5	10	20	100
W(n) массаси	20	9	8,05	17,1475	15,47562	11,97474	7,169718	0,106866



Жавоб: $W_n=20*(0,95)^n$ формула билан ҳисобланувчи бу масалада, масса экспоненциал камаювчи миқдор бўлади.

Таъриф: $b(t)=b_0\ a^t$ қонуният билан ўзгарадиган миқдор (бунда $b_0>0$, $0<a<1$, $t\geq0$) экспоненциал камаювчи миқдор дейилади.

7-Масала. Дастлаб шаҳар аҳолиси a киши бўлиб, аҳоли сони ҳар йили 10% га ортса, аҳолининг x йилдан кейин қанча бўлишини аниқловчи формулани топинг.

Мураккаб фоиз формуласига кўра, шаҳар аҳолиси сони x йилдан сўнг $y = a\cdot\left(\frac{100+10}{100}\right)^x = a\cdot(1{,}1)^x$ бўлади.

Демак, y= a*$(1,1)^x$

x	y	x	y
1	1100000	6	1771561
2	1210000	7	1948717,1
3	1331000	8	2143588,81
4	1464100	9	2357947,691
5	1610510	10	2593742,46

8-Масала. Дастлаб шаҳар аҳолиси а киши бўлиб, аҳоли сони ҳар йили 2% га ортса, аҳолининг х йилдан кейин қанча бўлишини аниқловчи формулани топинг.

Мураккаб фоиз формуласига кўра, шаҳар аҳолиси сони х йилдан сўнг $y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100}\right)^x = a \cdot (0{,}98)^x$ бўлади. Демак, $y = a \cdot (0{,}98)^x$

x	y	y	y
1	1100000	6	1771561
2	1210000	7	1948717,1
3	1331000	8	2143588,81
4	1464100	9	2357947,691
5	1610510	10	2593742,46

Ушбу мақолада Excel дастурини математиканинг турли соҳаларида кенг қўлланилиши мумкинлиги кўрсатилди. Excel дастури ёрдамида масалаларни ечиш бир қатор ютуқларга эга бўлиб дунёқарашни, мантиқий фикрлашни оширади ва уларнинг ечимини соддалаштиришга имкон беради.

Фойдаланилган адабиётлар

1. М.А.Мирзаахмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.Қ.Аманов “10 – синф Математика дарслиги” Тошкент - 2017 й.

2. “Математика фанидан мавзулаштирилган тестлар тўплами”.

МАТЕМАТИКА ФАНИ РИВОЖИГА САЛМОҚЛИ ҲИССА ҚЎШГАН АЙРИМ МАШҲУР МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР ҲАҚИДА

Ҳакимбой ЛАТИПОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Математика ўқитувчиси дарс жараёнида мавзуга боғлиқ бўлган математик тушунчаларнинг пайдо бўлиши, уларнинг маъно-мазмуни жиҳатлари қай тариқа такомиллашгани ва бу борада математик олимларимиз (алломаларимиз)нинг хизматлари ҳақида ўқувчиларга қисқача маълумот бериши лозим. Дарсдан ташқари машғулотларда, хусусан математик тўгаракларда олиб бориладиган машғулотлар чоғида бевосита ватандошларимиз – буюк олимлар ижодидан кенг фойдаланишга ҳаракат қилиш керак. Ўқувчилар иштироки ва уларнинг ташаббуси билан математика фани намоёндалари ҳаёти ва ижоди мазкур фанга доир қизиқарли мавзулар, йирик саналар акс этган деворий газеталар чиқариш ҳам ишда муайян самараларга эришишга ёрдам беради. Математика фани тараққиётига ҳисса қўшган олимларнинг таваллуд кунларини нишонлаш баҳонасида ижодий мусобақалар, кечалар ўтказиш ҳам мақсадга мувофиқдир.

Абел Нил (1802-1829) - норвегиялик математик. Алгебрадаги муҳим теоремаларни исботлаган. Масалан: Юқори даражали ҳар қандай алгебраик тенгламанинг радикаллари ечилмаслиги тўғрисида теорема.

Абу Али ибн Сино (980-1037) - математика, физика, астрономия соҳасида ижод қилган Ўрта Осиёлик олим. Бухоро яқинидаги Афшона қишлоғида туғилган. Медицинага оид Ал-Қонун китоблари 360-500 йил мобайнида бутун дунёда қўлланма бўлиб келмоқда. Шеърият оламида ҳам йирик арбоб ҳисобланади.

Адамар Жак (1863-1943) - француз математиги. Математик анализ, алгебра, геометрия, сонлар назариясига оид бир қанча ишлари мавжуд.

Александров Александр Данилович (1912-1990) - машҳур рус математиги, Академик, “Бутун соҳалар геометрияси”га асос солган олим. Бир неча монографиялар муаллифи.

Андреев Константин Алексеевич (1848-1921) - машҳур рус математиги. Илмий фаолияти асосан геометрияга оид. Аналитик геометриясига оид дарсликлари ва масалалар тўплами китоблари мавжуд. Бир қанча машҳур математиклар тарихини ёзган.

Белтрами Евгений (1835-1900) - италян математиги. Лобачевский планиметрияси қонуниятларини биринчи бўлиб исботлаган олим.

Абу Райхон Беруний (973-1048) - Ўрта Осиёлик машҳур олим. Математика, физика, астрономия, тарих, фалсафа, ботаника, география, топология соҳаларида ижод этган. Этнография соҳасида муҳим асарлар ёзган. Минералларнинг солиштирма оғирлигини биринчи бўлиб ўлчаган. Айланага ички чизилган мунтазам 9 бурчакли томонини ҳисоблаган. 60-ли касрлар системасида x-нинг қийматини ҳисоблаган. “Қонун маъсуд” асарида тригонометрия, геометрия, алгебрани муҳим масалаларини келтирган ва уларни ечиш йўлларини кўрсатган. Грек олимлари Евклид, Архимед, Арстотелларни асарларини ҳинд тилига таржима қилган. Уларга шарҳлар берган.

Бессел Фридрих Вильгельм (1784-1846) - немис математиги ва астрономи. Математик анализ ва алгебра соҳаларида ишлаган. Астрономия билан шуғулланган. 32228 та юлдузнинг аниқ вазиятини кўрсатиб берган.

Бойяи Янош (1802-1860) - атоқли венгер математиги. Ноевклид геометрия асосчиларидан бири.

Бэббидж Чарлз (1792-1871) - инглиз математиги. Йигирма ёшиданоқ математик жадваллар тузиш ва ҳисоблаш ишларини машиналар бажариш мумкин деган ғоясини илгари сурган. Ўн йил ўтгач ҳисоблаш машинасининг биринчи вариантини яратган ва умрининг охиригача уни такомиллаштириш билан шуғулланган. Унинг ғоялари ҳозирги замон программаларида ҳам ишлатилмоқда.

Абдул-Вафо (940-998) - араб математиги. Диофант асарларини грекчадан араб тилига таржима қилган. Тригонометрияга катта ҳисса қўшган олим.

Виет Франсуа (1540-1603) - француз математиги. Сонларни ҳарфлар билан ишораларни яни алгебраик символларни биринчи бўлиб киритган олим. Квадрат ва юқори даражали тенгламалар назарияси билан шуғулланган. Виет теоремаси квадрат тенгаманинг илдизларини хоссасини ифодалайди.

Винер Норберт (1895-1964) - америкалик математик. Кибернитика асосчиларидан бири. Ҳисоблаш математикаси бўйича турли машиналар яратган. Математика, физика, механиканинг турли соҳаларида из қолдирган.

Воронов Георгий Федорович (1868-1908) - рус математиги. Сонлар назарияси, сонлар геометрияси, кўп ёқлилар геометриясида йирик натижаларга эришган.

Выгодский Марк Яковлевич (1898-1968) - рус математиги. Геометрия ва математика тарихи билан шуғулланган. Кўпгина монография ва дарслик маълумотнома ва қўлланмалар муаллифи.

Галуа Эварист (1811-1832) - француз математиги. Алгебраик тенгламаларни ечишнинг умумий назариясини яратган: даражаси 4 дан юқори бўлган тенгламаларнинг алгебраик ечилмаслигини яни уларнинг илдизларини коэффициентлари орқали олтита амаллар (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариши, илдиз чиқариш) ёрдамида ифодалаб бўлмаслигини исботлаган.

Гаусс Карл Фридрих (1777-1855) - машҳур немис математиги. Геометрия сонлар назарияси, чексиз қаторлар ва потенсиаллар назарияси соҳаларида муҳим натижаларга эришган ҳар қандай алгебраик тенгламанинг камида битта илдизи борлигини исботлаган.

Гельфонд Александр Осипович (1906-1968) - рус математиги. Сонлар ва функциялар назарияси бўйича ҳақиқий мутахасис.

Герон Александрийский (эрамиздан олдинги I асрда яшаган) - қадимги грек олими. Арифметика, алгебра ва геометрияга оид муҳим теоремаларни исботлаган. Бир қанча формулаларни ишлаб чиққан Герон формуласини ҳам ишлаб чиққан.

Головин Михаил Евсеевич (1756-1790) - рус олими. М.В. Ломоносовнинг жияни. Леонард Эйлернинг шогирди. Унинг қаламига мансуб тригонометрия, арифметика, геометрия дарсликлари мавжуд. “Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказателствами” номли асари (1989) ўз замонасининг юксак қўлланмаларидан ҳисобланди.

Гольдбах Христиан (1690-1764) - бутун математик фаолияти Россияда ўтган олим. Петербург Фанлар Академиясининг аъзоси. Сонлар назариясида айниқса муҳим натижага эришган. Шу соҳада бир неча гипотеза қўйиган, яъни: 2 дан катта бутун сон 3 та туб соннинг йиғиндисидир. Ҳар қандай жуфт сон иккита туб сон йиғиндисидир.

Дедекинд Рихард (1831-1916) - немис математиги. Сонлар назарияси ва алгебра соҳаларида илмий ишлар муаллифи. Ирационал сонларнинг назариясини такомиллаштириб, математик анализга катта ҳисса қўшган.

Декарт Рене (1596-1650) - француз математиги. Атоқли физик, файласуф ва физиолог. Аналитик геоматрия асосчиларидан бири. Математикада ўзгарувчи катталик тушунчасидан биринчи бўлиб кенг фойдаланган. Ҳозирги математик белги ишораларнинг кўпчилигини Декарт киритган. Декарт координаталар системасини асосчиси.

Кавальери Бонавентура (1598-1647) - италия математиги. Оддий касрларни ўнли касрларга айлантириш масалалари билан шуғулланган, жисмларнинг юзи ҳажмини ўлчашни янги усулларини ишлаб чиққан. Бунда у кейинроқ юзага келган интеграл ҳисоб мулоҳазаларига ўхшаш асосланган. Вико бурчагининг стереометриясини баён қилган.

Қози Зода Ал-Румий (XIV-XV асрлар) - Ўрта Осиёлик олим. Улуғбек астрономия мактабининг намоёндаси. Тригонометрия жадвалларини яъни (“Зижи Курагони”)ни ниҳоят катта ва аниқлик билан ҳисоблаб берган. Юқори даражали тенгламани геометрик йўл билан ечиш усулини кўрсатган.

Кардано Жероламо (1501-1576) - италиялик математик ва файласуф.

Учинчи даражали алгебраик тенгламани ҳал қилиш масаласи билан шуғулланган. Биринчи бўлиб мавҳум миқдорликни киритган.

Тошмуҳаммад Қори-Ниёзий (1896-1970) - ўзбек олими. Ўзбекистон Фанлар Академиясининг академиги. Асосан математика, астрономия тарихи соҳаларида ишлаган. Олий ва ўрта мактаблар учун математик анализ ва аналитик геометриядан ўзбек тилида дарсликлар ва қўлланмалар яратган. Улуғбекнинг астрономия мактаби фаолиятини айниқса тўла баён этган.

Ғиёсиддин Жамшид Коший (1480-1537) - Ўрта Осиёлик олим. Улуғбек астрономия мактабини энг йирик намоёндаси Обсерватория бошлиқларидан бири. Инглиз тилида Стервиндан олдин ўнли касрларни систематик қўллаган. π сонининг қийматини жуда кўп аниқликда ҳисоблаган. “Арифметика калити” номли китобида ҳиндларнинг 60-ли системасини баён этган. “Айлана ҳақида Рисола” ёзган.

Кеплер Иоган (1571-1630) - атоқли немис астрономи. Коперник таълимотига асосан планеталар ҳаракатининг учта қонунини кашф этган. 92 та айланиш жисм ҳажмини ҳисоблаган. Бунда Кеплер фойдаланган усуллар чексиз кичик миқдорлар, яъни интеграллар ғоясига асос солган.

Ковалевская Софья Васильевна (1850-1891) - машҳур рус олима аёли. Дунёда биринчи аёл – математик, профессор. Россия Фанлар Академиясининг муҳбир аъзоси, дефференциал тенгламалар ва механика соҳасида муҳим тадқиқотлар муаллифи.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903-1990) - машҳур рус математиги. Академик эҳтимоллар назарияси, функциялар назарияси, топология, геометрия, математик логика, математика тарихи соҳаларида ишлаган. Олий ва ўрта мактаблар дарсликлар ва монографиялар муаллифи.

Крамер Габриэль (1704-1752) - немис математиги. Алгебра ва геометия соҳаларида ишлаган. Чизиқли тенгламалар системасидаги камчиликларни текширган.

Леонардо Да Винчи (1400-1452) - италиялик олим. Машҳур рассом. Турли машиналар ва парашутлар устида тадқиқотлар олиб борган. Геометрияга оид бир қанча тадқиқотлари бор. Эллипс ва параболани чизиш асбоблари бўлгач циркулни яратган. Интеграл ҳисобига асос бўлган “бўлинмаслар” методларидан фойдаланган.

Маскерони Лоренцо (1750-1800) - италян математиги. Ўзининг “Циркул геометрияси” номли китоби билан шуҳрат қозонган. Бу асарда фақат циркул ёрдамида бажариладиган ясашлар ўрганилади. Метрик системани киритишда иштирок этган. Интеграл синус, интеграл косинус тушунчаларини киритган.

Матвиевская Галина Павловна (1933) - ўзбекистонлик рус математиги. Шарқ малакатларида математика тарихи соҳаларида ишлайди.

Непер Жон (1550-1617) - шотландиялик олим. Логарифмлар кашфиётчиси. “Логарифм” терминини ҳам Непер киритган. Кўпайтириш амалини енгиллаштирувчи “непер таёқчалари” ни тасвирлаган. Сферик тригонометрик муҳим формулаларни топган.

Паскал Блез (1623-1662) - француз математиги, физиги ва философи. 8-9 ёшларидаёқ элементар геометриянинг қатор теоремаларини исботлаган. 16 ёшида иккинчи тартибли чизиққа ички чизилган олтибурчак ҳақидаги теоремани исботлаган. Дастлабки ҳисоблаш машинасини ихтиро этган. Кибернетика ва эҳтимоллар назариясининг бир қанча масалаларини ечган. Математик индукция методини биринчи бўлиб қўллаган.

Пифагор (500-580) - қадимги грек математиги, файласуф олим. Геометрияга исботланадиган ғояни систематик равишда киритган. Уни абстракт фан сифатида қараган. Планиметрик фигуралар геометриясини ўхшашлик назариясини, баъзан мунтазам кўпбурчаклар, кўпёқликлар ясаш усулларини ишлаб чиққан. Унинг шарафига “Пифагор теоремаси” деб аталган теоремани исботлаган. Арифметика ва геометрия соҳаларида бошқа муҳим натижаларни ҳам қўлга киритди.

Романовский Всеволод Иванович (1879-1954) – рус математиги. Ўзбекистон Фанлар Академияси академиги. Математик статистика, эҳтимоллар назарияси, математик анализ, дифференциал тенгламалар соҳаларида ишлаган. Кўпгина монографиялар, қўлланмалар муаллифи.

Саримсоқов Тошмуҳаммад Алиевич (1915-1993) - ўзбек математиги. Ўзбекистон Фанлар Академиясининг академиги. Давлат арбоби, эҳтимоллар назарияси, стастика, геофизика, функционал анализ, топология соҳаларида ишлаган.

Сирожиддинов Саъди Ҳасанович (1921-1989) - ўзбек математиги. Ўзбекистон Фанларнинг Академияси академиги, давлат арбоби. Математик анализ, эҳтимоллар назарияси, статистика, функциялар назарияси ва уларнинг амалий тадбиқи соҳаларида ишлаган.

Улуғбек Мухаммад Тарағай (1394-1449) - Ўрта Осиёлик буюк олим. Астроном, математик. Амир Темурнинг набираси, Самарқанд ҳокими, Самарқанд расадхонасини асосчиси. Унда астрономик кузатишлар олиб борган. Натижада “Янги астрономик жадваллар” тузган. Бу асарида 1019 та юлдуз вазиятини аниқлаган ва астрономиянинг назарий масалаларини баён қилган.

Умар Хайём - Ўрта Осиёлик улуғ шоир, математик, астроном, физик. “Алжабр ва ал-муқобала” номли асарида учинчи даражали тенгламани ечиш назариясини икки конус ёрдамида баён этади. Кенг оммага ўзининг рубоийлари билан машҳур.

Ал-Хоразмий (IX-X асрлар) - Ўрта Осиёлик машҳур математик, географ, астроном олим. Арифметика ва алгебра, геометрия соҳаларида катта натижаларга эришган. География ва астрономия соҳаларида ҳам талайгина ишлар қилган. Хоразмийнинг XII асрда лотин тилига таржима қилинган арифметикага оид асарлар европаликларни ҳисоблаш позиция системаси билан таништирган. “Алжабр ва ал-муқобола” асари алгебранинг мустақил фанга айланишига катта ҳисса қўшади. Бу асарида 1 ва 2 даражали тенгламаларни ечишни систематик усуллари берган. “Алгоритм” термини Ал-Хоразмий номи билан боғлиқдир.

Евклид (эрамиздан олдинги III асрда яшаган) – қадимги грек математиги.

Ўзининг “Бошланғич” номли асари билан машҳур. Унинг бу асари 20000 йилдан буён дарслик вазифасини бажариб келмоқда. Евклиднинг паралеллар ҳақидаги аксиомалари мавжуд. Евклид геометрияга асос солган олим.

Эратосфен Киренский (194-276) - қадимги грек олими. Туб сонларни топиш қоидасини ишлаб чиққан. Математика, география, хронология, астрономия, филология, мусиқа назарияси билан ҳам шуғулланган.

ТАСОДИФИЙ ҲОДИСА ТУШУНЧАСИНИНГ ШАКЛЛАНИШИ

Бобохон МАМУРОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Кибриё АМРИЛЛОЕВА

БухДУ Математика таълим йўналиши 4-босқич талабаси

Эҳтимоллар назарияси тасодифийликнинг қонуниятларини ўрганадиган математикавий фан бўлиб, натижалари олдиндан айтиб бериш мумкин бўлмаган тажрибаларнинг модулини ўрганади. Тасодифий ҳодиса тушунчаси орқали бошқа кўпгина эҳтимолий тушунчаларга таъриф берилади. Шу маънода бу тушунчанинг шаклланишини ўрганиш муҳим аҳамият касб этади. Узоқ даврлар давомида олимлар (изланувчилар) турли кўринишдаги ўйинларни қараш билан чекланганлар. Жумладан соққадаги ўйинлар, чунки бу ўйинларни ўрганиш оддий ва ёрқин математик модуллар билан чегараланиш имкониятини берган. Бу ҳақида Христианом Гюйгенс “менимча, бунга ўқувчи диққат билан қараса бу ерда нафақат ўйин ҳақида гап боради, унинг асосида жуда қизиқарли ва чуқур назариянинг асоси ётади” деб ёзади.

Тасодифийликни ўрганишнинг дастлабки босқичида олимларнинг эътибори қуйидаги 3 та масалага қаратилган эди:

1) Бир нечта соққаларни ташлашда турли мумкин бўлган ҳолларни ҳисоблаш;

2) Ўйин режалаштирилганнинг ўртасида тўхтатилса, ўйинчилар орасида маблағ тақсимоти;

3) Икки ёки бир нечта соққаларни ташлаганда барча соққаларда бир хил ёқ тушиши учун ташлашлар сонини аниқлаш (масалан, “бешлар”).

Учта ўйин соққасини ташлашдаги турли ҳоллар Комбре (Kombre) шаҳри эпископи Виволд (Vivold) томонидан 960-йилда аниқланган ва ҳатто уларга диний талқин ҳам берилган. Учта ўйин соққасини ташлашдаги ҳоллар сонини ҳисоблашга уриниш Ричард де Форнивал (Richarde de Fornival)нинг “Де ветула (De vetula)” поэмасида бўлган (1220-1250-йиллар). Поэма ўйин ва спортга бағишланган. Унда қуйидаги мулоҳаза келтирилган: “Учала ўйин соққасида ҳам бир хил очкони 6 усул билан олиш мумкин. Агар иккита соққа очколари бир хил ва учинчи соққада фарқли бўладиган ҳоллар сони 30 та, чунки биринчи жуфтлик 6 усул билан, учинчи сон эса, 5 усул билан танланиши мумкин. Агар учала соққадаги очколар турлича бўлса, биз 120 та усулга эга бўламиз, чунки 30 марта 4 тадан 120, лекин ҳар бир мумкин бўлган 6 усул билан ҳосил бўлади. Шундай қилиб, ҳаммаси бўлиб 56 та имконият мавжуд”. Матнда Виволд бўйича ҳоллар кўрсатилган бўлсада (56), Ричард де Форнивал учта ўйин соққасини ташлашнинг барча ҳоллари учун ҳисоби тайёрлаган:

$$6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216.$$

Бу ва бошқа тарихий (компания билан боғлиқ) мисоллар тасодифийлик тушунчасининг ҳаётий зарурият юзасидан шаклланганлигини кўрсатади. Булар ҳақида дастлабки дарсларда маълумот бериш ўқувчиларда эҳтимоллар назарияси фанига қизиқиш ҳисини уйғотади ва келажакда уларни бу фаннинг сирларини ўрганишга ундайди.

МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА БУЮК АЖДОДЛАРИМИЗ ИЛМИЙ МЕЪРОСИДАН ФОЙДАЛАНИШ

Феруза МАРДАНОВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Мамлакатимизда компетенциявий ёндашувга асосланган янги давлат зиммасига қатор долзарб вазифаларни қўймоқда. Шу билан бирга, мактабларда 11 йиллик ўрта таълимнинг жорий этилиши ҳам ўз навбатида ўқитувчиларнинг малака оширишга бўлган янги эҳтиёжларни келтириб чиқарди. Айни пайтда вужудга келган шарт-шароитлар ва ўқитувчиларнинг таълим стандартларини жорий этилиши ўрта мактаб ўқитувчилари юқоридаги келтирилган эҳтиёжлари малака оширишнинг шакли, мазмуни ва уни амалга ошириш механизмларини қайта кўриб чиқишни ва бу жараёнга тегишли ўзгартиришларни киритишни тақозо этмоқда. Хусусан, шу кунларда юқоридаги эҳтиёжлардан ва улар олдида турган муаммолардан келиб чиққан ҳолда, математика фани ўқитувчиларининг малакасини ошириш мазмуни ва шаклларини такомиллаштириш зарурати пайдо бўлди.

Ўрта Осиёлик математика фани тараққиётига улкан ҳисса қўшган олимлар: Абу Абдуллох ал–Хоразмий (783–850), Абу Райхон Беруний (973–1048), Абу Али Ибн Сино (980–1037), Абу Наср Фаробий (873–950), Умар Хайём (1048–1131), Насриддин Тусий (1201–1274), Абул Вафо (940–998), Мирзо Улуғбек (1394–1449), Қозизода Румий (1360–1447), Ғиёсиддин Жамшид Коший (1385–1457), Мухаммад Али Қушчи (1402–1474) ва бошқалар ижодидан фойдаланиш бўйича умумий кўрсатмалар.

Ибн Сино ижодидан математика дарсларида фойдаланиш («Аш-Шифо» китобидаги натурал сонлар устида бажарилган арифметик амалларни ва квадратга кўтариш амалининг тўғрилигини 9 ёрдамида текшириш усулини ўйлаб топган, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ формулани геометрик исботлаган).

Ал-Хоразмий ижодидан математика дарсларида фойдаланиш (ҳозирги замон ўнлик саноқ системасини кашф этди, натурал сонлар устида тўрт арифметик амаллар бажариш алгоритмини фанга киритди, квадрат тенгламаларни ечиш усулларини кашф этди, "Зижи" ("Астрономия") китобида синуслар ва тангенслар жавалини катта аниқликда келтиради).

Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий “Ал-жабр вал-муқобала ҳисоби ҳақида қисқача китоб” асари билан алгебра фанига асос солган. Асар лотин тилига, Европа тилларига таржима қилинган ва бир неча бор нашр этилга, Ундан асрлар давомида Шарқ ва Ғарб мадраса ва дорилфунунларида (университетларда) дарслик сифатида фойдаланишган.

“Алгебра” атамасининг ўзи асар номидаги “ал-жабр” сўзининг лотин тилига таржимасида “алгебра” каби ёзилишидан келиб чиққан. XIV асрдан бошлаб бутун дунёда ал-Хоразмий асос солган фан “Алгебра” деб атала бошланди.

Умар Ҳайём ижодидан математика дарсларида фойдаланиш (Ньютон бином ёйилмасининг умумий формуласини кашф этган, кубик тенгламаларни ечишнинг геометрик назариясини ривожлантирган, геометрияда параллеллик аксиомасига оид муаммо бўйича чуқур изланишларни олиб борган ва уни ҳал қилишга жуда яқин келган), Насриддин Ал-Тусийнинг (Азарбайжон ҳудудида 1201-1274 йилларда яшаб ижод қилган) ижодидан математика дарсларида фойдаланиш (тригонометрия соҳасида хизмати катта бўлган, учбурчакларнинг барча ҳолларини таҳлил қилган, ихтиёрий учбурчакларни ечишнинг энг қийин ҳолларига тўхтаб ўтган, сўнгра сферик тригонометрия асослари, жумладан сферик учбурчакларни ечиш усулларини тизимли баён қилган, бу асар тригонометрияни астрономиядан ажратди ва тригонометрия алоҳида фан сифатида ривожлантирди, Ньютон биноми ёйилмасини исталган n натурал сон учун исботланган).

Абу Райҳон Беруний ижодидан математика дарсларида фойдаланиш ("Геодезия" ва "Маъсуд" қонунлари асарларда астрономия, география, тригонометрияга оид жуда кўп маълумотлар келтирилган, хусусан, ички чизилган мунтазам кўпбурчаклар (3, 4, 5, 6, 8, 10 бурчаклар) нинг томонларини ҳисоблаш ва уларни ясаш усуллари келтирган, ватарлар билан уларни тортиб турувчи ёйлар орасидаги боғланишга оид теоремалар, иккиланган бурчак синуси, ярим бурчак синуси ҳақидаги теоремаларни ва ихтиёрий бурчаклар учун косинуслар теоремасини исботлаган, синуслар ва тангенслар жадвалини тузган ва бунда чизиқли ва квадратик интерполяциялаш методларидан фойдаланишни кўрсатган, p сони учун 3,1417 қийматни топган).

Мирзо Улуғбек ижодидан математика дарсларида фойдаланиш (тригонометрик жадваллари 10 та ўнли хона аниқлигида ҳисобланган, унинг синус ва косинуслар жадваллари минут оралиқ билан тузилган, "Зиж" китобида бир градуснинг синусини ҳисоблаш учун алоҳида рисола ёзган).

Мусбат ва манфий (бу атамаларни ишлатмасаларда) сонлардан кишилар жуда қадим замонларданоқ ўз фаолиятларида фойдаланганлар.

"Мусбат" ва "манфий" атамалари Мирзо Улуғбекнинг шогирди, Мирзо Улуғбек илмий мактабининг йирик вакили, буюк олим Али Қушчи томонидан "Китоб-ул-Муҳаммадия" асарида киритилган. Али Қушчи ёзади: "Шуни билиш керакки, ҳар бир сон мусбат ёки манфий бўлиши мумкин". Али Қушчи, хусусан, ҳар хил ва бир хил ишорали сонларни кўпайтиришни таърифлаб, ушбу тенгликларнинг ўринли бўлишини кўрсатган:

$$(+a)\cdot(-b)=-ab;\quad (-a)\cdot(+b)=-ab;\quad (-a)\cdot(-b)=+ab.$$

Ғиёсиддин Жамшид Ал-Коший (XIV–XV асрда яшаган) ижодидан математика дарсларида фойдаланиш ("Айлана ҳақида рисола" китобида p сонини 17 та хона ўнли рақамигача аниқликда топган, 1 нинг синусини ҳисобланган, энг катта аниқликда тригонометрик жадвал тузган, Ньютон биноми формуласини ундан аввал $n=9$ бўлгандаги биномиал коэффицентларни ҳисоблаган).

Ўнли касрлар ва улар устида амаллар буюк астроном ва математик олим, давлат арбоби Муҳаммад Тарағай Улуғбек (1394-1449) илмий мактабида кашф қилинган. Бу илмий мактабнинг етакчи олимларидан бири Жамшид Ғиёсиддин ал-Коший (1385-1430) 1427-йилда “Муфтоҳ ал-ҳисоб” (“Ҳисоб илм калити”) деб аталган машҳур асарини ёзади. Бу китоб ўрта аср математикасининг қомуси бўлиб, Шарқ мамлакатлари университетлари (мадрасалари) да бир неча аср давомида математикадан асосий дарслик булган. Бу асар фанга янги бир тушунчани олиб кирди – “ўнли каср” тушунчасини олиб кирди, унинг хоссаларини баён этди.

Ўнли касрларнинг таърифи, улар устидаги тўрт амал (қўшиш,айириш, кўпайтириш ва бўлиш) ва бу амалларнинг хоссалари, ўнли касрлардан оддий касрларга ўтиш, ва аксинча, оддий касрларни ўнли касрларга айлантириш, ўнли касрларнинг масалалар ечишга тадбиқлари Жамшид Ғиёсиддин ал-Кошийнинг “Ҳисоб илми калити” – “Арифметика калити” – “Мифтоҳ-ул ҳисоб асарида математика тарихида биринчи бўлиб киритилган ва батафсил баён қилинган. Жамшид Ғиёсиддин ал-Коший ўнли касрларнинг бутун ва каср қисмларини турли рангдаги сиёҳда ёзган ва уларни ажратиб турувчи вергул (,) ўрнига (|) қўйган.

π сониниг амалиётдаги аҳамиятини олимлар дарҳол пайқаганлар ва уни катта аниқлик билан ҳисоблашга интилганлар. Буни қуйидаги жадвалдан билиб олиш мумкин:

Олимнинг номи	Аср	Мамлакат	π нинг тақрибий қиймати	Вергулдан кейин нечта рақам аниқ
Архимед	Милоддан аввалги III	Юнонистон	3,14285; 3,14084	2
Витрувий	Милоддан аввалги I	Юнонистон	3,12500	1
Птолемей	Милодий II	Юнонистон	3,14166	3
Джан-Йен	II	Хитой	3,16214	1

Арибхатта	V	Ҳиндистон	3,14159	3
Си-чун	V	Хитой	3,14160	3
Брахма-гупта	VII	Ҳиндистон	3,14234; 3,14285	2
Мухаммад Мусо ал-Хоразмий	VIII	Ўзбекистон	3,14285; 3,14160 $\frac{22}{7}$, $\frac{62832}{20000}$	3
Абу Наср Фаробий	IX	Ўзбекистон	3,14285; 3,14084	2
Леонардо да Винчи	XIII	Италия	3,14183	3
Бхаскара	XII	Ҳиндистон	3,14160	3
Жамшид Ғиёсиддин ал-Коший	XV	Ўзбекистон	3,14159265358979325	17
Франсуа Виет	XVI	Франция	3,1415926535	10

π нининг аниқроқ ҳисоблаш борасида энг яхши натижани биринчи бўлиб юртдошимиз Жамшид Ғиёсиддин ал-Коший олганлигидан доимо фахрланамиз.

АЙРИМ НОАНЪАВИЙ МАСАЛАЛАРНИГ ЕЧИМЛАРИ

Неьмат Расулов

БухМТИ академик лицейи ўқитувчиси

Шерали Ҳамидов

БухДУ 2-босқич магистранти

Юртимиз азалдан математика фанига катта ҳисса қўшган олимлари билан бутун дунёга танилган. Буларга мисол сифатида улуғ даҳоларимиз Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий, Аҳмад Фарғоний, Абу Райҳон Беруний, Ибн-Сино, Форобий, Улуғбек каби бобокалонларимизни кўрсатиш мумкин. Уларнинг издошлари сифатида Ўзбекистонда замонавий математика муаммолари билан шуғулланувчи мактаб асосчилари бўлмиш академиклар Т.Н. Қори-Ниёзий, Т.А. Саримсоқов, С.Х. Сирожиддинов, Т.Ж. Жўраев , Т.А. Азларов, Н.Ю. Сатимов каби жуда кўп устозларимизни кўрсатиш мумкин.

Математика фани бўйича иқтидорли ўқувчилар юқорида кўрсатилган бобокалонларимиз ва устозларимизни математика фанини ривожлантириш бўйича ишларини давом эттиришлари лозим. Бунда математика фани бўйича ноанъавий масалаларни ечишга ўрганиш муҳим аҳамиятга эгадир. Бундай масалаларини ўрганиш ва ечиш жараёнида ўқувчиларнинг мантиқий мушоҳада кўникмалари, ноанъавий фикр юритиш, мустақил хулосалар чиқариш каби хусусиятлари ривожланади. Бу эса келгусида улардан кўзга кўринган олимлар, юқори малакали мутахассислар, моҳир педагоглар етишиб чиқишига асос бўлади.

Ушбу мақолада мураккаблик даражаси ўртача бўлган бир қатор ноанъавий масалалар ва уларнинг ечимлари келтирилган.

1-масала: Рақамлар йиғиндиси 2015 бўлган натурал сон бирор аниқ квадрат бўла олмаслигини исботланг.

Исбот: Бу масалани ечишда ноанъавий масалаларни ечишда кенг қўлланилкадиган “тескарисини фараз қилиш” усулидан фойдаланамиз. Рақамлар йиғиндиси 2022 бўлган натурал сон бирор m сонининг квадратига , яъни m^2 га тенг деб фараз қиламиз. Бу ҳолда m^2+1 сони 9 га каррали бўлишини кўрсатамиз.

Маълумки, ҳар қандай сондан унинг рақамлар йиғиндисини айирсак, айирма 9 га каррали сон бўлади. Демак, $m^2–2015=9k=> m^2+1=9k+2016=9(k+224)=9n$.

Шундай қилиб, масала шарти ва бизнинг фаразда доимо $m^2+1=9n$ кўринишда, яъни 9 га каррали бўлади.

Ҳар қандай m натурал сонни $m=9m±s$ (m- қандайдир натурал сон ва

s=0,1,2,3,4) кўринишда ёзиш мумкин. Бу ҳолда

$$m^2+1=(9m\pm s)^2+1=81m^2\pm18ms+s^2+1=9(m\pm s)m+(s^2+1).$$

Текшириб кўриш мумкинки, s=0,1,2,3,4 бўлганда s^2+1=1,2,10,17 ва у 9 га каррали эмас. Демак, $m^2+1=9(m\pm s)m+(s^2+1)$ сони 9 га каррали бўла олмайди , яъни $m^2+1\neq9n$.

Бир томондан $m^2+1=9n$, иккинчи томондан эса $m^2+1\neq9n$ хулосаларга келдик. Бу зиддият бизнинг фаразимиз нотўғри эканлигини, яъни рақамлар йиғиндиси 2015 бўлган сон аниқ квадрат бўла олмаслигини исботлайди.

2-масала: Фақат 1 рақами билан ёзиладиган ва 2021 га бўлинадиган сон мавжудлигини исботланг.

Исбот: Бу масалани ечишда ноанъавий масалаларни ечишнинг яна бир усули бўлмиш Дирихле усулидан фойдаланамиз. Бу усулнинг моҳиятини қуйидагича ифодалаш мумкин: агарда $Н$ дона шар $н$ та қутига тақсимланган ва $N>n$ бўлса, унда ҳеч бўлмаганда битта қутида биттадан ортиқ шар жойлашган бўлади. Масалада қаралаётган 1, 11, 111, 1111, … кўринишдаги сонлар 2021 га бўлинганда 1, 2, 3, …, 2020 қолдиқ бериши мумкин. Бунда шарлар сифатида масалада келтирилган кўринишдаги сонлар қаралади ва уларнинг сони N чексиз. Қутилар сифатида эса 1,2,3,…, 2020 қолдиқлар тушунилади ва уларнинг сони n=2020. Демак, қаралаётган кўринишдаги сонларнинг ҳеч бўлмаганда иккитаси битта қутига тушади, яъни 2021 га бўлинганда бир хил қолдиқ беради. Бу ҳолда уларнинг айирмаси 2021 га каррали ва дастлабки рақамлари бирлардан, охирги рақамлари эсаноллардан иборат сон бўлади. Бу айирманинг охиридаги барча 0 рақамларини ташлаб юборсак (бу унинг 2011 га бўлинишига таъсир этмайди), фақат 1 рақами билан ифодаланадиган ва 2021 га бўлинадиган сон ҳосил бўлади.

Демак, фақат 1 рақами билан ёзиладиган ва 2021 га бўлинадиган сон мавжуд экан.

3-масала:$4^n+15n-1$, $n\in N$, кўринишдаги сонлар 9 га бўлинишини исботланг.

Исбот: Натурал сонлар билан боғлиқ бир қатор масалаларни ечишда математик индуксия усулидан фойдаланиш мумкин. Бунда бирор $T(n)$ тасдиқни ихтиёрий $n \in N$ натурал сон учун ўринли эканлигини исботлаш учун қуйидаги алгоритмдан фойдаланилади:

1) n=1 ҳолда $T(1)$ тасдиқ ўринли эканлиги кўрсатилади;

2) $n=k$ натурал сон учун $T(k)$ тасдиқ ўринли деб олинади;

3) олдинги икки қадамдаги тасдиқлардан фойдаланиб, $n=k+1$ натурал сон учун $T(k+1)$ тасдиқ исботланади.

Бизнинг масалада $T(n)=\{4^n+15n–1,\ n \in N$, кўринишдаги сонлар 9 га бўлинади} тасдиқдан иборат. Бундаи n=1 ҳолда $T(1)$ тасдиқ ўринли, чунки $4^n+15n–1=4+15–1=18$ сони 9 га каррали. Энди $n=k$ ҳолда $T(k)$ тасдиқ ўринли, яъни $4^л+15л–1=9m$ деб олиб, бу тасдиқни $n=k+1$ ҳолда ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз:

$4^{k+1}+15(k+1)–1=4\cdot 4^k+15k+15–1=4(4^k+15k–1)–45k+18=4\cdot 9m–9(5k–2)=9(4m–5k+2)$.

Демак, $T(k+1)$ тасдиқ оринли ва бундан $T(n)$ ихтиёрий n натурал сон учун ўринли эканлиги келиб чиқади.

4-масала: Агар $5a^2+b^2+2c^2=70$ бўлса, $a-3b-2c$ ифоданинг энг катта қийматини ва бунда a, b ва c қийматларинин топинг.

Ечим $\lambda(a-3b-2c)-70=\lambda(a-3b-2c)-(5a^2+b^2+2c^2)=$

$$=-5(a^2-\frac{\lambda}{5}a)-(b^2+3\lambda b)-2(c^2+\lambda c)=-5(a-\frac{\lambda}{10})^2+\frac{\lambda^2}{20}-(b+\frac{3\lambda}{2})^2+\frac{9\lambda^2}{4}-$$

$$-2(c+\frac{\lambda}{2})^2+\frac{\lambda^2}{2}=\frac{14\lambda^2}{5}-[5(a-\frac{\lambda}{10})^2+(b+\frac{3\lambda}{2})^2+2(c+\frac{\lambda}{2})^2]\le\frac{14\lambda^2}{5}.$$

Демак, $\lambda>0$ ҳолда $\max\lambda(a-3b-2c)=70+\frac{14\lambda^2}{5}$ ва бунга $a=\frac{\lambda}{10}, b=-\frac{3\lambda}{2}, c=-\frac{\lambda}{2}$ ҳолда эришилади. Бунда λ қийматини масала шартидан фойдаланиб топамиз:

$$5a^2+b^2+2c^2=70\Rightarrow\lambda^2(\frac{5}{100}+\frac{9}{4}+\frac{1}{2})=70\Rightarrow\lambda^2\cdot\frac{56}{20}=70\Rightarrow\lambda^2=25,\ \lambda>0\Rightarrow\lambda=5.$$

Бу ҳолда $\max 5(a-3b-2c)=70+\frac{14}{5}\lambda^2=70+\frac{14}{5}\cdot 25=140$.

Демак, масала шартида $a-3b-2c$ ифоданинг энг катта қиймати 28 бўлиб, унга a=0,5, b=–7,5 ва c=–2,5 бўлганда эришилади.

5-масала: Агар $a,b,c>0$ ва $a+b+c=1$ бўлса, унда қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг:

$$\frac{ab}{c+ab}+\frac{ac}{b+ac}+\frac{bc}{a+bc}\geq\frac{3}{4}.$$

Исбот: Дастлаб тенгсизликни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{ab}{c+ab}+\frac{ac}{b+ac}+\frac{bc}{a+bc}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{ab}{1-a-b+ab}+\frac{ac}{1-a-c+ac}+\frac{bc}{1-b-c+bc}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{(1-a)(1-b)}+\frac{ac}{(1-a)(1-c)}+\frac{bc}{(1-b)(1-c)}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab(1-c)+ac(1-b)+bc(1-a)\geq\frac{3}{4}(1-a)(1-b)(1-c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(ab-abc+ac-abc+bc-abc)\geq 3(1-a-b-c+ab+ac+bc-abc)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(ab+ac+bc-3abc)\geq 3(ab+ac+bc-abc)\Rightarrow ab+ac+bc\geq 9abc.$$

Демак, охирги тенгсизликни исботласак, берилган тенгсизлик ҳам исботланган бўлади. Масала шарти ва маълум Коши тенгсизлигидан фойдаланиб, керакли натижага қуйидагича эришамиз:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt[3]{abc}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3,$$

$$\frac{ab+ac+bc}{3}\geq\sqrt[3]{(abc)^2}\Rightarrow ab+ac+bc\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3abc\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3abc\cdot 3=9abc$$

6-масала: Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0\\ 2x^2-4x+3+y^3=0\end{cases}.$$

Ечим: Система тенгламаларини x номаълумга нисбатан квадрат тенглама сифатида қараймиз ва уларнинг дискриминантларин ҳисоблаймиз:

$$y^2x^2-2x+y^2=0\Rightarrow D_1=(-2)^2-4y^2y^2=4(1-y^4);$$
$$2x^2-4x+(3+y^3)=0\Rightarrow D_2=(-4)^2-4\cdot 2(3+y^3)=16-8(3+y^3)=-8(1+y^3).$$

Бу квадрат тенгламалар илдизга эга бўлиши учун уларнинг дискриминантлари номанфий бўлиши керак:

$$\begin{cases} D_1=4(1-y^4)\ge 0 \\ D_2=-8(1+y^3)\ge 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1-y^4\ge 0 \\ D_2=1+y^3\le 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y^4\le 1 \\ y^3\le -1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -1\le y\le 1 \\ y\le -1 \end{cases}\Rightarrow y=-1.$$

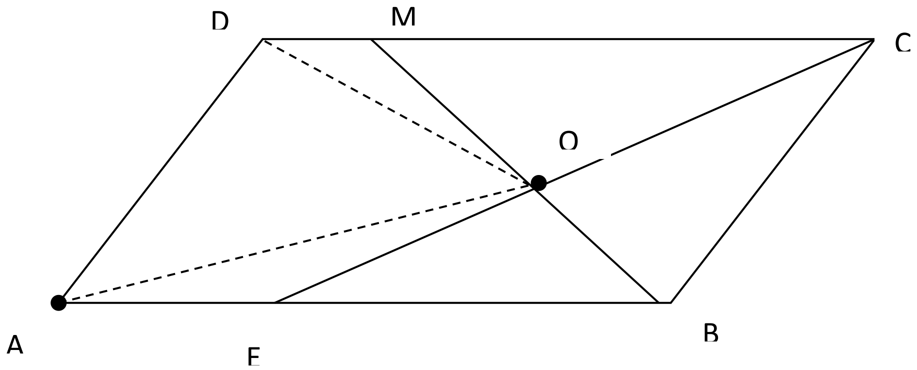
Енди $y=-1$ натижани система тенгламаларига қўйиб, x қийматини топамиз:

$$\begin{cases} x^2(-1)^2-2x+(-1)^2=0 \\ 2x^2-4x+3+(-1)^3=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ 2x^2-4x+2=0 \end{cases}\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1.$$

Демак, берилган система ягона $x=1$, $y=-1$ ечимга эга.

7-масала: *ABCD* параллелограмнинг *C* ва *B* бурчакларининг биссектрисалари О нуқтада кесишади. Агар $OA=2\sqrt{10}, OD=5, \angle A=2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$ бўлса, бу параллелограмм юзасини топинг.

Ечим: *ABCD* параллелограмнинг *CE* ва *BM* биссектрисаларини ўтказамиз. Масала шартига асосан улар О нуқтада кесишади (чизмага қаранг).



$\angle C=\angle A=2\alpha,\ \angle B=\angle D=2\beta=\pi-2\alpha$ деб оламиз. Масала шартига асосан,

$$\alpha=\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow$$

$$\cos C=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{5}{13},$$

$$\cos\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos B = \cos 2\beta = -\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}.$$

AB=*CB*=*a*, *AD*=*BC*=*б* деб оламиз. $\angle CEB = \angle DCE = \angle BCE = \alpha$ бўлгани учун, *BCE* учбурчак тенг ёнли ва шу сабабли *CB*=*BE*=*б*. Косинуслар теоремасига асосан бу учбурчакдан қуйидаги натижани оламиз:

$$CE^2 = BE^2 + BC^2 - 2 \cdot BE \cdot BC \cdot \cos B = 2b^2(1 - \cos 2\beta) = \frac{36b^2}{13} \Rightarrow CE = \frac{6b}{\sqrt{13}}.$$

Бунда *B*O тенг ёнли *BCE* учбурчакнинг биссектрисаси бўлгани учун

$$EO = OC = CE/2 = \frac{3b}{\sqrt{13}} \quad (1).$$

$\angle CMB = \angle EBM = \angle MBC = \beta$ бўлгани учун *BMC* учбурчак тенг ёнли ва шу сабабли *CB*=*CM*=*б*. Косинуслар теоремасига асосан бу учбурчакдан қуйидаги натижани оламиз:

$$BM^2 = MC^2 + BC^2 - 2 \cdot MC \cdot BC \cdot \cos C = 2b^2(1 - \cos 2\alpha) = \frac{16b^2}{13} \Rightarrow BM = \frac{4b}{\sqrt{13}}.$$

Бунда *C*O тенг ёнли *BCM* учбурчакнинг биссектрисаси бўлгани учун

$$BO = OM = BM/2 = \frac{2b}{\sqrt{13}} \quad (2).$$

Косинуслар теоремасига асосан АОБ учбурчакдан қуйидаги натижани оламиз:

$$OA^2 = AB^2 + BO^2 - 2AB \cdot BO \cdot \cos\beta = a^2 + \frac{4b^2}{13} - 2a \cdot \frac{2b}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} =$$

$$= a^2 + \frac{4}{13}(b^2 - 2ab) = 40. \quad (3)$$

Косинуслар теоремасига асосан DOC учбурчакдан қуйидаги натижани оламиз:

$$OD^2 = DC^2 + CO^2 - 2DC \cdot CO \cdot \cos\alpha = a^2 + \frac{9b^2}{13} - 2a \cdot \frac{3b}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} =$$

$$= a^2 + \frac{9}{13}(b^2 - 2ab) = 25 \quad . \quad (4)$$

(3) тенгликни 9 га, (4) тенгликни 4 га кўпайтириб ва уларни ҳадма-ҳад айириб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$5a^2 = 260 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}.$$

Бу натижани (4) тенгликка қўйиб, *б* қийматини топамиз:

$$52 + \frac{9}{13}(b^2 - 4\sqrt{13}b) = 25 \Rightarrow 52 \cdot 13 + 9b^2 - 36\sqrt{13}b - 25 \cdot 13 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9b^2 - 36\sqrt{13}b + 27 \cdot 13 = 0 \Rightarrow b^2 - 4\sqrt{13}b + 3 \cdot 13 = 0 \Rightarrow b_1 = \sqrt{13}, b_2 = 3\sqrt{13}.$$

Бу ҳолда, параллелограм юзаси формуласига асосан, изланган натижани топамиз:

$$S_1 = ab_1 \sin 2\alpha = 2ab_1 \sin\alpha \cos\alpha = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 24,$$

$$S_2 = 2ab_2 \sin\alpha \cos\alpha = 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 72.$$

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Хайдар РАСУЛОВ

Доцент кафедры Математического анализа БухГУ

Улугбек АСЛОНОВ

Старший преподаватель кафедры Методики точных и естественных наук Бухарского областного центра переподготовки и повышения квалификации народного образования

В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила только геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд». Со временем в нее начали вкрапляться некоторые аналитические моменты. В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделялось особое место в школьном курсе. Еще греки считали, что тригонометрия является важнейшей из наук. Поэтому, и мы, не оспаривая древних греков, будем считать тригонометрию одним из важнейших разделов школьного курса, да и всей математической науки в целом.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, она плавно распространилась не только в геометрию и алгебру основной школы, но и в алгебру и начала математического анализа.

Тригонометрические уравнения одна из самых сложных тем в школьном курсе математики. Тригонометрические уравнения возникают при решении задач по планиметрии, стереометрии, астрономии, физики и в других областях. Тригонометрические уравнения и неравенства из года в год встречаются среди заданий централизованного тестирования.

Самое важное отличие тригонометрических уравнений от алгебраических состоит в том, что в алгебраических уравнениях конечное число корней, а в тригонометрических - бесконечное, что сильно усложняет отбор корней. Еще одной спецификой тригонометрических уравнений является неединственность формы записи ответа.

На основе учебной, научной и методической литературы изучить основные теоретические сведения, связанные с тригонометрическими уравнениями и неравенствами; раскрыть общие методические положения, на которые нужно обратить внимание при изложении данных тем в школьном курсе математики.

Практической значимостью данной работы является то, что она может использоваться как методическое пособие для учителей школ при планировании и проведении уроков по тригонометрии.

Элементарные тригонометрические уравнения - это уравнения вида
$\mathrm{f}(\mathrm{kx}+\mathrm{b})=\mathrm{a}$ где $f(x)$ — одна из тригонометрических функции:

$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, ctgx. Элементарные тригонометрические уравнения имеют бесконечно много корней.

Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi, x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi, \text{ и т.д.}$$

Общая формула по которой находятся все корни уравнения $\sin \mathrm{x} = a$, где $|a| \le 1$ такова:

$$\mathrm{x} = (-1)^{\mathrm{n}} \operatorname{arcsina} + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются элементарные тригонометрические уравнения) n называют параметром. Записывают обычно $n \in Z$, подчеркивая тем самым, что параметр n принимать любые целые значения.

Решения уравнения $\cos \mathrm{x} = \mathrm{a}$, где $|a| \le 1$, находятся по формуле:

$$\mathrm{x} = \pm \operatorname{arccosa} + 2\pi n, n \in Z.$$

Уравнение $\operatorname{tg} \mathrm{x} = \mathrm{a}$ решается, применяя формулу:

$$\mathrm{x} = \operatorname{arctga} + \pi n, n \in Z$$

Уравнение $\operatorname{ctg} \mathrm{x} = \mathrm{a}$ решается по формуле:

$$\mathrm{x} = \operatorname{arcctga} + \pi n, n \in Z.$$

Особо необходимо отметить некоторые частные случаи элементарных тригонометрических уравнении, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$$\sin \mathrm{x} = 0, \; x = \pi n, n \in Z,$$

$$\sin \mathrm{x} = 1, \; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\sin \mathrm{x} = -1, \; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\cos \mathrm{x} = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$\cos \mathrm{x} = 0, x = 2\pi n, n \in Z,$$

$$\cos \mathrm{x} = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} \mathrm{x} = 0, x = \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

На эти уравнения следует обратить особое внимание, так как без умения их решать невозможно решить никакое другое тригонометрическое уравнение. Лучше всего, если учащиеся будут иметь схемы решения каждого из простейших уравнений.

Периодичность

При решении тригонометрических уравнений важную роль играет период тригонометрических функции. Поэтому ученики должны знать две полезные теоремы:

Теорема: Если T — основной период функции $f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ является основным периодом функции $\mathrm{f(kx + b)}$.

Периоды функции T_1, и T_2 называются соизмеримыми, если существуют натуральные числа m и n, что $mT_1 = nT_2 = T$.

Теорема: Если периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют соизмеримые T_1, и T_2 то они имеют общий период $mT_1 = nT_2 = T$, который является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$.

В теореме говорится о том, что T является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ и не обязательно является основным периодом. Например, основной период функции $\cos x$ и $\sin x$ -2π, а основной период их произведения - π.

Область определения

Любому вещественному числу соответствует точка на единичной окружности. Координаты этой точки есть значение косинуса и синуса данного вещественного числа. Так как координаты любой точки единичной окружности всегда можно определить, то для любого вещественного x можно найти соответствующее значение $\sin x$ и $\cos x$, то есть функция $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определена при любом действительном значении x.

Устанавливая область определения функций $y = \operatorname{tg} x$, следует показать, что если $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, то нельзя найти точки пересечения вектора, являющегося конечной стороной этих углов, с осью тангенсов. Следовательно, при этих значениях аргумента нельзя указать соответствующего значения функции $y = \operatorname{tg} x$.

Методы и примеры решения тригонометрических уравнений разложение на множители

Метод разложения на множители заключается в следующем: если $f(x) = f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$, то всякое решение уравнения $f(x) = 0$ является решение совокупности уравнений $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \dots,\ f_n(x) = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не всякое решение совокупности является решением уравнения. Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений (1) могут не входить в область определения функции $f(x)$.

При решении уравнений такого типа нужно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение за скобки общего множителя, группировка, применение формул сокращенного умножения и деления и искусственные приемы.

Пример 1. Решить уравнение $\sin^2 x - \sin x = 0$.

Решение.

$$\sin x\,(\sin x - 1) = 0,$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x - 1 = 0,$$

$$x_1 = \pi n,\ n \in Z \textit{ или } \sin x = 1,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \pi n, n \in Z{:}\ \ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение $2ctgxcosx + 4cosx - ctgx - 2 = 0$.

Решение.

$$(2ctgxcosx - ctgx) + (4cosx - 2) = 0,$$

$$ctgx\,(2cosx - 1) + 2(2cosx - 1) = 0,$$

$$(2cosx - 1)(ctgx + 2) = 0,$$

$$(2cosx - 1) = 0 \text{ или } (ctgx + 2) = 0$$

$$2cosx = 1 \text{ или } ctgx = -2$$

$$cosx = \frac{1}{2} \textit{ или } x_2 = arcctg(-2) + \pi k,\ k \in Z.$$

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$: $x_2 = arcctg(-2) + \pi k, k \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $(2sinx - cosx)(1 + cosx) - \sin^2 x$.

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, уравнение представим в виде:

$$(2sinx - cosx)(1 + cosx) = \sin^2 x,$$

$$1 - \cos^2 x(2sinx - cosx)(1 + cosx) = 0;$$

$$(1 - cosx)(1 + cosx)\,(2sinx - cosx)(1 + cosx) = 0:$$

$$(1 + cosx)\,(2sinx - 1) = 0,$$

$$1 + cosx = 0 \text{ или } 2sinx - 1 = 0,$$

$$\cos x = -1 \text{ или } 2\sin x = 1,$$

$$x_1 = \pi + 2\pi n, n \in Z \textit{ или } \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi n, n \in Z$: $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Однородные уравнения

Предварительно необходимо вспомнить с учащимися, какие уравнения называются однородными.

Уравнение $asinx + bcosx = 0$, $asin^2x + asinxcosx + ccos^2x = 0$, $asin^3x + bsin^2xcosx + csinxcos^2x + dcos^3x$ и т.д. называют однородными относительно $sinx$ и $cosx$. Сумма показателей степеней при $sinx$ и $cosx$ у всех членов такого уравнения одинаковы. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень. Делением $cos^k x,$ где $k -$ степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно tgx.

Пример 4. Решить уравнение $2sin2x - 3cos2x = 0, cos2x \neq 0$

Решение: Разделим обе части уравнения на $cos2x$. Получим

$$2tg2x - 3 = 0,$$

$$tgx = \frac{3}{2},\ x = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\text{x} = arctg\frac{3}{2} + \pi k, k \in Z.$

Пример 5. Решить уравнение $sin2x + cos2x = 0,\ cos2x \neq 0.$

Решение: Разделим обе части уравнения на $cos2x$, получим

$$tg2x + 1 = 0,$$

$$tg2x = -1,$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ: x = $=-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Пример 6. Решить уравнение $\cos^2 x + sinxcosx = 0.$

Решение: В условии не указано, что $cos2x \neq 0$, поэтому делить уравнение на $cos^2 x$ нельзя. Но можно утверждать, что $sinx \neq 0$, так как в противном случае $cosx$ = 0, что невозможно одновременно. Разделим обе части уравнения а $\sin^2 x$, получим:

$$ctg^2 x + ctgx = 0,$$

$$ctgx\,(ctgx + 1) = 0,$$

$$\text{ctgx} = 0 \text{ или } \text{ctgx} + 1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\ или\ ctgx = -1,$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Преобразование суммы тригонометрических функции в произведение

При решении ряда уравнений применяются формулы:

$$sinx + cosx = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2};$$

$$sinx - cosx = 2\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2};$$

$$cosx + cosx = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2};$$

$$cosx - cosx = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2};$$

$$tgx + tgx = \frac{\sin(x+y)}{\text{cosxcosy}};$$

$$tgx - tgx = \frac{\sin(x-y)}{\text{cosxcosy}};$$

$$ctgx + ctgx = \frac{\sin(x+y)}{\text{sinxsiny}};$$

$$ctgx - ctgx = \frac{-\sin(x+y)}{\text{sinxsiny}}.$$

Пример 7. Решить уравнение $sin3x + sinx = 0$.

Решение: Применим формулу суммы тригонометрических функций, получим:

$$2\,sin\frac{3x+x}{2} \cdot cos\frac{3x-x}{2} = 0,$$

$$sin2xcosx = 0$$

$$\sin 2x = 0 \text{ или } \cos x = 0$$

$$2x = \pi n,\ n \in Z, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

$$x_1 = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$: $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Пример 8. Решить уравнение $sin2x - sin4x = 0$.

Решение: Применим формулу разности тригонометрических функций, получим:

$$2\,sin\frac{2x-4x}{2}\cdot cos\frac{2x+4x}{2}=0,$$

$$\sin(-x)=0 \text{ или } \cos 3x=0,$$

$$sinx=0,\quad 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,$$

$$x_1=\pi n,\qquad n\in Z\quad x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\pi n,\ n\in Z,\quad x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z.$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

При решении ряда уравнений применяются следующие формулы:

$$sinx\cdot cosy=\frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2},$$

$$cosx\cdot cosy=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2},$$

$$sinx\cdot siny=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}.$$

Пример 9. Решить уравнение $2sin2xcosx=sin3x$.

Решение: Применив первую формулу, получим уравнение:

$$2\frac{sin(2x-x)+sin(2x+x)}{2}=sin3x,$$

$$sinx+sin3x-sin3x=0,$$

$$sinx=0,$$

$$x=\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\pi n, n\in Z.$

Пример 10. Решить уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$.

Решение: Применив первую формулу, получим:

$$\frac{\sin(x+\frac{\pi}{12}-x+\frac{\pi}{12})+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}+x-\frac{\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$sin\frac{\pi}{6} + sin2x = 1,$$

$$sin2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = (-1)^n arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Решение уравнений с применением формул понижения степени

При решении широкого круга тригонометрических уравнений ключевую роль играют формулы понижения степени:

$$sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2},$$

$$cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2},$$

$$tg^2x = \frac{1 - cos2x}{1 + cos2x}.$$

Для лучшего усвоения и закрепления данных формул необходимо решить с учащимися несколько уравнений.

Пример 11. Решить уравнение $sin^2x + sin^2 2x - sin^2 3x - sin^2 4x = 0.$

Решение: Применяя формулу, приведенные выше получим равносильное уравнение:

$$\frac{1 - cos2x}{2} + \frac{1 - cos4x}{2} - \frac{1 - cos6x}{2} - \frac{1 - cos8x}{2} = 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (cos8x - cos2x) + (cos6x - cos4x) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2sin3xsin5x - 2sinxsin5x \Leftarrow$$

$$\Leftarrow -2sin5x(sin3x + sinx) = 0 \Leftarrow -4sin5xsin2xcosx = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{5}\ ; \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Решение уравнений с применением формул тройного аргумента

При решении ряда уравнений применяются формулы тройного аргумента:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$tg\, 3x = \frac{3tgx - tg^3 x}{1 - 3tg^2 x},$$

$$ctg\, 3x = \frac{ctg^3 x - 3ctgx}{3tg^2 x - 1}.$$

Пример 12. Решить уравнение $\cos 3x - 2\cos x = 0$.

Решение: Применим формулу, получим уравнение:

$$\cos x(4\cos^2 x - 1) = 0 \Leftarrow \cos x(\cos 2x + \frac{1}{2}) = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проработав соответствующую методическую литературу по данному вопросу, очевидно, сделать вывод о том, что умение и навыки решать тригонометрических уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Таким образом, учитель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Бесспорно, достичь поставленной цели с помощью только средств и методов предложенными авторами современных учебников, практически невозможно. Это связано с индивидуальными особенностями учащихся. Ведь в зависимости от уровня их базовых знаний по тригонометрии выстраивается линия возможностей изучения различных видов уравнений и неравенств на разных уровнях.

Поэтому учитель сталкивается с довольно сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации. Это важно и для осознанного усвоения учащимися теории, и для овладения некоторыми достаточно общими способами решения математических задач. Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений не только создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных с материалом тригонометрии, но и дает возможность установить действенные связи с изученным алгебраическим материалом. В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с изучением тригонометрических уравнений.

Указанные особенности должны быть учтены учителем при разработке методики обучения школьников решению тригонометрических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов И.К., Окунев А.К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач: Пособие для учителей. -2-е изд., доп. - М.: «Просвещение», 1967. - 648 с.

2. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; Под ред. М.И. Сканави – М: ОНИКС, Мир и Образование, 2006.- 608 с.

3. Усмонов М. Математикадан мисоллар ва масалалар тўплами. Тошкент ш., 2016 йил, 654 б.

ЁШЛАР ИНТЕЛЛЕКТУАЛ КАМОЛОТИДА ИЖОДИЙ ТАФАККУР ВА КРЕАТИВЛИКНИНГ ЎРНИ

Анвар РАШИДОВ

БухДУ таянч докторанти

Мамлакатни инновацион ривожлантириш стратегияси ва механизмлари унда яратилган интеллектуал ва илмий-техникавий салоҳиятдан самарали фойдаланиш билан чамбарчас боғлиқ бўлиб, таълим тизими негизида келажак авлод тақдири, давлат ва халқ манфаатлари мужассам. Ҳар қандай давлатнинг жаҳон ҳамжамиятида тутган нуфузи унинг интеллектуал камолоти билан белгиланади. Ўзбекистон Республикаси Конституциясининг 42- моддасида "Ҳар кимга илмий ва техникавий ижод эркинлиги, маданият ютуқларидан фойдаланиш кафолатланади. Давлат жамиятнинг маданий, илмий ва техникавий ривожланишига ғамхўрлик қилади" дейилган.

Мамлакат ижтимоий-иқтисодий тараққиётида истеъдодли, фидойи ижодкор ёшлар муҳим ўрин тутади. Ёшлар муаммони ўртага ташлаш, уни ҳар томонлама ўрганиш, муаммонинг келиб чиқиш сабаб ва оқибатларини мушоҳада қилиш, муаммо устида мустақил фикр юритиш, муаммони ечишнинг турли имкониятларини таҳлил қилиш ва уни ечишнинг энг мақбул йўлини топишга қодир бўлишлари учун уларда ижодий тафаккур ва креативликни камол топтириш муҳим аҳамият касб этади.

Инсон ижоднинг қайси соҳасида фаолият олиб боришидан қатъи назар, ижодий тафаккурга эҳтиёж сезади. Юзага келган муайян савол ёки масчаланинг ечимини топиш жараёнида ижодий тафаккур намоён бўлиб, муаммонинг ечими бирдан ёки кутилмаганда "ярқ" этиб пайдо бўлади. Бу жараёнда сифат жиҳатидан янги моддий ёки маънавий қадрият яратилади. Инсоннинг ижодий имконияти креативлик, яъни яратувчанлик, янги ғояларни ўйлаб топишга мойиллик ва изланувчанликда намоён бўлади.

Ижодий жараён инсондан билим, тажриба ва истеъдод билан бирга, шижоат, қатъият, чидам, мулоҳазакорлик, аниқликни талаб этади. Ижодий тафаккур ва креативлик муштараклиги илмий муваффақият гаровидир.

Ижодий тафаккур ва креативликка тўсқинлик қиладиган омиллар:

1. Ижодий салоҳиятдан ишончсизлик, муваффақиятсизликдан қўрқиш. Бу жараён ижодкорнинг хаёли, ижодий тафаккури, ташаббускорлигига халақит беради. Айрим ижодкорлар ғояларини амалга оширишда сусткашликка йўл қўйиб, бошлаган ишларини охирига етказишмайди.

2. Ўз-ўзини танқид, ўз илмий салоҳиятига паст баҳо бериш.

Истеъдод билан ўз-ўзига танқид ўртасида мувозанатнинг бўлиши керак. Ўз-ўзига баҳонинг пастлиги ижодий тўсиққа олиб келади. Инсон хатоларидан сабоқ олади, хатолар уни янгиликка ва ижодий тафаккурга чорлайди.

3. Дангасалик, ялқовлик, эринчоқлик. Бугунги кунда ижодкор учун барча шароит муҳайё, компьютер технологияси асосида ҳар қандай тажрибани моделлаштириш имкони бор, лекин Берунийлар, Ибн Синолар, Форобийлар, Хоразмийлар йўқ. Ваҳоланки, буюк мутафаккирлар машаққат ва қийинчилик кақарамай, интилишдан, изланишдан, ўқиш-ўрганишдан, ижоддан тўхтамаганлар.

4. Ижодий жараёнда юзага келган масаланинг ечимини дарҳол топиш истаги, тафаккур сустлиги, тафаккурнинг “эгилувчан” эмаслиги. Ижодкор анъанавий тафаккур йўлидан борса, ижодий тўсиққа учрайди, тафаккур сустлиги натижасида “фикр” келмайди.

Бунинг учун ижодкор ностандарт фикрлаши ҳамда вазиятдан чиқишнинг янги йўлини топиши лозим.

5. Қадрсизлик, эътиборсизлик, сунъий тўсиқлар қўйилиши. Юксак маънавиятли жамият маънавий даражаси истеъдодли, зиёли, ижодкор шахсларнинг қадрланиши ҳамда уларнинг илмий-ижодий ишларига ҳар томонлама ёрдам берилиши билан белгиланади.

Ёшлар интеллектуал камолотини юксалтириш учун истиқболда қайси омилларга эътибор қаратиш мақсадга мувофиқ?

Биринчидан, ёшларнинг эркин фикрлашига аҳамият бериш, уларни қизиққан фан соҳаларига илмий-ижодий йўналтириш;

иккинчидан, ёшларнинг бўш вақтларини самарали ташкил этиш, илмий салоҳиятли ёшларни турли танлов, олимпиада, кўрик- танловларда қатнашишларига кўмаклашиш;

учинчидан, талабаларда янгича таҳлил қилиш қобилиятини, тизимли таҳлил ва фалсафий тафаккур кўникмаларини ривожлантириш мақсадида ўқитишнинг инновацион тизимига ўтиш, ўқув жараёнида олинган билимларни мустаҳкамлаш ва амалиётда қўллашга шароит яратиш;

тўртинчидан, талабаларни фаол яратувчанлик фаолиятига кенг жалб этиш, республика ва халқаро миқёсда ўтказиладиган танловларда долзарб ва истиқболли инновацион лойиҳалар билан иштирок этишларига ёрдамлашиш;

бешинчидан, кадрлар тайёрлаш Миллий дастурининг тажриба ва ютуқларини умумлаштирган ҳолда истеъдодли, қобилиятли ва иқтидорли ёшларни ҳам маънавий, ҳам моддий тақдирлаш ва рағбатлантириш;

олтинчидан, таълим ва тарбияни муштарак олиб бориш. Ёш авлод тарбияси ҳамма замонларда ҳам муҳим ва долзарб аҳамиятга эга бўлиб келган. Аммо биз яшаётган XXI асрда бу масала ҳақиқатан ҳам ҳаёт-мамот масаласига айланиб бормоқда ;

еттинчидан, бўлажак олим бир зумда пайдо бўлмайди. Талабалар илк босқичлариданоқ мутахассисликка доир манбалар билан танишиши, лозим бўлса, муайян манба устида илмий тадқиқот иши олиб бориши мақсадга мувофиқдир.

Буларнинг барчаси таълим соҳасида олиб борилаётган оқилона сиёсатнинг ижобий натижаси, яъни мамлакатимизда таълим ислоҳотларининг босқичма-босқич амалга оширилаётганининг ёрқин ифодаси бўлади. Ёшларнинг пухта билим олиши, жисмоний ва маънавий жиҳатдан етук инсонлар бўлиб улғайишини таъминлаш, уларнинг қобилият ва иқтидорини, интеллектуал салоҳиятини юзага чиқариш, улар қалби онги ва шуурида Ватанга садоқат ва фидойилик туйғуларини ривожлантириш зиёлилар олдига катта масъулият юклайди. Аждодлари буюк юртнинг авлодлари ҳам буюкликка лойиқ. Ёшлар нафақат ишончимиз ва келажагимиз, бугунги ва эртанги кунимизни ҳал қилувчи кучидир.

10-СИНФ “МАТЕМАТИКА” ДАРСЛИГИДА КЕЛТИРИЛГАН “ТЎПЛАМЛАР ВА МАНТИҚ” БОБИ МАВЗУЛАРИНИ МУСТАҲКАМЛАШДА ФОЙДАЛАНИШ МУМКИН БЎЛГАН ЗАМОНАВИЙ ПЕДАГОГИК МЕТОДЛАР

Гулрух САЙЛИЕВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

10-синф “Математика ” дарслиги “Тўпламлар ва Мантиқ” боби билан бошланиб, ушбу боб мавзулари ўқувчиларнинг фикрлаш қобилиятини оширишда муҳим рол ўйнайди. Ушбу мақолада бобдаги бир нечта мавзуларни мустаҳкамлашда фойдаланиш мумкин бўлган методлар келтирилган.

Янги мавзуни тушунтиришда ўқувчининг ўзи билган тушунчалардан фойдаланиш натижалидир. Хусусан, тўпламлар мавзусидаги **универсал тўплам ва тўлдирувчи тўплам** тушунчасини англашга ўқувчилар қийналишади. Шу сабабли биз бу тушунчаларни қоида қилиб эмас, балки, ўқувчига аён бирор тушунча билан боғлаб тушунтиришимиз керак.

Универсал тўплам- кўрилаётган доирадаги исталган тўпламни ўз ичига олувчи тўпламдир.

Тўлдирувчи тўплам – Универсал тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ташкил топган тўплам A тўпламнинг тўлдирувчиси дейилади.

Биз ушбу тушунчаларни ўқувчиларга мазмунли тушунтиришда қуйидаги мисолдан фойдалансак бўлади.

Мисол: Лотин алифбоси ҳарфлари доирасида **Алифбо** универсал тўплам бўла олади. Чунки бу доирада кўриладиган исталган тўплам, хусусан, A – Унли ҳарфлар тўплами; B – Ундош ҳарфлар тўплами; D – Жарангли ундош ҳарфлар тўплами; C – Жарангсиз ундош ҳарфлар тўплами; E – Тил олди ундошлар: ва ҳоказоларнинг барча-барчаси алифбонинг қисм тўпламидир. Шу сабабли ҳам

U – **Алифбо** . Бунда A тўпламнинг тўлдирувчиси B тўплам бўлади. Яъни унли ҳарфларнинг тўлдирувчиси ундош ҳарфлардир. Бобнинг “Тўплам тушунчаси, тўпламлар устида амаллар, тўлдирувчи тўплам” мавзусини мустаҳкамлашда **“Пазл” (“Бўлаклардан бутунни туз”)** методидан фойдаланиш ўқувчиларнинг мавзу юзасидан билимларини янада мустаҳкамлайди. Методда ўқувчилар гуруҳларга бўлинишиб, мавзунинг асосий тушунчалари ёзилган ва ўгириб қўйилган рангли карточкалардан бирини танлашади. Гуруҳларга ҳар бир тушунчанинг камида 5 та жиҳати ёзилган ва аралаштирилган варақчалар тўплами тарқатилади (n та асосий тушунчада жами $n \cdot 5$ та варақча бўлади) Маълум вақт белгиланиб, ҳар бир гуруҳ ўзи танлаган карточкасида ёзилган тушунчага оид 5 тадан жиҳатни аниқ ажратиб олиши керак. Олинган натижалар ўқитувчи назоратида гуруҳлараро муҳокама қилинади ва 5 балл тизимида, Нечта жиҳатни аниқ топганига қараб баҳоланади. Масалан, ушбу мавзуда асосий тушунчалар сифатида

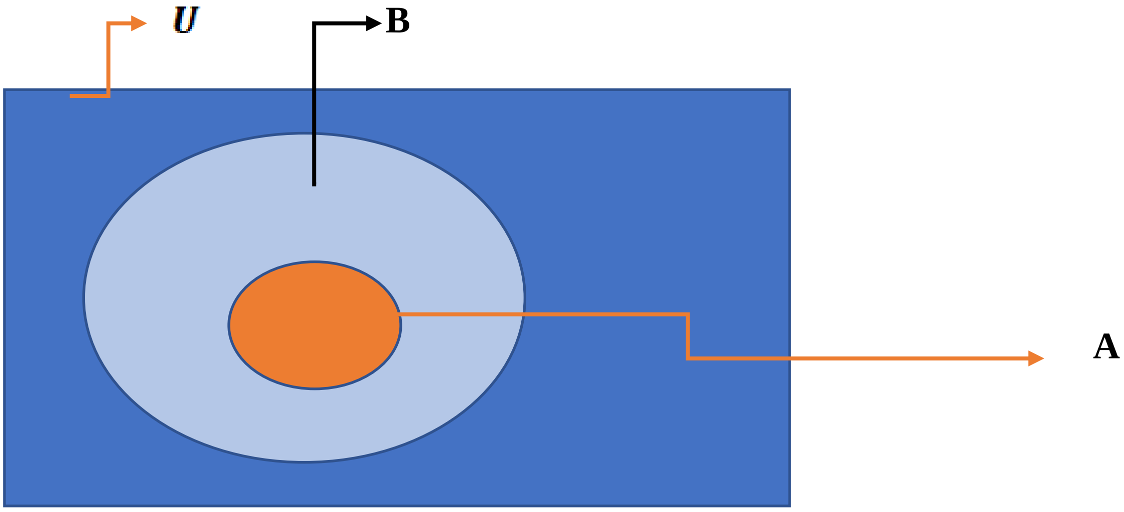
- Қисм тўплам тушунчаси:
- Тўпламлар бирлашмаси;
- Тўпламлар айирмаси;
- Тўпламлар кесишмаси;
- Универсал тўплам;
- Тўлдирувчи тўплам;

Кабиларни олишимиз мумкин. 5 та жиҳат сифатида эса ҳар бир тушунчанинг қуйидаги:

1. **Қоидаси;**
2. **Формуласи;**
3. **Венн диаграммасидаги тасвири;**
4. **Сонли мисол**
5. **Мулоҳазали мисол**

жиҳатлари бўла олади. Юқоридагилардан қисм тўплам тушунчасини жиҳатларини аниқлайдиган бўлсак,

1. Агар A тўпламнинг барча элементлари B тўпламга ҳам тегишли бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламнинг қисм тўплами дейилади.
2. $A \subset B$ $yoki$ $A \subseteq B$
3.



4. $A = \{2,4,6,8,\dots,n,\dots\}$ ва $B = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ бўлса, у ҳолда $A \subset B$ бўлади.
5. A – 10 - синф ўқувчилар тўплами;

B – Мактаб ўқувчилари тўплами тўплами бўлса, $A \subset B$ бўлади.

Методдан яна бошқача усулда ҳам фойдаланиш мумкин. Бунда ҳар бир гуруҳга фақатгина чегаралари чизилган ва асосан бир хил шаклдаги қисмларга чизиқлар билан ажратилган расм тақдим этилади. Ҳар бир бўлакка ўтилган мавзуга оид биттадан савол ёзилган бўлади. Худди шу расмнинг тайёр тасвири юқоридаги бўлакларга айнан мос келадиган қилиб, чизиш орқали бўлакланади. Тайёр расмнинг ҳар бир қисми орқасига мос равишда фақат чегараси чизилган расм бўлакларидаги саволларнинг жавоби ёзилиб, қирқилади ва аралаштирилади,. Гуруҳлар ўзларидаги расм қисмларига мос равишда жавоби ёзилган бўлакларни ёпиштириб, тайёр расмни тиклашлари керак. Белгиланган вақтдан сўнг расмнинг тикланиш даражасига қараб гуруҳлар баҳоланади.

Ушбу методларнинг афзалликлари шундаки, ўқувчи ҳар бир жиҳат ёки қисмни кўриб чиқиб, таҳлил қилиш жараёнида бу тушунчаларни бир-бир эслайди ва билимларини гуруҳлараро мустаҳкамлайди. Билмаган ўқувчи шеригидан ўрганади.

Методнинг камчиликлари деярли аниқланмаган, фақатгина методни юзага чиқаришни ташкил қилиш ўқитувчидан бироз кўпроқ вақт талаб қилиши мумкин.

Ушбу методдан жуда кўплаб соҳаларда, хусусан, аниқ фанлар, табиий фанлар, Ижтимоий-гуманитар фанлар мавзуларини тушунтиришда фойдаланиб, самарали натижаларга эришилса бўлади.

Ўқувчиларнинг фанга бўлган қизиқишларини янада оширишда бобни такрорлаш
мавзуларида турли хил қизиқарли ўйинлардан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Шундай ўйинлардан бири "Математик лото" ўйинидир. Математик лото ўйинидан бирор мавзу ёки боб бўйича билим ва кўникмаларни мустаҳкамлаш ёки назорат қилиш мақсадида фойдаланишимиз мумкин.

Ўйинни ташкил қилиш учун керакли жиҳозлар:

- 1 дан 18 гача сонлар ёзилган 18 та лото тошлари солинган қопча;
- Гуруҳларга бериладиган 6 та сон ёзилган, намунаси пастда келтирилган 3 та варақ;
- 6 та жетон (танга);
- Ўйин мавзусига доир тузилган 18 та савол.

Ўйин қоидалари: Ўйинда 3 та гуруҳ қатнашади. Ҳар бир гуруҳга 6 та савол номерлари ёзилган варақлари тарқатилади.

Ўқитувчи бошловчи сифатида қопдан лото ўйини тошларини бирин кетин олади ва тошнинг номерини эълон қилади. Қайси гуруҳ варағида эълон қилинган тош номери бўлса, ўша команда жавоб бериш ҳуқуқини олади.

Ўқитувчи шу номерли саволни ўқийди. Агар команда саволга тўғри жавоб берилса, лото тоши унга берилади. Тош команда варақдаги мос номер устига қўйилади. Агар команда тўғри жавоб бера олмаса, лото тоши бошловчида қолади ва саволга жавоб бериш бошқа команларга ўтади. Тўғри жавоб берган командага жетон берилади. Бу жетонни ўйин давомида команда ўзи учун керакли бошловчида қолган лото тошига алмаштириб олиши мумкин.

Қайси команда ўз варағидаги барча сонларни мос лото тошлари билан ёпа олса, ўша команда ғолиб деб топилади. Қолган командалар варағи устига қўйилган, йиққан лото тошлари сонига қараб тегишли ўринларни эгаллайди.

1-варақ		
1	**10**	**13**
16	**7**	**4**

2-варақ		
14	**5**	**17**
11	**2**	**8**

3-варақ		
9	**12**	**3**
6	**15**	**17**

10-синф “Математика” дарслигининг биринчи “Тўпламлар ва Мантиқ” боби мавзуларини такрорлашдарсида ушбу ўйин методдан фойдалансак бўлади. Лото тошларига берилган 30 та савол сифатида қуйидагиларни олсак бўлади:

1.Чекли ва чексиз тўпламлар деб қандай тўпламларга айтилади. Уларга мисоллар.

2.Бўш тўплам ва универсал тўплам тушунчаси, уларга мисоллар.

3.Тўпламлар бирлашмаси, уларга мисоллар.

4.Тўпламлар кесишмаси ва уларга мисоллар.

5.Мулоҳаза деб нимага айтилади. Уларга мисоллар.

6.Мулоҳазанинг инкори нима. Унга мисоллар.

7.Мулоҳазалар конюнксияси ва уларга мисоллар.

8.Мулоҳазалар дизюнксияси ва уларга мисоллар.

9.Мулоҳазалар импликатсияси ва уларга мисоллар.

*10.**A***- Гуллар тўплами ва ***B***-Лолалар тўплами ўзаро тенгми?

11.Тўпалмар қандай белгиланади?

12Жуфт сонлар тўплами билан 8 га каррали натурал сонлар тўплами ўзаро қандай муносабатда?

13.Тоқ сонлар тўпламига 15 га каррали натурал сонлар тўплами қисм тўплам бўла оладими?

14.Бўш тўпламга мисол айтинг.

15.Конюнксия амалининг мантиқий боғловчисини айтинг.

16.Дизюнксия амалининг мантиқий боғловчисини айтинг.

17.Импликатсия амалининг мантиқий боғловчисини айтинг.

18.Инкор амалининг мантиқий боғловчисини айтинг.

Фойдаланилган адабиётлар

1.“Using of new pedagogical technologies in teaching “Analytical geometry” subject” Saylieva G.R. Вестник науки и образования 2020. № 18(96). Часть 2.68-71.

2.Rashidov A.Sh. Interactive methods in teaching mathematics: CASE STUDY method // Научные исследования. 34:3 (2020), S. 18-21.

ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШДА АЛГОРИТМИК МЕТОДНИ ҚЎЛЛАШ

Наргиза ТОШЕВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Тоҳир ФАЙЗИЕВ

БухДУ Математика таълим йўналиши 4- босқич талабаси

Маълумки алгоритмлар назарияси – ахборот технологиялари ва тадбиқий математиканинг фундаментал қисмига оид фан бўлиб ҳисобланади. Математикани ўқитиш усулларидан бири бўлмиш алгоритмик метод ҳам таълимда кўп қўлланилади.

Алгоритм нафақат ҳисоблаш ишларида балким, ўқитиш усули бўлмиш алгоритмик метод таълим соҳасида ҳам кўп қўлланилади. Алгоритм бу қўйилган масалани эчиш учун баён қилинган ва натижага олиб келувчи чекли сондаги бажарилувчи кўрсатмалар кетма – кетлигидир. Математик масалани эчишда бу кетма – кет кўрсатмалар ўқувчи томонидан бажарилади. Математик масалаларни эчишда бу кўрсатмалар бажарилиши (ҳисобланиши) керак бўлган амаллардан иборат бўлади. Бу кўрсатмалар ҳар бир ўқувчи тушунадиган қисқа топшириқлар бўлиши керак, акс ҳолда уни ўзлаштириш ва бажаришда тушунмовчилик бўлиб, хато натижага келиш мумкин. Бундан ташқари айрим ҳолларда бажарилиш тартибини ўзгартириш ёки бажармасдан ўтиб кетиш ҳам тўғри натижага олиб келмайди. Масала эчиш алгоритми ўқитувчи томонидан (ўқувчилар иштирокида) тузилади.

Тузилган алгоритм ёрдамида бир неча масалани эчиш мавзуни яхши ўзлаштириш имконини беради ва бошқа шундай масалаларни эчишда уни ўқиб бажаришга ҳожат қолмайди. Масала эчишнинг бундай методи мавзуни чуқур ўзлаштириш имконини беради ва фикрлаш қобилиятини оширади.

Бу рисолада айрим тригонометрик тенгсизликларни алгоритм усулида эчишни ўргатиш тадбиқи кўрсатилади. Тенгсизликни эчиш алгоритми (қадамлари) доскада ёзилади (плакатда бўлиши мумкин ёки видеопроектор орқали намойиш қилиниши мумкин). Ўқитувчи намуна сифатида бирор тригонометрик тенгсизликни олиб, уни эчиш алгоритмини тузади. Ҳар бир алгоритм қадами (кўрсатмалар) ўқитувчи томонидан ўқилиб (айтилиб) бажарилади. Ўқувчилар ҳам ўқитувчи билан бирга масалани эчишади. Шунга ўхшаш тенгсизликлар доскага чиқарилган ўқувчи билан бирга ҳам эчилиши мумкин ёки ўқувчилар мустақил эчганларидан сўнг, натижалар тахлил қилиниши мумкин.

Маълумки тригонометрик тенгсизликларни эчишда улар содда яъни, $\sin f(x) \geq a$, $\sin f(x) \leq a$, $\cos f(x) > b$, $\cos f(x) < 0$, $tgf(x) > a$ каби кўринишларга келтирилади.

Кўп ҳолларда ўқувчи тригонометрик тенгсизликларни эчишда юқоридаги содда ҳолларга келтира олади, лекин тўғри жавобни ёзишда хатоликларга йўл қўяди.

Биз бу эрда намуна сифатида

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

тенгсизликни эчимини алгоритмик усулда топишни кўрсатамиз.

Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

1. Маркази координата бошида бўлган бирлик айлана чизамиз (1.1-расм).

2. Ox ўқига параллел $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ чизиқни чизамиз ва бирлик айлана билан кесишган нуқталарини бўялмаган айланачалар билан (тенгсизликларда ноқатъийлик бўлса, бу нуқталар киришини билдираган бўялган айлана билан) белгилаймиз (1.2-расм). Бу чизиқ синуси $\frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлган бурчак қийматларини билдиради.

Бирлик айланани шу чизиқдан пастки қисмини қалин қилиб белгилаймиз. Айлананинг шу қисмидаги нуқталарнинг координаталари тенгсизликни қаноатлантиради (1.2-расм).

3. $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ чрзиқнинг айлана билан кесишган нуқталарини (A ва B деб) координата боши билан туташтирамиз (1.3-расм).

4. Эчим чегарасини олиш йўналишини кўрсатамиз. Бу соҳа айлана бўйлаб стрелка ёрдамида кўрсатилади (1.2-расм).

5. Соҳанинг ($f(x)$-нинг) чегара қийматларини аниқлаймиз. Шуни эътиборга олиш керакки, интервалнинг қуйи чегараси доимо юқори чегарасидан кичик бўлиши керак $\sin f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ бўладиган $f(x)$ нинг қийматларини топамиз (A ва B нуқталарга мос келадиган). A нуқтанинг абсиссаси $f(x)=\frac{\pi}{4}$ га тенг бўлади (чунки $f(x)$ нинг шу қийматида $\sin f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ўринли бўлади). B нуқтани $f(x)$ абсиссасини топиш учун айлана ичида чизилган йўналиш (яъни йўналиши соат стрелкаси йўналиши билан мос тушадиган) бўйича кўрсатилган интервал қуйи соҳани аниқлаймиз (1.4-расм), бу

$$f(x)=-\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{4}.$$

6. Мураккаб аргумент $f(x)$ бўйича тенгсизликни қаноатлантирадиган қўш тенгсизликни ёзамиз

$$-\frac{5\pi}{4} < f(x) < \frac{\pi}{4}.$$

Енди $f(x) = 2x - \frac{\pi}{6}$ эканлигини эътиборга олсак юқоридаги қўш тенгсизлик қуйидаги кўринишда бўлади

$$-\frac{5\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}.$$

7. Синус функциянинг даврийлигини эътиборга олиб, қўш тенгсизликни иккала томонига ҳам $2\pi n$ $(n \in Z)$ ни қўшиб,

$$2\pi n - \frac{5\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

тенсизликни эчамиз

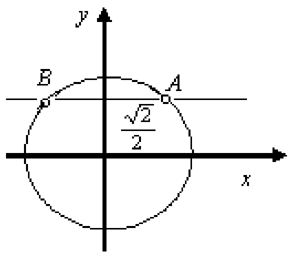
$$2\pi n - \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad 2\pi n - \frac{13\pi}{12} < 2x < \frac{5\pi}{12} + 2\pi n,$$

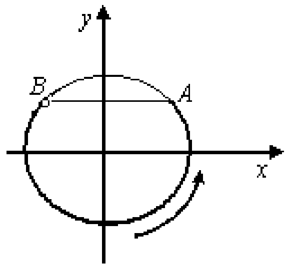
$$\pi n - \frac{13\pi}{24} < x < \frac{5\pi}{24} + \pi n.$$

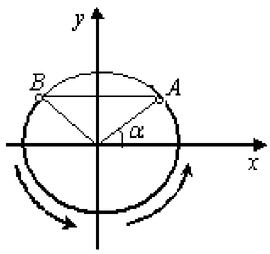
Айрим ҳолларда эчим соҳасини 1.5-расмда кўрсатилган шаклда белгилаб тушунтириш ҳам яхши натижа беради.

Тенгсизликни шундай алгоритмда эчиб кўрсатилишидан (ўқитувчи томонидан, ёки доскага чиқарилган ўқувчи билан бирга) сўнг, ўқувчиларга бу масалани эчишни қадамларини айтиб бериш имконини уйғотади. Бу усулда иккита ёки учта тенгсизлик эчилгандан сўнг ўқувчиларнинг ўзлари бошқа тригонометрик функциялар билан боғлиқ тенгсизликларни эчиш алгоритмларини тузиб, мустақил эчишларига имконият вужудга келади.

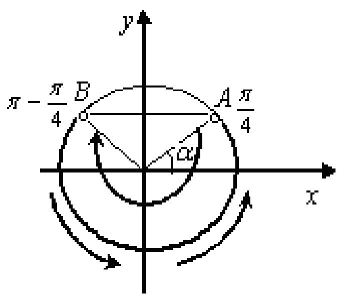
Умуман алгоритм методи ёрдамида масалаларни эчишни ўргатиш ўқувчиларга шу мавзуни чуқур ўзлаштириш, ёзма ва оғзаки нутқларни ошириш, ҳамда янги алгоритмларни тузишга самарали ҳиссасини қўшади.



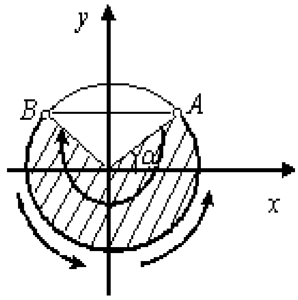




1.1-расм 1.2-расм 1.3-расм



1.4-расм



1.5-расм

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ў.Х.Мехамедов, М.Ҳ.Усмонбекова, С.С.Рустамов “Таълимни ташкил этишда замонавий интерфаол методлар” Ўқув услубий тавсиялар Т.:Ўзбекистон Республикаси ИИБ Академияси, 2016.-45 б.
2. А. Рахимов, М. Ҳамроева “Интерфаол таълим ва унинг дидактик имкониятлари” XXI Международная научно-практическая интернет-конференция 30–31 декабря, 2015.
3. Б.Ҳ. Рахимов “Ўқув машғулотларини замонавий ташкил этиш ва ўтказиш технологиялари” Фан ва технология.- 2016 й.136 б.

ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШДА БИРЛИК АЙЛАНАДАН ФОЙДАЛАНИШ

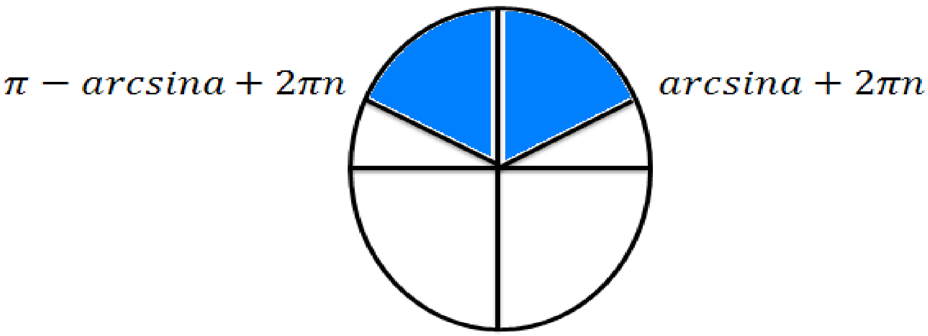
Наргиза ТОШЕВА
БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси
Дилдора ДОНИЁРОВА
БухДУ Математика таълим йўналиши 1- босқич талабаси

$sinx \geq a\ (sinx \leq a), cosx \geq a\ (cosx \leq a), tgx \geq a\ (tgx \geq a), ctgx \geq a\ (ctgx \leq a)$ кўринишидаги тенгсизликлар энг содда тригонометрик тенгсизликларга мисол бўлади. Кўп амалдан иборат, мураккаб кўринишдаги тригонометрик тенгсизликлар асосий тригонометрик айниятлардан ва бошқа тенгликлардан фойдаланиб, содда кўринишга келтирилади (бунда содда тенгсизликлар битта ёки бир нечта бўлиши мумкин). Тригонометрик тегсизликларнинг (тенгламаларнинг ҳам) ечимини топишда бирлик айланадан фойдаланиш жуда яхши самара беради. Шу сабабли ҳам биз қуйида содда тригонометрик тенгсизликларнинг ечими билан бирга, уларнинг бирлик айланадаги тасвирини ҳам беришга ҳаракат қиламиз.

$-1 \le a \le 1$ бўлсин.

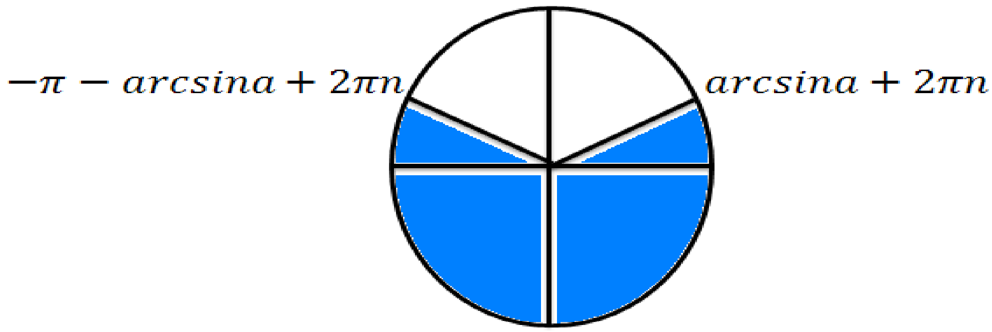
1) $sinx \ge a$

Ечим: $arcsina + 2\pi n \le x \le \pi - arcsina + 2\pi n,\ n \in Z.$



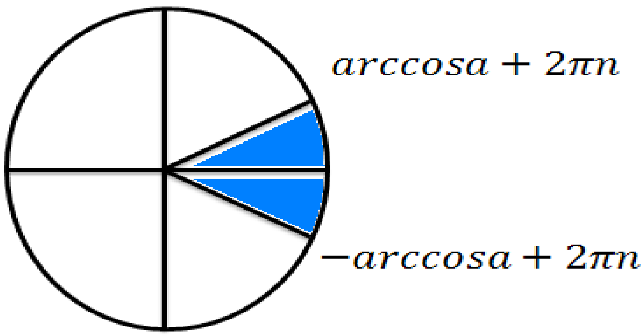
2) $sinx \le a$

Ечим: $-\pi - arcsina + 2\pi n \le x \le arcsina + 2\pi n$



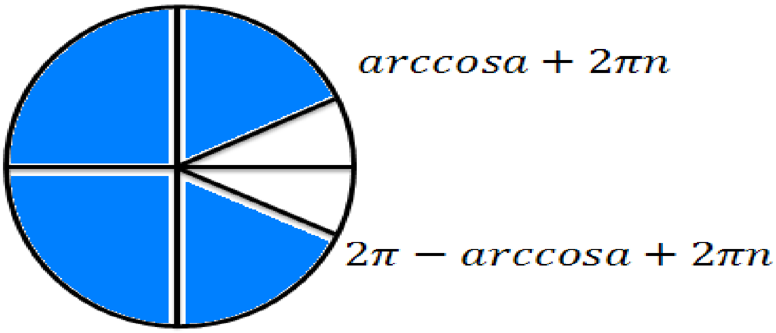
3) $cosx \ge a$

Ечим: $-arccosa + 2\pi n \le x \le arccosa + 2\pi n$



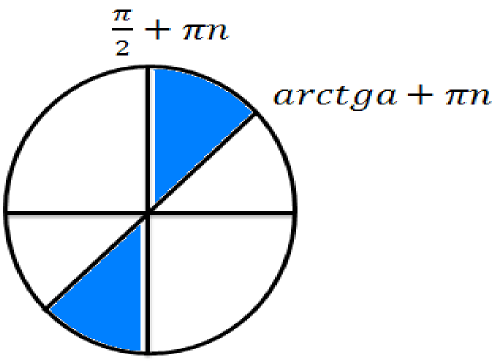
4) $cosx \le a$

Ечим: $arccosa + 2\pi n \le x \le 2\pi - arccosa + 2\pi n$



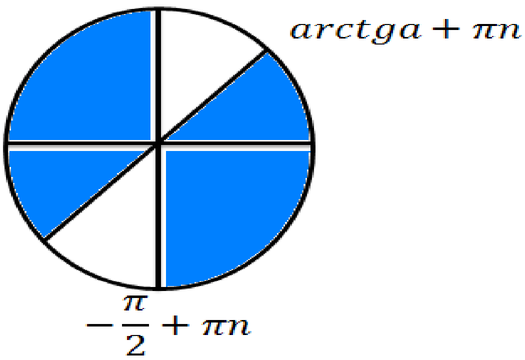
5) $tgx \geq a$

Ечим:$arctga + \pi n \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi n$



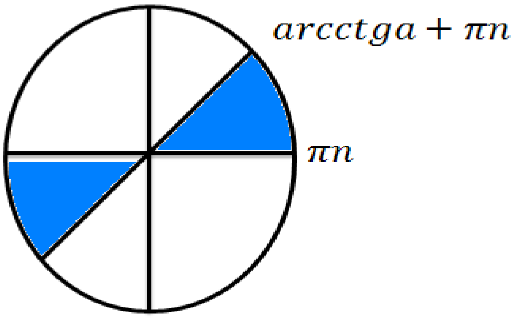
6) $tgx \leq a$

Ечим: $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n$



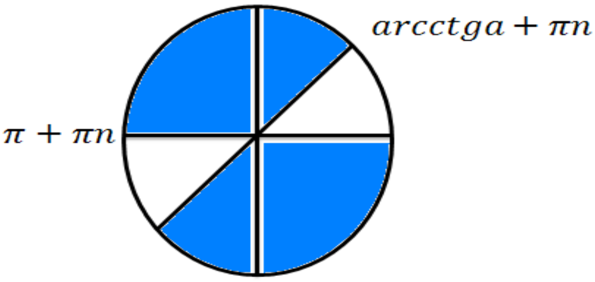
7) $ctgx \geq a$

Ечим: $\pi n < x \leq arcctga + \pi n$



8) $ctgx \leq a$

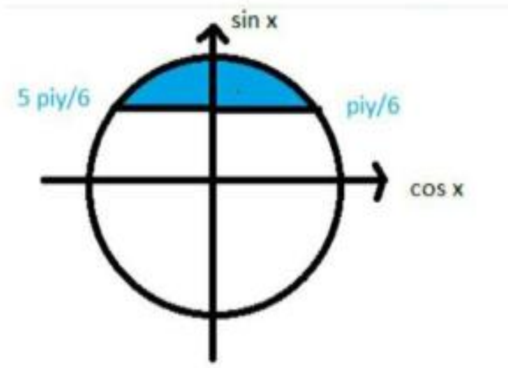
Ечим: $arcctga + \pi n \leq x < \pi + \pi n$



Қуйидаги мисоллаларни намуна сифатида кўришимиз мумкин.

1)$sinx > \frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг

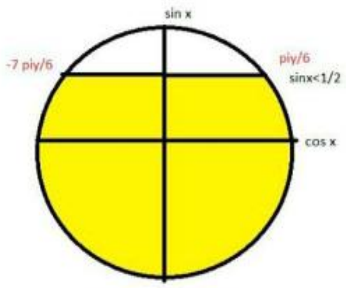
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ оралиқда бўлади, бунда $k \epsilon Z$

2) $sinx < \frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг

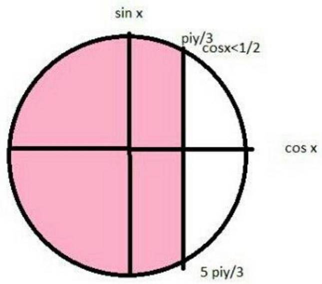
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

3) $cosx<\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг

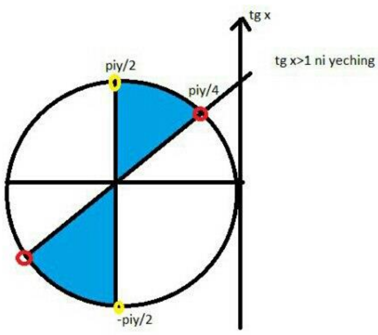
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

4) $tgx>1$ тенгсизликни ечинг

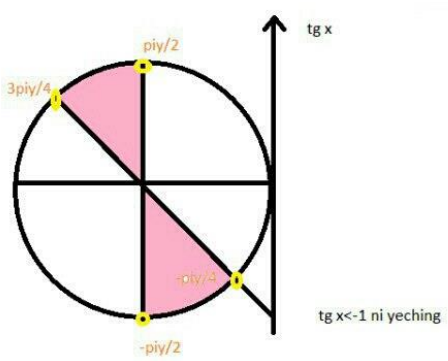
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

5) $tgx<-1$ тенгсизликни ечинг

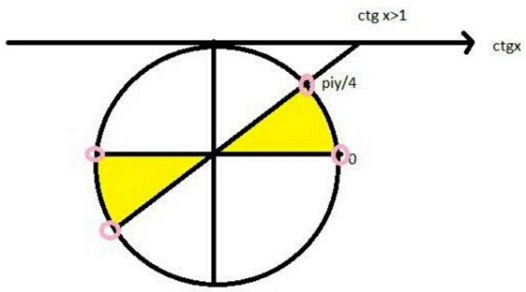
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

6) $ctgx > 1$ тенгсизликни ечинг

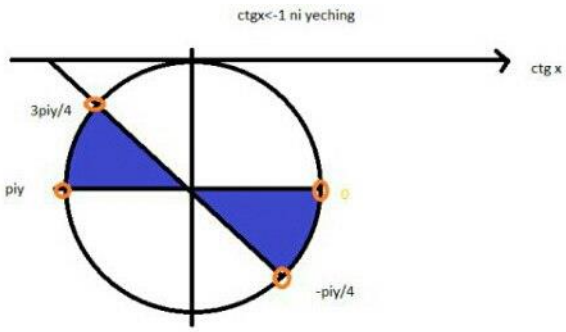
Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

7) $ctgx < -1$ тенгсизликни ечинг

Ечими.



Чизмага асосан берилган тенгсизлик ечими $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\pi k\right)$ ораликда бўлади, бунда $k\epsilon Z$

“МУЛОҲАЗАЛАР АЛГЕБРАСИ ТЕНГ КУЧЛИ ФОРМУЛАЛАРИ” МАВЗУСИНИ ЎҚИТИШДА МУАММОЛИ ТАЪЛИМ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ

Умида УМАРОВА

БухДУ Метематик анализ кафедраси катта ўқитувчиси

Бугунги кунда таълим соҳасида олиб борилаётган кенг кўламли ислоҳотлар, таълим мазмунини такомилаштиришга оид қабул қилинган ҳукумат қарорлари, таълимни ҳаёт билан боғлашни, ўқитиш самарадорлигини оширишни, тез тараққий этиб бораётган жамият учун ҳар томонлама ривожланган баркамол авлодни тарбиялаб этиштиришни талаб қилади.

Бу ўринда таълим жараёнига янги педагогик технологияларнинг кириб келиши ва қўлланиши давр талаби билан бевосита боғлиқдир.

Янги педагогик технология таълимнинг маълум мақсадга йўналтирилган шакли, усули ва воситаларининг маҳсулидир. Кузатувлар шуни кўрсатадики, аксарият ҳолларда ўқитувчи дарс жараёнида фақат ўзи ишлайди, ўқувчилар эса кузатувчи бўлиб қолаверадилар. Таълимнинг бундай кўриниши ўқувчиларнинг ақлий тафаккурини ўстирмайди, фаоллигини оширмайди, таълим жараёнидаги ижодий фаолиятини сўндиради.

Ўқув машғулотларида муаммоли таълим технологияларини ташкил этиш ва бошқариш, муаммоли таълим услублари - талабаларнинг муаммони тўлиқ тушуниб етишига эришиш, уларни ҳал эта олишга ўргатиш, ижодий тафаккури ва ижодий қобилиятларини ўстиришдан иборатдир. Муаммоли таълим технологиялари талаба фаолиятини фаоллаштириш ва жадаллаштиришга асосланган. Муаммоли таълим технологиясининг асоси -талабанинг фикрлаши муаммоли вазиятни ҳал этишдан бошланиши ҳамда унинг муаммоларни аниқлаш, тадқиқ этиш қобилятиги эга эканлигидан келиб чиқади. Муаммоли таълим талабаларнинг ижодий тафаккури ва ижодий қобилиятларини ўстиришда жиддий аҳамиятга эга.

Ўзбекистонда муаммоли таълимни қўллаш бўйича бир неча асрлар давомида мактаб ва мадрасаларда сукротона савол-жавоб усулидан кенг фойдаланиш асосида талабаларда зийраклик, ҳозиржавоблик сифатлари ҳамда гўзал нутқ таркиб топтирилган. Сукротона савол-жавоб усули ҳозиргача энг самарали таълим усулларидан бири сифатида қўлланилади. Бунда талаба чуқур мантиқий фикрлашга, зийракликка, аниқ ва тўғри сўзлашга, нутқнинг мантиқийлиги ва равонлигига ҳамда танқидий, ижодий фикрлашга ўргатилган. Масалан, сукротона суҳбатлар деганда ўқитувчининг талабани мустақил ва фаол фикрлаш жараёнига олиб кириши ҳамда унинг фикрлашидаги нотўғри жиҳатларни зийраклик билан аниқлаган ҳолда уларни тузатиш йўлига олиб чиқишдан иборат усуллар назарда тутилади. Бундай суҳбат босқичларини қуйидагича соддалаштириб ифодалаш мумкин:

1.Савол-жавоблар орқали талабанинг билим даражаси ва фикрлаш қобилятини умумий тарзда аниқлаш;

2.Ўрганилаётган мавзунинг мазмунини талаба қизиқишларига мувофиқлаштириш. Бу асосан талабанинг қизиқиш ва қобилятлариги мос бўлган мисоллар танлаш орқали амалга оширилади.

3.Талабани фаол мулоқотга олиб кириш. Бунда асосан рағбатлантириш усулларидан фойдаланилади;

4.Ўқитувчи ўзини билмайдиган одамдек тутиб саволлар бериб боради.

5.Талабани тўғри фикрларини мақташ орқали уни янада эркин ва чуқурроқ фикрлашга, сўзлашга жалб қилиш.

6.Талабанинг ҳато фикрларини аниқлаб бориш.

7.Талабанинг ҳато фикрларига нисбатан тўғри фикрни ўқитувчи томонидан яққол мантиқий асосланган шаклда баён қилиш ёки тутунтириш орқали талаба учун муаммоли вазият яратилади ва талабани ўз ҳатоларини ўзи тузатишига йўналтирилади.

Суқротона савол-жавоб усулини дарсда қуйидагича амалга оширишимиз мумкин:

1-савол	Мулоҳазалар алгебраси формуласи деганда нимани тушунасиз?	Жавоб: Мулоҳазаларни инкор, дизъюнкция, конъюнкция, импликация ва эквиваленция мантиқий амаллар воситаси билан маълум тартибда бирлаштириб ҳосил этилган мураккаб мулоҳазага формула деб айтамиз.
2-савол	Тенг кучли формулалар тушунчасига таъриф беринг.	Жавоб: A ва B формулалар берилган бўлсин. элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир қийматлари сатри учун A ва B формулаларнинг мос қийматлари бир хил бўлса, A ва B формулаларга тенгкучли формулалар деб айтилади
3-савол	Қисм формулалар деганда нимани тушунасиз?	Жавоб: Формуланинг чинлик жадвалини тузишда фойдаланилади.
4-савол	Келтирилган формула қандай бўлади?	Жавоб: Фақат конъюнкция, дзъюнкция ва инкон (инкор амали фақат ўзгарувчига тегишли) амаллари қатнашган формулалар келтирилган формулалар дейилади.
5-савол	Айнан чин формула нима?	Жавоб: тавтология
6-савол	Тавтология тушунчасига таъриф беринг	Жавоб: Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат чин қийматни қабул қилувчи формула тавтология деб аталади
7-савол	Тавтология қандай символ билан белгиланади?	Жавоб: J
8-савол	Айнан ёлғон формулага	Жавоб: $\overline{J}$

	қандай символ билан белгиланади?	
9-савол	Айнан ёлғон формулага таъриф беринг.	Жавоб: Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат ёлғон қийматни қабул қилувчи формулалар айнан ёлғон формулалар дейилади
10-савол	Бажарилувчи формулалар қандай бўлади?	Жавоб: Элементар мулоҳазаларнинг камида битта қийматлар сатрида чин қиймат қабул қилувчи ва айнан чин бўлмаган формулага бажарилувчи формула деб айтилади.
...	...	...

Муаммоли таълимнинг бош мақсади - талабаларнинг муаммони тўлиқ тушуниб етишига эришиш ва уларни ҳал эта олишга ўргатишдан иборат.

Муаммоли таълимни амалиётда қўллаш асосий масалалардан бири ўрганилаётган мавзу билан боғлиқ муаммоли вазият яратишдан иборат. Турли ўқув фанлари бўйича ўқитувчилар дарслар жараёнида муаммоли вазиятлар ҳосил қилишни ва уларни ечиш усулларини олдиндан кўзда тутишлари керак. Ана шундай технологиялардан бири – **“Кейс-стади”**дир. Кейс-стади (инглизча case - тўплам, аниқ вазият, study -таълим) кейсда баён қилинган ва талабаларни муаммони ифодалаш ҳамда унинг мақсадга мувофиқ тарздаги ечими вариантларини излашга йўналтирадиган аниқ реал ёки сунъий равишда яратилган вазиятнинг муаммоли-вазиятли таҳлил этилишига асосланадиган таълим услубидир. Кейс-стади - таълим, ахборотлар, коммуникация ва бошқарувнинг қўйилган таълим мақсадини амалга ошириш ва кейсда баён қилинган амалий муаммоли вазиятни ҳал қилиш жараёнида башорат қилинадиган ўқув натижаларига кафолатли етишишни воситали тарзда таъминлайдиган бир тартибга келтирилган оптимал усуллари ва воситалари мажмуидан иборат бўлган таълим технологиясидир Кейсда тавсифланган аниқ вазият ўрганишни воқеликка боғлаб қўяди: сизга муаммони ҳал этиш бўйича вазиятни таҳлил қилиш, тахминларни шакллантириш, муаммоларни аниқлаш, қўшимча маълумотни йиғиш, тахминларни аниқлаштириш ва аниқ қадамларни лойиҳалаштириш имконини беради. Ўқув услуби сифатида қуйидагиларни таъминлайди:

- ўрганилган ўқув мавзу, курси бўйича (назарий таълимдан сўнг) билимларни мустаҳкамлашни;
- муаммоларни таҳлил қилиш ва қарорларни якка тартибда ва гуруҳли қабул қилиш кўникмаларини эгаллашни;
- ижодий ва ўрганиш қобилиятлар, мантиқий фикрлаш, нутқ ва муҳит шароитларига мослашиш қобилиятларини ривож-лантиришни;
- янгиликка, қарорларни мустақил қабул қилишга тайёр-гарликни;
- масъулдорлик, мустақиллик, коммуникативлик ва эмпатия, рефлексиянинг шаклланишини; ўқув маълумотларини ўзлаш-тириш сифатини ўз текширишини (ўқув дастури якунида).

Ўқув машғулотларида кейсларни ҳал қилиш алгоритми қуйидагича:

1.Топшириқни бериш. Доимо ижобий жавобга эришадиган мураккаб мулоҳаза туза оласизми?

2.Таълим берувчининг кириш сўзи. Асосий саволларнинг қўйилиши – тенг кучли формулаларга доир теоремалардан фой-даланиб, тавтология бўладиган камида иккита пропозиционал ўзгарувчи қатнашган формулани тузиш.

3.Талабаларни 4-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратиш. 24 та талаба қатнашган гуруҳни 4 та 6 тадан талаба қатнашган кичик гуруҳга ажратамиз.

4.Талабаларнинг микрогуруҳлардаги фаолиятини ташкил қилиш. 4 та тенг кучли формулаларга доир теорема тақсимлаб берилади.

5.Микрогуруҳлардаги жавоблар билан танишишини ташкил қилиш.

Масалан: 1-гуруҳ жавоби бу - 1-теорема. A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ формулалар тенг кучли бўлиши зарур ва етарли.

Шу теорема асосида тавтология тузиш керак. $A = \overline{x} \vee y, \quad B = x \rightarrow y$ бўлсин, бундан:

$$\overline{A} = \overline{\overline{x} \vee y} = x \wedge \overline{y}, \quad \overline{B} = \overline{x \rightarrow y}.$$

Энди $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = J$ дан

$$(\overline{x} \vee y) \wedge (x \rightarrow y) \vee (x \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{x \rightarrow y}) = J$$ ҳосил бўлади.

6.Микрогуруҳлараро мунозарани ташкил қилиш. Келтириб чиқарилган формулалар тушунтирилади ва исботланади. Бошқа формулаларни келтириб чиқариш усуллари мунозара қилинади.

7.Таълим берувчининг умумлаштирувчи сўзи, унинг вазият ечими тўғрисидаги фикри.

8.Талабаларни баҳоланиши.

9.Талабаларнинг машғулот ҳақидаги фикрлари.

10.Таълим берувчининг якунловчи сўзи. Машғулот бўйича хуло-салар чиқариш.

Кейсларни ҳал қилишда таълим берувчи талабаларни йўналтириб туриши ва улардаги фаолликни қўллаши, ҳал қилинаётган муаммога нисбатан қизиқиш уйғотиб туриши даркор. Кейслардан таълим жараёнида фойдаланиш талабалар шахсида қуйидаги профессионал-педагогик зарурий сифатларни шакллантиради:

- мустақил, ижодий фикрлаш қобилиятини ривожлантиради;
- ҳаққоний бўлишига ўргатади;
- назария ва амалиёт ўртасида узвий боғликликни шаклланти-ради;
- муаммоли вазиятни янгича шакллантиришга ёрдам беради;
- вазиятларни ҳал этишда, унга таъсир этувчи омилларнинг мав-жудлиги ва уларнинг таъсирини эътиборга олишга имкон беради;
- бошқалар фикрини ҳам қабул қила олиш малакасини шакллан-тиради;
- савол бериш маданиятини таркиб топтиради;
- қабул қилинган қарор учун масъуллик ҳиссини тарбиялайди.

Кейсларни ҳал қилишда қуйидагиларга эътибор бериш зарур: асосий муаммони ва унга таъсир этувчи омилларни аниқлаш, асосий ва иккинчи даражали омилларни ажратиш, муаммони ҳал қилишнинг муқобил ечимини ҳам кўриб чиқиш, энг мақбул қарор қабул қилиш.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Тўраев Х. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т. Ўқитувчи. 2003.
2. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementleri. T., “Yangi asr avlodi”. 2006.
3. U.U.Umarova “Diskret matematika va matematik mantiq fanidan misol va masalalar to’plami” o’quv qo’llanma 2020 й. 6 октябр 522-сонли буйруғи билан нашрга тавсия қилинган -188b
4. Ў.Х.Мехамедов, М.Ҳ.Усмонбекова, С.С.Рустамов “Таълимни ташкил этишда замонавий интерфаол методлар” Ўқув услубий тавсиялар Т.:Ўзбекистон Республикаси ИИБ Академияси, 2016.-45 б.
5. А. Рахимов, М. Ҳамроева “Интерфаол таълим ва унинг дидактик имкониятлари” XXI Международная научно-практическая интернет-конференция 30–31 декабря, 2015.

МАКТАБ МАТЕМАТИКАСИДА ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИДАН ФОЙДАЛАНИШГА ДОИР БАЪЗИ ТАВСИЯЛАР

Умида УМАРОВА

БухДУ Математик анализ кафедраси катта ўқитувчиси

Тўлқин РАСУЛОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Дискрет математика - математиканинг муҳим қисмларидан бири бўлиб, мелоддан аввал IV асрда яратила бошланган. Дискрет математика математиканинг такомиллашган сонлар назарияси, алгебра, математик мантиқ қисмларидан ташқари XX аср ўрталаридаги илмий-техник тараққиёти туфайли интенсив ривожланаётган функционал системалар назарияси, граф ва тўрлар назарияси, кодлаштириш назарияси, комбинатор анализ каби бўлимларни ҳам ўз ичига олади.

Дастлаб фақат математик мантиқ, алгебра, математик анализ, математика асослари, эҳтимоллар назарияси, геометрия, топология, сонлар назарияси, моделлар назарияси каби математик фанларда татбиқ этиб келинган дискрет математика XX асрнинг 40-йилларидан бошлаб ҳисоблаш математикаси, кибернетика, ахборот назарияси, иқтисодиёт, психология, математик лингвистика, тиббиёт фанлари ва дискрет техникада кенг қўлланилмоқда. Дискрет математика кенг миқёсда электр схемаларни лойиҳалашда ва текширишда, автоматик ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш ва программалашда, дискрет автоматларни мантиқий лойиҳалашда, ЭҲМ элементлари ва қисмларини лойиҳалашда, ҳар хил техник системалар, қурилмалар ва автоматик машиналарни анализ ва синтез қилишда татбиқ этилади. Математик мантиқ фани электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келишига ва уни мукаммалаштиришга катта ҳисса қўшган.

Ушбу фаннинг асосий мақсади таълим олувчиларда дискрет ва мантиқий фикрлаш қобилиятини ривожлантириш, ҳамда математик кибернетика асосларини ўргатишдан иборатдир. Фаннинг асосий вазифаси эса, ўқувчиларга дискрет математика ва математик мантиқ асосларини бериш, олган назарий билимларини амалиётга қўллай билишга ўргатишдан ва оқибат натижада уларни абстракт фикрлаш маданиятини юксак поғоналарга кўтаришдан иборатдир. Ҳозирги замон компьютер технологиялари даврида ҳисоб-китоблар деярли бутунлай дискрет математикага, хусусан комбинаторика ва графлар назариясига асосланган. Бу шуни англатадики, компьютер дастурчилари томонидан қўлланиладиган асосий алгоритмларни ўрганиш учун барча таълим олувчилар ушбу соҳада пухта билимларга эга бўлиши керак [1].

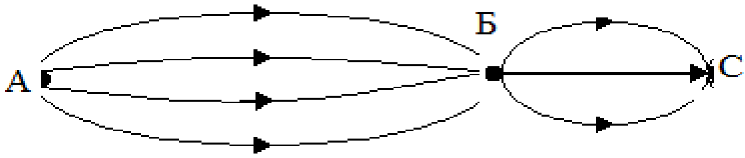
Дискрет математика муаммолари уни ўрганишнинг бошланғич босқичида ҳал қилиш учун чуқур назарий билимларни талаб қилмайди, фақат заковатни талаб қилади, шунинг учун улардан мактаб ўқувчиларининг математик ривожланишини тезлаштириш учун кенг фойдаланиш мумкин. Кўпинча бундай вазифаларни болаларнинг ўқишга бўлган қизиқишини оширишга ёрдам берадиган кўнгилочар, ўйноқи шаклда бериш осон.

Бундан ташқари, дискрет математикадан математикани ўқитишдаги методологик муаммоларни ечишда фойдаланиш мумкин. Масалан, унинг ёрдами билан мактаб ўқувчиларини математик индукция, улар учун қийин бўлган "зарур ва етарли шартлар" тушунчалари ва бошқалар билан таништириш мумкин.

Бизга яхши маълумки, ўрта таълим муассасаларининг 10-синфи ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими муассасалари ўқувчилари учун дарсликнинг 1-боби математик мантиқ элементларига бағишланган. Унда асосан мулоҳазалар, инкор, конюкция ва дизюнкция, мантиқий тенгкучлилик, мантиқий қонунлар, импликация, конверция, инверция, контрапозиция, предикатлар ва кванторлар, тўғри фикр юритиш қонунлари, софизмлар ва парадокслар ҳақида қисқача маълумотлар берилган ҳамда турли табиатли масалалар таҳлил қилинган. Ушбу мақолада, дастлаб фанга оид нисбатан содда масалаларнинг ечимлари келтирилган. Сўнгра олимпиада масалаларини ечишда графлар назарияси элементларидан фойдаланиш бўйича бир қатор методик тавсиялар келтирилган. Ўқувчига қулайлик учун фундаментал таърифлар ва тасдиқлар баён қилинган. Шуни аълоҳида таъкидлаш жоизки, графлар назарияси элементлари мактаб математика фани дарсликларига киритилмаган [2-4].

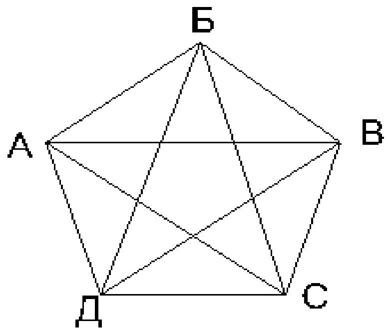
Айрим комбинаторика масалаларини графлар ёрдамида бажаришга доир масалалар.

1-масала. Самарқанддан Тошкентга 4 хил йўл билан келиш мумкин: самолёт, поезд, автобус ва енгил машина (такси). Тошкентдан Хўжакентга 3 хил транспорт воситаси олиб боради: поезд, автобус, такси. Самарқанддан Хўжакентга неча хил усулда келиш мумкин?



Ечиш. Самарқанддан Тошкентга келишнинг жами 4 та йўли бор. Мавжуд 4 та йўлдан биттасини танлаб, Тошкентга келдик, дейлик. Энди Хўжакентга боришнинг 3 та йўли – имконияти бор. Шундай қилиб, Самарқанддан Тошкент орали Хўжакентга боришнинг жами $4 \cdot 3 = 12$ хил усули бор. Жавоб: 12 хил. Умуман, А шаҳардан Б шаҳарга келишнинг m та, Б дан С шаҳарга келишнинг n та йўли бўлса, у ҳолда А дан С га келишнинг жами $m \cdot n$ та йўли бор, яъни А дан С га $m \cdot n$ хил усули билан келиш мумкин. Бу қоида кўпайтириш қоидасидир ва у комбинаториканинг асосий қоидаси ҳисобланади.

2-масала. 5 та мактаб волейбол жамоаси бир қатор ўйинлар ўтказдилар. Ҳар бир жамоа бошқа жамоалар билан битта ўйин ўтказди. Ҳаммаси бўлиб нечта ўйин ўтказилган?



1- шакл.

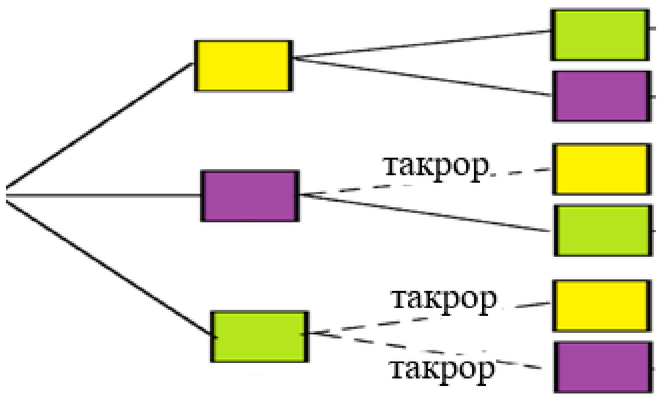
Ечиш. 1- усул. Нуқталар сони кам бўлгани учун, масалага мос шаклни чизиб, кесмалар сонини бевосита санаб чиқиш мумкин, улар – 10 та. Аммо олинган нуқталар сони кўп бўлса (масалан, 100 та, ...), мос шакл чизиш ва ундаги кесмаларни бевосита санаш қийинлашади. Бу ҳолда бошқа йўл тутиш керак.

2- усул. 5 та нуқтанинг ҳар биридан 4 тадан кесма ўтказилади. Бундай кесмалар сони $5 \cdot 4 = 20$ та, аммо кесмалар сонини ҳисоблашда ҳар бир кесма икки марта саналган. Демак, биз 20 ни 2 га бўлишимиз керак: $20 : 2 = 10$. 3-усул. А нуқтани олган 4 та нуқта билан туташтирсак, 4 та кесма ҳосил қиламиз:

АБ, АС, АД, АЕ. Б нуқтадан ам 4 та кесма ўтказиш мумкин, аммо Б дан ўтказилган битта кесма (БА = АБ) ни биз санадик. Демак, Б нуқтадан 3 та янги (аввал ҳисобланмаган, саналмаган) кесма ўтказилади. Шунга ўхшаш, С дан 2 та, Д дан эса 1 та янги кесма ўтказиш мумкин. Е нуқтадан ўтказиладиган 4 та кесманинг ҳаммаси аввал ҳисобланган (ЕА = АЕ; ЕБ = БЕ; ЕС = СЕ; ЕД = ДЕ). Демак, айланада белгиланган 5 та нуқтани туташтирувчи жами кесмалар сони 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10 та.

3-масала. Столда учта стакан шарбат бор - апельсин, узум ва олма. Сиз фақат икки стакан олишингиз мумкин. Қанча вариант бор ва қандай?

Ечиш. Маҳсулот қоидасига кўра, мумкин бўлган вариантлар сони: 3*2=6 та. Танлаш тартиби аҳамиятсиз бўлгани учун, 6/2=3 вариант қолмоқда. Граф тузишда апельсин шарбати - сариқ, олма шарбати - яшил ва узум шарбатини бинафша ранглар билан белгилаймиз:



2- шакл.

Жавоб: 3 вариант мавжуд бўлиб, улар апельсин ва олма, апельсин ва узум ҳамда олма ва узумдир.

Қуйида биз қийинчилик даражаси нисбатан юқори бўлган масалалар ва уларнинг ечимига тўхталамиз.

4-масала. Қўлимизда 6 турдаги сабзавотлар мавжуд (карам, сабзи, пиёз, помидор, бодринг ва булғор қалампир). Салат учун сизга 3 хил сабзавот керак бўлади. Неча хил салатлар тайёрлашингиз мумкин?

Ечиш. Тўлиқ графадаги ҳар учта сабзавот учбурчакни ташкил қилади.

3-шакл.

Масалан, карам қолган 5 та сабзавот билан учбурчак ҳосил қилади. Бундай учбурчаклар (5*4)/2=10 та, бу ерда иккига бўлиниш ҳар бир жуфтликдаги қовурғанинг такрорланишини ҳисобга олинади ("пиёз-бодринг"="бодринг-пиёз" ва бошқалар).

Карамни ўз ичига олмайдиган учбурчаклар сони: (4*3)/2=6 та.

Карам ва сабзини ўз ичига олмайдиган учбурчаклар сони: (3*2)/2=3 та.

Карам, сабзи ва булғор қалампирни ўз ичига олмайдиган учбурчаклар сони: (2*1)/2=1та. Жами 10 + 6 + 3 + 1 = 20 хил учбурчак.

Жавоб: 20 та салат

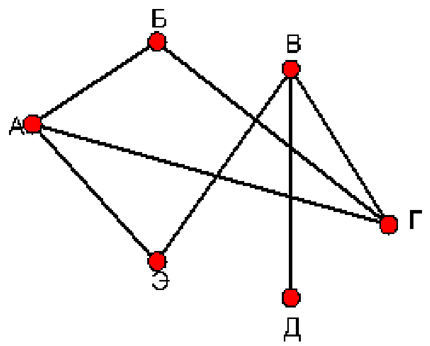
Таъкидлаш жоизки, биз кўпгина математик мантиқий масалаларни ишлашда графлардан фойдалансак, ечим соддароқ кўринишга келади. Маълумотларнинг жадвал ёки чизма (график) шаклида берилиши, уларнинг янада аниқроқ ва соддароқ кўринишда тасвирланишига хизмат қилади. Исботлашларда ҳам графларни ишлатсак, кўпгина математик исботлар соддалашганлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Бу ерда биз графларнинг асосий назарий жиҳатларини таъкидлашга ҳаракат қиламиз, шунингдек, унинг амалиётга тадбиқ этилиш имкониятларини баён этамиз. Бундан мақсад, муаммоларни графлар ёрдамида қандай қилиб ҳал қилишни ўрганиш ва тасаввурни кенгайтиришдан иборат, чунки олинган билимлар олимпиада муаммоларини ҳал қилишда, шунингдек, математик мусобақаларда таклиф қилинган муаммолар учун ишлатилиши мумкин.

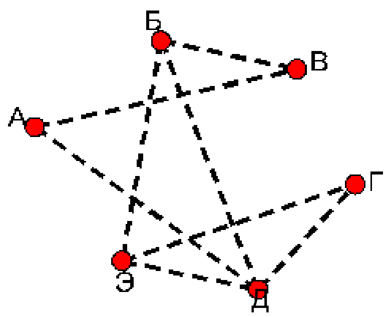
Қуйидаги масалаларни графлар ёдамида соддароқ усулда ҳал қилиш мумкин:

5-масала. Стол тенниси бўйича 6 нафар иштирокчи: Анвар, Ботир, Вали, Гулнора, Достон ва Элмира мусобақалашмода. Чемпионат айлана тизимида ўтказилади - ҳар бир иштирокчи бир мартадан бошқалар билан ўйнайди. Бугунги кунга қадар баъзи ўйинлар ўтказилган: Анвар - Ботир, Гулнора, Элмира билан, Ботир - Гулнора ва Анвар билан, Вали - Гулнора, Достон билан, Элмира - Вали билан, Достон–Вали билан ўйнашди. Ҳозирги кунгача қанча ўйин ўйналди ва қанчаси қолган?

Ечиш. Бу масалани ечиш учун аввалам бор 6 нафар иштирокчини графнинг учлари деб оламиз. Сўнг мусобақалашган болаларни ўзаро қирралар ёрдамида туташтирамиз. Ҳосил бўлган 1.а)-шаклдан озирги кунгача ўтказилган ўйинлар сони 7 та бўлганлигини кўришимиз мумкин. Яна анча ўйин ўтказилиши кераклигини кўришимиз учун графдаги учларнинг олганини туташтиришимиз кифоя. 1.б)-шаклга кўра 8 та ўйин ўтказилиши лозим.



а)



б)

4-шакл

Қирралар сонини топиш:

1-таъриф. Бир учдан чиқувчи қирралар сони, учнинг даражаси дейилади. Графнинг учи тоқ даражага эга бўлса “тоқ”, жуфт даражага эга бўлса “жуфт” деб аталади.

6-масала. Кичкинагина бир шаҳарда 15 та телефон мавжуд: Кабел билан ҳар бир телефонни қолган бешта бошқа телефон билан боғлаш мумкинми?

Ечиш. Шундай графни кўриб чиқамизки, бу графнинг учлари телефонларга, қирралари эса уларни боғлаб турган симларга мос келсин. Бу графда 15 та уч мавжуд, ҳар бирининг даражаси 5га тенг. Қирралар сонини топиш учун, ҳамма учларнинг даражаларини қўшиб чиқамиз. Бундай санокда ҳар бир қирра икки марта саналади. Демак қирралар сони қуйидагига тенг бўлиш лозим $\frac{15 \cdot 5}{2}$. Бу эса бутун сон эмас. Демак бунақа граф мавжуд эмас ва телефонларни ҳам бу кўринишда улаб бўлмайди.

7-масала. Бир давлатда 50 та шаҳар бор. Ҳар биридан 8 та йўл чиқади. Бу давлатда жами нечта йўл бор?

Ечиш. $\frac{50 \cdot 8}{2} = 200$ та йўл бор. Бу масалани ечишда қуйидаги теорема жуда фойдалидир.

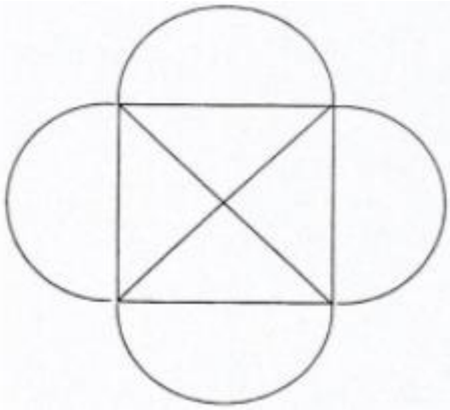
1-Теорема. Учлари сони тоқ бўлган графнинг даражаси жуфтдир.

Исбот. Графнинг қирраларининг сони унинг учлари даражалари йигиндисининг ярмига тенг. Қирралар сони бутун сон бўлгани учун учлар даражалари йиғиндиси бутун сон бўлиши шарт. Бундай ҳолатда эса фақат графнинг тоқ учлари сони жуфт бўлгандагина юзага келади.

Эйлер графи:

2-таъриф. Қаламни қоғоздан узмасдан ва ҳар бир қиррадан бир марта ўтиб чизиладиган графга Эйлер графи деб аталади.

8-масала. Кимдир, жуда бой одам, қуйидаги чизмани чизганларнинг барчасига минг динор берди. Аммо чизмани чизишда битта шарт қўйди. Ушбу чизмани чизишда қаламни варақдан узмасдан ва устма-уст чизиқ ҳосил қилмасдан чизиш керак эди. Бой бўлиш умидида одамлар жуда кўп қоғозларни чалкаштириб юборди, кўп вақтни беҳуда сарф қилишди ва афсонада айтилганидек, кўплаб бошлар узилган.



5- шакл.

Ечиш. 2-таърифга кўра 5-шаклни шартни бузмай туриб чизиб бўлмайди.

Изоҳ. Эйлер графларини чизиш учун ҳар бир учидан ўтувчи қирралар сони жуфт бўлиши керак, чунки бу графни чизишда учларга киришлар сони билан чиқишлар сони бир хил бўлади, албатта бошланғич ва якунловчи учлар бундан истисно.

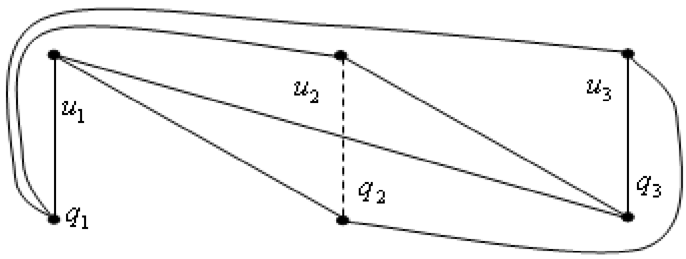
Текис графлар:

3-таъриф. Қирралари учларидан бошқа нуқтада кесишмайдиган графларга текис графлар деб аталади.

Текис бўлмаган графга ажойиб мисол учта уй ва учта қудуқ ҳақидаги бошқотирма масалага мос графдир.

Учта u_1, u_2, u_3 уйлар ва учта q_1, q_2, q_3 қудуқлар бор. Ҳар бир уйдан ҳар бир қудуққа ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган қилиб узлуксиз йўлакчалар ўтказиш мумкинми?

Қоғозда масала шартини қаноатлантирадиган графни чизишга уринишлар муваффақиятсизлик билан тугайди.



6- шакл.

Йўналтирилган графлар:

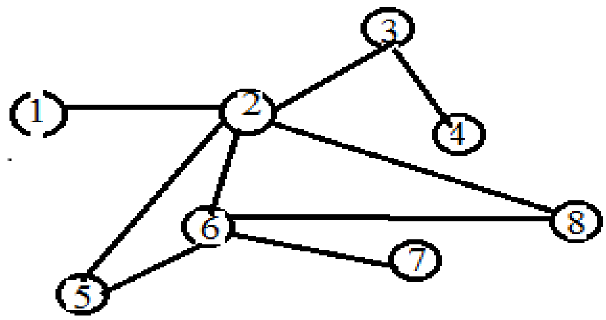
4-таъриф. Қирраларига йўналишлар қўйилган графларга йўналтирилган графлар дейилади. Юқоридаги биринчи масала йўналтирилган графларга мисол бўла олади.

Мустақил бажариш учун олимпиада масалаларидан намуналар:

M1. 46 та катакда 1000 та қуён бор. Қандайдир иккита катакда бир хил сондаги қуён борлигини исботланг (бўш катаклар ҳам бўлиши мумкин).

M2. Рақамлари ҳар хил бўлган 1,2,3 рақамларидан ташкил топган барча уч хонали сонлар йиғиндисини топинг.

M3. Нигора расмдаги 8 та доирани 3 хил рангда шундай бўямоқчики, натижада қўшни доиралар турли рангда бўлиши керак. Қайси икки доира албатта бир хил рангда бўялган бўлади.



M4. Омборда 25 та оқ рангли чинни пиёла ва 35 та қора рангли сопол пиёла бор. Ҳар бир чинни пиёла синса 7га, сопол пиёла синса 8 га бўлиниб кетади. Қорувул бир нечта шиша пиёлани қора рангга, бир нечта сопол пиёлани оқ рангга бўяб қўйди. Тасодифан барча пиёлалар синиб кетди. Оқ бўлаклар сони қора бўлаклар сонига тенг бўлиши мумкинми?

$n(A)$ орқали A чекли тўпламнинг элементлар сонини белгилаймиз. Бешта A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 тўпламлар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

барча $1 \le i \prec j \le 5$ учун $n(A_i \cap A_j) = 1$, яъни ихтиёрий турли иккита тўплам фақат бирта умумий элементга эга.

барча $1 \le i \prec j \prec k \prec l \le 5$ учун $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l = \varnothing$, яъни ихтиёрий турли турта тўплам умумий элементга эга эмас.

М5. $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)$ нинг энг кичик қийматини топинг.

Дискрет математика ва математик мантиқ фани олий таълим муассасаларида батафсил ўқитилиши билан бир қаторда, унинг айрим бўлимлари мактабдаги математика фан дастурига киритилган. Жумладан, комбинаторика элементлари (6-синфдан), тўпламлар, мулоҳазалар алгебраси, софизм ва парадокс, предикатлар (10-синфда). Лекин юқорида берилган мактаб ўқувчиларига мўлжалланган, математика олимпиадаларида учрайдиган мантиқий масалаларни ечишда графлар назарияси ёрдамида ечиш анча қулайликларга эга эканлиги кўриниб турибди. Шуларни инобатга олиб мактабда математика дарсликларининг янги авлодини яратишда графлар назарияси бўлимни ҳам дарсликларга қўшиш мақсадга мувофиқдир.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ҳ.Тўраев. Математик мантиқ ва дискрет математика.-Тошкент, “Ўқитувчи” нашриёти, 2003. 8-11бетлар.

2. M.A.Mirzaahmedov, A.A.Rahimqoriyev, Sh.N.Ismailov, M.A.To‘xtaxodjayeva. MATEMATIKA. Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 6- sinfi uchun darslik. «O‘QITUVCHI» nashriyoti. Toshkent -2017. 206-209 betlar.

3. Sh.A.Alimov, O.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedov. ALGEBRA. Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 7- sinfi uchun darslik. «O‘QITUVCHI» “ nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent - 2017. 154-157 betlar.

4. M.A.Mirzaahmedov, Sh.N.Ismoilov, A.Amonov. MATEMATIKA. 10-sinf Algebra va analiz asoslari geometriya. 1-qism «O‘QITUVCHI» nashriyoti. Toshkent - 2017, 37-39 betlar.

ЎРТА МАКТАБДА МАТЕМАТИКА ФАНИНИ ЎҚИТИШДА УМУМЛАШТИРИШ МЕТОДИНИНГ АФЗАЛЛИКЛАРИ

Ҳилола ҲАЙИТОВА

БухДУ Математик анализ кафедраси ўқитувчиси

Кўп асрлик тарихга эга бўган математика фанининг ривожланиб, тараққий этишида Ўрта Осиёлик ва жаҳон олимларининг ўрни беқиёс. Дарҳақиқат, инсоният яралгандан бошлаб, унда ҳисоб-китобга бўлган эҳтиёж туғилган. Ушбу эҳтиёжлар математика фанини вужудга келишига сабаб бўлган омиллардан биридир. Бугунги кунда ушбу қадимий фаннинг ривожланиб, ўсиб, такомиллашиб бораётганини гувоҳи бўляпмиз.

Математика фанини ўқитиш педагогдан юксак илмий савия ва шу билан бир қаторда юқори даражадаги касбий маҳоратни талаб қилади. Ушбу бетакрор фанни ўргатишда ўқитувчи турли илмий изланиш методларидан, янги педагогик технологиялардан фойдаланиб иш тутсада, қатор муаммоларга дуч келиши турган гап. Умумлаштириш методи математикани ўрганувчилар учун муҳим бўлган барча жиҳатларни ўз ичига қамраб олади. Ушбу методда педагог берилаётган билим ва кўникмаларини бирлик хусусиятларидан умумий хусусиятлари томон ёндашишни тадбиқ этади. Ушбу мақолада математика фанини ўрганишда илмий изланиш методи-умумлаштириш методининг афзалликлари ва уларнинг алгебраик ва геометрик масалаларнинг ечишдаги тадбиқлари кўрсатилган.

Дастлаб, умумлаштириш тушунчасига тўхталиб ўтамиз. Умумлаштириш методи математикани ўрганувчилар учун муҳим бўлган барча жиҳатларни ўз ичига қамраб олади. Ушбу методда педагог берилаётган билим ва кўникмаларни бирлик хусусиятларидан умумий хусусиятлари томон ёндашишни тадбиқ этади. Умумлаштириш методи математика ўқитишдаги илмий изланиш методларидан биридир. Ушбу методга А.Н.Кондаков қуйидагича таъриф берган: “Умумлаштириш шундай мантиқий усулки, унинг воситаси орқали бирлик фикрлашдан умумий фикрлашга ўтилади.”

Қуйидаги параллелограмм ва унинг симметрия маркази ҳақидаги теоремани қараймиз:

Теорема. Параллелограмм диагоналининг ўртаси шу параллелограммнинг симметрия марказидир.

Исбот. О нуқта $ABCD$ параллелограмм AC диагоналининг ўртаси бўлсин. У ҳолда О марказли симметрия AB кесмани унга параллел бўлган ва C нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа акслантиради. AB кесма CD га параллеллиги параллелограмм таърифига кўра, $Z_0[AB] = [CD]$. Шу билан бирга Z_0 симметрия AB тўғри чизиқни CD тўғри чизиққа, CB тўғри чизиқни AD тўғри чизиққа, акслантиради: $Z_0[AB] = [CD], Z_0[CD] = [AD]$. Шунинг учун $B = (AB) \cap (CB)$ нуқта кесишиш нуқтаси образи $D = (CD) \cap (AD)$ нуқтага устма-уст тушади: $Z_0(B) = D$. Демак B ва Dлар O нуқтага нисбатан симметрик. Шундай қилиб, O марказли симметрия $A \to C, B \to D, C \to A, D \to B$ аксланишни ҳосил қилади. Натижада $ABCD$ параллелограмм O марказли симметрия билан ўзига аксланади: $Z_0(ABCD) = CDAB$. Бинобарин, диагонал ўртаси бўлган O нуқта параллелограммнинг симметрия марказидир.

Юқоридаги теоремани исботлашда параллелограммнинг таърифига кўра, унинг томонлари параллеллигидан фойдаланилди.

Параллелограммнинг бу хоссаси теорема исботидаги асосий жиҳат бўлиб, унга асосланганликда хусусийликдан умумийликка ёндашишни кўришимиз мумкин.

Қуйидаги геометрик масалага тўхталиб ўтамиз:

Асослари a ва b бўлган тўғри бурчакли трапеция айланага ташқи чизилган. Айлана радиусини топинг.

Ечиш. Айтайлик, r радиусли айланага $ABCD$ тўғри бурчакли трапеция ташқи чизилган. Шаклдан $|AB| = 2r$. Агар $|BC| = a, |AD| = b$ десак, трапециянинг айланага ташқи чизилганлиги учун $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$. Демак, $|CD| = a + b - 2r$. ADга CP перпендикуляр туширсак, $|PD| = b - a$ ва $|CP| = |AB| = 2r$ бажарилади. Бу ерда

$|CD|^2 = CD^2 + PD^2 \to (a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (b - a)^2$. Демак, $r = \frac{ab}{a+b}$.

Масалани ечишда перпендикуляр тушириш йўли билан трапеция ички чизилган айлана радиуси топилган. Бу турдаги масалаларда маълумлар асосида номаълумларни ҳисоблаш келтирилган. Бу каби геометрик масалаларни ечишда масала шартига ва талабига мос келувчи зарур чизма аниқ чизилиб, сўнгра масалада берилган ва сўралганлар орасидаги муносабатларга мос келувчи назарий тушунчалардан ўринли фойдаланиш лозим.

Умумлаштириш методидан фойдаланиш-бу берилаётган билим ва кўникмаларни хусусий жиҳатларини ўрганиб, унинг умумий жиҳатлари ҳақида тушунчага эга бўлишдир.

Енди эса математиканинг асосий тушунчаларидан ҳисобланган арифметик ва геометрик прогрессия тушунчаларига тўхталиб ўтамиз. Дастлаб, арифметик прогрессиянинг таърифини келтирамиз.

Таъриф. Арифметик прогрессия деб шундай сонли кетма-кетликка айтиладики, бу кетма-кетликда, иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадга шу кетма-кетлик учун ўзгармас бўлган сонни қўшиш натижасида ҳосил бўлади.

Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади a_1, прогрессия айирмаси d, ҳадлар сони n, $n-$ҳади a_n, дастлабки n та ҳади йиғиндиси S_n бўлса, унинг $n-$ҳади қуйидаги формуладан топилади:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Арифметик прогрессия билан бир қаторда геометрик прогрессиянинг ҳам таърифини келтирамиз.

Таъриф. Геометрик прогрессия деб шундай сонли кетма-кетликка айтиладики, бу кетма-кетликда иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳад ўзидан олдинги ҳадни шу кетма-кетлик учун ўзгармас бўлган (нолдан фарқли) сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлади.

Арифметик прогрессиянинг биринчи ҳади b_1, прогрессиянинг махражи q, ҳадлар сони n, $n-$ҳади b_n, дастлабки n та ҳади йиғиндиси S_n бўлса, унинг $n-$ҳади қуйидаги формуладан топилади:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Ушбу математиканинг асосий икки тушунчаларининг хусусий жиҳатлари баён этилиб, уларнинг умумий жиҳатларига эътибор қаратамиз. Яъни арифметик ва геометрик прогрессияларнинг ихтиёрий ҳади ўзидан олдинги ҳадидан қандайдир ўзгармас миқдорга фарқланади. Арифметик прогрессияда бу ўзгармас миқдор айирма бўлса, геометрик прогрессияда эса унинг махражидир. Умумлаштириш методидан фойдаланилганда, ўрганилаётган тушунчанинг умумий ва фарқли жиҳатлари таҳлил қилинади. Қуйида арифметик прогрессияга доир мисол ва унинг ечимига тўхталиб ўтамиз.

Мисол. Агар $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ арифметик прогрессия ташкил этса, a^2, b^2, c^2 сонлари ҳам арифметик прогрессия ташкил этишини исботланг.

Исбот. $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ арифметик прогрессия ташкил этиши учун қуйидаги $\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}$ ифода ўринли бўлиши ёки $\frac{2}{a+c} - \frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c} = 0$ ифодани қаноатлантириши керак. Бунда

$$2(a+b)(b+c) - (a+c)(b+c) - (a+c)(a+b)$$
$$= 2ab + 2b^2 + 2ac + +2bc - ab - bc - ac - c^2 - a^2 - ac - ab$$
$$- bc = 2b^2 - a^2 - c^2$$

бўлгани учун $2b^2 - a^2 - c^2 = 0$ ёки $2b^2 = a^2 + c^2$ бўлади. Бу тенглик a^2, b^2, c^2 сонларнинг арифметик прогрессия ташкил этишини кўрсатади. Ушбу масалада арифметик прогрессиянинг ихтиёрий учта кетма-кет ҳадлари орасидаги ўрта арифметик тушунчасидан фойдаландик.

Енди эса геометрик прогрессиянинг ихтиёрий учта кетма-кет ҳадлари орасидаги боғланиш- ўрта геометрик миқдор ҳақидаги масалани қараймиз.

Масала. a, b, c сонлар геометрик прогрессия ташкил этса, $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}$ сонлар ҳам геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

Исбот. a, b, c геометрик прогрессия ташкил этгани учун $b^2 = ac$. Бу тенгликнинг ҳар қисмини $ac \neq 0$ га кўпайтирсак, $ab^2c = (ac)^2$. Бундан $\frac{1}{(ac)^2} = \frac{1}{ab^2c}$ ёки $\left(\frac{1}{ac}\right)^2 = \left(\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{ab}\right)$. Демак, $\frac{1}{ac}$ сон $\frac{1}{bc}$ билан $\frac{1}{ab}$ ўртасида ўрта геометрик сон, яъни $\frac{1}{ac}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{ab}$ сонлар геометрик прогрессияни ташкил этади.

Бизга маълумки, кўпбурчаклар геометриянинг асосий ва кенг кўламли тушунчаларидан биридир. Кўпбурчаклар ичида трапеция ва ромб қавариқ тўртбурчак ҳисобланиб, улар қатор хоссаларга эга. Қуйида бу икки турдош кўпбурчаклар ҳақида фикр юритамиз.

Дарҳақиқат, томонлари сони тўртта бўлган кўпбурчак тўртбурчак дейилади. У қавариқ ва ноқавариқ бўлиши мумкин. Биз фикр юритмоқчи бўлган бу икки геометрик шаклларнинг қавариқлиги уларнинг умумий жиҳатларидан биридир. Дастлаб трапеция таърифини келтирамиз.

Таъриф. Икки томони параллел, қолган икки томони параллел бўлмаган тўртбурчак трапеция деб аталади.

Трапециянинг параллел томонлари унинг асослари, қолган томонлари ён томонлари дейилади.

Енди эса трапеция билан умумий жиҳатларга эга бўлган шакл ромбнинг таърифини келтирамиз.

Таъриф. Ҳамма томонлари тенг бўлган параллелограм ромб деб аталади.

Ромбнинг диагонали жойлашган тўғри чизиқ унинг симметрия ўқидир; ромб диагоналлари ўзаро перпендикулярдир; ромб диагоналлари унинг бурчаклари биссектрисаларидир.

Геометриянинг бу каби тушунчаларини ўрганишда аввало қаралаётган шаклларнинг ҳар бирининг ўзига хос хусусиятлари кўриб чиқилиб, таҳлил қилиниши ва хулосавий фикр юритиб, уларнинг ўхшаш ёки умумий жиҳатларига урғу бериш мақсадга мувофиқдир. Педагог томонидан дарс жараёнида бундай ёндашув- илмий изланиш методидан унумли фойдаланиш демакдир. Юқоридаги шакллар ҳақида тасаввурга эга бўлиш учун аввало уларнинг хоссаларини ёритиб бериш ўқитувчи томонидан амалга оширилиб, сўнгра бир-бирига мувофиқ хусусиятларини излашни эса ўқувчи ихтиёрига ҳавола қилиш дарс жараёнида муаммоли вазият яратишга ва натижада ўқувчини мустақил фикрлашга ундайди. Бу эса ўз-ўзидан ўтилаётган дарс сифатига ижобий таъсир кўрсатади. Математика фанини ўрганиш зийраклик билан бир қаторда ўзига хос ижодкорликни талаб қилади. Бу жозибадор фанни ўрганишда турли илмий изланиш методларидан фойдаланиш ўқувчининг дуч келиши мумкин бўган муаммо ва тўсиқларни енгишига кўмак беради.

Фойдаланилган адабиётлар

1. А.У.Умирбеков, Ш.Ш.Шаабзалов. *Математикани такрорланг*, Тошкент, “Ўқитувчи”, 1989.
2. М.Сахаев. *Алгебрадан масалалар тўплами,* Тошкент, “Ўқитувчи”, 1987.
3. С.Алиханов. *Математика ўқитиш методикаси,* Тошкент, 2011.
4. Н.А.Тўраева, Ҳ.Ғ.Ҳайитова. *Геометрия фанини ўқитишда системалилик,* Таълим сифатини ошириш: муаммо, ечим ва истиқбол. Бухоро, 2020.

ПРОГРЕССИЯЛАР УЧРАЙДИГАН БАЪЗИ ҲАЁТИЙ МАСАЛАЛАР

Зикрулло ҲАМДАМОВ

БухДУ Дифференциал тенгламалар кафедраси ўқитувчиси

Тўлқин РАСУЛОВ

БухДУ Математик анализ кафедраси доценти

Ҳозирги кунда математика бўйича олинган билимларни фаннинг бошқа тармоқларидаги ҳодиса ва жараёнларни ўрганишга тадбиқ қилиш долзарб масала ҳисобланади. Математик методлар фаннинг турли соҳаларигача чуқур кириб борганлигини таъкидлаш лозим. Аниқ математик билимга эга бўлиш амалий фаолиятда инсон маданиятининг қисми ҳақида тасаввурни шакллантиради.

Умумтаълим мактабларининг 9-синфда “Арифметик ва геометрик прогрессиялар” мавзуси ўқитилади [1-5]. Бу мавзунинг муҳимлиги шундан иборатки, уни инсон касбий фаолиятида учрайдиган турли масалаларни ҳал қилишда қўллаш мумкин. Қуйидаги масалани қараймиз: ҳаётдаги қайси ҳолатларда прогрессиялар ҳақидаги билимларни қўллаш мумкин? Прогрессиялар табиатда, иқтисодиётда ва инсон ҳаётининг бошқа соҳаларида пайдо бўладими? Кундалик ҳаётимизда прогрессиялар ҳақиқатан ҳам муҳим ўрин эгаллайдими?

Ушбу мақолада кўзланган асосий мақсад – бу арифметик ва геометрик прогрессиялар тушунчаларини инсон ҳаётининг амалий муаммоларини ҳал қилишда қўллаш мумкинлиги ҳақида батафсил маълумот беришдан иборатдир. Олдимизга қўйилган мақсадни амалга ошириш учун қуйидаги масалалар қўйилди ҳамда уларнинг ечими келтирилди:

– Масаланинг ҳолатини аниқлаш ва ривожланиш ҳақида тушунчаларнинг пайдо бўлиш тарихини ўрганиш ҳамда бу билимларни инсоннинг амалий эҳтиёжларини қондириш учун қўллаш;

– Прогрессиялар ҳақидаги билимларга таянган ҳолда ечиладиган амалий масалаларни таҳлил қилиш ва инсон фаолиятида учраб турадиган типик масалаларни классификация қилиш.

– Ишлаб чиқилган классификацияга мос амалий аҳамиятга эга масалалар системасини ҳосил қилиш ва уларни ечиш методларини умумлаштириш.

Энди “Арифметик прогрессия” ва “Геометрик прогрессия” тушунчаларининг пайдо бўлиш тарихига тўхталамиз. “Прогрессия” тушунчаси лотинчадан келиб чиққан бўлиб, progression – олдинга ҳаракат маъносини билдиради. Бу тушунча VI асрда яшаб ўтган римлик олим Боэции томонидан киритилган. Дастлаб бу тушунча математикада бирор қоида ёрдамида битта йўналишда чексиз давом этадиган исталган кетма-кетлик сифатида аниқланган. “Прогрессия” тушунчаси ўзи алоҳида деярли ишлатилмайди. Унинг иккита арифметик ва геометрик прогессиялар деб аталувчи муҳим хусусий ҳоллари кўп ишлатилади. Қадимги греклар узлуксиз пропорциялар назариясида ўрганилган прогрессиялардан “арифметик прогрессия” ва “геометрик прогрессия” номланишлари пайдо бўлган.

Аниқ бир қоида ёрдамида аниқланадиган кетма-кетликга прогресия дейилади. Ҳозирга кунда бу тушунча “арифметик прогрессия” ва “геометрик прогрессия” сўз бирикмаларида ишлатилади. Арифметик прогрессиянинг иккинчисидан бошлаб ҳар бир ҳади унга қўшни бўлган иккита ҳаднинг ўрта арифметигига тенг бўлганлиги учун “арифметик” прогрессия деган ном шу билан изоҳланади. Худди шунингдек, геометрик прогрессиянинг иккинчисидан бошлаб ҳар бир ҳади унга қўшни бўлган иккита ҳаднинг ўрта геометригига тенг бўлганлиги учун “геометрик” прогрессия деган ном шу билан изоҳланади.

1, 2, 3, …, n,… натурал сонлар қатори биринчи ҳади ва айирмаси 1 га тенг арифметик прогрессиядир. Қадимда бизгача етиб келган прогрессия ҳақидаги масалалар хўжалик ҳаётдаги эҳтиёждан боғлиқ бўлган: маҳсулотларни тақсимлаш, меросларни бўлиш ва бошқалар. Машҳур олимлардан Архимед, Пифагор ва унинг шогирдлари, француз математиклари Леонард Фибоначчи ва Баше де Мезириак, немис математиклари М. Штифель, Н.Шюке ва К. Гаусслар прогрессиялар назарияси ривожига салмоқли ҳисса қўшганлар. Эрамиздан аввалги 287-212 йилларда Архимеднинг ишларида прогрессиялар ҳақидаги дастлабки маълумотлар учраган. Қадимги Мисрда нафақат арифметик прогрессиялар, балки геометрик прогрессиялар ҳақида ҳам маълумотга эга бўлишган.

Энди ҳукмингизга прогрессиялар билан боғлиқ бўлган бир нечта тарихий ёки қизиқарли масалаларни ҳавола қилмоқчимиз.

1-масала. Икки дўст Али ва Вали суҳбатлашиб турганида гап пулга бурилибдида Али Валига шундай таклиб берибди.

– Келгин бир ўйин ўйнаймиз. Ўйин шартлари қуйидагича:

Ҳар кун эрталаб учрашамиз ва мен сенга 100000 сўм бераман. Сен эса менга биринчи кун бир сўм, иккинчи кун икки сўм, учинчи кун ундан икки баробар кўп, яъни тўрт сўм, кейинги кун яна икки баробар кўп, яъни саккиз сўм берасан. Бу ўйинннни роппа-роса бир ой (ўттиз кун) ўйнаймиз. Айтингчи ҳурматли ўқувчи, бу ўйинда ким ғолиб бўлади? Сизга шундай таклиф берилса ўйнармидингиз? Балки 100000 сўм камдир, ҳар кун қанча берса ўйнар эдингиз?

Энди ҳисоблаб кўрамиз. Алининг берадиган пули аниқ 30 кун бир хил 100000 сўмдан, жамиси уч миллион бўлади. Валини берадиган пулини ҳисоблаймиз.

1-кун	2-кун	3-кун	4-кун	5-кун	6-кун	7-кун	8-кун	9-кун	10-кун
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
11-кун	12-кун	13-кун	14-кун	15-кун	16-кун	17-кун	18-кун	19-кун	20-кун
1024≈ 1 минг	2 минг	4 минг	8 минг	16 минг	32 минг	64 минг	128 минг	256 минг	512 минг
21-кун	22-кун	23-кун	24-кун	25-кун	26-кун	27-кун	28-кун	29-кун	30-кун
1024 минг≈ 1 млн	2 млн	4 млн	8 млн	16 млн	32 млн	64 млн	128 млн	256 млн	512 млн

Агар ҳамма берадиган пулларини ҳисобласак тахминан бир миллиард сўм бўлар экан. Демак бу ўйинда Вали ютқазар экан. Агар ҳар кун Али 100000 сўм эмас, балки 34 миллион сўм атрофида пул бериб турса, ўйнаса бўлар экан.

2-масала (Рост ёки ёлғонлиги аниқ бўлмаган масала). Эмишки бир узоқ ўрмоннинг ўртасида бир нечта руҳонийлар бор эмиш. Улар учта устуннинг биринчисида жойлашган 64 та дискларни маълум қонун-қоидалар асосида иккинчисига кўчираётган эканлар. Ривоятда айтилишича, агар улар шу қоидалар асосида дискларни иккинчи устунга кўчирсалар дунё чангу тўзонга айланиб ер сайёраси йўқолиб кетар экан. Хўп бу қоидалар қанақа қоидалар экан ва бу ёлғон ривоят қанчалик ҳақиқатга яқин?

Қоидалар: 1) Дисклар катталиклари 64 хил. Энг каттаси энг пастда устидан кичиклари жойлаштирилган. Яъни, 64-диск энг катта, 63-диск фақат 64-дискдан кичик, … , 1-диск энг кичик. Пирамида шаклида жойлашган.

2) Ҳар олинганда битта диск олинади. Диск жойлаштирилгач кейинги дискни олишга рухсат берилади.

3) Доим катта диск устига кичик диск қўйилади. Ҳеч қачон кичик диск

устига катта диск қўйилмайди. Мисол учун 10-диск устига 9,8,7,…,1-дисклардан бирортасини қўйса бўлади, лекин 11,12,…,64-дисклардан бирортасини қўйиш мумкин эмас.

Энди математик ҳисоб-китобларга ўтайлик. Дейлик А,Б ва С устунлар берилган. Дисклар А устунга турибди ва юқоридаги қонун қоидалар асосида Б устунга кўчирмоқчимиз. Агар n та дискни кўчириш учун m та иш бажарсак, n+1 та дискни кўчириш учун аввал шу m та ишни бажариш керак ва n+1-дискни кўчириб яна m та иш бажариш керак. Яъни n та дискни кўчиришда m та иш бажарилса, n+1 та дискни кўчиришда 2m+1 та иш бажарилади. Бу масала учун ҳам жадвал тузсак

1-диск	2-диск	3-диск	4-диск	5-диск	6-диск	7-диск	8-диск
1 та иш	3 та иш	7 та иш	15 та иш	31 та иш	63 та иш	127 та иш	255 та иш

Бу жадвалдан кўринадики, n-дискни кўчириш учун $2^n - 1$ та иш бажариш керак экан. Ҳар бир ишни бажаришга бир сония вақт кетса, демак 64 та дискни кўчиришга $2^{64} - 1$ сония вақт кетар экан. Бу тахминан 584942417355 йил бўлар экан. Энди бу ривоятга ишониш ёки ишонмаслик ўзингизга ҳавола. Биз ўзимизга тегишли бўлган математикасини қилиб бердик холос.

3-масала (Шахмат масаласи).

Қадимда бир доно киши шахматни ихтиро қилибди ва буни кўрсатиш учун одил подшоҳни олдига олиб борибди. Подшоҳ одил ва мард экан. Табиийки, бу қизиқарли ўйин шоҳга маъқул бўлибди.

-Бу ўйин менга жуда ёқди. Жанг саҳнасига ўхшар экан. Тила тилагингни дебди шоҳ. Ихтирочи эса юзта туя ёки бир хуржун олтин сўраш ўрнига шахмат катакларининг биринчиси учун бир дона, иккинчи катак учун аввалгисидан икки баробар кўп, яъни икки дона, кейингиси учун тўрт дона буғдой беришини, шахмат тахтасини шу усулда тўлдиришини сўрабди. Маълумки, шахмат тахтасида 64 та катак бор. Бу “арзимаган” нарса сўраган ихтирочидан шоҳнинг жаҳли чиқибди ва бир қоп тўла буғдой бериб юборишни хазинабонга буюрибди. Ихтирочи эса бунга рози бўлмабди. Ихтирочининг бу майдаишлиги мард подшоҳга ёқмабди ва хазинабонни чақириб, айтганини ҳисоблаб бериб юборишни буюрибди. Хазинабон анчадан кейин келибди ва аҳвол оғирлигини 32 та катак тўлганини ва ярим хазина кетганини шоҳга билдирибди. Шоҳ мард эмасми? Биз ихтирочини тилагини бажара олмаслик катта бир подшоҳ учун уят эмасми? Ўйлаб кўрса яна 32 та катак ва яна ярим хазина бор.

–Беринглар, дебди шоҳ.

-Йўқ шоҳим, қолган ярим хазина 33-катакка кетади дебди хазинабон.

Азиз ўқувчи, ҳисоблаб кўрсак ҳақиқаттан ҳам шундайми? Катта бир мамлакатнинг подшоҳи ихтирочининг сўраганини бера олмас эдими?

1-катак учун 1 дона

2-катак учун 2 дона

3-катак учун 4 дона

4-катак учун 8 дона

…

11-катак учун 1024 дона

1024 дона буғдойни тахминан бир килограм деб олсак, демак 11-катак учун бир килограм

12-катак учун 2 килограмм

13-катак учун 4 килограмм

14-катак учун 8 килограмм

15-катак учун 16 килограмм

….

20-катак учун 512 килограмм

21-катак учун 1024 килограмм. Бу бир тоннадан озгина кўп бўлади

22-катак учун 2 тонна

23-катак учун 4 тонна

24-катак учун 8 тонна

25-катак учун 16 тонна

…

31-катак учун 1024 тонна. Шу ўринда 1024 тонна қанча бўлишини бир ўйлаб кўрсак. Бу дегани ҳар бир вагонига 25 тонна буғдой кеадиган 40 та вагонли поезд дегани.

32-катак учун 2 та поезд

33-катак учун 4 та поезд

…

40-катак учун 512 та поезд

41- катак учун 1024 та поезд. Қулайлик учун 1000 та дейлик.

42-катак учун 2 мингта

43-катак учун 4 мингта

44-катак учун 8 мингта

…

51-катак учун 1024 мингта. Бу тахминан бир миллионта поезд бўлар экан.

52-катак учун 2 миллионта

53-катак учун 4 миллионта

…

61-катак учун 1024 миллионта. Бу тахминан бир миллиардта поезд бўлади

62-катак учун 2 миллиард

63-катак учун 4 миллиард

64-катак учун эса 8 миллиардта 40 та вагонли, ҳар бир вагонида 25 тоннадан буғдой бўлган поезд бўлар экан.

Бу уччала масала ҳам биринчи ҳади бирга, махражи эса иккига тенг бўлган геометрик прогрессияга мисол бўлади. Агар прогрессиянинг махражи иккига эмас дейлик бешга тенг бўлсачи?

Шу ўринда шахмат билан боғлиқ яна бир тарихий масалани келтириб ўтамиз. “Қадимги халқлардан қолган ёдгорликлар” асарида Абу Райҳон

Беруний шахматнинг кашф этилиши ҳақида ривоят билан боғлиқ биринчи ҳади $b_1 = 1$ ва махражи $q = 2$ бўлган геометрик прогрессиянинг биринчи 64 та ҳадининг йиғиндисини ҳисоблайди; шахмат тахтасидаги k-катакка мос сондан 1 сони айрилса, айирма k-катакдан олдинги барча катакларга мос сонлар йиғиндисига тенг бўлишини исботлайди.

4-масала. Бир ахборотни эшитган бир киши бир соат ичида беш кишига тарқатсин, бу беш киши ҳам кейинг бир соатда беш кишига айтсин,….

1-соатда 5 киши

2-соатда 25 киши

3-соатда 125 киши

4-соатда 625 киши

5-соатда 3125 киши

6-соатда 15625 киши

7-соатда 78125 киши

8-соатда 390625 киши

9-соатда 1.953.125 киши бу тахминан 2 миллион бўлар экан

10-соатда 10 миллион киши

11-соатда 50 миллион киши

Демак, 50 миллион аҳолиси бўлган давлатга бу ахборот 11 соатга тарқалар экан. Ҳақиқатан ҳам жуда тез тарқалар экан. Биз фақат янги ахборот эшитган одамларни ҳисобладик.

Ҳаётда “мураккаб фоизлар”ни ҳисоблаш билан боғлиқ масалаларни ҳал қилишда ҳам геометрик прогрессиялар муҳим аҳамият касб этади. Бундай фоизларни ҳисоблашда фоиздан яна фоиз ҳисоблашга тўғри келади. Бугунги кунда, турли банклар ўз мижозларига турли хил шартлар асосида хизмат кўрсатади. Кўпинча уларнинг хизматидан фойдаланишдан олдин юқоридаги мавзу бўйича билимларга таянган ҳолда математик масалани ечиш зарурати пайдо бўлади. Қуйидаги масала шу ҳақда.

“Агробанк-online” фойдаланувчилари ўзларининг шахсий кабинетларига кириб, кредит картани расмийлаштириш таклифини кўриши мумкин. Бунга ўхшаш SMS-хабарларни катта ёшдаги кишилар деярли ҳар куни қабул қиладилар. Шундай таклифлардан бирини масала сифатида қараймиз ва уни ечамиз.

5-масала. Сизга лимити 190000 сўм бўлган кредит расмийлаштирилган. Унинг тежалган қисми ҳамиша берилади. Йиллик фоизи 23,9%”. Агар мижоз бундай таклифдан фойдаланса, у 3 йилдан кейин банкдан неча сўм қарздор бўлади?

Эслатиш жоизки, банклар ҳамиша мижозларига “мураккаб фоизлар” бўйича кредитларни таклиф қиладилар. Демак, қарз геометрик прогрессия қоидаси бўйича ўсиб боради. Биринчи ҳади 190000 га, махражи 1,239 га тенг геометрик прогрессияни ҳосил қиламиз. n-ҳадини ҳисоблаш формуласи ёрдамида учинчи йил охиригача кредит картадан фойдаланилган маблағни ҳисоблаймиз. Жавоб: 3 йилдан кейин кредит картасидаги маблағ 360 000 сўмдан зиёдни ташкил қилади.

Бу ва бунга ўхшаш масалаларни таҳлил қилишда қуйидаги амаллар бажарилади:

– Арифметик ёки геометрик прогрессиянинг кўриниши топилади:

– Берилган ва номаълум миқдорлар ажратилади;

– Мос прогрессия учун формула ёзилади;

– Масалага мос миқдорлар учун ҳисоблашлар бажарилади;

– Хулоса чиқарилади.

Бундай усул орқали иқтисодиётда учрайдиган кўплаб масалаларни ечиш мумкин. Масалан, баён қилинган усулни қуйидаги масалага қўллаш мумкин.

6-масала. Уч йилдан кейин банкга йилига 4% лик бўйича қўйилган омонат 880 000 сўмни ташкил қилди (“содда фоизлар”). Дастлабки тўлов қанча бўлган?

Энди микробиологияда учрайдиган прогрессиялар билан боғлиқ масалалардан намуна келтирамиз. Ер юзининг бактериялар учрамайдиган қисми бўлмаса керак. Улар Антрактида музликларида ва ҳарорати + 8500С бўлган иссиқлик манбаларида ҳам яшайди.

Бактерияларнинг яшаш шароитлари билан бир қаторда, инсон ҳаётида тутган ўрни ҳам турлича бўлади. Тоза ва тоза бўлмаган хоналардаги бактериялар сони турлича бўлади. Машғулот бошланишидан олдин шамоллатилган ўқув хонасидаги бактериялар сони машғулот тугагандан кейин 13 баробар бўлади. Аммо бактерияларнинг барча турлари битта ҳужайрани иккига бўлиш орқали кўпаяди, ўз навбатида уларнинг ҳар бири яна иккига бўлиниб 4 та бактерия бўлади, кейин 8 та бактерия бўлади ва ҳоказо. Агар битта бактерия кўп миқдордаги озиқ-овқат билан идеал шароитга жойлаштирилса, бир суткада ундан 281 474 976 710 656 та ҳужайра пайдо бўлади. Шундай қилиб, табиатда геометрик прогрессия учраб тураркан.

Тиббиётда ҳам прогрессиялар тадбиқ қилинадиган масалалар кўп учраб туради. Унга мисол келтирамиз. Гомеопатия – бу буюк немис шифокори ва олим Самуил Ганем (1755-1843) томонидан ишлаб чиқилган даволаш усулидир. Гомеопатия ўхшашлик принципига асосланган бўлиб, организмдаги маълум симптомларни катта дозаларда келтириб чиқаради, кичик дозаларда шунга ўхшаш аломатларни даволашга қодир бўлган модда.

7-масала. Бемор қуйидаги схема бўйича гомепатик дорини қабул қилмоқда: биринчи куни 5 томчи, кейинги кун олдингисидан 5 томчи кўп ичади. 40 томчи қабул қилгач, у 3 кун 40 томчидан дори ичади, кейин 5 томчидан камайтириб, 5 томчигача етказади. Агар ҳар бир флаконда 20 мл (унда 250 томчи) дори бор бўлса, бемор нечта флакон дори сотиб олиши керак?

Бу масалани ечишда арифметик прогрессияда дастлабки n та ҳади йиғиндисини ҳисоблаш формуласидан фойдаланиб,

$$2(5+10+15+\ldots+40)+40=400$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, беморга 400:250=1,6 флакон дори керак бўлади. Шу сабабли у дорихонадан 2 флакон дори сотиб олиши зарур.

Энди прогрессиянинг жисмоний ҳаракат билан боғлиқ масалаларда тутган ўрнига тўхталамиз.

8-масала. Тана ҳаракатнинг биринчи секундида 7 метр масофани, кейинги ҳар бир секундда аввалгисига қараганда 3 метр кўп ҳаракатланди. Саккизинчи секундда тана қанча масофани босиб ўтади?

Мазкур масала биринчи ҳади 7, айирмаси 3 бўлган арифметик прогрессиянинг дастлабки 8 та ҳади йиғиндисини топиш орқали ечилади. Унга кўра дастлабки 8 секундда 28 метр масофа босиб ўтилади.

Ҳатто адабиётда ҳам математик масалалар учраб туради. Унга мисол сифатида қуйидаги тушунчаларни келтириш мумкин.

Ямб – бу жуфт 2; 4; 6; 8: ... бўғинларга урғу берилган шеърий ўлчов. Урғу бўғинлари тартибланиш сони биринчи ҳади ва айирмаси 2 га тенг арифметик прогрессияни ташкил қилади.

Хория – бу тоқ 1; 3; 5; 7: ... бўғинларга урғу берилган шеърий ўлчов. Урғу бўғинлари тартибланиш сони биринчи ҳади 1 га ва айирмаси 2 га тенг арифметик прогрессияни ташкил қилади.

Мақолани қуйидаги иккита тарихий мақолани баён қилиш билан якунлаймиз.

9-масала. Беруний масаласи. Агар ҳадлари мусбат геометрик прогрессиянинг ҳадлари сони тоқ бўлса, у ҳолда $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$ ва ҳадлари сони жуфт бўлса $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ бўлишини исботланг.

10-масала. Ахмес папирусидан олинган масала (эрамиздан олдинги 2000-йиллар). 10 ўлчов ғаллани 10 киши орасида шундай тақсимлангки, бу кишиларнинг бири билан ундан кейингиси (ёки олдингиси) олган ғалла фарқи $\frac{1}{8}$ ўлчовга тенг бўлсин.

Хулоса қилиб айтганда, арифметик ва геометрик прогрессиялар инсон ҳаётининг турли соҳаларидан ҳақиқий масалаларни ҳал қилишда кучли восита экан.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Sh.A.Alimov, O.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedov. Algebra. Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik. "O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi, Toshkent-2014.
2. Ж.Ҳ.Ҳусанов. Математика (прогрессия ва лимитлар). Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма. "Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 2002.
3. А.А.Абдуҳамедов, Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва анализ асослари. I-қисм. "Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 2001.
4. Ёш математик қомусий луғати. Ўрта ва катта ёшдаги мактаб ўқувчилари учун (Махсус муҳаррир: А.Аъзамов). Қомуслар Бош таҳририяти. Тошкент, 1991 й., 480 б.

ТАКРОРИЙ КОМБИНАЦИЯЛАРГА ОИД МАСАЛАЛАР ЕЧИШ МЕТОДИКАСИ

Ҳилола ЭЛМУРАДОВА

БухДУ Дифференциал тенгламалар кафедраси ўқитувчиси

Нигора ШАРИПОВА

БухДУ Математика таълим йўналиши 2-босқич талабаси

Бизга маълумки, умумий ўрта таълим мактаб дарсликларига математика фанининг комбинаторика элементлари ва эҳтимоллар назарияси бўлимларининг бошланғич тушунчалари мавжуд. Ҳозирда мактаб ўқувчилари такрорий комбинатсиялардан фойдаланиб масалалар ечишда қийинчиликка учрашишади. Биз ушбу ишда такрорли ўринлаштиришлар, такрорли ўрин алмаштиришлар, такрорий комбинатсиялар формулаларини бир-биридан фарқларини ҳамда масалалар ечишда қўллаш усулларини кўрсатамиз.

Комбинаторика – бу дискрет математиканинг дискрет тўплам элементларини берилган қоидалар асосида танлаш ва жойлаштириш билан боғлиқ бўлган масалаларни ечиш усулларини ўрганувчи бўлимидир.

Такрорли ўринлаштиришлар

Бизга қандайдир X=(1,2,3) тўплам элементларидан компоненталари такрорланадиган жуфтликларни топиш талаб қилинсин. Бу жуфтликлар 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 жами 9 та бўлар экан. Агар тўплам элементлари кўп бўлса, у ҳолда иш анча мураккаблашади шунинг учун формула топиш талаб қилинади.

Еслатма (Кўпайтмани топиш қоидаси):

Теорема: А ва В чекли тўпламлар элементларидан тузилган жуфтликлар сони шу тўпламлар элементлари сонларининг кўпайтмасига тенг:

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B) \tag{1}$$

Умуман олганда m та элементли X тўплам элементларидан тузилган такрорланадиган к та компонентали к таликлар сони k та бир хил тўплам $X\times X\times...\times X$ тўплам элементларининг сонига тенг(теоремага кўра), бу сон k та $n(X)$ кўпайтувчи кўпайтмасидан иборат:

$$n(X)\cdot n(X)\cdot...\cdot n(X)=(n(X))^k=m^k$$

Таъриф: m та элементли X тўплам элементларидан тузилган ва компоненталари такрорланадиган k таликлар m элементдан k тадан олиб тузилган **такрорли ўринлаштиришлар** дейилади ва уни биз $\bar{A}_m^k$ орқали белгилаймиз.

Демак,

$$\bar{A}_m^k=m^k \tag{2}$$

1-масала: Банкнинг сифрли коди олти хонали сондан иборат. Кодлаштирганда нечта турли комбинатсия тузиш мумкин.

Ечиш. Демак, бизга маълумки математикада 10 та рақам бор (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Шу рақамлар ёрдамида мумкин бўлган барча 6 хонали сонларни топиш талаб қилинади. Албатта рақамлар такрорланиши мумкин.

Кодлаштирилганда ҳамма сонлар ҳам 0 бўлиши (000000) ёки 1 бўлиши (111111), ёки …. бўлиши мумкин. Масала шартига кўра

$m=10$, $k=6$, формулага асосан $\bar{A}_m^k=m^k=\bar{A}_{10}^6=10^6=1000000$

2-масала:1,3,5,9 рақамлардан нечта 3 хонали сон тузиш мумкин.

Ечиш. Бу масалани икки хил усул билан ишлаб кўрсатамиз.

1-усул. Кўпайтириш қоидаси ёрдамида яни дейлик  3 та хона бор, биринчи хонага 4 та рақамдан хоҳлаган бирини қўйишимиз мумкин, иккинчи хонага яна 4 та рақамдам бирини қўйишимиз мумкин, учунчи хонага яна 4 та рақамдам бирини қўйишимиз мумкин, демак 4*4*4=64

2-усул. Такрорли ўринлаштиришлар формуласига асосан $\bar{A}_4^3 = 4^3 = 64$ га тенг бўлади.

3-масала: Биринчи ўринда 3 рақами, иккинчи, учинчи, тўртинчи ва бешинчи ўринларда 0, 1, 2, . . . , 9 рақамларидан исталган бири турадиган нечта телефон рақами бор?

Ечиш. Демак, беш хонали соннинг биринчи рақами 3 билан бошланиши керак, қолганлари 0, 1, 2, . . . , 9 рақамлардан бири бўлиши мумкин экан. Формулага асосан $m = 1,\ k = 4,\ \ \bar{A}_m^k = m^k = \bar{A}_{10}^4 = 10^4\ = 10000$ та 3 рақам билан бошланган телефон рақами бор экан.

Такрорли ўрин алмаштиришлар.

Анаграмма – бу берилган сўзнинг ҳарфларини алмаштириб ҳосил қилинган сўз (маънога эга бўлиши шарт эмас).

4-масала. Китоб сўзида жами нечта анаграмма бор? Қалам сўзидачи? Математика сўзидачи?

Ечиш. Китоб сўзида 5 та хар-хил ҳарф бор, шу сабабли ўринлаштириш формуласига асосан $P_n = n! = 5!$ га тенг бўлади. Ёки кўпайтириш қоидасига кўра қуйидагича баён қилиш мумкин, дейлик бешта катак бор, шу катакларга (хар-бир катакка 1 та харф жойлашади) 5 та харфларни жойлаштириб чиқиш керак демак, биринчи катакка 5 та харфдан бирини олиш мумкин, иккинчи катакка қолган 4 та харфдан бирини олиш мумкин, учинчи катакка қолган 3 та харфдан бирини олиш мумкин, тўртинчи катакка қолган 2 та харфдан бирини олиш мумкин ва бешинчи катакка қолган 1 та харф олинади, натижада 5*4*3*2*1=5!. Қалам сўзида эса 2 та *а* ҳарфи бор бу деган агар *а* лар ўрни алмашса маъно ўзгармайди. Шунинг учун комбинатсиялар сони 2! марта ортади, шу сабабли 5! ни 2! га бўлиш керак. $P_5 = \frac{5!}{2!}$. Математика сўзида 3 та *а* ҳарфи 2 та *м* ҳарфи 2 та *т* ҳарфи бор. Бу ҳарфларни ўрнини алмаштирган билан сўзнинг ўқилиши бир хил бўлиб қолаверади, жами 10! та анаграмма мавжуд аммо шу 10! Ичида бир-хил ҳарфлар ўринлари алмашганлари ҳам бор. Шу сабабли комбинатсиялар сони 3!*2!*2! Марта ортган, шунинг учун 10! ни 3!*2!*2! га бўлиб қўйиш керак $P_{10} = \frac{10!}{3!2!2!}$ га тенг бўлади.

Таъриф: Такрорли ўрин алмаштиришлар деб, таркибида a_1 ҳарфи k_1 марта,…, a_m ҳарфи k_m марта қатнашувчи $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ узунликдаги ҳар қандай k таликка айтилади. Такрорий ўрин алмаштиришлар сони $P(k_1, \dots, k_m)$ орқали белгиланади.

5-масала: n турли шар ва k та турли яшик бор. Шарларни биринчи яшикка n_1 та, иккинчи яшикка n_2, учинчи яшикка n_3 та, . . . , k- яшикка n_k тадан қилиб неча хил усулда жойлаштириш мумкин $(n_1 + n_2 + n_3 + \ . \ . \ . \ + n_k = n)$?

Демак,

$$P(n_1,\, n_2,\, .\,.\,.\,,\, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\,.\,.\,.\,n_k!} = \frac{(n_1+n_2+n_3+\,.\,.\,.\,+n_k)!}{n_1!n_2!\,.\,.\,.\,n_k!} \quad (3)$$

6-масала: Ўқишни билмайдиган бола алифбенинг кесилган “А”, “А”, “А”, “Н”, “Н”, “С” ҳарфларини ихтиёрий равишда териб чиқди. Бунда нечта турли сўз ҳосил бўлади?

Ечиш. *А* ҳарфи 3 та, *Н* ҳарфи 2 та, *С* ҳарфи 1 та демак, формулага асосан

$$P(3,\ 2{,}1) = \frac{6!}{3!\,2!\ 1!} = 60$$

Такрорли комбинатсиялар

7-масала. Бешта бир хил шарни учта турли яшикка неча хил усулда жойлаштириш мумкин? Яшикдаги шарлар сони учун ҳеч қандай шарт йўқ.

Ечиш. Учта яшик оламиз ва яшикларни орасига(бўшлиқларга) 1 сонини ёзамиз. Шарларни 0 билаб белгилаймиз. Яни 5 та 0 ва 2 та 1 бор, мисол учун 0000011 degани 1-яшикда 5 та шар бор, иккинчи яшикда шар йўқ, учинчи яшикда ҳам шар йўқ degани, яна 1001000 ёзувда биз биринчи яшикда шар йўлигини, иккинчи яшикда 2 та шар борлигини, учунчу яшикда эса 3 та шар борлигини тушунамиз. Демак, 5 та 0 ва 2 та 1 сонлари ёрдамида мумкин бўлган такрорий комбинатсиялар сонини топпиш масаласига келади. Бундай комбинатсиялар сони $\frac{7!}{5!2!}$ га тенг.

$\square$ 1 $\square$ 1 $\square$

8-масала. $x+y+z=5$ тенглама нечта манфиймас бутун ечимга эга? Ечиш. Бу масалани ечишда қуйидагича йўл тутамиз. Бешта 1 оламиз яни 1,1,1,1,1 бу бирларби 3 та қутига жойлаштирамиз (ихтиёрий равишда).Айтайли биринчи қутига 3 та 1ни жойлаштирамиз, иккинчи қутига 2 та 1ни жойлаштирамиз, учинчи қутига 1 қолмайди яни қути бўш, ёки ҳамма бирни биринчи қутига жойлаштирамиз қолганлари бўш бўлиб қолади. Юқоридаги масала сингани қутилар оралиғига 1 қўйиб чиқамиз. Натижада жами 7 та сон ҳосил бўлади, бу сонларни ёрдамида жами $\frac{7!}{5!2!}$ та сон топилади.

Таъриф: m хил элементдан k тадан олиб, шундай k таликлар тузиш мумкин бўлсинки, улар ҳеч бўлмаганда бир элементи билан фарқ қилсин, бир хил элементлардан тузилганлари тенг деб ҳисоблансин(елементларнинг тартиби аҳамиятсиздир). Бундай k таликларга m элементдан k тадан олиб тузилган такрорли комбинатсиялар дейилади. Уларнинг сони $\bar{C}_m^k$ орқали белгиланади.

$$\bar{C}_m^k = \bar{C}_{k=m-1}^k = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1!)} \qquad (4)$$

га тенг.

10-масала. Дўконда апелсин, анор, шафтоли ва олма шарбати сотилмоқда. Етти дона мева шарбати сотиб олиш керак. Буни неча хил усулда амалга ошириш мумкин?

Ечиш. Юқоридаги формуладан

$$\bar{C}_7^4 = \frac{(7+4-1)!}{7!\,3!}$$

Фойдаланилган адабиётлар

1. А.У.Абдуҳамидов, Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва

математик анализ асослари ИИ-қисм. Т., “Ўқитувчи” 2002 й.
2. Расулов А.С., Раимова Г.М., Саримсакова Х.Қ. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т. 2005 й.
3. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков . Сборник задач по теории вероятностей М.: Наука, 1999

УМУМИЙ ЎРТА ТАЪЛИМ МАКТАБЛАРИДА ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ МАВЗУСИНИ КОМПЬЮТЕРЛИ ТАЪЛИМ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ ЁРДАМИДА ЎҚИТИШНИНГ АФЗАЛЛИКЛАРИ

Шаходат ШАДМАНОВА

Бухоро шаҳар 30 – умумий ўрта таълим мактабининг математика фани ўқитувчиси

Таълим соҳасида замонавий ахборот ва компьютер технологиялар, интернет тизими, рақамли ва кенг форматли телекоммуникацияларнинг замонавий усулларини ўзлаштириш, бугунги тараққиёт даражасини белгилаб берадиган бундай илғор ютуқлар нафақат мактаб, лицей ва коллежлар, олий ўқув юртларига, балки ҳар қайси оила, ҳаётига кенг кириб бориши учун замин туғдиришнинг аҳамиятини чуқур англаб олишимиз лозим.

Ўқитишдаги информацион ва телекоммуникацион технологиялар-бу ўқувчиларга компьютерлар ва телекоммуникация воситалари ёрдамида ахборот узатиш усул ва методларининг мажмуи, билимларни ўзлаштиришни текшириш, реал ҳаётда олинган билимларни қайта ишлаш ва улардан фойдаланиш.

Автоматлаштирилган ўқитиш тизими векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзусини мустақил ўзлаштиришга имкон яратади. Бу тизим ўзида оддий дарслик, масалалар тўплами, маълумотнома ва ўзлаштирилган ахборотни текширувчи эксперт хусусиятларини мужассамлантирган:

- материални ўрганишнинг мақбул йўлини таъминлайди, яъни ўқувчига назарияни ўзлаштириш ва мисоллар ҳамда намунавий масалаларни ечиш кўникмаларини ишлаб чиқиш навбат тартибини мустақил ташкил этишига, шунингдек олган билим ва кўникмалари сифатини ўзи текширишига имкон беради;

-таҳлил ва тадқиқотчилик фаолияти кўникмаларини сингдиради;

-ўқувчининг вақтини тежашга имкон беради.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзуси билан иш кўришга, улар ўртасидаги муносабатни ва берилган шаклларинng графикларини чизиш ҳамда муносабатлар устида олиб бориладиган ишларни бажаришга, шунингдек графикларни ва уларнинг хоссаларини яққол тасвирлашга имкон беради.

Текширувчи дастур векторларнинг скаляр кўпайтмаси бўйича олинган билимлар сифатини текшириш ва баҳолаш учун мўлжалланган. Улар ўқувчига: жавобни умум қабул қилинган шаклга максимал яқинлаштирилган ҳолда киритиш; текшириш натижаларини сақлаш, йиғиш, распечатка олиш (қоғозга кўчириш) ва статистик таҳлил қилиш; жавобнинг шакли ва синтактик (гапнинг тузилиш) саводлилигидан қатъий назар, адекват баҳо олиш имконини бериши лозим. Видеокомпьютерли ўқитиш технологияси – ўқувчиларнинг берилган мавзу бўйича фаол билиш, билим орттириш жараёнларини рағбатлантирувчи технологиядир. Бу технология векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзуси бўйича ахборотларнинг вербал ва тасаввурли шаклларини биргаликда намоён этиш, ўқитиш жараёнини мақсадларга мослаштириш имконини беради. Ўқувчилар компьютер билан индивидуал ўқитилганда дарсларда коммуникатив фаолият кўрсата олмайди, бундан ташқари, муаммоли ўқитиш заминидаги эвристик аспект йўққа чиқади.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзусини компьютерли ўқитишнинг афзалликлари жуда кўп: ўқувчиларда маълум малакаларни шакллантириш вақти қисқаради; машқ қилинадиган топшириқлар сони ошади; ўқувчиларнинг ишлаш суръати жадаллашади; компьютер томонидан фаол бошқаришни талаб қилиниши натижасида ўқувчи таълим субъектига айланади; ўқувчилар кузатиши, мушоҳада қилиши қийин бўлган жараёнларни моделлаштириш ва бевосита намойиш қилиш имконияти ҳосил бўлади; коммуникация воситаларидан фойдаланган ҳолда дарсни узоқдаги манбалар билан таъминлаш имконияти ҳосил бўлади; векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзуси компьютер билан мулоқот дидактик ўйин характерини олади ва бу билан ўқувчиларда ўқув фаолиятига мотивация кучаяди.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзуси бўйича компьютерли таълим технологияларини қўллаш ўқитишга дифференциал ва индивидуал ёндашиш принципларини амалга оширишга олиб келади. Ўқитувчи ҳар бир ўқувчига дарс жараёнида мавзуга оид ўқув материаллари билан мустақил ишлаш имкониятини яратиб беради. Ўқувчилар берилган график асосида янги материал билан тўлиқ танишиб чиқиш имконига эга бўладилар. Компьютер технологияларини ўқув жараёнига қўллаш эса, мустақил таълимнинг сифатини ошириш, ўқув жараёнига ижодий ёндашиш, янги билимлар олиш малакасини ҳосил қилишга ёрдамлашади .

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзуси бўйича компьютерларни ўқув жараёнида қўллаш қуйидагиларга имкон беради:

-ўқувчиларда билиш эҳтиёжини шакллантиради;

-ўқувчиларнинг билиш фаолиятини фаоллаштиради;

-ўқувчиларда фанни ўрганишга қизиқишини оширади;

-компьютер билан ишлашни ўрганишга бўлган иштиёжни оширади;

-компьютерлардан фойдаланиш билан боғлиқ мавзу бўйича илмий билишнинг ҳозирги замон методлари билан таништиради;

-таълимда ўқувчининг индивидуаллик даражасини оширади;

-ўқувчининг ижодкорлик қобилиятини ривожлантиради;

-ўқувчиларнинг ўз-ўзини назорат қилиши, яъни баҳолаш жараёнининг омилларини кенгайтиради ва ҳ.к.

Масалан, векторнинг скаляр кўпайтмаси мавзусини ўзлаштириш учун талаб этиладиган алгоритмик қадамлар асосий тушунчалар кетма-кетлиги кўринишида қуйидагича бўлади:

1. Векторлар устида чизиқли амаллар.

2. Чизиқли эркли векторлар.

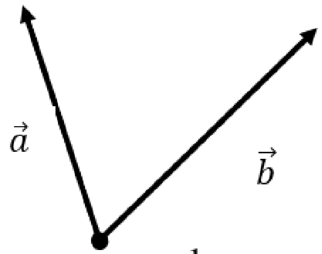
3. Чизиқли боғланишли вектор.

4. Векторнинг модули.

5. Векторнинг скаляр кўпайтмаси.

Масалан қуйидаги масалаларни компьютер дастури ёрдамида ечиш ва графикларини чизиш анча қулайликликларга олиб келади.

1-мисол. $\vec{a}(3;6)$ ва $\vec{b}(5;-2)$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.



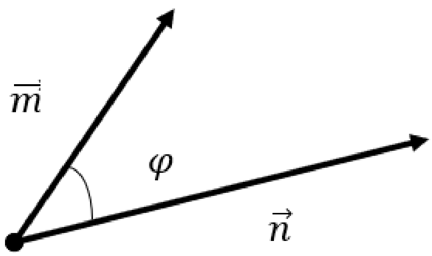
1-чизма

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенглигидан,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = xx' + yy' = 3\cdot 5 + 6\cdot(-2) = 3$$

Келиб чиқади. Демак, берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси 3 га тенглиги келиб чиқади.

2-мисол. Координаталари билан берилган қуйидаги $\vec{m}(4;3)$ ва $\vec{n}(1;7)$ векторлар орасидаги φ бурчакни топинг.



2-чизма

$\vec{m}$ va $\vec{n}$ векторларнинг орасидаги φ бурчакни топиш формуласидан,

$$cos\varphi = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{4\cdot 1 + 3\cdot 7}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1+49}} =$$

$$= \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ келиб чиқади, ҳамда $\vec{m}$ ва $\vec{n}$ векторларнинг орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ни ташкил қилади.

Хулоса ўрнида шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, бугунги тезкор даврда ёшларда мустақил фикрлаш қобилиятини ошириш, уларни ўз устида кўпроқ ишлашга жалб этиш, таълим бериш жараёнларида компьютерли таълим технология фойдаланиш жуда муҳимдир.

Фойдаланилган адабиётлар

1. С.Алиханов. Математика ўқитиш методикаси. Тошкент, 2011.

2. Ғ.Ғ.Қурбонов. Аналитик геометрия фанини ўқитишда компьютерли таълим технологияларидан фойдаланиш. “Современная психология и педагогик: проблемы, анализ и результаты” Фергана. 20 июля 2020 г. 240-244 ст.

МУНДАРИЖА

1	Т.Расулов, Б.Мамуров. Математика соҳасида мактаб-олий ўқув юрти ҳамкорлигини ривожлантириш истиқболлари	3
2	А.Авезов, М.Намозова, А.Амриллоева. Аниқ интегралнинг иқтисоддаги тадбиқлари	13
3	О.Ахмедов. “Мулоҳазалар алгебраси формулаларнинг асосий хоссалари” мавзусини ўқитишда муаммоли таълим технологияси	19
4	Б.Баҳронов. Функция экстремумларини аниқлашнинг баъзи усуллари	25
5	Д.Бешимова, М.Ражабова. Мактаб ўқувчиларига фазода перпендикуляр тўғри чизиқ ва текисликларни ўқитишдаги тушунчалар	31
6	М.Бобоева, Т.Расулов. Мусбат сонлар учун ўрта қийматлар ва улар орасидаги муносабатлар	34
7	М.Бобоева. Математик тушунчаларни киритишнинг абстракт-дедуктив методи	42
8	Ш.Дўстова. Ехсел дастурининг амалий масалалар ечишда тадбиқи	46
9	Ҳ.Латипов. Математика фани ривожига салмоқли ҳисса қўшган айрим машҳур математик олимлар ҳақида	53
10	Б.Мамуров, К.Амриллоева. Тасодифий ҳодиса тушунчасининг шаклланиши	60
11	Ф.Марданова. Математика дарсларида буюк аждодларимиз илмий меъросидан фойдаланиш	62
12	Н.Расулов, Ш.Ҳамидов. Айрим ноанъавий масалаларнинг ечимлари	66
13	Х.Расулов, У.Аслонов. О некоторых методах решений тригонометрических уравнений в средней школе	73
14	А.Рашидов. Ёшлар интеллектуал камолотида ижодий тафаккур ва креативликнинг ўрни	84
15	Г.Сайлиева. 10-синф “Математика” дарслигида келтирилган “тўпламлар ва мантиқ” боби мавзуларини мустаҳкамлашда фойдаланиш мумкин бўлган замонавий педагогик методлар	88
16	Н.Тошева, Т.Файзиев. Тригонометрик тенгсизликларни ечишда алгоритмик методни қўллаш	93
17	Н.Тошева, Д.Дониёрова. Тригонометрик тенгсизликларни ечишда бирлик айланадан фойдаланиш	97
18	У.Умарова. “Мулоҳазалар алгебраси тенг кучли формулалари” мавзусини ўқитишда муаммоли таълим технологиялари	103
19	У.Умарова, Т.Расулов. Мактаб математикасида графлар назарияси	110

	элементларидан фойдаланишга доир баъзи тавсиялар	
20	Ҳ.Ҳайитова. Ўрта мактабда математика фанини ўқитишда умумлаштириш методининг афзалликлари	120
21	З.Ҳамдамов,Т.Расулов. Прогрессиялар учрайдиган баъзи ҳаётий масалалар	125
22	Ҳ.Элмурадова, Н.Шарипова. Такрорий комбинацияга оид масалалар ечиш методикаси	136
23	Ш.Шадманова. Умумий ўрта таълим мактабларида векторларнинг скаляр кўпайтмаси мавзусини компьютерли таълим технологиялари ёрдамида ўқитишнинг афзалликлари	141