FUNKSIONAL TENGLAMALARNI YECHISHGA DOIR BA'ZI MUHIM TAVSIYALAR

Shuhrat Isroilovich Jo'rayev
Buxoro davlat universiteti Matematik analiz kafedrasi

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada funksional tenglamalar haqida ma'lumotlar, funksional tenglamalarni yechish usullari bayon qilingan. Keltirilgan usullar yordamida yechilgan tenglamalardan namunaviy misollar yechimi bilan berilgan.

Kalit so`zlar: funksiya, funksiyanal tenglama, additivlik tenglama, koeffisent, differensiallanuvchi, funksiya uzluksizligi.

SOME IMPORTANT RECOMMENDATIONS FOR SOLVING FUNCTIONAL EQUATIONS

Shukhrat Isroilovich Juraev
Bukhara State University, Department of Mathematical Analysis

ABSTRACT

This article describes information about functional equations and how to solve functional equations. Sample examples of equations solved using the given methods are presented with the solution.

Keywords: function, functional equation, additivity equation, coefficient, differentiable, function continuity.

KIRISH

Zamonaviy axborot va telekommunikatsion texnologiyalarining, qolaversa, jamiyat va iqtisodiyotning har qanday yangiligi, zamonaviy texnologiyalari va ishlab chiqarish tarmoqlari murakkab matematik hisoblashlarsiz amalga oshirilmaydi. Bunday hisoblashlarni yengillashtirish maqsadida ko'plab olimlarimiz buning ustida ishlab kelmoqdalar. Buning istobi sifatida *funksioanal tenglamalarni* yechish ushbu ishda maqsad qilib olindi.

Funksiyalardan tashkil topgan to`plamga funksional to`plam deyiladi.

FUNKSIONAL TENGLAMALAR.

Ta'rif 1. *Nomalum funksiyaga nisbatan qaralayotgan tenglama funksioanal tenglama deyiladi.*

Ta'rif 2. *Agar funksional to`plamda berilgan tenglama noma'lum funksiyadan iborat bo`lsa, bu tenglamaga funksional tenglama deyiladi.*
Quyidagi tenglamalar funksional tenglamalarga eng sodda misollar bo`la oladi:

$f(x)=f(-x)-$ juftlik tenglamasi; $f(x+T)=f(x)-$ davriylik tenglamasi;

$f(x+y)=f(x)+f(y)-$ additivlik tenglamasi va boshqalar.

Agar biror $f(\cdot)$ funksiya o`z aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida funksional tenglamani qanoatlantirsa, u holda $f(\cdot)$ funksiya berilgan funksional tenglamaning yechimi deyiladi.
Funksional tenglamani yechish– avvalo bu tenglama yechimga ega yoki ega emasligini aniqlash, agar ega bo`lsa uni topish demakdir.

Funksinal tenglamalarni yechishning aniq metodlari bo'lmasada ayrim tiplari bor.

O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH.

Bu funksional tenglamalarni yechishning eng umumiy yo'llaridan biri. Bu usulni qo'llaganda bir o'zgaruvchini boshqasi bilan almashtiramiz, yangi funksional tenglama hosil bo'ladi. Ba'zan bu noma'lum funksiyani topishni osonlashtiradi.

Masala-1. Agar $f(x+7)=x^2-5x+2$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. $t=x+7$ belgilash kiritamiz, u holda $x=t-7$. Buni berilgan tenglamaga qo'ysak,

$$f(t)=(t-7)^2+5(t-7)+2=t^2-9t+16.$$

Shunday qilib, $f(x)=x^2-9x+16$.

Masala-2. Agar $f(lnx)=x^2+x+1$, $x>0$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. $t=lnx$ belgilash kiritsak, $x=e^t$ bo'ladi. Berilgan tenglamaga o'rniga qo'ysak,

$f(t)=(e^t)^2+e^t+1$. Bundan $f(x)=e^{2x}+e^x+1$.

Umuman olganda, $f(g(x))=h(x)$ va $g(x)$ teskari funksiyaga ega bo'lsa, u holda x ni $g^{-1}(x)$ bilan almashtirib $f(x)=h(g^{-1}(x))$ ga ega bo'lamiz.

TENGLAMANI YECHISH.

Tenglamalarni o'zgaruvchilarni almashtirib yechishdan so'ng, ba'zan bir vaqtda yechiladigan tenglamalarga kelamiz. Bu tenglamalarni yechib biz noma'lum funksiyani topamiz. Noma'lum funksiyani o'zgaruvchi deb olib odatdagi tenglamalarda, ularni yechamiz.

Masala-3. Agar $\frac{f(x)}{3+f(x)}=\frac{4+x^2}{x^2}$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. Bu $x^2f(x)=(4+x^2)(f(x))$ ga ekvivalent. Uni soddalashtirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$x^2f(x)=3(4+x^2)+(4+x^2)f(x),\ \ -4f(x)=3(4+x^2)$

ISSN: 2181-1601

$$f(x) = -\frac{3(4+x^2)}{4}.$$

ANIQLANMAGAN KOEFFITSIYENTLAR USULI.

Noma'lum funksiya bir nechta shartlarni qanoatlantirishini bilsak, bu kvadrat yoki kubik funksiya deymiz, darhol o'zgaruvchilarni aniqlay olamiz (ya'ni $f(x)$ kvadrat ko'phad bo'lsa, $f(x) = ax^2 + bx + c$ bo'ladi) va o'shalarga nisbatan yechamiz.

Masala-4. Agar $f(x)$ funksiya $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$ shartni qanoatlantiruvchi kvadrat funksiya va $f(0) = 5$ bo'lsa, $f(x)$ ni toping.

Yechish. $f(x) = ax^2 + bx + c$ ekanligini hisobga olsak, u holda

$a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 8x + 3.$

Soddalashtirsak, $2ax + a + b = 8x + 3$.

Bu tenglamani yechib, $a + 4$ va $b = -1$ ga ega bo'lamiz.

$x = 0$ ni qo'yib, $c = 5$ ni topamiz. Shuning uchun $f(x) = 4x^2 - x + 5$ bo'ladi.

KOSHI TENGLAMALARI.

Bundan tashqari funksioanal tenglamalarga: Koshi tenglamalari $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$, $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$, $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ Iyensen funksioanal tenglamasi $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, Dalamber funksioanal tenglamasini $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ hamda boshqa funksioanal tenglamalarni misol qilib keltirish mumkin.

Koshi funksional tenglamasini qaraylik: $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$ odatda bunday tenglama logarifmik funksiyani ifodalaydi.

$$f(x\cdot y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

(1) tenglamaning yechimlari xususiyatlarini o'rganamiz.

Agar $x = 0$ nuqta D_f sohaga tegishli bo'lsa, f funksiya (1) tenglama trival yechimini aniqlaydi, barcha $y \in D_f$ da funksiya $f(y) = 0$ bo'ladi. (1) tenglamaning trival bo'lmagan yechimlarini ko'rib chiqamiz, ya'ni $0 \notin D_f$ bo'lsin.

Masala-5. Barcha $x > 0$ lar uchun (1) tenglamaning yechimi $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar:

a) $f(x)$ funksiya $x = 1$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x > 0$ da ham uzluksiz bo'lishini isbotlang,

b) $f(x)$ funksiya $x = 1$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x > 0$ nuqtada ham differensiallanuvchi bo'lishini isbotlang.

Yechish. $x-$ ixtiyoriy musbat son berilgan bo'lib, $h \neq 0,\ x+h>0$ bo'lsin.
a) funksiyaning x nuqtadagi ortirmasini $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$ bo'lsin. $h \to 0$ da $\Delta f(x) \to 0$ bo'ladi. Bundan $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ funksional tenglamadan

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=f(\frac{x+h}{x})=f(1+\frac{h}{x}).$$

Koshi funksional tenglamasi (1) dan ko'rinadiki, $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ yoki $f(1)=0$ ga ega bo'lamiz. $h\to 0$ da $\Delta f(x)\to 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Bu esa $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksizligini ko'rsatadi.

$f(x+h)-f(x)=f(\frac{x+h}{x})=f(1+\frac{h}{x})$ va $f(x)$ funksiyaning $x=1$ nuqtada uzluksizligidan,

$$\lim_{h\to 0}\Delta f(x)=\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]=\lim_{h\to 0}f(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}f(1+\frac{h}{x})=f(1)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya $x>0$ da ham uzluksiz ekan.
b) $f(x)$ funksiya $x>0$ da differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(\frac{x+h}{x})}{h}=\frac{1}{x}\cdot\frac{f(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}. \qquad (2)$$

$f(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishidan , (2) munosabatdan

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

agar $\frac{h}{x}=t$ deb belgilash olsak, $h\to 0$ bo'lishidan $t\to 0$ bo'ladi.

$$\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=\frac{1}{x}f'(1)$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiya $x>0$ nuqtada differensiallanuvchi hamda uning hosilasi: $f'(x)=\frac{1}{x}f'(1)=\frac{c}{x},\quad c=f'(1)$ ga teng. Bundan ko'rinadiki har qanday n natural sonda, $x>0$ da $f(x)$ funksiya differensialllanuvchi. $f(x)$ funksiya n-tartibli hosila

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x}f^{'}(1),\quad 0!=1$$

formula bilan aniqlanadi.

Masala-6. $f(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz va (1) tenglamaning $(0,+\infty)$ dagi yechimi bo'lsin. $\forall x>0$ va ixtiyoriy $\alpha\in\square$ da

$$f(x^{\alpha})=\alpha\cdot f(x) \tag{3}$$

tenglik o'rinli bo'lishini isbotlang.

Yechish. a) (3) tenglikni $\alpha=n\in\square$ $\square$ uchun Koshi funksional tenglamasi (1) dan oson keltirib chiqarish mumkin. Koshi funksional tenglamasini n ta hol uchun yozib olamiz.

$$f(x_1\cdot x_2\cdot\ldots \quad \ldots \tag{4}$$

(4) formulani (1) inobatga olgan holda, matematik induksiya yo'li bilan isbotlash mumkin. (4) formulada $x_1=x_2=\ldots$ $x>0$ ekanligidan, $f(x^n)=n\cdot f(x)$ ga ega bo'lamiz. Bundan (3) ning isboti kelib chiqadi.

b) (1) va $f(1)=0$ dan foydalanib, $f(x^0)=f(1)=0\cdot f(x)$ bu esa $f(x^0)=0\cdot f(x)$ keltirib chiqadi. Endi $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ dan foydalanib, $f(x^{-1})=f(\frac{1}{x})=-f(x)=(-1)\cdot f(x)$ tenglikni olamiz. Umumiy holda

$$f(x^{-n})=f\left((x^{-1})^n\right)=nf[(x^{-1})]=-n\cdot f(x).$$

Demak, ixtiyoriy butun α uchun (3) o'rinli bo'ladi.

c) $\alpha=\frac{1}{n}$, $n\in N$ berilgan bo'lsin. U holda $f(x)=f(x^{\frac{1}{n}\cdot n})=f[(x^{\frac{1}{n}})^n]=n\cdot f(x^{\frac{1}{n}})$.

Bundan $f(x^{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}f(x)$.

d) $\alpha=\frac{m}{n}\in Q$, $m\in Z, n\in N$ bo'lsin. Bunda c) holdagiga teskarisini qaraymiz:

$$\frac{m}{n}\cdot f(x)=m\cdot\frac{1}{n}\cdot f(x)=m\cdot f(x^{\frac{1}{n}})=f[(x^{\frac{1}{n}})^m]=f(x^{\frac{m}{n}}).$$

e) Agar $\alpha=\mu\in J$, $\mu-$irratsional son, u holda ratsional son r_n ning ketma-ketligi mavjud, bunda $r_n\to\mu$. $f(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz. 1-masala shatiga ko'ra u $x>0$ oraliqda uzluksiz. Bundan ko'rsatkichli funksiyaning uzluksizligi va $f(x)$ funksiyaning $x>0$ oraliqda uzluksizligidan:

$$\lim_{r_n\to\mu}f(x^{r_n})=f(x^{\mu}), \tag{5}$$

boshqa tomondan

$$\lim_{r_n\to\mu} f(x^{r_n}) = \lim_{r_n\to\mu} r_n \cdot f(x^{r_n}) = \mu \cdot f(x^{\mu}), \tag{6}$$

(5) va (6) tengliklardan $f(x^{\mu}) = \mu f(x)$ tenglik kelib chiqadi. Demak, (3) tenglik uchun o'rinli ekan.

XULOSA

O‘quvchilar maqolada keltirilgan funksional tenglamalar haqidagi fikr-mulohazalar, hamda ularni yechish usullardan foydalanib shu mavzuga oid masalalarni yechish bilim va ko‘nikmaga ega bo‘ladilar. O‘quv mashg‘uloti davomida o‘quvchilarning qiziqishlarini orttirish maqsadida turli zamonaviy pedagogik texnologiyalardan foydalanish tavsiya etiladi [1-24]. Bundan tashqari maqolada keltirilgan usullardan foydalanib zamonaviy matematikaning bir qator masalalarini tadqiq qilish mumkin [25-30].

REFERENCES

1. Жураев Ш.И. (2020). Способность к самостоятельной и творческой работе будущего учителя математики. *Вестник науки и образования*, 18(96), часть 2, 64-67.
2. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. *Academy*, 4(55), 68-71.
3. Бобоева М.Н. (2020). Проблемная образовательная технология в изучении систем линейных уравнений с многими неизвестными. *Наука, техника и образование*, 9(73), 48-51.
4. Бобокулова С.Б., Бобоева М.Н. (2020). Использование игровых элементов при введении первичных понятий математики. *ВНО*, 21(99), часть 2, 85-88.
5. Бобоева М.Н., Шукурова М.Ф. (2020). Обучение теме «множества неотрицательных целых чисел» с технологией «Бумеранг». *Проблемы педагогики*, 6(51), 81-83.
6. Mardanova F.Ya., Rasulov T.H. (2020). Advantages and disadvantages of the method of working in small group in teaching higher mathematics. *Academy*, 4(55), 65-68.
7. Марданова Ф.Я. (2020). Рекомендации по организации самостоятельной работы в высших учебных заведениях. *ВНО*, 17(95), Часть 2, С. 83-86.
8. Марданова Ф.Я. (2020). Использование научного наследия великих предков на уроках математики. *Проблемы педагогики*, 6(51), 40-43.
9. Rasulov T.H., Rasulova Z.D. (2019). Organizing educational activities based on interactive methods on mathematics subject. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, 6(10), 43-45.

10. Марданова Ф.Я. (2021). Нестандартные методы обучения высшей математике. *Проблемы педагогики*, 2(53), 19-22.
11. Бобоева М.Н. (2021). Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел». *Проблемы педагогики*, 2(53), 23-26.
12. Boboyeva M., Qutliyeva Z. (2019). Formation of elementary mathematical concepts in preschool children. *J. Global Research Math. Archives*, 6(11), 10-12.
13. Курбонов Г.Г. (2021). Информационные технологии в преподавании аналитической геометрии. *Проблемы педагогики*, 2(53), 11-14.
14. Бобоева М.Н. (2021). Обучение теме «Множества неотрицательных целых чисел» кластерным методом. *Проблемы педагогики*, 2(53), 23-26.
15. Сайлиева Г.Р. (2021). Использование метода «Математический рынок» в организации практических занятий по «Дискретной математике». *Проблемы педагогики*, 2(53), 27-30.
16. Курбонов Г.Г. (2021). Интерактивные методы обучения аналитеской геометрии: метод Case study. Наука, техника и образование, 8(72), 44-48.
17. Курбонов Г.Г. (2021). Информационные технологии в преподавании аналитической геометрии. Проблемы педагогики, 2(53), 11-14.
18. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. (2020). Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики. *Наука, техника и образование*, 8(72), 29-32.
19. Ахмедов О.С. (2020). Метод «диаграммы венна» на уроках математики. *Наука, техника и образование*, 8(72), 40-43.
20. Ахмедов О.С. (2021). Основные требования к языку учителя математики. *Наука, техника и образование*, 2-2(77), 74-76.
21. Умарова У.У. (2020). Применение триз технологии к теме «Нормальные формы для формул алгебры высказываний». *НТО*, 9(73), 32-35.
22. Умарова У.У. (2020). Роль современных интерактивных методов в изучении темы «Множества и операции над ними». *Вестник науки и образования*, 16(94), часть 2, 21-24.
23. Умарова У.У. (2020). Использование педагогических технологий в дистанционном обучении moodle, *Проблемы педагогики*, 6(51), 31-34
24. Бобоева М.Н. (2021). Метод графического органайзера при изучении темы «Множество неотрицательных целых чисел». *Проблемы науки,* 4(63), 72-75.
25. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2020). Бесконечность числа собственных значений операторных (2x2)-матриц. Асимптотика дискретного спектра. *ТМФ*. 3(205), 368-390.
26. Dilmurodov E.B. (2019). On the virtual levels of one family matrix operators of order 2. *Scientific reports of Bukhara State University*, 1, 42-46.

27. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 15, 105-106.
28. Дилмуродов Э.Б. (2016). Квадратичный числовой образ одной 2x2 операторной матрицы. *Молодой ученый*, 8, 7-9.
29. Дилмуродов Э.Б. (2018). Спектр и квадратичный числовой образ обобщенной модели Фридрихса. *Молодой ученый*, 11, 1-3.
30. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. (2014). Исследование числовой области значений одной операторной матрицы. *Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 35 (2), 50–63.