

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИИ (Russia) = 3.939  
ESJI (KZ) = 9.035  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

### International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2022 Issue: 03 Volume: 107

Published: 14.03.2022 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



**Ismoil Ibragimovich Safarov**

Institute of Chemistry and Technology  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor to department of Advanced Mathematics,  
Tashkent, Uzbekistan  
[safarov54@mail.ru](mailto:safarov54@mail.ru)

**Muxsin Khudoyberdiyevich Teshaev**

Bukhara Engineering-Technological Institute  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor to department of Advanced Mathematics,  
Bukhara, Republic of Uzbekistan,  
[muhsin\\_5@mail.ru](mailto:muhsin_5@mail.ru)

**Shuxrat Isroilovich Jo'raev**

Bukhara State University  
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,  
Bukhara, Republic of Uzbekistan

**Nurillo Raximovich Kulmurov**

Navoi State Mining Institute  
Senior Lecturer to Department of Technology Engineering,  
docent, Uzbekistan  
[nurillo.Kulmurov.64@mail.ru](mailto:nurillo.Kulmurov.64@mail.ru)

## OF LINEAR OSCILLATION OF A DISSIPATIVE INHOMOGENEOUS MECHANICAL SYSTEM WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

**Abstract:** The paper considers two modes of operation of the system - natural and forced oscillations. Natural oscillations are understood as movements in which all points of the system oscillate with the same frequencies and damping indices (but with different complex amplitudes). It is assumed that there are no external influences during natural oscillations. Forced oscillations occur under stationary (periodic) and non-stationary external influences. The oscillation mode (steady or unsteady) depends on external influences.

**Key words:** natural oscillations, frequency, steady state, strength, vibration, mechanical systems, object, damped oscillations, resonance.

**Language:** Russian

**Citation:** Safarov, I. I., Teshaev, M. Kh., Jo'raev, Sh. I., & Kulmurov, N. R. (2022). Of linear oscillation of a dissipative inhomogeneous mechanical system with a finite number of degrees of freedom. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 03 (107), 409-417.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-107-26> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS>

**Scopus ASCC:** 2200.

О ЛИНЕЙНОМ КОЛЕБАНИИ ДИССИПАТИВНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	РИИЦ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

**Аннотация:** В работе рассмотрены два режима работы системы – собственные и вынужденные колебания. Под собственными колебаниями подразумеваются движения, при которых все точки системы совершают колебания с одинаковыми частотами и показателями демпфирования (но с разными комплексными амплитудами). Предполагается, что внешние воздействия при собственных колебаниях отсутствуют. Вынужденные колебания происходят при стационарных (периодических) и нестационарных внешних воздействиях. Режим колебаний (установившийся или неустойчивый) зависит от внешних воздействий.

**Ключевые слова:** собственные колебания, частота, установившийся режим, прочность, вибрация, механические системы, объект, затухающие колебания, резонанс.

### Введение

Во многих случаях решение проблемы динамической прочности и устойчивости связано с изучением реологических свойств элементов и влияния их взаимодействия различных форм колебаний рассматриваемой механической системы. В работах [1,2,3,4,5] рассматриваются проблемы взаимодействия элементов механической системы между собой и со средой. Такие механические системы часто используются для защиты объектов от вибраций и ударов. Исследования в области защиты различных объектов от вибраций и ударов получили интенсивное развитие в начале 70-х годов прошлого столетия, в числе которых можно было бы назвать работы [5,6]. Современные радио механические комплексы и навигационные оборудования, размещаемые на подвижных объектах (летательных аппаратах, кораблях, самоходных машинах, автомобилях и пр.), подвергаются воздействию сложного комплекса дестабилизирующих факторов. К этим факторам, в частности, относятся вибрационные и ударные нагрузки, возникающие при изменениях скорости движения подвижных объектов с винтовым, турбовинтовым и реактивным двигателями, акустических воздействиях и т.п. Аэродинамические силы также вызывают повышение вибрации узлов и деталей подвижных объектов [7,8].

Исследования прочности и динамической устойчивости диссипативных (диссипативно однородных и неоднородных) механических систем (ДМС) далеки еще от исчерпывающих решений. Управление резонансными колебаниями диссипативных механических систем с помощью активных методов до настоящей времени окончательно не решены.

### Постановка задачи и методики решения.

Рассматривается динамическое поведения напряженно-деформируемого состояния диссипативной механической системы, состоящего из деформируемых и недеформируемых тел. Связь напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  для элементов механической системы удовлетворяет линейным

наследственным соотношениям Больцмана-Вольеры, которую принимаем в виде:

$$s_{ij} = 2\sigma(e_{ij} - \int_{-\infty}^t R(t-\tau)e_{ij}(\tau)d\tau) \quad (1)$$

где,  $s_{ij}$ - девиатор напряжений  $\sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}$ - девиатор деформаций  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma = \sigma_{ij}/3$ ,  $R$ -слабо сингулярное ядро релаксации, принимаемое в виде

$$R(t) = Ae^{-\beta t} \cdot t^{\alpha-1};$$

здесь,  $E$ - мгновенный модуль упругости,  $A, \alpha$  и  $\beta$  - безразмерные параметры.

Параметры ядра релаксации и мгновенного модуля упругости определяются из квазистатических экспериментов методикой, изложенной в работе [9].

**Общая вариационная постановка динамики диссипативных механических систем.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $N$  жестких и  $K$  деформируемых элементов, соединенных друг с другом и с основанием (или окружающей средой)  $S$  вязкоупругими элементами:  $S = S_1 + S_2$ .

Деформируемые элементы системы выполнены из вязкоупругих или двухкомпонентных тел. Физические свойства вязкоупругих материалов описываются линейными наследственными соотношениями Больцмана-Вольерра с интегральными разностями ядер наследственности [10,11].

Некоторые из деформируемых элементов могут быть упругими; в этом случае ядра наследственности, описывающие реологические свойства элементов, тождественно равны нулю. Систему, в которой реологические свойства деформируемых элементов идентичны (ядра наследственности элементов равны между собой), будем называть диссипативно-однородной, а систему с различными реологическими характеристиками - будем называть диссипативно-неоднородной. В частном случае, когда внешние воздействия отсутствуют, рассматриваются собственные затухающие колебания системы, при наличии внешних воздействий – вынужденные.

Основной проблемой является исследование диссипативных (демпфирующих) свойств системы в целом, а также исследование ее напряженно-деформированного состояния. При свободных колебаниях диссипация сводится к затуханию

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИНЦ (Russia) = 3.939  
 ESJ (KZ) = 9.035  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

собственных колебаний. Скорость затухания количественно оценивает диссипативные свойства системы: чем выше скорость затухания, тем выше диссипация.

При вынужденных установившихся колебаниях системы ее диссипативные свойства проявляются в резонансных режимах и приводят к конечным значениям резонансных амплитуд. В случае нестационарных колебаний диссипативные свойства проявляются при определении напряженно-деформированного состояния системы.

В случае вынужденных установившихся колебаний резонансные амплитуды являются количественной характеристикой диссипативных свойств системы, интенсивность которой становится выше понижением резонанса амплитуды вынужденных колебаний.

Для количественной оценки диссипативных свойств системы в целом предлагаются две величины: минимальная скорость затухания собственных колебаний и максимальная резонансная амплитуда. Введем понятия глобального коэффициента демпфирования и глобальной резонансной амплитуды. Диссипативные свойства системы определяются прежде всего демпфирующими характеристиками систем, совершенно неприменимо к диссипативно-неоднородным системам.

Исследование зависимости уровня диссипативных свойств системы от ее параметров составляет основное содержание данной работы. Установлено, что глобальные демпфирующие характеристики диссипативно-неоднородной системы в целом определяются не только (и не столько) вязкоупругими свойствами элементов системы, сколько взаимодействием колебаний различных собственных форм, которые в существенной степени определяются структурой, конструкцией, геометрией, размерами, наличием упругих связей, взаимным расположением элементов системы в целом.

Согласно работам динамика диссипативных механических систем они более реально описываются обобщенной вязкой моделью (1):

$$\tau \phi(t) = c_m \left[ \phi(t) - \int_a^t R_c(t-\tau) \phi(\tau) d(\tau) \right] \quad (2)$$

где  $\tau$  - вязкоупругий оператор;  $c_m$  - мгновенный коэффициент вязкоупругого оператора;  $R_c$  - ядро релаксации;  $\phi(t)$  - произвольные функции времени.

### Математическая постановка задачи.

Предположим, что интегральные члены в наследственном соотношении (2), описывающие реологические свойства деформируемых элементов, малы по сравнению с мгновенно упругими слагаемыми. В совокупности с предположением о колебательном характере движения это позволит применить процедуру

замораживания [12,13,16], которая приводит к следующим комплексным физическим соотношениям для деформируемых элементов нулевого объема:

$$F_e = -c_e \Delta e = -c_e [1 - \Gamma_e^c(\omega_R) - i \Gamma_e^s(\omega_R)] \Delta e \quad (3)$$

Для элементов с распределенной жесткостью это соотношение будет иметь вид:

$$\sigma_{ij} = \lambda_n \varepsilon_{ni} \delta_{ji} + 2\bar{\mu}_n \varepsilon_{ni}, \quad S = S_1 + S_2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, S, \quad (4)$$

$$\text{где } \bar{\lambda}_n = \lambda_n [1 - \Gamma_{n\lambda}^c(\omega_R) - i \Gamma_{n\lambda}^s(\omega_R)] \quad (5)$$

$$\Gamma_{\lambda,m}^c(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda,m}(\tau) \cdot \cos \omega \tau d\tau ;$$

$$\Gamma_{\lambda,\mu}^s(\omega) = \int_0^\infty R_{\lambda,\mu}(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

$F_e$  - усилие в  $i$ -ом сосредоточенном элементе,  $\Delta e$  - удлинение этого элемента;  $\bar{C}_e, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  - его комплексная жесткость, напряжение и деформация в элементе ненулевого объема;  $\Gamma_e^c, \Gamma_e^s, \Gamma_{n\lambda}^c, \Gamma_{n\lambda}^s, \Gamma_{n\mu}^c, \Gamma_{n\mu}^s$  - синус и косинус образа Фурье ядер релаксации  $i$ -го сосредоточенного элемента и  $n$ -го распределенного элемента;  $\omega_R$  - действительная часть комплексной частоты колебаний системы. При этом частота будет комплексной при собственных, действительных, а также вынужденных колебаниях. В первом случае комплексная собственная частота является частотой затухающих колебаний, мнимая часть - коэффициентом демпфирования собственных колебаний системы. Во втором случае  $\omega_R$  совпадает с частотой вынужденных колебаний. При собственных колебаниях соотношения (3), (4) приближенные, при вынужденных - точные.

При постановке задачи о собственных и вынужденных колебаниях системы используется принцип возможных перемещений, согласно которому сумма всех действующих на систему активных сил, включая силы инерции, равна нулю:

$$\delta A = \delta A_\sigma + \delta A_u + \delta A_f = 0 \quad (6)$$

здесь

$$\begin{aligned} \delta A_f &= - \sum_{n=1}^{S_2} \int_{v_n} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \sum_{e=1}^{S_1} \Gamma_e \delta \Delta e \\ \delta A_u &= - \sum_{n=1}^{S_a} \int_{v_n} \rho_u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \delta u dV - \sum m_k \frac{d^2 u}{dt^2} \delta \bar{u}_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^n I_k \frac{d^2 u}{dt^2} \delta \phi_k \\ \delta A_I &= - \sum_{n=1}^{S_2} \int_{v_n} \rho_n \bar{f} \delta \bar{u} dV + \sum_{n=1}^{S_1} \int_{v_n} \bar{f} \delta \bar{u} dV \\ &\quad + \sum_{n=1}^N F \delta \bar{u}_n + \sum_{k=1}^N m_k \delta \bar{\phi}_k \end{aligned}$$

$\delta \varepsilon_{ij}, \delta \nabla e$  - вариации деформаций распределенных и линейных сосредоточенных элементов;  $\rho_n$  - плотность материала  $n$ -го сосредоточенного элемента;  $m_k$  - масса  $k$ -го жесткого тела;

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИНЦ (Russia) = 3.939  
 ESJI (KZ) = 9.035  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

$u, u_k, \delta u_1, \delta u_k$  - векторы смещений точек распределенных элементов и центров масс жестких тел и их вариаций;  $f, \rho$  - плотности массовых и поверхностных сил, приложенных к распределенным элементам;  $V_n, E_n$  - объем и

поверхность  $n$ -го распределенного элемента;  $I_n$  - тензор центральных моментов инерции  $n$ -го твердого тела;  $F_m, M_k$  - главный вектор и главный момент сил, приложенных к количеству твердому телу.

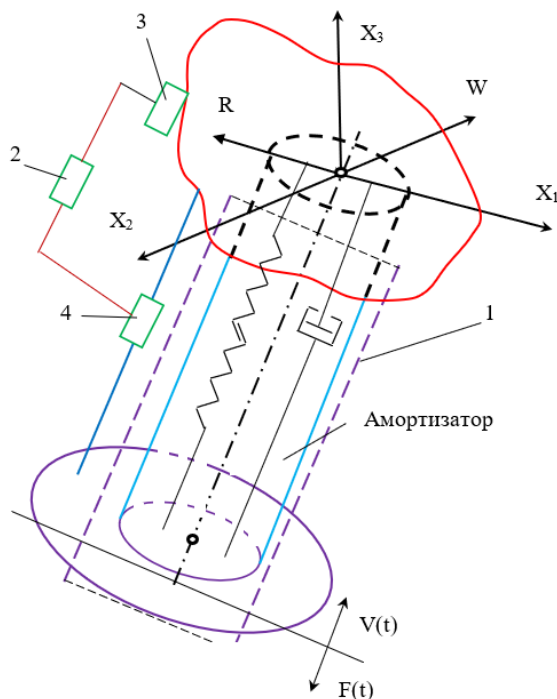


Рис.1. Функциональная схема пассивной и активной виброзащитной механической системы.

1-пассивная часть ВЗС (виброзащитной системы), 2-устройство для преобразования сигнала, 3- датчики, 4- активная часть.

В качестве примера рассмотрим тело, установленное на деформируемых опорах (рис.1) или в место объекта рассматривается диссипативная механическая система (рис.2).

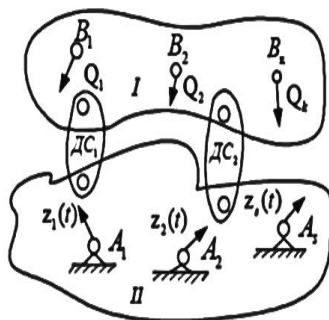


Рис.2. Принципиальная схема реализации метода виброзащиты путем введения дополнительных связей: а) условное разделение системы на блоки I и II; б) введение дополнительных связей между блоками I и II (дополнительные связи обозначены  $DC_1, DC_2$  и т.д.)

Проекции вектора перемещения  $\vec{W}$  на координатные оси обозначим через  $u, v, w$ , а

проекции вектора силы  $\vec{R}$  – соответственно  $U, V, W$ . Функциональные зависимости

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
РИИЦ (Russia) = 3.939  
ESJ (KZ) = 9.035  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

$$U = U(u, \dot{u}), \quad V = V(v, \dot{v}), \quad W = W(w, \dot{w}),$$
$$\left( \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

называются динамическими характеристиками амортизатора. При анализе динамики виброзащитных систем в положении статического равновесия принимаются:

$$U = V = W = 0, \quad \dot{U} = \dot{V} = \dot{W} = 0$$

Пусть часть поверхности тела совершает поступательное движение по заданному гармоническому закону, а на части поверхности заданы нагрузки, изменяющиеся во времени по заданному гармоническому закону.

Задачи виброзащитных объектов с машинным оборудованием во временной области, по существу, представляет собой динамический анализ отклика механической системы на действие ударных или вибрационных нагрузок. Естественно, что прежде, чем проводить такой анализ, необходимо определить входные нагрузки или перемещения, геометрические и физико-механические свойства оборудования, граничные условия. Имея такие данные, необходимо разрабатывать динамическую (математическую) модель, которая приближенно будет представлять реальные изделия и нагрузки. Как правило, динамическая модель будет только приближенно

отражать реальный объект, ибо точное его представление повлечет за собой непреодолимые математические трудности при решении. Форма импульсов и математическое выражение приведена ниже (рис.2 и рис.3).

Математическая модель полу синусоидального импульса

$$F(t) = A \sin \omega t \text{ при } 0 \leq t < \tau, \quad F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau;$$

Прямоугольного импульса

$$F(t) = A \text{ при } 0 \leq t < \tau, \quad F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau;$$

Треугольного импульса

$$F(t) = At/\tau \text{ при } 0 \leq t < \tau, \quad F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau.$$

Проставление ударных импульсов в виде простейших форм оправдано не всегда. К более точным результатам приводит представление ударного процесса в виде частотного спектра  $F(\omega)$ , полученного преобразования Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt.$$

После удара в механической системе возникает НДС, которое может привести к допустимым значениям напряжений и деформаций. А при воздействии гармонических или вибрационных воздействий, в механической системе возникает резонанс.

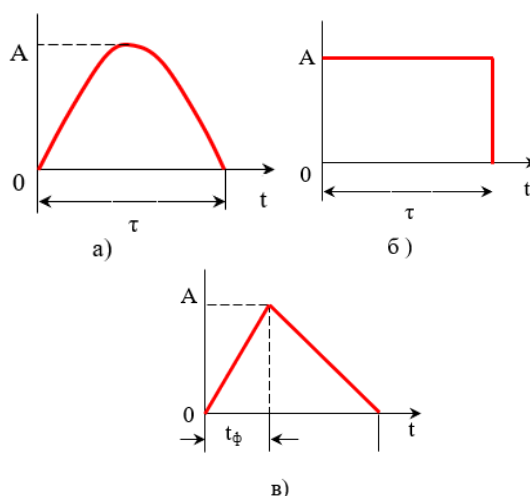


Рис.3. Форма ударных импульсов:

а- полу синусоидальная; б- прямоугольная; в- треугольная.

Можно указать три типа динамических моделей, пригодных для решения задач виброзащиты во временной области; модели с распределенными параметрами; модели с

сосредоточенными параметрами; смещенные модели.



## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 3.939  
 ESJI (KZ) = 9.035  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350



Рис.4. Структурная схем метода активной виброзащиты.

Основной целью диссертационной работы является применение разработанной методике решения и алгоритма для защиты объектов радиоэлектронной аппаратуры от вибрационных воздействий. Классификация виброизоляторов приведена на рис.4.

Проанализируем более подробно каждую из указанных выше моделей.

### Модели с распределенными параметрами.

Рассмотрим деформируемое тело (рис.5), на которое действуют внешние силы, распределенные по поверхности  $\{C\}$ , сосредоточенные силы  $\{F_i\}$ ,

моменты  $\{M_i\}$ , и объемные силы  $\{P\}$ . Здесь силы представлены в виде матриц-столбцов вида:  $\{C\} = \{C_x, C_y, C_z\}$  и т.д., где  $C_x, C_y, C_z$  - проекции внешних сил на оси абсолютной системы координат хуз. Тогда, используя уравнения механики твердого тела [1], можно сразу получить уравнения движения в виде:

$$\operatorname{div} \vec{T} + \vec{B} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

$$T = \tilde{\lambda} \cdot \operatorname{div} \vec{U} \cdot \hat{E} + 2\tilde{\mu} \cdot \varepsilon$$

Здесь  $E$  - единичный тензор второго ранга;

$\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\mu}$  - операторные модули упругости:

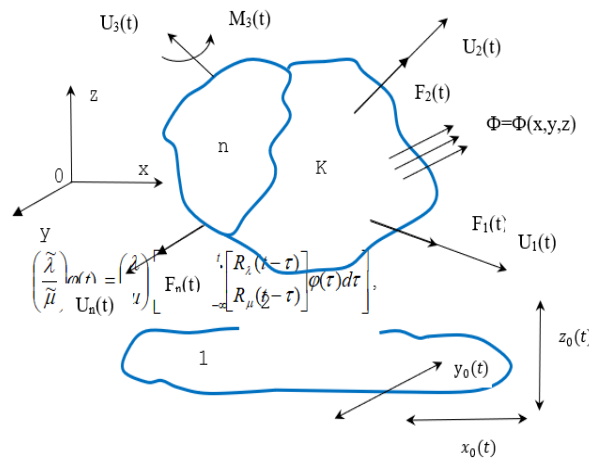


Рис.5. Расчетная схема

$\lambda$  и  $\mu$  - мгновенные модули упругости,  $\vec{B}$  - вектор плотности объемных сил.

### Модели с сосредоточенными параметрами.

Пусть механическая система состоит из  $N$  масс, соединенных между собой деформируемыми элементами (рис.6). Ограничимся рассмотрением таких колебаний, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями. Для того, чтобы уравнения движения были

линейными, необходимо, чтобы отклонения системы от положения равновесия были достаточно малы (что обеспечивается малостью начальных возмущений).

Уравнения Лагранжа в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j(t) \quad (j=1,2,3,\dots)$$

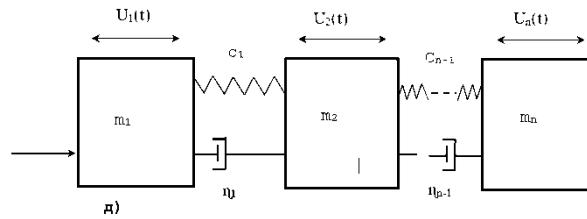
причем,

**Impact Factor:**

<b>ISRA (India)</b> = 6.317	<b>SIS (USA)</b> = 0.912	<b>ICV (Poland)</b> = 6.630
<b>ISI (Dubai, UAE)</b> = 1.582	<b>РИИЦ (Russia)</b> = 3.939	<b>PIF (India)</b> = 1.940
<b>GIF (Australia)</b> = 0.564	<b>ESJI (KZ)</b> = 9.035	<b>IBI (India)</b> = 4.260
<b>JIF</b> = 1.500	<b>SJIF (Morocco)</b> = 7.184	<b>OAJI (USA)</b> = 0.350

$$Q_j(t) = \sum_{i=1}^s \vec{F}_i(t) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

где  $n$ - число степеней свободы системы;  $s$ -число возмущающих сил  $\vec{F}_i(t)$ .



**Рис.6. Много массовая система.**

Подставляя в уравнения Лагранжа выражения кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} q_i q_j,$$

получаем:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1n}\ddot{q}_n + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1n}q_n &= Q_1(t) \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2n}\ddot{q}_n + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \dots + c_{2n}q_n &= Q_2(t) \\ \dots & \dots \\ a_{n1}\ddot{q}_1 + a_{n2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{nn}\ddot{q}_n + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + \dots + c_{nn}q_n &= Q_n(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (5) называются дифференциальными уравнениями вынужденных колебаний системы с конечным числом степеней свободы. В матричной форме эти уравнения имеют следующий вид:

$$[a]\{q''\} + [c]\{q\} = \{Q(t)\} \quad (9)$$

где  $C_{ij}\hat{\phi}(t) = C_{ij}[\phi(t) - \int_{-\infty}^t R_{ij}(t-\tau)\phi(\tau)d\tau]$   
 $R_{ij}(t-\tau)$  - ядро релаксации;  $\phi(\tau)$  - произвольная функция времени;  $\{q(t)\}$  - матрица обобщенных координат.

Для модели рис.5 матрицы уравнений (6) будут иметь вид:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\{U(t)\} = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n(t) \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \bar{C}_1 & (-\bar{C}_1 - \bar{C}_2) & \bar{C}_2 & \bar{C}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \bar{C}_1 & -\bar{C}_1 & -\bar{C}_2 - \bar{C}_3 & \dots & & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{n-1} & \cdot & \cdot & -\bar{C}_n \end{bmatrix}$$

**Смешанные модели.** Смешанные модели, используемые для описания машиностроительного оборудования, обычно представляют собой сочетания элементов с распределенными параметрами и дискретных элементов. Основные расчетные схемы приведены на рис. 7.

Пусть механическая система состоит из деформируемых и недеформируемых (абсолютно жестких) элементов. Уравнения движения системы

могут быть получены с помощью вариационного принципа (1.2). Внешние нагрузки могут быть вибрационные или ударные. Если ударная нагрузка  $F(t)$  является гармонической функцией времени, тогда

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} = F_0 (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) \quad (10)$$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
РИИЦ (Russia) = 3.939  
ESJI (KZ) = 9.035  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

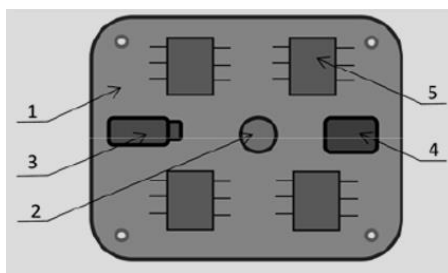


Рис. 7. Схема малогабаритной активной системы гашения вибраций: 1-печатная плата защищаемого устройства, 2-акселерометр, 3-генератор вибрации, 4-микропроцессор, 5-функциональные элементы защищаемого устройства.

В этом случае время  $t$  рассматривается в неограниченном отрезке  $-\infty < t < \infty$ . Качественное ударное воздействие (удар), приложенный к машинам и оборудованию, характеризуется кратковременностью, обычно вызывает колебательные процессы, происходящие как во время действия удара: первая - машина и оборудование рассматриваются как абсолютно жесткие тела (время действия удара очень мало), а ударное воздействие характеризуется импульсом [14,15], вторая - ударное воздействие

рассматривается как статическое (время действия удара велико). В дальнейшем мы назовем внешним ударным воздействием такое непериодическое возбуждение механической системы, кинематическое или силовое, время действия которого сравнимо, по крайней мере, с наименьшими периодами собственных колебаний системы и которая вызывает в ней значительное перемещение.

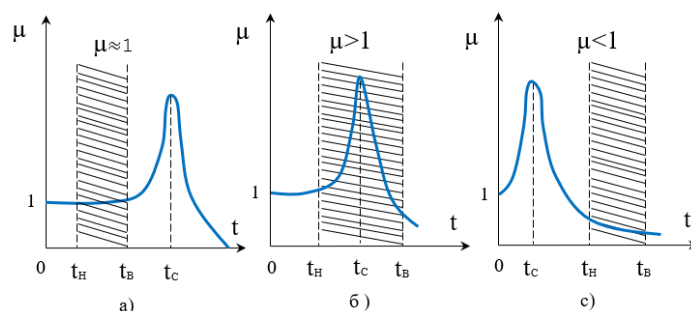


Рис.8. Методы виброзащиты: а- увеличение жесткости конструктивных элементов; б- использование конструктивных элементов с увеличенной степенью демпфирования; в- использование виброизоляторов.

Анализ поведения виброзащитной системы при ударе показывает, что имеет ряд параметров ударного воздействия, в наибольшей степени влияющих на движение виброизолированного объекта. К их числу относятся пиковое значение  $\sigma_0$ , длительность  $\tau$  и полный импульс  $S_0$  ударного воздействия  $\sigma(t)$ , представляющего при кинематическом возмущении закон изменения основания. Эти величины связаны соотношением

$$S_0 = \int_0^{\tau} \sigma(t) dt \quad (11)$$

Методы защиты электронных аппаратов от вибраций удобно представить, если использовать зависимость коэффициента динамичности  $\mu$  от частоты  $f$  (рис.8). Таким образом в статье. Проведен анализ работ, посвященных современным задачам резонансных колебаний диссипативных механических систем, состоящих

из систем твердых и деформируемых тел, применительно к виброизолируемым объектам.

### Заключения

Предложена общая вариационная математическая постановка задачи динамики диссипативно- однородных и неоднородных механических систем, состоящая из твердых и деформируемых тел. Связь между напряжениями и деформациями учитывается с помощью интеграла Больцмана - Вольтера. На основе метода Мюллера, Гаусса, интегральное преобразование Лапласа и Рунге Кута предложена методика решения и алгоритм задачи собственных и вынужденных колебаний диссипативных механических систем, состоящая из твердых и деформируемых тел.



**Impact Factor:**

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
ПИИИ (Russia) = 3.939  
ESJI (KZ) = 9.035  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

**References:**

1. Amabili, M., & Pellicano, F. (2001). Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells. *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 4, April 2001, pp. 564-572.
2. Baradokas, P.A., & Matsgolyavichus, D.A. (1971). Sintez mnogoslnoynoy plastinki s maksimalnim rasseyaniyem energii kolebaniy. *Lit. mekh., sb.*, № 2(9), pp.33-45.
3. Birgera, I.A. (1968). *Prochnost, ustoychivost, kolebaniya*, Spravochnik, t. Z, pod red., Moscow.
4. Bozhko, A. (1987). *Passivnaya i aktivnaya vibrozashchita sudovix mexanizmov* Sudostroyeniye, (p.176).
5. Bern, M., & Eppstein, D. (1992). *Mesh generation and optimal triangulation*. - Computing in Euclidean Geometry, edited by F. K. Hwang and D.-Z. Du, World Scientific.
6. Bozorov, M.B., Safarov, I.I., & Shokin, YU.I. (1966). *Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnix i neodnorodnix mexanicheskix sistem*. (p.188). SO RAN, Novosibirsk.
7. Vlasov, B.Z., & Leontev, H.H. (1960). *Balki, pliti, obolochki na uprugom osnovanii*. (p.491). Moscow: FIZMATGIZ.
8. (1984). *Vibro zashita radioelektronnoy apparatury polimernimi kompaundami* / Pod red. YU. V. Zeleneva. (p.129). Moscow: Radio i svyaz'.
9. (1978). *Vibratsii v texnike: Spravochnik: V 6 t.* Mocow: Mashinostroyeniye, 1978 - 1981.
10. Dembaremdiker, A.D. (1985). *Amortizatori transportnix mashin*. (p.199). Moscow: Mashinostroyeniye.
11. Dustmatov, O.M. (1997). Ob odnoy zadache dinamicheskogo gasitelya kolebaniy. *Uzbekskiy zhurnal «Problemy mekhaniki»*, №5, pp.55-59.
12. Zarutskiy, V. A., & Telalov, A. I. (1991). Dizayn xususiyatlariga ega bo'lgan yupqa devorli qobiqlarning tebranishlari. Eksperimental tadqiqotlarni ko'rib chiqish. *Amaliy mexanika*, T. 278, No 4, pp. 3 - 9.
13. Ilyinskiy, V.S. (1982). *Zashita REA i prestizonnogo oborudovaniya ot dinamicheskoy vozdeystvie*. (p.296). Moscow: Radio i svyaz.
14. Koltunov, M.A., Mayboroda, V.P., & Kravchuk, A.S. (1983). *Deformatsiyalanuvchi qattiq jismning amaliy mexanikasi*. (p.345). Moscow: Oliy maktab.
15. Kolovskiy, M.Z. (1966). *Vibratsiyadan himoya qilish tizimlarining noxizizqli nazariyasi*. (p.320). Moscow: Nauka.
16. Kulmuratov, N.R., Ishmamatov, M. R., Khalilov, Sh., & Akhmedov, N. (2021). Dynamic vibration extinguished on a viscously elastic base. *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, vol.26, No.2, pp.1-10.