T.H. RASULOV
G‘.G‘. QURBONOV

OLIY MATEMATIKA

O‘quv qo‘llanma

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

T.H.RASULOV
G‘.G‘.QURBONOV

OLIY MATEMATIKA

o‘quv qo‘llanma

“Durdona” nashriyoti
Buxoro – 2023

UO'K 51(075.8)
22.11ya73
R 25
Rasulov, T.H.
Oliy matematika [Matn] : o‘quv qo‘llanma / T.H. Rasulov, G‘.G‘. Qurbonov
.- Buxoro : "Sadriddin Salim Buxoriy" Durdona, 2023.-292 b.
I. Qurbonov, G‘.G‘.

KBK 22.11ya73

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy ta’lim muassasalarining 60530100 – “Kimyo(turlari bo‘yicha)” ta’lim yo‘nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallab yozilgan. Qo‘llanmada asosan koordinatalar usuli, birinchi va ikkinchi tartibli algebraik chiziqlar, matritsalar va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli tenglamalar sistemasining Kramer va Gauss usullari, vektorlar, vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari, fazoda analitik geometriya elementlari, sonlar ketma-ketligi va uning limiti, funksiya va uning limiti, funksiya hosilasi va differensiali, aniqmas integral, aniq integral va ularni hisoblash, sonli qatorlar va ularning yaqinlashishi, tasodifiy hodisalar va ehtimolliklari kabi tushunchalar batafsil yoritilgan. Barcha mavzularda nazariy ma’lumotlar, namunaviy misol va masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo‘ljallangan topshiriqlar keltirilgan. Bundan tashqari, qo‘llanmada keltirilgan mavzular bo‘yicha egallangan bilimlarni mustahkamlash uchun test topshiriqlari ham o‘z aksini topgan.

Taqrizchilar:

Yunusov G‘anisher G‘afurovich, Buxoro muhandislik- texnologiya instituti “Oliy matematika” kafedrasi mudiri, dotsent
Mamurov Boboxon Jo‘rayevich, Buxoro davlat universiteti “Matematik analiz” kafedrasi professori

Darslik Buxoro davlar universitetining 2023-yil 23-martdagi 112-sonli buyrug‘i bilan nashr etishga tavsiya etilgan. Ro‘yxatga olish raqami 112-30.

ISBN 978-9943-9449-8-5

MUNDARIJA

So‘zboshi.. 6
1-mavzu. Koordinatalar usuli 7
1.1. Ikki nuqta orasidagi masofa. 7
1.2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish 9
2-mavzu. Birinchi va ikkinchi tartibli algebraik chiziqlar 16
2.1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. 16
2.2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi. 22
2.3.Ellips. 27
2.4. Giperbola. 30
2.5. Parabola. 34
3-mavzu. Matritsalar 44
3.1.Matritsalar va ularning turlari. 44
3.2.Matritsalar ustida amallar. 46
4-mavzu. Determinantlar 54
4.1. Determinantlar va ularni hisoblash. 54
4.2.Determinantlarning asosiy xossalari. 57
5-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer va Gauss usullari 67
5.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi. 67
5.2. Matritsalar usuli 70
5.3. Kramer usuli. 71
5.4. Gauss usuli. 74
6- mavzu. Vektorlar 80
6.1. Vektorlar ustida amallar. Vektorni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirish. 80
6.2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyish. 82
7- mavzu: Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmasi 91
7.1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. 91
7.2. Vektorning vektor va aralash ko‘paytmasi. 92
8-mavzu. Fazoda analitik geometriya elementlari 101
8.1. Fazoda tekislikning ba’zi tenglamalari. 101

8.2. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari. 110
9-mavzu. Sonlar ketma–ketligi va unung limiti........................... 120
9.1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti. 120
9.2. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari. 124
9.3. Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala....................... 127
10-Mavzu. Funksiya.. 129
10.1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar............................ 129
10.2. Funksiya grafigi. 130
10.4. Funksiya ko‘rinishlari. 133
10.5. Murakkab va teskari funksiyalar... 135
10.6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar.......................... 136
10.7. Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. 137
11-mavzu. Funksiya limiti 140
11.1. Funksiya limiti. 140
11.2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari. 143
11.3. Cheksiz katta miqdorlar. 145
11.4. Funksiya limitini hisoblash qoidalari.................................... 146
11.5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari. 147
11.6. Ajoyib limitlar... 148
11.7. Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig‘i............................. 148
12-mavzu. Funksiya hosilasi 151
12.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar........ 151
12.2. Hosila ta’rifi va uning amaliy ma’nolari. 154
12.3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi............ 156
12.4. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari. 157
13-mavzu. Funksiya differensiali.. 161
13.1. Hosilani hisoblash algoritmi. 161
13.2. Differensiallash qoidalari... 162
13.3. Logarifmik differensiallash usuli.. 168
13.4. Hosilalar jadvali. 169
14-mavzu. Aniqmas integral 172
14.1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral......................... 172
14.2. Aniqmas integral xossalari... 175
14.3. Integrallar jadvali. 178
14.4. Bo‘laklab integrallash usuli. 179
15-mavzu. Integrallash usullari 183
15.1. Ratsional funksiyalar. 183
15.2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash......... 185

15.3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar. 189
15.4. Ratsional funksiyalarni integrallash...................................... 190
15.5. Irratsional funksiyalarni integrallash. 196
16-mavzu. Aniq integral 201
16.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar. 201
16.2. Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti. 206
16.3. Aniq integralning xossalari. 208
17-mavzu. Aniq integralni hisoblash 215
17.1. Aniq integralni ta'rif bo'yicha hisoblash. 215
17.2. Nyuton – Leybnits formulasi. 216
17.3. Bo'laklab integrallash usuli. 220
17.4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish usuli. 221
17.5. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash. 222
18-mavzu. Aniq integrallarning tatbiqlari 227
18.1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. .. 227
18.2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. 230
18.3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash............. 232
18.4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari. 235
18.5. Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. 236
19-mavzu. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashishi 243
19.1. Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar. 243
19.2. Sonli qator xossalari. 246
19.3. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti. 248
19.4. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar. 249
19.5. Ishorasi o'zgaruvchi qatorlar. 250
19.6. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. 252
20-mavzu. Tasodifiy hodisalar va ehtimollik 256
20.1. Hodisaning ehtimoli. 256
20.2. Ehtimolning klassik ta'rifi. 257
20.3. Ehtimolning statistik va geometrik ta'riflari. 259
20.4. Shartli ehtimollik. Hodisalar to'la guruhi. 261
20.5. To'la ehtimol va Bayes formulalari. 262
20.6. Erkli sinovlar ketma-ketligi va Bernulli sxemasi. 264
Sinov testi 271
Sinov testi javoblari 285
Glossariy 286
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati 290

SO‘ZBOSHI

Kitobxon e’tiboriga havola qilinayotgan mazkur “Oliy matematika” nomli o‘quv qo‘llanmada matritsalar va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli tenglamalar sistemasining Kramer va Gauss usullari, vektorlar, vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari, fazoda analitik geometriya elementlari, sonlar ketma-ketligi va uning limiti, funksiya va uning limiti, funksiya hosilasi va differensiali, aniqmas integral, aniq integral va ularni hisoblash, sonli qatorlar va ularning yaqinlashishi, tasodifiy hodisalar va ehtimolliklarini o‘rganish ko‘zda tutilgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma Oliy matematika fani dasturida keltirilgan barcha mavzularga doir nazariy ma’lumotlar hamda misol va masalalarni qamrab olgan bir qo‘llanmadir. U Oliy ta’lim muassasalarining 60530100 – “Kimyo (turlari bo‘yicha)” ta’lim yo‘nalishlarida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallab yozilgan.

Mazkur qo‘llanmada yuqorida sanab o‘tilgan mavzularga oid qisqacha nazariy ma’lumotlar bayon qilingan. Ularga doir misol va masalalar dastlab sodda va muayyan tasavvur hosil qilinadigan, so‘ngra murakkabroq masalalarni yechishga alohida e’tibor qaratilgan. Misol va masalalarni sharhlab, ularni yechib ko‘rsatishdan ko‘zlangan maqsad “Oliy matematika” kursidan olingan nazariy bilimlardan misol va masalalarni yechishda foydalana olish ko‘nikmasini shakllantirishdir. Talabalar namuna sifatida yechib ko‘rsatilgan masalalarda qo‘llanilgan usullardan foydalanib mustaqil bajarishlari uchun ko‘plab misol va masalalar keltirilgan.

Qo‘llanmani o‘qish jarayonida talabalar o‘zlarining “Oliy matematika” fanidan olgan bilimlarini to‘ldiradilar. Undan matematikaning ko‘plab sohalari bo‘yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borayotgan magistrantlar, tayanch doktorantlar va mustaqil izlanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

1-MAVZU. KOORDINATALAR USULI

Reja:

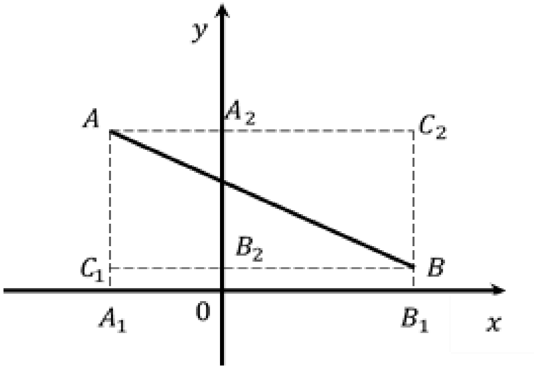
1. Ikki nuqta orasidagi masofa.

2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish.

Tayanch iboralar: nuqta, kesma, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, ikki nuqta orasidagi masofa.

1.1. Ikki nuqta orasidagi masofa.

$A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi hamda Ox va Oy o‘qlariga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin: A va B nuqtalardan Ox va Oy o‘qlariga parallel hamda ular bilan A_1 , A_2, B_1, B_2 nuqtalarda kesishguncha to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz.



1.1.1-chizma

Tekislikda hosil bo‘lgan $A_1C_1BC_2$ to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraylik. Undagi A_1C_1B to‘g‘ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga asosan,

$$|AB|^2 = |AC_1|^2 + |C_1B|^2 \tag{1.1}$$

bundan, $|C_1B| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$,

$$|AC_1| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|. \tag{1.2}$$

$|AB| = d$ belgilash kiritamiz. U holda (1.1) va (1.2) lardan:

$$d^2 = |AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

yoki

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.3}$$

(1.3) formula ikki nuqta orasidagi masofani(kesma uzunligini) topish formulasidir. Bu formula umumiy formula bo‘lib, A va B nuqtaning tekislikdagi har qanday holatida ham quyidagicha bo‘ladi:

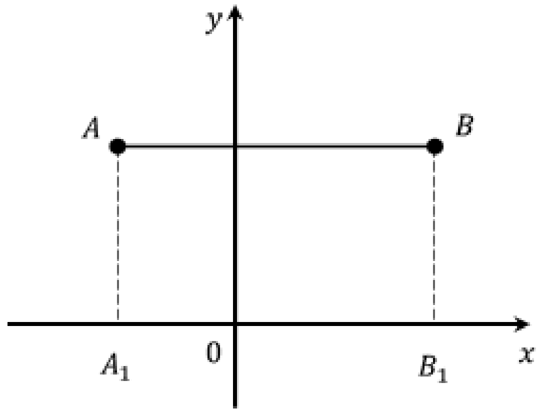
$$|AC_2| = |C_1B| = |x_2 - x_1| \text{ va}$$

$$|AC_1| = |C_2B| = |y_2 - y_1|. \qquad (1.4)$$

Agar ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq absissa yoki ordinata o‘qlaridan biriga paralel bo‘lsa, masalan Ox o‘qqa paralel bo‘lsa,

$$|AB| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1| \qquad (1.5)$$

dan iborat bo‘ladi. Bunda $y_2 - y_1 = 0$, chunki $y_2 = y_1$.



1.1.2-chizma

Agar $A(x_1, y_1)$ nuqta $O(0;0)$ nuqta (koordinatalar boshi) bilan ustma-ust tushsa, (1.1) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} =$$
$$= \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2},$$

bundan

$$d = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} \qquad (1.6)$$

1-misol. $M(4;-1)$ va $N(-2;5)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa MN kesmaninig uzunligini toping.

Yechish. Berilganlarga ko‘ra: $x_1 = 4$, $y_1 = -1$, $x_2 = -2$, $y_2 = 5$. Bu qiymatlarni (1.3) formulaga qo‘ysak:

$$d = |MN| = \sqrt{(-2-4)^2 + \big(5-(-1)\big)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} =$$
$$= 6\sqrt{2}$$

Demak, MN kesmaning uzunligi $6\sqrt{2}$ o‘lchov birligiga teng ekan.

2-misol. $M(5;3)$ va $N(2;-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

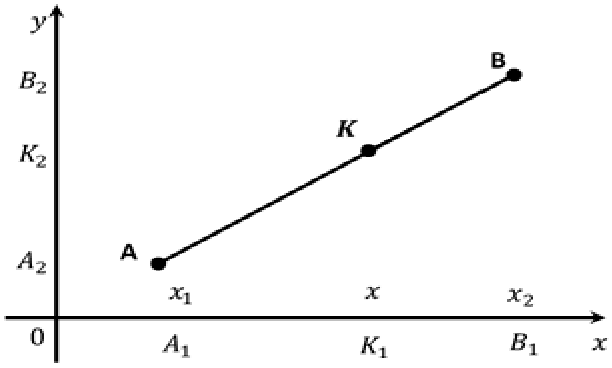
Yechish. Shartga ko‘ra: $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = -1$. Bu qiymatlarni (1.3) formulaga qo‘ysak:

$$MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ bo‘ladi.}$$

1.2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

Uchlari $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalardan iborat AB kesma berilgan bo‘lsin. Shu kesmada yotgan hamda uni ixtiyoriy nisbatda bo‘luvchi biror $K(x,y)$ nuqtaning koordinatalarini topish talab qilinsin.

Koordinatalari izlangan nuqtani AB kesmaning ixtiyoriy nuqtasiga joylashtiramiz. Natijada, $\frac{|AK|}{|KB|}$ nisbat hosil bo‘ladi. Bu nisbatni λ bilan belgilasak, $\frac{|AK|}{|KB|}=\lambda$ bo‘ladi. Bunda $\lambda>0$. Agar K nuqta AB kesmadan tashqarida yotsa $\lambda<0$ bo‘lar edi.



1.2.1-chizma

AB kesma absissa yoki ordinata o‘qlaridan hech biriga parallel bo‘lmagan holni qaraymiz. A,K,B nuqtalardan Ox va Oy o‘qlarga ular bilan kesishguncha perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Kesishish nuqtalarini mos ravishda A_1,K_1,B_1,A_2,K_2 va B_2 harflar bilan belgilaymiz. U holda Fales teoremasiga asosan:

$$\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{|A_1K_1|}{|K_1B_1|}=|\lambda|. \tag{1.7}$$

Bundan $|A_1K_1|=x-x_1$ va $|K_1B_1|=x_2-x$. Bularni (1.7) ga qo‘ysak quyidagi tenglama hosil bo‘ladi: $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$ yoki

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \tag{1.8}$$

$(1.8)-$ izlanayotgan K nuqtaning absissasini topish formulasidir. Shuningdek, K ning ordinatasi quyidagi formula yordamida topiladi:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{1.9}$$

Demak, kesmani berilgan nuqtada bo‘luvchi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari

$$K(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}) \tag{1.10}$$

formula orqali topiladi. Bunda $\lambda \neq -1$.

Agar $\lambda = 1$ bo‘lsa, (1.10) dagi K nuqtaning koordinatalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$K\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \qquad (1.11)$$

bunda K nuqta AB kesmaning o‘rtasida yotadi.

3-misol. Tekislikda $\mathrm{A}(5;3)$ va $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0{,}2$ nisbatda bo‘luvchi $C(x,y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra, $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = 1, \lambda = 0{,}2$ (1.4) formulaga asosan:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{5+0{,}2\cdot 2}{1+0{,}2} = \frac{5{,}4}{1{,}2} = \frac{54}{12} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2},$$

$$y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3+0{,}2\cdot 1}{1+0{,}2} = \frac{3{,}2}{1{,}2} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

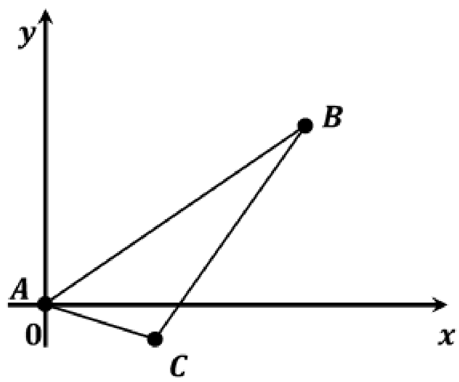
Shunday qilib, $C(4{,}5;\frac{8}{3})$ bo‘ladi.

4-misol. Uchlari $A(0;0)$, $B(12;5)$ va $C(4;-3)$ nuqtalarda yotgan uchburchak berilgan. A burchagidan chiqqan bissektrisa va shu burchak qarshisidagi tomonnning kesishish nuqtasi $D(x,y)$ ning koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan nuqtalarning koordinatalari yordamida ABC uchburchakni yasaymiz.

Ma’lumki, $D(x,y)$ nuqta BC tomonni $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{|BD|}{|CD|}$ nisbatda bo‘ladi. Buni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \lambda.$$



1.2.2-chizma

Ma'lumki, $D(x,y)$ nuqta BC tomonni $\lambda>0$, $\lambda=\frac{|BD|}{|CD|}$ nisbatda bo'ladi. Buni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\lambda.$$

AB va AC kesmalarning uzunliklarini topamiz.

$$|AB|=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13 \text{ va } |AC|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5.$$

Bulardan $\lambda=\frac{13}{5}$,

$$x=\frac{12+\frac{13}{5}\cdot 4}{1+\frac{13}{5}}=6\frac{2}{9} \quad \text{va} \quad y=\frac{5+\frac{13}{5}\cdot(-3)}{1+\frac{13}{5}}=-\frac{7}{9}$$

demak, izlanayotgan nuqtaning koordinatalari $D(6\frac{2}{9};-\frac{7}{9})$ dan iborat bo'ladi.

Mustahkamlash uchun topshiriqlar

1.1. Ikki nuqta orasidagi masofaga doir misollar

1.1.1. Quyidagi hollarning har birida A,B nuqtalar orasidagi d masofa topilsin:

1) $A(4;3)$, $B(7;7)$; 3) $A(12;-1)$, $B(0;4)$;

2) $A(3;1)$, $B(-2;4)$; 4) $A(3;5)$, $B(4;6)$.

1.1.2. Koordinatalar boshidan quyidagi nuqtalargacha bo'lgan masofalar topilsin:

1) $A(11;4)$; 3) $A(-11;0)$;

2) $A(-3;-4)$; 4) $A(5;12)$.

1.1.3. Koordinata tekisligida $A(1;1)$ va $B(3;7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(2;y)$ nuqta topilsin.

1.1.4. Koordinata tekisligida $A(-2;2)$ va $B(4;8)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(3;y)$ nuqta topilsin.

1.1.5. Koordinata tekisligida $A(-3;2)$ va $B(9;3)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(x;6)$ nuqta topilsin.

1.1.6. Ordinata o'qidan shunday nuqtani topingki, koordinata boshidan va $A(-8;-4)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo'lsin.

1.1.7. Ordinata o'qidan shunday nuqtani topingki, koordinata boshidan va $B(6;4)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo'lsin.

1.1.8. Absissa o‘qidan shunday nuqtani topingki, koordinata boshidan va $C(-3;1)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo‘lsin.
1.1.9. Absissa o‘qidan shunday nuqtani topingki, koordinata boshidan va $D(5;8)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo‘lsin.
1.1.10. $A(4;5)$ va $B(3;2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda yotgan $C(5;y)$ nuqtani toping.
1.1.11. ABC uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3;1)$, $\mathrm{B}(7;5)$, $\mathrm{C}(5;-1)$. U o‘tkir burchaklimi, to‘g‘ri burchaklimi yoki o‘tmas burchaklimi?
1.1.12. Koordinata o‘qlarida $A(-5;9)$ nuqtadan 15 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.
1.1.13. Koordinata o‘qlarida $B(-2;11)$ nuqtadan 10 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.
1.1.14. Markazi $C(6;7)$ nuqtada va radiusi $r=5$ bo‘lgan aylana berilgan. $A(7;14)$ nuqtadan bu aylanaga urinmalar o‘tkazilgan. A nuqtadan urinish nuqtalargacha bo‘lgan masofalar topilsin.
1.1.15. Radiusi $r=10$ bo‘lgan aylana markazi $C(-4;-6)$ nuqtada. Koordinata, burchaklar bissektrisalari bilan aylananing kesishish nuqtalari topilsin.
1.1.16. ABC uchburchak uchlari berilgan: $A(2;-3)$, $\mathrm{B}(1;3)$, $\mathrm{C}(-6;-4)$. $A(2;-3)$ nuqtaga BC tomonga nisbatan simmetrik bo‘lgan M nuqta topilsin.
1.1.17. Uchlari $A(2;2)$, $\mathrm{B}(-5;1)$, $\mathrm{C}(3;-5)$ nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi va radiusi topilsin.
1.1.18. Rombning ikkita qarama-qarshi uchi $A(8;-3)$, $\mathrm{C}(10;11)$ berilgan. AB tomon 10 ga teng. Qolgan uchlarining koordinatalari topilsin.
1.1.19. $A(-4;2)$ nuqtadan o‘tib Ox o‘qiga $B(2;0)$ nuqtada urinadigan aylana markazi topilsin.
1.1.20. $A(2;-1)$ nuqtadan o‘tgan va ikkala koordinata o‘qlariga urinadigan aylana tenglamasi tuzilsin.
1.1.21. $B(3;1)$ nuqtadan o‘tgan va ikkala koordinata o‘qlariga urinadigan aylana tenglamasi tuzilsin.
1.1.22. Koordinatalar boshidan $A(-3;4)$ nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.

1.1.23. Koordinatalar boshidan $A(2;-5)$ nuqtagacha bo‘lgan masofani toping.
1.1.24. Uchlari $A(4;3)$, $B(0;0)$ va $C(10;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.
1.1.25. $A(5;4)$ nuqta va AB kesmaning o‘rtasi $C(0;3)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi $B(x;y)$ uchini toping.
1.1.26. Uchlari $A(3;4)$, $B(7;7)$ va C$(4;3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning teng yonli ekanligini ko‘rsating.
1.1.27. $A(2;8)$ va B$(6;-4)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesma C,D,E nuqtalar bilan 4 ta teng bo‘laklarga bo‘lingan. C,D va E nuqtalarni toping.
1.1.28. AB kesma $C(-1;-2)$ va $D(2;0)$ nuqtalar orqali teng uch bo‘laklarga bo‘lingan. A va B nuqtalarni toping.
1.1.29. Uchlari $A(2;5)$, $B(6;3)$ va $C(4;0)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.
1.1.30. Uchlari $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ va $D(5;-2)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi hisoblansin.

1.2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lishga doir misollar

1.2.1. $A(-3;8)$, $B(4;-6)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmani $\lambda=\frac{3}{4}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatalari topilsin.
1.2.2. $M(-1;3)$, $N(4;-7)$ nuqtalar bilan chegaralangan MN kesmani $\lambda=\frac{2}{3}$ nisbatda bo‘luvchi P nuqtaning koordinatalari topilsin.
1.2.3. $A(4;-5)$, $B(-2;7)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmani $\lambda=\frac{1}{5}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatalari topilsin.
1.2.4. $M(1;-4)$, $N(-7;12)$ nuqtalar bilan chegaralangan MN kesmani $\lambda=\frac{3}{5}$ nisbatda bo‘luvchi P nuqtaning koordinatalari topilsin.
1.2.5. $A(-2;-3)$, $B(3;7)$ nuqtalar bilan chegaralangan AB kesmani $\lambda=\frac{3}{2}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatalari topilsin.
1.2.6. Quyidagi hollarning har birida AB kesma o‘rtasining koordinatalari topilsin:
1) $A(2;3)$, $B(-4;7)$;
2) $A(-2;4)$, $B(2;-4)$;
3) $A(0;0)$, $B(1;1)$.

1.2.7. $A(3;4)$ va $B(2;-1)$ nuqtalar berilgan. AB to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin.
1.2.8. Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning og‘irlik markazi topilsin.
1.2.9. Uchburchak tomonlarining o‘rtalari $M_1(2;4)$, $M_2(-3;0)$, $M_3(2;1)$ berilgan. Uning uchlari topilsin.
1.2.10. Uchburchakning uchlari $A(1;1)$, $B(7;1)$, $C(1;7)$ berilgan. Uchburchak tomonlarining o‘rtalari topilsin.
1.2.11. AB kesmaning bir uchi $A(2;3)$ nuqtada joylashgan. $M(1;-2)$ nuqta uning o‘rtasi. Kesmaning ikkinchi uchi topilsin.
1.2.12. MN kesmaning bir uchi $K(-2;1)$ nuqtada joylashgan. $M(2;5)$ nuqta uning o‘rtasi. Kesmaning ikkinchi uchi topilsin.
1.2.13. AB kesmaning bir uchi $A(-4;2)$ nuqtada joylashgan. $M(4;-1)$ nuqta uning o‘rtasi. Kesmaning ikkinchi uchi topilsin.
1.2.14. Parallelogrammning qo‘shni uchlari $A(-4;-7)$, $B(2;6)$ va diagonallari kesishgan $M(3;1)$ nuqta berilgan. Uning qolgan ikki uchining koordinatalari topilsin.
1.2.15. Ox, Oy o‘qlariga mos ravishda $OA = 8$, $OB = 4$ kesmalar joylashgan. Koordinatalar boshidan AB to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tushirilgan. Perpendikulyar asosi AB kesmani qanday nisbatda bo‘ladi? (Dekart koordinatalar sistemasi).
1.2.16. $A(-3;1)$, $B(2;-3)$ nuqtalar orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqqa shunday M nuqta topilsaki, $\overline{AM} = 3\overline{AB}$ tenglik bajarilsin.
1.2.17. Trapetsiyaning uchta ketma-ket joylashgan $A(-2;-3)$, $B(1;4)$, $C(3;1)$ uchlari berilgan. Agar AD asosi BC asosidan 5 marta katta bo‘lsa, trapetsiyaning to‘rtinchi D uchi topilsin.
1.2.18. $A(-4;2)$ va $B(8;-7)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani uchta teng bo‘lakka bo‘luvchi C, D nuqtalar topilsin.
1.2.19. $A(3;4)$ va $B(-6;11)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani uchta teng bo‘lakka bo‘luvchi C, D nuqtalar topilsin.
1.2.20. $C(2;2)$, $D(1;5)$ nuqtalar AB kesmani uchta teng bo‘lakka bo‘lsa, uning A, B uchlari topilsin.
1.2.21. $C(-2;4)$, $D(1;8)$ nuqtalar AB kesmani uchta teng bo‘lakka bo‘lsa, uning A, B uchlari topilsin.

1.2.22. $A(2;4)$ nuqta berilgan. AB to‘g‘ri chiziq ordinata o‘qini C nuqtada, abssissa o‘qini D nuqtada kesib o‘tadi. C nuqta AB kesmani $\frac{2}{3}$ nisbatda va D nuqta $-\frac{3}{4}$ nisbatda bo‘lishini bilgan holda B nuqtaning koordinatalari topilsin.

1.2.23. Kesmaning uchlari $M(3;-2)$ va $N(10;-9)$ nuqtalarda yotadi. C nuqta kesmani $\lambda=\frac{2}{5}$ nisbatda bo‘lsa, shu nuqtaning koordinatalarini toping.

1.2.24. $B(-3;4)$ nuqta AC kesmani $\lambda=\frac{2}{3}$ nisbatda bo‘lsa, $A(1;2)$ ni bilgan holda $C(x;y)$ni koordinatalarini toping.

1.2.25. $C(-5;4)$ nuqta AB kesmani $\frac{3}{4}$ nisbatda, $D(6;-5)$ nuqta esa $\frac{2}{3}$ bo‘lsa, A,B nuqtalarning koordinatalari topilsin.

1.2.26. Uchlari $A(5;-4)$, $B(-1;2)$, $C(5;1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning AD medianasining uzunligini topilsin.

1.2.27. $(4;2)$, $(0;-1)$ nuqtalardan o‘tadigan to‘g‘ri chiziqda $(-4;-4)$ nuqtadan 5 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.

1.2.28. $(4;8)$, $(-1;-4)$ nuqtalardan o‘tadigan to‘g‘ri chiziqda $(-1;-4)$ nuqtadan 4 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.

1.2.29. ABC: $A(4;1)$, $B(7;5)$, $C(-4;7)$ uchburchakning AD bissektrisasining uzunligi hisoblansin.

1.2.30. Trapetsiyaning uchta ketma-ket $A(-1;-2), B(1;3), C(9;9)$ uchlari berilgan. Trapetsiyaning asosi $AD = 15$ bo‘lsa, uning to‘rtinchi D uchi topilsin.

2-MAVZU. BIRINCHI VA IKKINCHI TARTIBLI ALGEBRAIK CHIZIQLAR

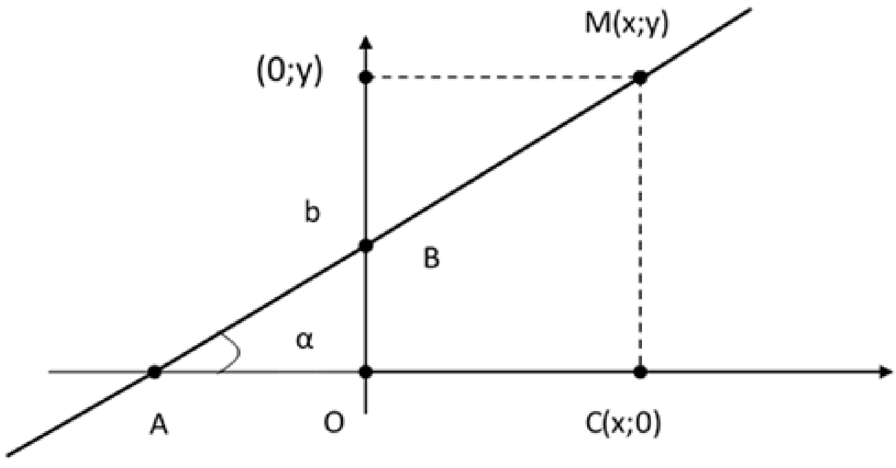
Reja:

1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.
2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi.
3. Ellips.
4. Giperbola.
5. Parabola.

Tayanch iboralar: burchak koeffitsiyenti, parallellik, perpendukulyarlik, to‘g‘ri chiziqlar dastasi, normal, normal vektor, bissektrisa, fazo, parallellik, perpendukulyarlik, kanonik, parametrik, normal, ellips, giperbola, parabola, diametr, vatar, fokus, parametr, asimptota, direkrtisa, ekssentrisitet.

2.1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

Bizda XOY dekart koordinatalar sistemasida to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrlari berilgan bo‘lsin.



2.1.1-chizma

1) To‘g‘ri chiziq bilan absissa o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchak α;
2) To‘g‘ri chiziq bilan ordinata o‘qining kesishish nuqtasi (to‘g‘ri chiziqning ordinata o‘qidan ajratgan kesmasi) koordinatalari $(0; b)$.

Berilganlardan foydalanib, to‘g‘ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaramiz, hamda $tg\alpha = \frac{OB}{AO}$, $OB = b$ ekanligidan $AO = \frac{b}{tg\alpha}$ natijaga erishiladi.

1. Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak α va $B(0; b)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning ordinata o‘qi bilan kesishgan nuqtasi
2. Ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta tanlaymiz va $\triangle ABO$ va $\triangle AMC$ uchburchaklar o‘xshashligidan

$$\frac{OB}{MC} = \frac{AO}{AC} \Longrightarrow b\left(\frac{b}{tg\alpha} + x\right) = \frac{yb}{tg\alpha}$$

$$y = xtg\alpha + b \text{ va } tg\alpha = k$$

deb belgilash kiritsak,

$$y = kx + b \qquad (2.1)$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

To‘g‘ri chiziqning tenglamasini k va b lar bo‘yicha tahlil qilamiz:

1. $k > 0$ bo‘lsa, $tg\alpha > 0$ bo‘ladi. Bunda $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha$ o‘tkir burchak;
2. $k < 0$ bo‘lsa, $tg\alpha < 0$, bo‘ladi. Bunda $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \Rightarrow \alpha$ o‘tmas burchak;
3. $b > 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz ordinata o‘qini musbat tomoni bilan kesishadi;
4. $b < 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz ordinata o‘qini manfiy tomoni bilan kesishadi.

k va b larni o‘zaro kombinatsiyasidan quyidagilar kelib chiqadi:

1. $k > 0$, $b > 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz koordinatalar sistemasining I, II va III choragidan o‘tadi;
2. $k > 0$, $b < 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz koordinatalar sistemasining I, III va IV choragidan o‘tadi;
3. $k < 0$, $b > 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz koordinatalar sistemasining I, II va IV choragidan o‘tadi;

4. $k < 0,\ b < 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chizig‘imiz koordinatalar sistemasining II, III va IV choragidan o‘tadi.

1-Misol. Umumiy tenglamasi $4x - 6y + 3 = 0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidan burchak koeffitsiyenti va boshlang‘ich ordinatasini topamiz:

$$4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 6y = 4x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

hosil bo‘ladi. Bu yerda

$$k = \frac{2}{3},\ \ b = \frac{1}{2}$$

ga teng bo‘ladi.

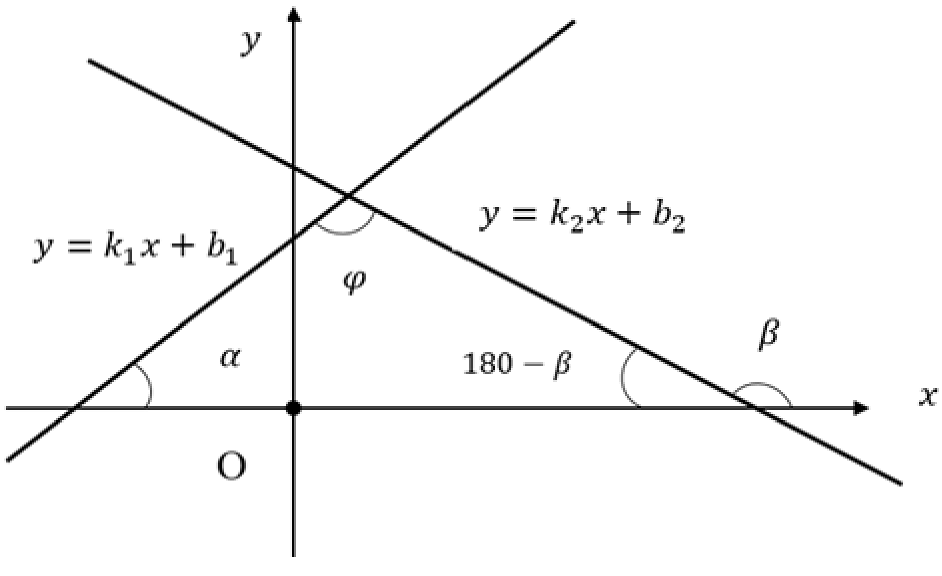
Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

Dekart kordinatalar tekisligida $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ tenglamalar bilan ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

Biz ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi φ burchakni topish uchun:

1) to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchakni α desak, bundan $tg\alpha = k_1$.

2) to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchakni β desak, $tg\beta = k_2$ kelib chiqadi.



2.1.2-chizma

Uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi formulasidan

$$\alpha + 180 - \beta + \varphi = 180 \ \Rightarrow \ \varphi = \beta - \alpha \ \Rightarrow \ tg\varphi = tg(\beta - \alpha)$$

$$tg\varphi = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$$

kelib chiqadi. Yuqoridagi belgilashlardan foydalansak,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (2.2)$$

ikki to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti topish formulasi kelib chiqadi.

2-Misol. Dekart koordinatalar tekisligida $y = x + 4$ va $y = 2x - -7$ tenglamalar 2 ta to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchakni toping.

Yechish: Bizga berilgan $k_1 = 1$ va $k_2 = 2$ ekanligidan, yuqorida berilgan (2.2) formuladan foydalanib,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{2 - 1}{1 + 1 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = arctg\frac{1}{3}$ tengligi kelib chiqadi.

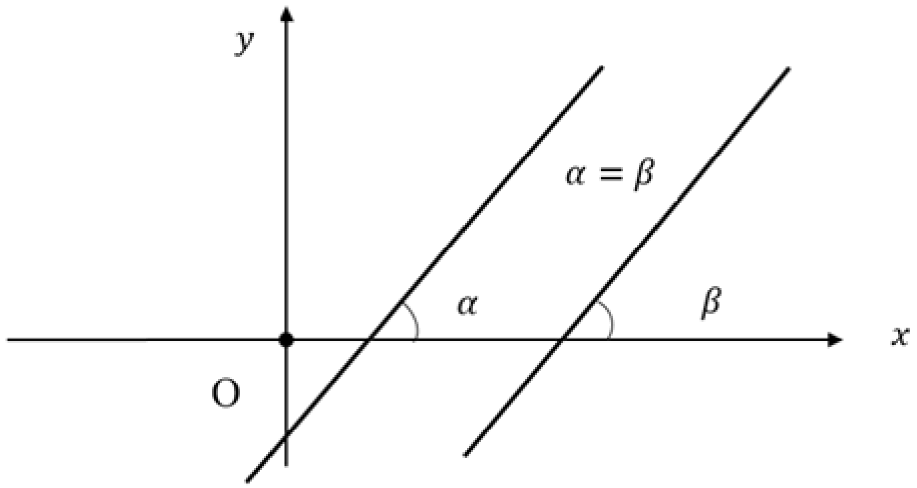
To'g'ri chiziqning parallellik alomatlari.

1-usul. $y = k_1x + b_1$ to'g'ri chizig'imiz $y = k_2x + b_2$ ga parallel, ya'ni $\varphi = 0$ bo'lganda, $tg\varphi = 0$ bo'lib, $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$=0 bo'ladi. Bu yerda $k_2 - k_1$=0 bo'lsa, $k_1 = k_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

2-usul. $\alpha = \beta$ bo'lsa, $tg\alpha = tg\beta$ bo'ladi. Bundan

$$k_1 = k_2 \qquad (2.3)$$

ekanligi kelib chiqadi. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyenti teng bo'lishi kerak.



2.1.3-chizma

To‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik alomatlari.

$y = k_1 x + b_1$ to‘g‘ri chiziq $y = k_2 x + b_2$ ga perpendikulyar bo‘lsa, $tg\varphi = tg90^0$ bo‘ladi. $tg90^0$ mavjud bo‘lmasligi va aniqlanmagan bo‘lishi kerak. Bu uchun $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ bo‘lishi kerakligidan $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo‘ladi. Bundan kelib chiqadiki,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (2.4)$$

to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lishi uchun ularning burchak koeffitsiyentlari ham teskari ham qarama- qarshi ishorali bo‘lishi kerak.

3-Misol. $y = 4x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni toping.

Yechish: 1) $y = 4x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqni topish uchun yuqoridagi (2.3) formuladan foydalanib, $y = 4x + c$ ekanligi kelib chiqadi.

2) $y = 4x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqni topish uchun yuqoridagi (2.4) formuladan foydalanib, $y = -\frac{1}{4}x + c$ ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

XOY tekisikdagi $l: y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq va koordinatalari $M(x_0; y_0)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. M nuqtadan o‘tib l to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzaylik.

1-usul. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan $y = kx + c$ to‘g‘ri chiziq $M(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tishi uchun $y_1 = kx_1 + c$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak.

$c = y_1 - kx_1$ bu tenglikdan

$$y = kx + (y_1 - kx_1) \qquad (2.5)$$

kelib chiqadi.

2-usul. $M(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi

$$y - y_1 = d(x - x_1),$$

$$y = dx + y_1 - dx_1 \qquad (2.6)$$

ko‘rinishida ifodalaniladi.

Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $d = k$ bo‘lishi kerak. Bundan kelib chiqib,

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

ko'rinishidagi tenglamamiz ***berilgan nuqtadan o'tib berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi*** deyiladi.

4-Misol. Berilgan $M(2;-1)$ nuqtadan $y = 0{,}3x - 7$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzing.

1-usul. Bu to'g'ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo'lishi uchun $N = k$ bo'lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan $y = 0{,}3x + c$ formuladan

$$0{,}3 \cdot 2 + c = -1 \implies 0{,}6 + c = -1 \implies c = -1{,}6$$

$y = 0{,}3x - 1{,}6$ kelib chiqadi.

2-usul: Bu to'g'ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo'lishi uchun $N = k$ bo'lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan

$$y + 1 = k(x - 2) \implies y = kx - 2k - 1 \implies k = 0{,}3$$

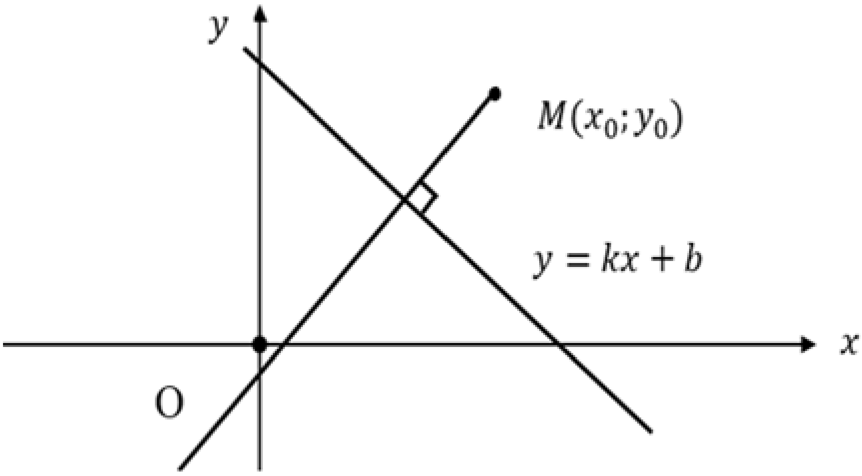
$$y = 0{,}3x - 2 \cdot 0{,}3 - 1$$

$$y = 0{,}3x - 1{,}6$$

kelib chiqadi. $M(2;-1)$ nuqtadan $y = 0{,}3x - 7$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y = 0{,}3x - 1{,}6$ ko'rinishida bo'ladi.

Berilgan nuqtadan o'tib berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar tekisligida $y = kx + b$ to'g'ri chiziq va $M(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va M nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz.



2.1.4-chizma

1-usul. Berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $y = -\frac{1}{k}x_0 + c$ tenglamamizdan c ni topsak, $c = y_0 + \frac{1}{k}x_0$

$$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-usul. $y - y_0 = d(x - x_0)$ tenglamadan d ni topsak, $y = dx + y_0 - dx_0$ va $d = -\frac{1}{k}$ ekanligi kelib chiqadi hamda

$$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0. \qquad (2.7)$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasini topdik.

5-Misol. Berilgan $M(2;-3)$ nuqtadan o‘tib berilgan $y = 0{,}5x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (2.7) formuladan, $y = 0{,}5x - 2$ to‘g‘ri chiziq tenglamasiga perpendikulyar bo‘lgan $y = -2x + c$ tenglamasidan, c va d ni topamiz.

$$-3 = -2 \cdot 2 + c \ \Rightarrow \ c = 1$$

$$(y + 3) = d(x - 2)$$

$$y + 3 = dx - 2d \ \Rightarrow \ y = dx - 2d - 3 \ \Rightarrow \ d = -2.$$

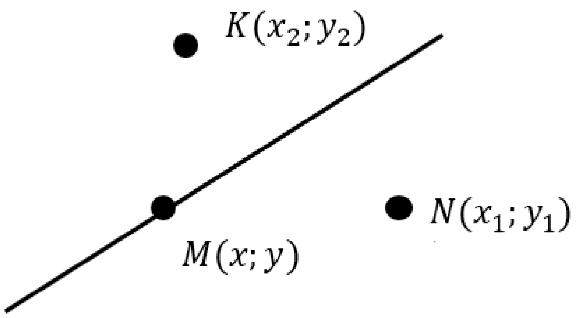
$M(2;-3)$ nuqtadan o‘tib berilgan $y = 0{,}5x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = -2x + 1$ bo‘ladi.

2.2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Bizda ma’lumki tekislikdagi ixtiyoriy ikkita nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Bizga $N(x_1;y_1)$ va $K(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.



2.2.1-chizma

Berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikda yotgan to‘g‘ri chiziqda $M(x;y)$ nuqta olamiz. Bu yerda $|KM|=|NM|$ekanligidan

$|NM|=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ va $|KM|=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$ teng bo‘ladi. Bu tengliklardan

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$x^2-2xx_1+{x_1}^2+y^2-2yy_1+{y_1}^2=$$

$$=x^2-2xx_2+{x_2}^2+y^2-2yy_2+{y_2}^2$$

$$2xx_2-2xx_1+{x_1}^2-{x_2}^2+2yy_2-2yy_1+{y_1}^2-{y_2}^2=0$$

$$(2x_2-2x_1)x+(2y_2-2y_1)y+{x_1}^2-{x_2}^2+{y_1}^2-{y_2}^2=0$$

kelib chiqib, $2x_2-2x_1=A$, $2y_2-2y_1=B$ va ${x_1}^2-{x_2}^2+$ $+{y_1}^2-{y_2}^2=C$ belgilash keritsak,

$$Ax+By+C=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0) \tag{2.8}$$

to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi hosil bo‘ladi.

Endi ayrim xususiy hollarni ko‘ramiz:

1. $A=0$ va $B\neq 0$ bo‘lsa, $By+C=0$ bo‘ladi va bundan $y=-\frac{C}{B}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi absissa o‘qiga parallel va $(0;-\frac{C}{B})$ nuqtadan o‘tadi;
2. $A\neq 0$ va $B=0$ bo‘lsa, $Ax+C=0$ bo‘ladi va bundan $x=-\frac{C}{A}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi ordinata o‘qiga parallel va $(-\frac{C}{A};0)$ nuqtadan o‘tadi;
3. $A\neq 0$, $B\neq 0$ va $C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0$ bo‘ladi va berilgan to‘g‘ri chizig‘imiz koordinata boshidan o‘tadi.

6-Misol. Berilgan $N_1(2;3)$ va $N_2(4;-2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (2.8) formulada

$|N_1M|=|N_2M|$ ekanligidan

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=(x^2-8x+16)+(y^2+4y+4)$$

$$-4x+4-6y+9=-8x+16+4y+4$$

$$4x+13=10y+20$$

ekanligi ma’lum bo‘ldi. Bundan kelib chiqib, N_1 va N_2nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $4x-10y-7=0$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Tekislikda berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Dekart koordinatalar sistemasida $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalarning har biridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Tuzmoqchi bo‘lgan to‘g‘ri chizig‘imizni $Ax+By+C=0$ ko‘rinishida izlaymiz. Bu to‘g‘ri chiziq $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o‘tishi uchun tenglamalar sistemasidagi (2^*) tenglamani, $M_2(x_2;y_2)$ nuqtadan o‘tishi uchun esa (3^*) tenglamani qanoatlantirishi kerak.

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 & (1^*) \\ Ax_1+By_1+C=0 & (2^*) \\ Ax_2+By_2+C=0 & (3^*) \end{cases}$$

$$(1^*)-(2^*) \Longrightarrow\ A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$
$$(3^*)-(2^*) \Longrightarrow\ A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$$
$$A(x-x_1)=-B(y-y_1),$$
$$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1).$$

hosil bo‘ladi.

$$\begin{cases} A(x-x_1)=-B(y-y_1) \\ A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1) \end{cases}$$

bundan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2.9)$$

kelib chiqadi. Bu tenglama esa tekislikda M_1 va M_2 nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

7-Misol. $A(-3;5)$ va $B(2;1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalarning har biridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Yuqoridagi (2.9) formuladan foydalanib,

$$\frac{x+3}{2+3}=\frac{y-5}{1-5} \Longrightarrow\ -4(x+3)=5(y-5)\ \Longrightarrow -4x-12=5y-25$$
$$-4x-5y+13=0\ \Longrightarrow 4x+5y-13=0$$

A va B nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini keltirib chiqardik.

To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi.

Bizda dekart koordinatalar sistemasida to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chizig‘imiz absissa o‘qidan a uzunlikdagi kesmani, ordinata o‘qidan esa b uzunlikdagi kesmani ajratgan bo‘lsin. Demak, to‘g‘ri chizig‘imiz koordinatalari $A(a;0)$ va $B(0;b)$ bo‘lgan nuqtalardan o‘tar ekan. Bu uchun bizga berilgan $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish yetarli bo‘ladi.

Berilganlardan foydalansak,

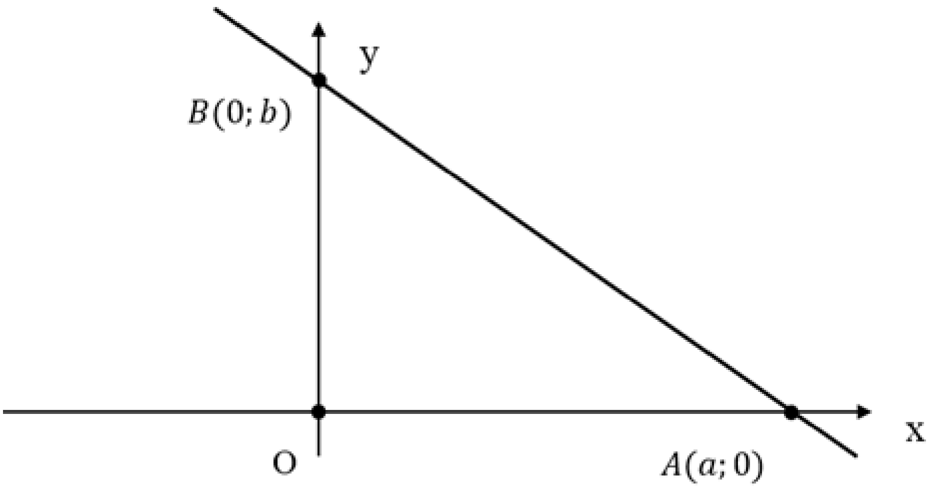
$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \Rightarrow b(x-a)=-a(y-0) \Rightarrow bx-ab=-ay$$

$$bx+ay=ab$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tengligimizni ikkala tomonini ab bo‘lib yuborsak

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (2.10)$$

tenglama kelib chiqadi.



2.2.2-chizma

Ushbu tenglama absissa o‘qini $(a;0)$ va ordinata o‘qini $(0;b)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi va to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

8-Misol. Berilgan $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ to‘g‘ri chizig‘imiz dekart koordinatalar sistemasini qaysi nuqtalarini kesib o‘tadi.

Yechish. (2.10) formuladan foydalangan holda, berilgan tenglama absissa o‘qini $(2;0)$ va ordinata o‘qini $(0;-3)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi.

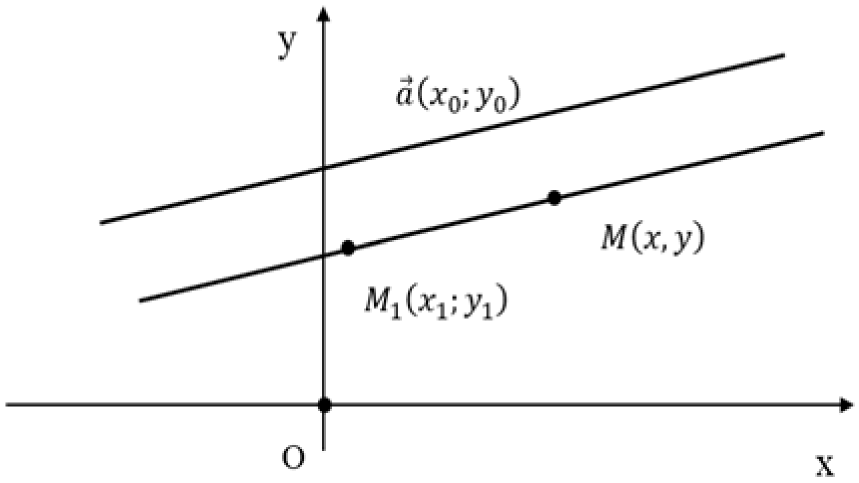
Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektor bo‘yicha yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}(x_0; y_0)$ vektor va $M_1(x_1, y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin.

M_1 nuqtadan o‘tib $\vec{a}$ vektor bo‘yicha yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzish uchun berilgan to‘g‘ri chiziqda yotgan ixtiyoriy M nuqtasini olamiz. Bundan x va y bog‘liqligini ko‘rsatib, to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Bu yerda $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$, $\vec{a} = \{x_0;\ y_0\}$. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinearligidan

$$\frac{x - x_1}{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0}$$



2.2.3-chizma

yoki

$$y_0x - x_0y + x_0y_1 - xy_0 = 0 \qquad (2.11)$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

9-Misol. $\vec{a}(1; 2)$ vektor va $N(3; -4)$ nuqta berilgan. N nuqtadan o‘tib, $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan (2.11) formuladan

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 4}{2} \Rightarrow 2x - 6 = y + 4$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar tenglama $y = 2x - 10$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi esa, ushbu $2x - y - 10 = 0$ ko'rinishida bo'ladi.

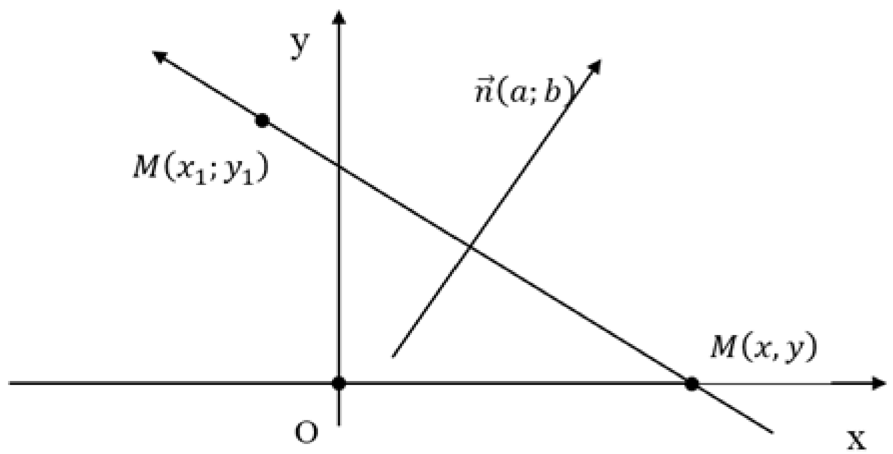
Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi.

Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{n}(a;b)$ vektor va to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1;y_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. Buning uchun to'g'ri chiziq ustidan ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olib, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$ vektorni yasaymiz. $\vec{n}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi uchun skalyar ko'paytmasi 0 ga teng bo'lishi kerak.

Ya'ni, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$ va $\vec{n}(a;b)$, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$.

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$



2.2.4-chizma

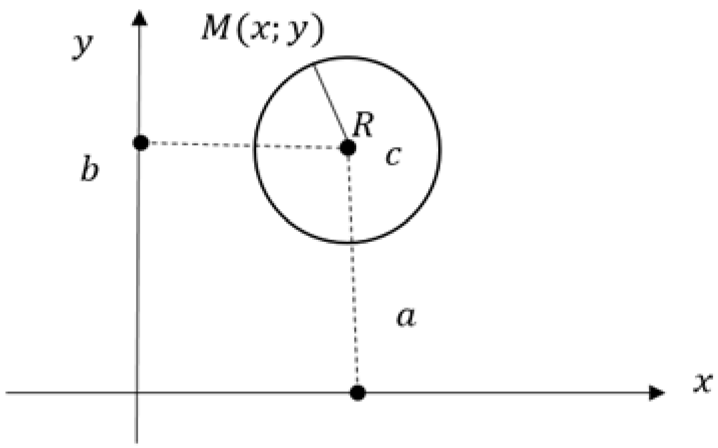
$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0 \qquad (2.12)$$

to'g'ri chiziq tenglamasi $\vec{n}(a;b)$ vektorga perpendikulyar bo'ladi va bu $\vec{n}(a;b)$ vektor to'g'ri chiziqning ***normal vektori*** deyiladi.

2.3.Ellips.

Ta'rif. Tekislikda berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi.

Aylananing ta'rifidan foydalanib uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bizga Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Koordinatalar sistemasida $C(a;b)$ nuqta berilgan bo'lsin. $C(a;b)$ nuqtadan bir xil (R) uzoqlikdagi $M(x;y)$ nuqtalar to'plamiga aylana deyilar ekan.



2.3.1-chizma

$|CM| = R$ aylana tenglamasi bo‘ladi.

$|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Longrightarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (2.13)$$

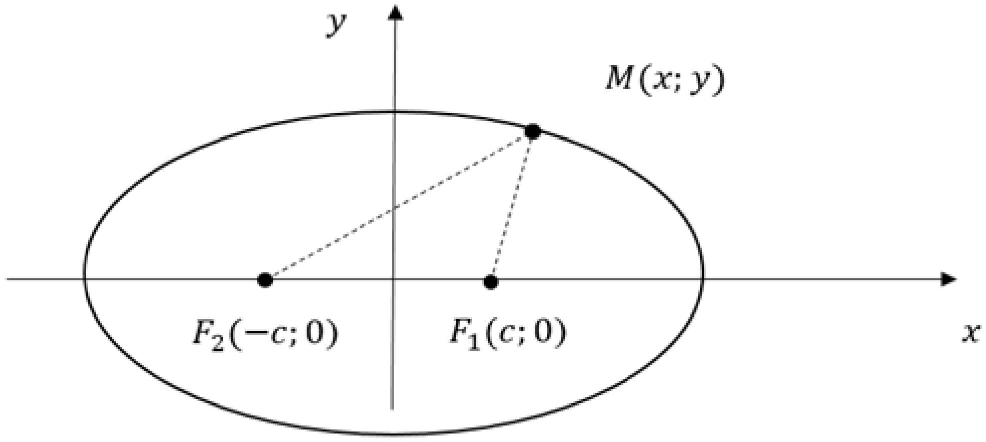
(2.13) tenglama markazi $C(a;b)$ nuqtada radiusi R ga teng bo‘lgan tenglamasini keltirib chiqardik.

Xususiy hollarda markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, ya’ni $O(0;0)$ da bo‘lsa, $x^2 + y^2 = R^2$ bo‘ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda qo‘zg‘almaydigan ikki nuqtagacha masofalarning yig‘indisi o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni ***ellips*** deyiladi.

Bizga qo‘zg‘almas ikkita nuqta berilgan bo‘lsin. Mana shu qo‘zg‘almas ikki nuqtaga ***fokus*** deyiladi.

Tekislikda ikkita F_1 va F_2 nuqta berilgan bo‘lsin. F_1 va F_2 nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va to‘g‘ri chiziqqa yo‘nalish berib uni absissa o‘qi deymiz. F_1 va F_2 nuqtalarning o‘rtasidan ordinata o‘qini o‘tkazamiz.



2.3.2-chizma

$|F_1F_2| = 2c$ ga teng bo'lsin, bundan kelib chiqadiki $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ bo'ladi. Ellepsning ta'rifini qanoatlantiruvchi $M(x; y)$ nuqta bo'lsin.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \text{ bo'ladi.}$$

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2},\ |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$-2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4xc = 0$$

$$a^2 - a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + xc = 0$$

$$a^2 + xc = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

$$a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow\ b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.14)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Fokuslar orasidagi masofani katta o‘qqa nisbatiga ekssentrisitet deyiladi.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \Longrightarrow \varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (2.15)$$

Ellipsning kichik o‘qiga parallel va uning markazidan a/ε masofadan o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

$$x = \pm\frac{c}{\varepsilon} = \pm\frac{a}{c/a} = \pm\frac{a^2}{c}$$

10-Misol. $x^2 + 4y^2 = 4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko‘rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo‘lamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

bu yerdan berilgan tenglama yarim o‘qlari $a = 2$ va $b = 1$ bo‘lgan ellipsni ifodalashini ko‘ramiz. Unda $c^2 = a^2 - b^2 = 3$ bo‘lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ va $F_2(\sqrt{3}; 0)$ nuqtalarda joylashganligini ko‘ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning ekssentrisiteti va direktrisalarini topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm 2 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

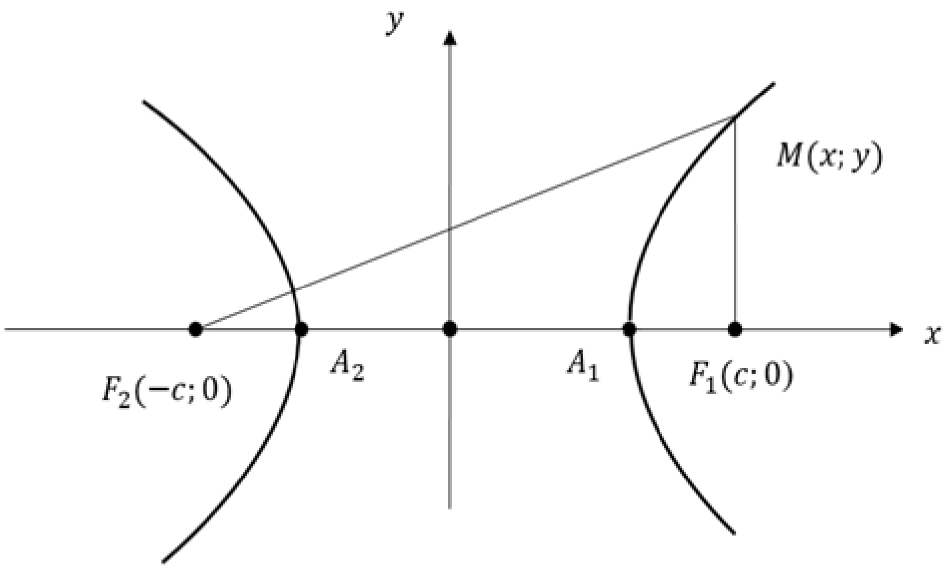
Ellipsga tegishli $M(x; y)$ nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \ r_2 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

2.4. Giperbola.

Fokus deb ataladigan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalarining ayirmasi o‘zgarmas songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rniga ***giperbola*** deyiladi. Fokuslar - F_1, F_2, ular orasidagi masofa $|F_1F_2| = 2c$. Fokuslar yotgan to‘g‘ri chiziqqa yo‘nalish berib absissa o‘qi deylik.



2.4.1-chizma

Absissa o‘qini 2 ta fokusdan o‘tkazaylik. Fokuslarning o‘rtasidan absissa o‘qiga perpendikulyar qilib ***ordinata*** o‘qini o‘tkazaylik.

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a$$

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$= x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\pm 4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) - a^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow c > 0 \Rightarrow\ c^2 - a^2 = b^2$$

$$\Delta MF_1F_2 \Rightarrow\ F_1M - F_2M = 2a\ \Rightarrow\ |F_1M - F_2M| < |F_1F_2| \Rightarrow$$

$$2a < 2c \Rightarrow a < c$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.16)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda $2a$ –haqiqiy o‘q, $2b-$ mavhum o‘q, $2c-$ fokuslar orasidagi masofa.

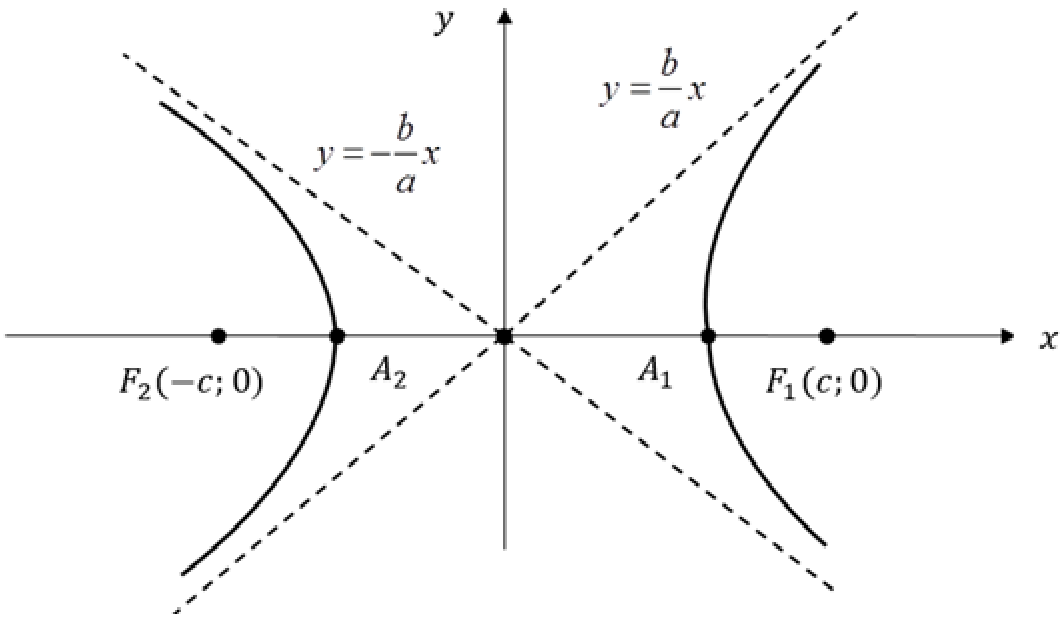
Giperbolaning ekssentrisiteti deb, giperbola fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o‘qqa nisbatiga aytiladi.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$$

Giperbolaning mavhum o‘qiga parallel va uning markazidan

$$x = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{a}{c/a} = \frac{a^2}{c}$$

masofada yotuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa ***direktrisalari*** deyiladi.



2.4.2-chizma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow d\colon x = \pm\frac{c}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{c} \Rightarrow \frac{c^2}{c} < a \Rightarrow a < c.$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (2.17)$$

asimptota deyiladi.

$a = b$ bo‘lsa, ***teng yonli geperbola*** deyiladi.

Fokal radiuslar. Ellips uchun

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$$

$$|MF_1| = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2xc + a^2} =$$

$$= \left|\frac{c}{a}x - a\right| = |\varepsilon x - a|.$$

$$|MF_2| = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right| = |\varepsilon x + a| \implies$$

$$0 < c < a$$

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x \implies r_1 = r_2 = 2a$$

Ellips yoki giperbola uchun fokal radiusi degani, uning biror nuqtasidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalar.

Giperbola uchun

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \implies \frac{x^2}{a^2} + 1 = \frac{y^2}{b^2} \implies y^2 = b^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$|MF_1| = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + 1\right)b^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}x^2 - \frac{a^2}{a^2}2xc + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}b^2 + a^2b^2} = \left|\frac{c}{a}x - a\right|.$$

$$|MF_2| = r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right| \implies c^2 - a^2 = b^2 \implies$$

$$c < a < 0$$

$$r_1 = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a \qquad (2.18)$$

bo‘ladi.

11-Misol. Quyidagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Bu giperbolaning absissasi $x = 8$, ordinatasi $y > 0$ bo‘lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

Yechish: Berilgan tenglamani (2.17) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlari $a = 4$, $b = 3$ ekanligini ko‘ramiz.Bu holda $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow c = 5$ bo‘lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(-5; 0)$ va $F_2(5; 0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3}{4}x = \pm 0{,}75x,$$

ekssentrisiteti $\varepsilon = c/a = 5/4 = 1{,}25$, direktrisalarining tenglamasi esa $x = \pm a/\varepsilon = \pm 4/1{,}25 = \pm 3{,}2$ bo‘ladi. Endi giperbolaning berilgan $M(8; 0)$ nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o‘ng shoxida joylashgan va shu sababli (2.18) formulani " + " ishora bilan qaraymiz:

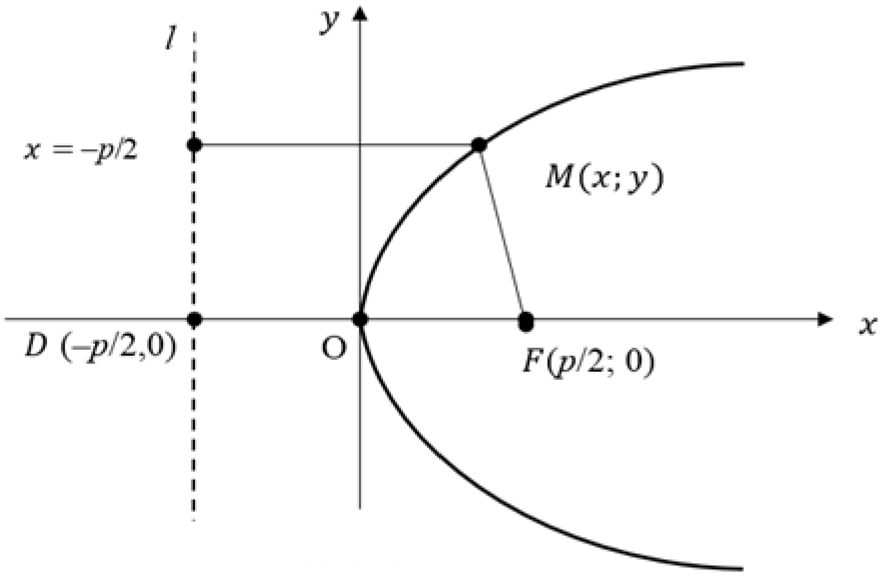
$$r_1 = a + \varepsilon x = 4 + 1{,}25 \cdot 8 = 14,$$
$$r_2 = -a + \varepsilon x = -4 + 1{,}25 \cdot 8 = 6$$

2.5. Parabola.

Berilgan nuqtadan va berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o‘rniga ***parabola*** deyiladi.

Ta’rifdan foydalanib, parabolaning kanonik tenglamasini keltirib chiqaraylik. Bizga F nuqta va l to‘g‘ri chiziq berilgan ekan. F nuqtadan o‘tib l to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar qilib Ox o‘qini olaylik. l to‘g‘ri chiziqqa parallel va F nuqta bilan l to‘g‘ri chiziqni o‘rtasidan Oy o‘qini o‘tkazaylik. Kanonik tenglamasini topmoqchi bo‘lgan parabola ustidan ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta olaylik. F nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa P bo‘lsin. U holda F nuqtaning koordinatalari $F(\frac{p}{2}; 0)$ va l to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo‘ladi. F nuqtadan M

nuqtagacha bo‘lgan masofa $|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ bo‘ladi. M nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa esa $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ bo‘ladi.



2.5.1-chizma

$$|FM| = |Fd|$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 =$$

$$= x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 - xp = xp \Rightarrow$$

$$y^2 = 2px \qquad (2.19)$$

tenglamamiz ***parabola tenglamasi*** hisoblanadi.

12-Misol. Ox o‘qi parabolaning simmetriya o‘qi bo‘lib, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo‘lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola va uning direktrisasi tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab, masala shartiga asosan, parabolaning p parametrini topamiz:

$$|OF| = 4 \Rightarrow p/2 = 4 \Rightarrow p = 8.$$

Unda, (2.19) formulaga asosan, parabola tenglamasini topamiz:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 8x = 16x.$$

Bu yerdan direktrisa tenglamasi $x = -p/2 \Rightarrow x = -4$ ekanligini ko‘ramiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ kvadrat uchhadning grafigi uchi koordinatalari

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

bo'lgan $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada, simmetriya o'qi esa Oy o'qiga parallel va $x = -b/2a$ tenglamaga ega bo'lgan vertikal to'g'ri chiziqdan tashkil topgan paraboladan iboratdir. Agar $a > 0$ bo'lsa, parabola yuqoriga, $a < 0$ bo'lsa, pastga yo'nalgan bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

2.1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziq orasidagi burchakga doir misollar.

2.1.1. To'g'ri chiziq tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglama ko'rinishiga keltiring.

1) $3x + 2y - 9 = 0$; 2) $5x - 7y + 8 = 0$;
3) $2x - 6y + 11 = 0$; 4) $4x + 9y - 13 = 0$.

2.1.2. Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlarni yasang:

1) $y = 3x + 4$; 2) $y = 0{,}5x + 2$; 3) $y = \frac{3}{4}x - 5$;
4) $x + 2 = 0$; 4) $3x + 2y - 9 = 0$; 6) $2y - 5x + 2 = 0$.

2.1.3. $N(2; 3)$ nuqtadan o'tib, burchak koeffitsiyenti -5 ga teng bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

2.1.4. Quyidagi to'g'ri chiziqlar qaysi koordinata choraklaridan o'tadi.

1) $y = 2x - 5$; 2) $y = 5x + 7$;
3) $y = -3x + 4$; 4) $y = -7x - 3$.

2.1.5. Quyidagi

1) $2x + 3y = 0$, $x - y + 5 = 0$;
2) $x - 3y + 2 = 0$, $2x + y = 0$;
3) $2x + 5y - 3 = 0$, $5x + 2y - 6 = 0$;
4) $3x + 4y - 12 = 0$, $5x - 12y + 60 = 0$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi topilsin.

2.1.6. Dekart koordinatalar sistemasida $N(3; -2)$ nuqtadan o'tib, koordinata o'qlariga parallel (perpendikulyar) bo'lgan to'g'ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.

2.1.7. $A(2;3)$ va $B(-1;0)$ nuqtalar berilgan. B nuqtadan o‘tuvchi va AB kesmaga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
2.1.8. Uchburchakning $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$ uchlaridan o‘tuvchi va ular qarshisida yotgan tomonlarga parallel (perpendikulyar) to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamalari tuzilsin.
2.1.9. $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o‘tib, $2x + 7y = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.
2.1.10. Dekart koordinatalar tekisligida $y = 3x - 4$ va $y = -2x + 3$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsa, ular orasidagi burchakni toping.
2.1.11. $x - 3y + 1 = 0$ to‘g‘ri chiziqda $M(-3;1)$, $N(5;4)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.
2.1.12. Ikki to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$ ma’lum, ular orasidagi burchakni toping.
2.1.13. Berilgan $K(3;1)$ nuqtadan o‘tib, $2x + 3y - 1 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa 45^0 burchak ostida og‘ishgan to‘g‘ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.
2.1.14. Koordinatalar boshidan o‘tib, $5x - 6y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziq bilan tashkil qilgan burchagining tangensi $\pm\frac{7}{6}$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.
2.1.15. Ikkita $A(3;3)$, $B(0;2)$ nuqta berilgan. $x + y - 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqdagi AB kesma 45^0 burchak ostida ko‘rinadigan nuqtani toping.

2.2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasiga doir misollar.

2.2.1. Quyidagi $K_1(3;1)$, $K_2(2;3)$, $K_3(6;3)$, $K_4(-3;-3)$, $K_5(3;-1)$, $K_6(-2;1)$ nuqtalardan qaysi biri $2x - 3y - 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli va qaysilari tegishli emas.
2.2.2. $3x - 2y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalar P_1, P_2, P_3, P_4, va P_5; uning absissalari quyidagicha bo‘lsa: 4; 0; 2; -2 va -6. Bu nuqtalarning ordinatalarini toping.
2.2.3. $x - 3y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalar Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, va Q_5 uning ordinatalari quyidagicha bo‘lsa: 4; 0; 2; -2 va -6. Bu nuqtalarning absissalarini toping.

2.2.4. To‘g‘ri chiziq tenglamasi $5x + 3y - 3 = 0$ berilgan:
1) to‘g‘ri chiziqqa parallel;
2) to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing.

2.2.5. $K_1(2; -3)$ nuqtadan o‘tib, quyidagi to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing:
1) $3x - 7y + 3 = 0$; 2) $2x + 9y - 11 = 0$; 3) $3x - 7y + 3 = 0$;
4) $x + 9y - 11 = 0$; 5) $16x - 24y - 7 = 0$; 6) $2x + 3 = 0$.

2.2.6. $M(7; 4)$ nuqtadan o‘tuvchi va $3x - 2y + 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel (perpendikulyar) to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

2.2.7. $x + y + 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel (perpendikulyar) va $M(-8; 1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

2.2.8. $M(2; 5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$ nuqtalardan teng uzoqlikdagi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

2.2.9. Parallel bo‘lgan $x + y - 1 = 0$, $x + y - 13 = 0$ to‘g‘ri chiziqlardan teng uzoqlikda joylashgan va ularga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

2.2.10. ABC uchburchakning AB, BC va AC tomonlarining tenglamasi berilgan: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$.
Uning uchlarining koordinatalarini toping.

2.2.11. $A(-3; 1)$, $B(2; -3)$, $C(5; -4)$, $D(-2; 4)$, $E(-1; 3)$ va $F(-5; -1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.
a) A va B dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning; b) B va C dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning; c) A va C dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning; d) B va E dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning; e) C va F dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning; f) D va F dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning
1) burchak koeffitsiyentli; 2) umumiy; 3) koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamalari tuzilsin.

2.2.12. Umumiy tenglama bilan berilgan ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni toping:
1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y = 0$;
2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$; 4) $3x + 2y - 1 = 0$.

2.2.13. $2x+3y+4=0$ to‘g‘ri chiziq berilgan. $M_1(2;1)$ nuqtadan o‘tib, berilgan to‘g‘ri chiziq bilan 45^0 burchak hosil qiladigan to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

2.2.14. $x-4y-12=0$ tenglama va koordinata o‘qlari bilan chegaralangan uchburchakning yuzini toping .

2.2.15. Koordinatalar sistemasida berilgan $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziq, boshi $N(5;4)$ nuqtada va oxiri $M(2;1)$ nuqtada joylashgan kesmani qanday nisbatda bo‘ladi?

2.3. Ellipsga doir misollar.

2.3.1. Markazi $C(x;y)$ va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasini tuzing.

1) $C(2;-3)$, $R=5$; 2) $C(-5;4)$, $R=2$;
3) $C(7;1)$, $R=3$; 4) $C(-2;9)$, $R=4$;
5) $C(-4;6)$, $R=7$; 6) $C(6;-3)$, $R=6$;

2.3.2. Quyidagi har bir holda aylananing kanonik tenglamasini tuzing. Markazi va radiusini aniqlang.

1) $x^2+y^2-6x=0$;
2) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
3) $x^2+y^2-10x+24y-56=0$;
4) $3x^2+3y^2+6x-4y-1=0$;
5) $x^2+y^2-2x+4y=0$;
6) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$;

2.3.3. 1) $x^2+y^2-1=0$; 2) $x^2+y^2-10x+24y-56=0$;
3) $9x^2+9y^2-3=0$; 4) $3x^2+3y^2+6x-4y-1=0$;
aylanalarga nisbatan $A(3;1)$, $B(1;0)$, $C(-2;0)$ va $D(-2;1)$ nuqtalarning vaziyatini aniqlang.

2.3.4. Koordinatalari quyidagi:
1) $(x-1)^2+(y-3)^2\geq 25$; 2) $16\leq (x-1)^2+(y+3)^2\leq 25$;
3) $(x-1)^2+(y-2)^2\leq 25$, 4)$(x-4)^2+(y-6)^2\leq 9$;
5) $x^2+y^2-6x\leq 0, y\geq 0$; 6) $x^2+y^2-4x\leq 0, |x|\geq 1$
tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar tekislikda qanday joylashadi?

2.3.5. Ox o‘qiga $M(6;0)$ nuqtada urinuvchi va $N(9;9)$ nuqta orqali o‘tadigan aylananing tenglamasi tuzilsin.

2.3.6. Markazi $C(2;3)$ nuqtada yotadigan va $x-2y+1=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinadigan aylananing tenglamasi tuzilsin.

2.3.7. $A(-4;1)$, $B(3;2)$, $C(-2;-5)$, $D(5;0)$ va $E(3;-6)$ nuqtalar berilgan.

1) A, B, C nuqtalardan; 2) A, B, D nuqtalardan;
3) A, B, E nuqtalardan; 4) B, C, D nuqtalardan;
5) B, C, E nuqtalardan; 6) C, D, E nuqtalardan

o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

2.3.8. Berilgan $A(2;7)$, $B(-2;1)$ nuqtalar orqali o‘tadigan va radiusi $r=\sqrt{26}$ bo‘lgan aylananing tenglamasini tuzing.

2.3.9. Quyidagilardan foydalanib aylana tenglamasini tuzing:

1) markazi koordinata boshida va radiusi $R=3$ bo‘lgan;
2) markazi $C(2;-3)$ nuqtada va radiusi $R=7$ bo‘lgan;
3) markazi koordinata boshida va $C(6;-8)$ nuqtadan o‘tuvchi;
4) markazi $A(2;6)$ nuqtada va $C(-1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi;
5) $A(3;2)$ va $B(-1;6)$ nuqtalar diametrning uchlari bo‘lgan;
6) markazi koordinata boshida va $3x-4y+20=0$ to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi.

2.3.10. Ikki parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi $2x+y-5=0$, $2x+$ $+y+15=0$ va bu to‘g‘ri chiziqlarning biri bilan $A(2;1)$ nuqtada urinuvchi aylana berilgan. Aylananing tenglamasini tuzing .

2.3.11. Ikki aylana markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing:

1) $(x-3)^2+y^2=9$ va $(x+2)^2+(y-1)^2=1$;
2) $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ va $(x+2)^2+(y+5)^2=25$.

2.3.12. $A(1;-1)$ nuqta va ikki $x^2+y^2+2x-2y-23=0$, x^2+ $+y^2-6x+12y-35=0$ aylananing kesishgan nuqtasi orqali o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

2.3.13. $x^2+y^2+3x-y=0$, $3x^2+3y^2+2x+y=0$ aylananing kesishgan nuqtalari orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

2.3.14. Quyidagi malumotlarga ko‘ra ellipsning kanonik tenglamasi tuzilsin:

1) yarim o‘qlari mos ravishda 5 va 4ga teng;
2) katta o‘qi 10, fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng;
3) katta o‘qi 26 va ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

2.3.15. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellips fokuslarining koordinatalari topilsin.

2.4. Giperbolaga doir misollar.

2.4.1. $x^2 - y^2 = 1$ giperbolaga nisbatan $A(4;1)$, $B(1;-2)$, $C(\sqrt{2};1)$ nuqtalarning vaziyati aniqlansin.

2.4.2. Quyidagi malumotlarga ko‘ra:

1) haqiqiy o‘qi $a = 5$ mavhum o‘qi $b = 3$;

2) fokuslari orasidagi masofa 10 ga, haqiqiy o‘qi esa 8 ga teng giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

2.4.3. Quyidagi ma’lumotlarga ko‘ra:

1) ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{12}{13}$ haqiqiy o‘qi 48 ga teng;

2) haqiqiy o‘qi 16 ga, asimptotasi bilan absissa o‘qi orasidagi φ burchak tangensi $\frac{3}{4}$ ga teng.

3) giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

2.4.4. Teng tomonli giperbolaning ekssentrisiteti hisoblansin.

2.4.5. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = \pm\frac{5}{12}x$ va giperbolada yotuvchi $M(24;5)$ nuqta berilgan. Giperbola tenglamasi tuzilsin.

2.4.6. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ giperbolaning fokuslarini aniqlang.

2.4.7. $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ giperbolaning fokuslarini aniqlang.

2.4.8. Quyidagi ma’lumotlarga ko‘ra:

1) direktrisalari orasidagi masofa $\frac{32}{5}$ ga teng va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

2) asimptotalari orasidagi burchak 60^0 ga teng va $c = 2\sqrt{3}$ giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

2.4.9. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellips bilan fokusdosh va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$ bo‘lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

2.4.10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbola berilgan:

1) fokuslarining koordinatalari;

2) ekssentrisiteti;

3) asimptotalarining va direktrisalarining tenglamalari;

4) qo‘shma giperbolaning tenglamasi va uning ekssentrisiteti hisoblansin.

2.4.11. Giperbola haqida quyidagilar ma’lum bo‘lsa, uning yarim o‘qlari hisoblansin:

1) fokuslari orasidagi masofa 8 ga va direktrisalari orasidagi masofa 6 ga teng;

2) direktrisalari $x = \pm 3\sqrt{2}$ tenglamalar bilan berilgan va asimptotalari orasidagi burchak to‘g‘ri burchak;

3) asimptotalari $y = \pm 2$ tenglamalar bilan berilgan va fokuslari markazdan 5 birlik masofada;

4) asimptotalari $y = \pm\frac{5}{3}x$ tenglamalar bilan berilgan va giperbola $N(6; 9)$ nuqtadan o‘tadi.

2.4.12. Teng tomonli giperbola $x^2 - y^2 = 8$ berilgan. Unga fokusdosh bo‘lib, $M(-5; 3)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasi topilsin.

2.4.13. Fokusi absissa o‘qida joylashgan va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing, agar quyidagilar ma’lum bo‘lsa:

1) uning o‘qlari $2a = 10$ va $2b = 8$;

2) fokuslar orasidagi masofa $2a = 10$ va mavhum o‘qi $2b = 8$;

3) fokuslar orasidagi masofa $2c = 6$ va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) haqiqiy o‘qi $2a = 16$ va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) asimptota tenglamasi $y = \pm\frac{4}{3}x$ va fokuslar orasidagi masofa $2c = 20$;

6) direktrisalar orasidagi masofa 22 ga teng va fokuslar orasidagi masofa $2c = 26$.

2.4.14. Fokusi ordinata o‘qida joylashgan va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing, agar quyidagilar ma’lum bo‘lsa:

1) uning yarim o‘qlari $a = 6$, $b = 18$;

2) fokuslar orasidagi masofa $2c = 10$ va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) asimptota tenglamasi $y = \pm\frac{12}{5}x$ va uchlari orasidagi masofa 48;

4) direktrisalar orasidagi masofa $7\frac{1}{7}$ va ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

2.4.15. Quyida berilgan giperbolalarni a va b yarim o‘qlarini toping:
1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$; 3) $x^2-4y^2=16$;
4) $x^2-y^2=1$; 5) $4x^2-9y^2=25$; 6) $25x^2-16y^2=1$.

2.5. Parabolaga doir misollar.

2.5.1. Quyidagi nuqtalardan qaysilari $y^2=6x$ parabolaga tegishli:
1) $A(-2;4)$; 2) $B(1;5)$; 3) $C(3;1)$; 4) $A(-2;4)$.

2.5.2. Quyidagi parabolalardan qaysilarining fokusi a) $F_1(3;0)$, b) $F_2(-3;0)$, c)$F_3(0;3)$ va d)$F_4(0;-3)$ nuqtadan o‘tadi:
1) $y^2=3x$; 2) $y^2=-3x$; 3) $x^2=3y$; 4) $x^2=-3y$;
5) $y^2=6x$; 6) $y^2=-6x$; 7) $x^2=6y$; 8) $x^2=-6y$.

2.5.3. Quyidagi parabolalardan qaysilarining direktrisa tenglamasi
a) $x=5$, b) $x=-5$, c) $y=5$ va d) $y=-5$:
1) $y^2=5x$; 2) $y^2=-5x$; 3) $x^2=5y$; 4) $x^2=-5y$.

2.5.4. $y^2=4x$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

2.5.5. $x^2=4y$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

2.5.6. $y^2=-8x$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

2.5.7. $y^2=6x$ parabola direktrisasi tenglamasini tuzing.

2.5.8. Parabolaning fokusidan uchigacha bo‘lgan masofa 3 ga teng, uning kanonik tenglamasini tuzing.

2.5.9. Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo‘lgan masofa 2 ga teng, uning kanonik tenglamasini tuzing.

2.5.10. Parabolaning fokusi $F(3;0)$ nuqtada va $x=-1$ direktrisasining tenglamasi bo‘lsa, parabola tenglamasini tuzing.

2.5.11. Parabolaning uchidan fokusigacha bo‘lgan masofa 3 ga teng va parabola Ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, Oy o‘qiga urinsa parabola tenglamasini tuzing.

2.5.12. Fokusi $M(5;0)$ nuqtada bo‘lib, ordinatalar o‘qi direktrisa bo‘lsa, parabola tenglamasini tuzing.

2.5.13. Parabola Ox o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, $M(1;-4)$ nuqtadan va koordinatalar boshidan o‘tadigan parabola tenglamasini tuzing.

2.5.14. Parabolaning fokusi $M(0;2)$ nuqtada va uchi koordiniatalar boshida yotsa, parabola tenglamasini tuzing.

2.5.15. Parabola Oy o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lib, $M(6;-2)$ nuqtadan va koordinatalar boshidan o‘tadi, parabola tenglamasini tuzing.

3-MAVZU. MATRITSALAR

Reja:
1. Matritsalar va ularning turlari.
2. Matritsalar ustida amallar.

Tayanch iboralar: matritsa, matritsa tartibi, matritsa elementi, to‘rtburchakli matritsa, kvadrat matritsa, ustun matritsa, satr matritsa, teng matritsalar, diagonal element, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsalar yig‘indisi, matritsalar ayirmasi, matritsalar ko‘paytmasi, matritsaning darajasi, matritsaning transponirlangani, kososimmetrik matritsa.

3.1.Matritsalar va ularning turlari.

Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko‘p qo‘llaniladigan tushuncha bo‘lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko‘rinishda ifodalanadi.

1-Ta’rif*: m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi $m\,n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m \times n$ tartibli* ***matritsa,*** *uni tashkil etgan sonlar esa* ***matritsaning elementlari*** *deb ataladi.*

Matritsalar A, B, C ... kabi bosh harflar bilan, ularning i - satr va j - ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi.

1 - Misol. Berilgan $A = \begin{pmatrix} 4 & -2{,}5 & 3 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini va elementlarini ko‘rsatib o‘ting.

Yechish. Yuqorida berilgan matritsa 2×3 tartibli bo‘lib, ya’ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko‘rinishidagi $2 \times 3 = 6$ ta sondan tashkil topgan. Uning 1- satr elementlari $a_{11} = 4,\ a_{12} = -2{,}5,\ a_{13} = 3$ va 2-satr elementlari $a_{21} = 5,\ a_{22} = -2,\ a_{23} = -6$ sonlardan iborat. Bu matritsaning 1 - ustuni $a_{11} = 4$ va $a_{21} = 5$, 2-ustuni $a_{12} = -2{,}5$ va $a_{22} = -2$, 3-ustuni esa $a_{13} = 3$ va $a_{23} = -6$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko‘rsatishga ehtiyoj bo‘lsa, u $A_{m\times n}$ ko‘rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ko‘rinishda ifodalanadi.

2-Ta’rif: $A_{m\times n}$ *matritsada* $m = n \neq 1$ *bo‘lsa, u* ***kvadrat matritsa***, $m \neq n$ *(*$m \neq 1$, $n \neq 1$*) bo‘lsa* ***to‘g‘ri burchakli matritsa***, $m = 1$, $n \neq 1$ *holda* ***satr matritsa*** *va* $m \neq 1$, $n = 1$ *bo‘lganda* ***ustun matritsa*** *deb ataladi.*

$A_{n\times n}$ kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $m = 1$ va $n = 1$ bo‘lganda $A_{1\times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma’lum bir ma’noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-Ta’rif: *A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni* $a_{ij} = b_{ij}$ *shart bajarilsa, ular* ***teng matritsalar*** *deyiladi.*

A va B matritsalarning tengligi $A = B$ yoki $(a_{ij}) = (b_{ij})$ ko‘rinishda belgilanadi.

2 - Misol. Ixtiyoriy $a \neq 0$ soni uchun

$$A = \begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o‘zaro teng bo‘la oladimi?

Yechish. Birilgan matritsalarni tengligini taqqoslash uchun

$$A = \begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

ekanligini ko‘rish mumkin. Bundan $A = B$ ekanligi kelib chiqadi.

4-Ta’rif: $A = \{a_{ij}\}$ *matritsada* $i = j$ *bo‘lgan* a_{ij} *elementlar* ***diagonal elementlar*** *deb ataladi.*

3 - Misol. Yuqorida ko‘rilgan 1 – misoldagi $A_{2\times 3}$ matritsaning diagonal elementlarini toping.

Yechish. Matritsamizning diagonal elementlari $a_{11} = 4$ va $a_{22} = -2$ ekanligini ko‘rish mumkin.

5-Ta'rif: *Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan* $(a_{ij} = 0, i \neq j)$ *kvadrat matritsa* ***diagonal matritsa*** *deyiladi.*

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$A_{2\times2} = A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad , \quad B_{3\times3} = B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo'ladi.

6-Ta'rif: *Barcha diagonal elementlari* $a_{ij} = 1$ *bo'lgan* $n-$ *tartibli diagonal matritsa* $n-$ *tartibli birlik matritsa yoki qisqacha* ***birlik matritsa*** *deyiladi.*

Odatda $n-$ tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalardir.

7-Ta'rif: *Barcha elementlari nolga teng* $(a_{ij} = 0)$ *bo'lgan ixtiyoriy* $m \times n$ *tartibli matritsa* ***nol matritsa*** *deyiladi.*

$m \times n$ tartibli nol matritsa $O_{m\times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rsatilgan tartibli nol matritsalar bo'ladi.

3.2.Matritsalar ustida amallar.

Endilikda matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-Ta'rif: *Ixtiyoriy tartibli* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *matritsaning istalgan* λ ***songa ko'paytmasi*** *deb* $C_{m\times n} = \{\lambda \cdot a_{ij}\}$ *kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.*

4- Misol. A matritsaning λ songa ko‘paytmasi $\lambda \cdot A$ teng bo‘lishini isbotlang.

Yechish. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 6A=\begin{pmatrix} 6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$

***9-Ta’rif**: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ **matritsalar yig‘indisi** deb elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladi.*

Bunda A va B matritsalarning yig‘indisi $A+B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo‘shish orqali hisoblanadi.

Masalan,

$$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A+B=\begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni songa ko‘paytirish va o‘zaro qo‘shish amallari quyidagi qonunlarga bo‘ysunishi bevosita ularning ta’riflaridan kelib chiqadi:

I. $A+B=B+A$ (qo‘shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (qo‘shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda\cdot(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda A+\mu A$ (distrubutivlik qonuni)

Bundan tashqari yuqoridagi ta’riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas:

$$A+0=A,\ A+A=2A,\ 0\cdot A=0,\ \lambda\cdot 0=0.$$

***10-Ta’rif**: Bir xil tartibli $A_{m\times n}=(a_{ij})$ va $B_{m\times n}=(b_{ij})$ **matritsalar ayirmasi** deb $A_{m\times n}$ va (-1) $B_{m\times n}$ matritsalarning yig‘indisiga, ya’ni $A_{m\times n}+(-1)\cdot B_{m\times n}$ matritsaga aytiladi.*

5 - Misol. A va B matritsalarning ayirmasini toping.

$$A=A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $A-B$ ko‘rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o‘zaro ayirish orqali hisoblanadi.

$$A-B=\begin{pmatrix}5-1 & 3-0 & -1-1\\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\\ -2 & 10 & -2\end{pmatrix}.$$

11-Ta'rif: *$A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{p\times n}=(b_{ij})$* ***matritsalarning ko'paytmasi*** *deb shunday $C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}, \qquad i=1,2,\cdots,m; \quad j=1,2,\cdots,n$$

yig'indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m\times p}=(a_{ij})$ va $B_{q\times n}=(b_{ij})$ matritsalar uchun $p=q$, ya'ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lgandagina ularning ko'paytmasi mavjud bo'ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko'paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko'paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$ ko'paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning $i-$ satr elementlarini B matritsaning $j-$ ustunidagi mos elementlariga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish orqali hisoblanadi. Bu "satrni ustunga ko'paytirish" qoidasi deb aytiladi.

6- Misol. A va B matritsalarning ko'paytmasini toping.

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalar uchun $m=3,\ p=q=2,\ n=2$ bo'lgani uchun ularning ko'paytirish mumkin va ko'paytma matritsa $AB=C_{3\times 2}$ quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3\times 2}=\begin{pmatrix}3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-4)+1\cdot 2\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2\\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun $AB\neq BA$, ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $A_{m\times q}\cdot B_{q\times n}=C_{m\times n}$ ko'paytma mavjud, ammo $B_{q\times n}\cdot A_{m\times q}$ ko'paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo'lgan taqdirda, ya'ni $n=m$ holda ham ular teng bo'lishi shart emas.

7 - Misol. AB va BA matritsalarning ko‘paytmasi teng matritsalar bo‘la oladimi?

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalar uchun $AB \neq BA$, chunki

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 22\\ 8 & 23\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34 & 33\\ -4 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko‘paytmasi va yig‘indisi quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo‘ladi:

I. $A(BC) = (AB)C$, $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ - (ko‘paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B + C) = AB + AC -$ (ko‘paytirish va qo‘shish amallari)
$(A + B)C = AC + BC -$ (distributivlik qonunlari);

III. $AE = EA = A$, $0 \cdot A = 0$, $A \cdot 0 = 0$, $0 \cdot A = 0$.

Bunda E va 0 mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarni ifodalaydi.

Matritsa ko‘paytmasi ta’rifidan ko‘rinadiki, har qanday $n -$ tartibli A kvadrat matritsani o‘ziga – o‘zini ko‘paytirish mumkin va natijada yana $n -$ tartibli kvadrat matritsa hosil bo‘ladi.

12-Ta’rif: *A kvadrat matritsani o‘zaro m marta ($m -$ birdan katta ixtiyoriy natural son) ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan kvadrat matritsa A* ***matritsaning $m -$ darajasi*** *deyiladi.*

A matritsaning $m -$ darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta’rifdan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi ($m, k -$ natural sonlar, λ-haqiqiy son):

$$1.\ A^m \cdot A^k = A^{m+k}\ ;\quad 2.\ (A^m)^k = A^{mk}\ ;\quad 3.\ (\lambda A)^m = \lambda^m A^m\ ;$$

$$4.\ E^m = E;\quad 5.\ \mathrm{O}^m = \mathrm{O}.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko‘tarish amalini kiritish mumkin ekan.

8 - Misol. Quyida berilgan A matritsani natural darajalarga ko‘rsating.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Yechish. 12 - ta'rifga asosan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9 & -5\\ -1 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 60\\ 12 & -47\end{pmatrix}.$$

teng bo'ladi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, 5 - xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni $A^m=0$ tenglikdan har doim ham $A=0$ ekanligi kelib chiqmaydi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq \mathrm{O}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{O}.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko'tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

13-Ta'rif: $B=(b_{ij})$ *matritsa* $A=(a_{ij})$ *matritsaning* ***transponirlangani*** *deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida $a_{ij}=b_{ji}$ shart bajarilsa.*

A matritsaning transponirlangani A^T kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m\times n$ tartibli bo'lsa, uning transponirlangani A^T $n\times m$ tartibli bo'ladi.

Masalan,

$$A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 3 & 0 & -5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^T_{3\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish ***transponirlash amali*** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. $(A^T)^T=A$;
2. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$ ($\lambda -$ ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$;
4. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

***14-Ta'rif**: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^T = A$ bo'lsa, u **simmetrik matritsa,** $A^T = -A$ bo'lganda esa **kososimmetrik matritsa** deb ataladi.*

Ta'rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij} = a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij} = -a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalardan A simmetrik, B kososimmetrik bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Berilgan A va B matritsalar uchun C maritsani toping.

3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = 2A - B^T$.

3.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A^T - B^T$.

3.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = A + B^T$.

3.4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = (3A)^T - B$.

3.5. $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C = B - 2A^T$.

3.6. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = A^T + B^T$.

3.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = 2A + 3B$.

3.8. $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $C = 3B - 2A$.

3.9. $A=\begin{pmatrix}3&-4&2\\7&5&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4\\6&6\\-3&1\end{pmatrix}$, $C=A-B^T$.

3.10. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-2&-1&4\\7&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1&3\\2&-1&4\\4&6&2\end{pmatrix}$, $C=(2B)^T+A$.

3.11. $A=\begin{pmatrix}2&3&5\\-1&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\4&3&2\end{pmatrix}$, $C=3A^T-2B^T$

A va B matritsani ko‘paytmasini hisoblang.

3.12. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\\5&-1\\1&-3\end{pmatrix}$. **3.13.** $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\5&7&1\\1&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&2&1\\2&2&0&1\\1&-1&5&4\end{pmatrix}$.

3.14. $A=\begin{pmatrix}-2&3&0&1\\1&1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\\-1&2\\1&3\end{pmatrix}$.

3.15. $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&2\end{pmatrix}$. **3.16.** $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&1&1\end{pmatrix}$.

3.17. $A=\begin{pmatrix}5&-1&3&1\\2&0&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3&0\\-2&1&1\\3&0&-2\\4&1&2\end{pmatrix}$.

3.18. $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}$. **3.19.** $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

3.20.. $A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\4&1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\\1&1\\2&3\end{pmatrix}$.

3.21. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-3&5\\3&-5\\-1&1\end{pmatrix}$.

3.22. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

3.23. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\\ 3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$

3.24. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

3.25. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

3.26. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 5 & -2\end{pmatrix}.$

3.27. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$

3.28. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

3.29. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 5 & -4 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$

3.30. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$

4-MAVZU. DETERMINANTLAR

Reja:

1. Determinantlar va ularni hisoblash.

2. Determinantlarning asosiy xossalari.

Tayanch iboralar: determinant, determinantning elementi, determinantning satri, determinantning ustuni, minor, algebraik to‘ldiruvchi, Laplas teoremasi.

4.1. Determinantlar va ularni hisoblash.

Matritsaning bir qator xususiyatlarini ta’riflash va o‘rganish uchun uning determinanti tushunchasi kerak bo‘ladi.

1-Ta’rif. *n - tartibli A kvadrat matritsaning elementlaridan ma’lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son* ***n – tartibli determinant*** *deyiladi.*

A kvadrat matritsaning determinanti $|A|$ yoki $detA$ kabi belgilanadi. Ayrim o‘quv adabiyotlarida determinant atamasi aniqlovchi deb aytiladi. Umumiy holda n-tartibli determinant quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (4.1)$$

2-Ta’rif. *Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan $a_{ij}(i, j, \dots, n)$ sonlar* ***determinantning elementlari****, gorizontal ko‘rinishda joylashgan $a_{ij}(j = 1,2, \dots, n)$ elementlar* ***determinantning $i -$ satri*** *$a_{ij}(i = 1.2, \dots, n)$, vertikal ko‘rinishda joylashgan $a_{ij}(i = 1,2, \dots, n)$ elementlar esa* ***determinantning j ustuni*** *$(j = 1,2, \dots, n)$ deyiladi.*

Endi I, II va III- tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini formula ko‘rinishida aniq ifodalaymiz.

I- tartibli $|A|$ determinant faqat bitta a_{11} sondan iborat bo‘lib, uning qiymati shu sonni o‘ziga teng, ya’ni $|A| = |a_{11}| = a_{11}$ deb olinadi.

I-I tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (4.2)$$

1 - Misol. Quyida berilgan II- tartibli determinantlarni hisoblang.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}., \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Yechish. (4.2) formulaga asosan,

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2$,

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$ ga teng bo‘ladi.

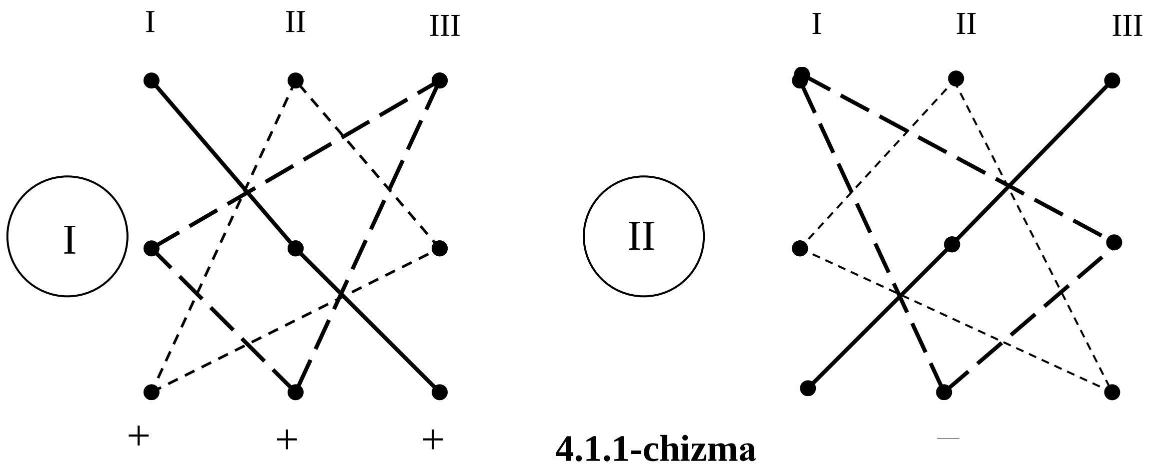
III- tartibli determinant esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \qquad (4.3)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

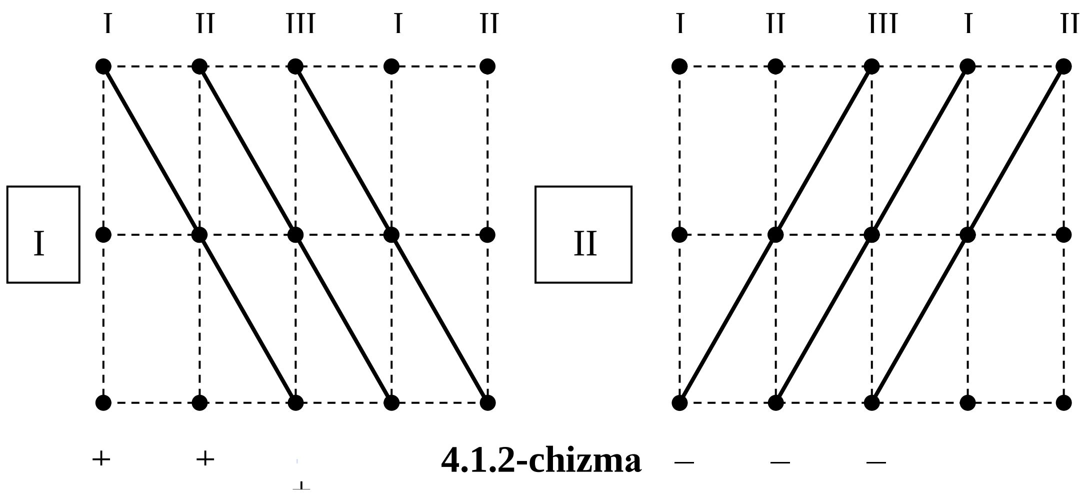
Bu yerda (4.3) formulani eslab qolish oson emas va shu sababli III tartibli determinantlarni quyidagi usullarda hisoblash mumkin.

Uchburchaklar usuli. Bu usulda determinantning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (4.1.1-chizmaga qarang). So‘ngra asoslari determinantning diagonallariga parallel bo‘lgan uchburchaklar qaraladi. Bu uchburchaklarning uchlarida va diagonallarda joylashgan elementlarning ko‘paytmalari hosil qilinadi. I- holda chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmalari o‘z ishorasi, II- holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



4.1.1-chizma

Sarrius usuli. Bu usulda determinantning o‘ng tomoniga uning I- va II- ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi. Bu matritsaning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (4.1.2-chizmaga qarang) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmasi I holda o‘z ishorasi, II - holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



4.1.2-chizma

2 - Misol. III- tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Yuqorida berilgan (4.3) formula bilan determinantni hisoblaganda,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$

$$-(-2) \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 112.$$

teng bo‘ladi.

Determinantlar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvalini ifodalaydi. Determinant esa sonlar jadvalidan hosil qilinadigan sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa sonlar jadvalini dumaloq qavslar ichiga olish bilan belgilansa, determinant bu jadvalni vertikal chiziqlar orasiga olish bilan belgilanadi;

3) A matritsa va $|A|$ determinantni tashkil etuvchi sonlar ularning elementlari deyiladi;

4) matritsa va determinanant satrlar va ustunlardan iborat;

5) determinantlarda ustun va satrlar soni teng bo‘lishi kerak, matritsalarda esa bunday bo‘lishi shart emas.

4.2.Determinantlarning asosiy xossalari.

Endi ixtiyoriy tartibli determinantlar uchun o‘rinli bo‘lgan xossalar bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun umumiy holda ifodalangan bu xossalarni uchinchi tartibli determinantlar misolida ko‘rsatamiz va isbotlaymiz.

1-xossa. Agar determinantda har bir i −satr $(i = 1,2,3, \dots, n)$ i − ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu tenglik bevosita III- tartibli determinantni (4.3) hisoblash formulasidan kelib chiqadi.

Demak determinantning satr va ustunlari teng kuchlidir, ya’ni satr (ustun) uchun o‘rinli bo‘lgan tasdiq ustun (satr) uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari bu xossadan matritsani transponirlashda uning determinanti o‘zgarmay qolishi, ya’ni $detA = detA^T$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli determinantning keyingi xossalarini faqat satrlar uchun ifodalaymiz.

2-xossa. Determinantda ixtiyoriy ikkita satrlar o‘rni o‘zaro almashtirilsa, determinantning qiymati faqat ishorasini o‘zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Bu tasdiq ham bevosita (4.3) formuladan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar determinantda ikkita satr elementlari bir xil bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Berilgan determinantning qiymatini Δ, uning bir xil elementli satrlarining o‘rinlarini almashtirishdan hosil bo‘lgan determinantning qiymatini esa Δ' deb belgilaymiz. Unda, 2-xossaga asosan, $\Delta' = -\Delta$ bo‘ladi. Ammo determinantda bir xil elementli satrlarning o‘rinlari almashtirilganligi uchun uning ko‘rinishi o‘zgarmay qoladi va shu sababli $\Delta' = \Delta$ bo‘ladi. Bu tengliklardan $\Delta = -\Delta$ natijani olamiz va undan $\Delta = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, hozircha biz IV- tartibli determinantni hisoblash formulasini bilmasakda, 3-xossaga asosan, birinchi va uchinchi satrlari bir xil bo‘lgan ushbu determinantning qiymatini yozishimiz mumkin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Determinantda biror satr elementlari umumiy λ ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot: III- tartibli determinantni (4.3) hisoblash formulasidagi yig‘indining har bir qo‘shiluvchisida λ umumiy ko‘paytuvchi qatnashadi. Bu λ umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, 4-xossadagi tasdiqning o‘rinli ekanligiga ishonch hosil etamiz.

5-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi. Bu xossaning isboti oldingi xossadan $\lambda = 0$ bo‘lgan holda kelib chiqadi.

3 - Misol. Quyida berilgan III- tartibli determinantning qiymatini toping.

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Yechish. Bizga berilgan III- tartibli determinantning qiymatini (4.3) formula bilan hisoblab o‘tirmay, 4-xossaga asosan to‘g‘ridan-to‘g‘ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta’kidlay olamiz.

6-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o‘zaro proporsional bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 4-xossaga asosan λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko‘paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo‘lgan determinant hosil bo‘ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

4 - Misol. Quyida berilgan III- tartibli determinantning qiymatini toping.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Bu determinantda 1- va 3- satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti $\lambda = 1{,}5$ ga teng ekanligidan uning qiymati

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

ga teng bo‘ladi.

7-xossa. Agar determinantning biror $i-$ satri ikkita qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat, ya’ni $a_{ij} + b_{ij}$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning $i-$ satri mos ravishda a_{ij} va b_{ij} elementlardan iborat bo‘lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o‘rinli ekanligiga bevosita (4.3) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

8-xossa. Agar $|A|$ determinantning a_{ij} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (4.3) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo‘shiluvchidan boshqa hamma qo‘shiluvchilari nolga teng bo‘ladi va shuning uchun ularning yig‘indisi, ya’ni determinantning qiymati shu ko‘paytmaga teng bo‘ladi.

5 - Misol. IV- tartibli determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Yechish. 8- xossaga asosan ushbu determinantimizning qiymati quyidagicha hisoblanadi.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5\cdot 2\cdot(-1) = 30.$$

9-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

3-Ta’rif. *Ixtiyoriy* $n-$ *tartibli determinantning* $a_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ *elementining* ***minori*** *deb bu determinantdan shu element joylashgan* $i-$ *satr va* $j-$ *ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan* $(n-1)-$ *tartibli determinant qiymatiga aytiladi.*

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo‘ladi.

Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

determinantning II- satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta’kidlab o‘tamiz.

4-Ta’rif. *Ixtiyoriy* $n-$ *tartibli determinantning* $a_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ *elementining* ***algebraik to‘ldiruvchisi*** *deb* $(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ *kabi aniqlanadigan songa aytiladi.*

Determinantning $a_{ij}(i,j=1,2,\dots,n)$ elementining algebraik to‘ldiruvchisi A_{ij} kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$A_{ij}=\begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ - juft bo'lsa};\\ -M_{ij}, & i+j \text{ - toq bo'lsa.}\end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (4.5) determinantning II satr elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari quyidagicha bo‘ladi:

$$A_{21}=-M_{21}=-1,\ \ A_{22}=M_{22}=1,\ A_{23}=-M_{23}=2. \tag{4.5}$$

10-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir $i-$ satrida joylashgan $a_{ij}(j=1,2,\dots,n)$ elementlarini ularning $A_{ij}(j=1,2,\dots,n)$ algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisi shu determinantning qiymatiga teng bo‘ladi.

Isbot: Bu xossa III tartibli $|A|$ determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=|A| \tag{4.6}$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to‘ldiruvchi ta’rifidan va determinantlarni hisoblashning (4.2), (4.3) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}=\\
&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=\\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}=|A|.
\end{aligned}$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=|A|,\quad a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=|A| \tag{4.7}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi isbotlanadi

5-Ta’rif. *Yuqoridagi* (4.6) *va* (4.7) *tengliklar determinantning* ***satrlar bo‘yicha yoyilmasi*** *deb ataladi.*

Shunga o‘xshash determinantning ***ustunlar bo‘yicha yoyilmasini*** ham quyidagicha yozish mumkin:

$$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=|A|, \qquad a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=|A|,$$
$$a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}=|A|. \tag{4.8}$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (4.4) determinant qiymatini uning II satrining (4.5) algebraik to‘ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta=2A_{21}+(-3)A_{22}+7A_{23}=2\cdot 1+(-3)\cdot 1+7\cdot 2=13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda $n-$ tartibli determinantni hisoblash n ta $(n-1)-$ tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo‘yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A|=|a_{11}|=a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (4.2) va (4.3) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo‘yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko‘proq elementlari nolga teng bo‘lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo‘lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to‘ldiruvchilarini topishga hojat bo‘lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

6- Misol. Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II- ustun bo‘yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda ko‘proq hamda $a_{22}=0$, $a_{42}=0$ elementlarning A_{22}, A_{42} algebraik to‘ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblab, $A_{12}=-389$ va $A_{32}=45$ ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$|A|=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$

$$=(-3)\cdot(-389)+0\cdot A_{22}+7\cdot 45+0\cdot A_{42}=1482.$$

11-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror $i-$ satrining algebraik to‘ldiruvchilari $A_{ij}(j=1,2,\dots,n)$ va $b_j(j=1,2,\dots,n)$ ixtiyoriy sonlar bo‘lsa, unda

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+b_3A_{i3}+\dots+b_nA_{in}=|B|$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda $|B|$ determinant $|A|$ determinantdan faqat $i-$ satri bilan farq qilib, uning $i-$ satri $b_j(j=1,2,\dots,n)$ sonlardan tashkil topgan bo‘ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli $|A|$ determinantning, masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{11}+b_2A_{12}+b_3A_{13}=|B|$$

yig‘indining qo‘shiluvchilari $|A|$ determinantning birinchi satr bo‘yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11}+a_2A_{12}+a_3A_{13}=|A|$$

yig‘indi qo‘shiluvchilaridan faqat birinchi ko‘paytuvchilari, ya’ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli $|A|$, $|B|$ determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va $|B|$ determinantning birinchi satri b_1, b_2 va b_3 sonlardan iborat bo‘ladi.

Masalan, A_{11}, A_{12} va A_{13}

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & 7 & 3\\ 9 & 12 & -4\end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari bo‘lsa, unda

$$11A_{11}+12A_{12}+13A_{13}=|B|=\begin{vmatrix}11 & 12 & 13\\ 0 & 7 & 3\\ 9 & 12 & -4\end{vmatrix}.$$

12-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror $i-$ satrining $a_{ij}(j=1,2,\dots,n)$ elementlari boshqa bir $k-$ satr $(i\neq k)$ mos elementlarining $A_{kj}(j=1,2,\dots,n)$ algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirilgan bo‘lsa, bu ko‘paytmalar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Oldingi xossada $b_j=a_{ij}(j=1,2,\dots,n)$ deb olsak, unda

$$b_1A_{k1}+b_2A_{k2}+b_3A_{k3}+\dots+b_nA_{kn}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+a_{i3}A_{k3}+\dots+a_{in}A_{kn}=|B|$$

Bu yerda $|B|$ determinant berilgan $|A|$ determinantning k-satriga i -satrining a_{ij} elementlarini qo‘yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli $|B|$ determinantning i - satri va k - satri bir xil bo‘lib, 3 - xossaga asosan uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad i,k = 1,2,\cdots,n; \quad i \neq k. \quad (4.9)$$

13-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa ularning ko‘paytmasining determinanti har birining determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o‘rinlidir.

Ko‘rib o‘tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo‘llaniladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Determinantlar va ularni hisoblash. Determinantlarning asosiy xossalariga doir misollar yechish.

Quyidagi ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

4.1. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$. **4.2.**. $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$

4.3. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$. **4.4.** $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

4.5. $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$ **4.6.** $\begin{vmatrix} a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{1}{2}} \\ -a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix}$.

Quyidagi uchunchi tartibli determinantlarni hisoblang:

4.7. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$. **4.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

4.9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **4.10.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

4.11. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$. **4.12.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos s\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Tenglamalarni yeching:

4.13. $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$.

4.14. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$.

4.15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$.

4.16. $\begin{vmatrix} \cos^2\varphi-\sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \end{vmatrix} = 0$

4.17. $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = 0$.

4.18. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Tengsizlikni hisoblang:

4.19. $\begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} < 0$.

4.20. $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} < 0$.

4.21. $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2x-3 & -2 \end{vmatrix} < 0$.

4.22. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix} > 0$.

Quyida berilgan to‘rtinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

4.23. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4.24. $\begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

4.25. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

4.26. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

4.27. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

4.28. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

4.29. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

4.30. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

5-MAVZU. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI KRAMER VA GAUSS USULLARI

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi.
2. Matritsalar usuli.
3. Kramer usuli.
4. Gauss (noma'lumlarni yo'qotish) usuli.

Tayanch iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi, sistema koeffitsiyentlari, sistema ozod hadlari, sistema yechimi, birgalikda boʻlgan sistema, birgalikda boʻlmagan sistema, aniq sistema, aniqmas sistema, kengaytirilgan matritsa, matritsalar usuli.

5.1. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularning yechimi.

Koʻpgina amaliy, jumladan iqtisodiy masalalar chiziqli tenglamalar sistemasi tushunchasiga olib keladi.

1-Ta'rif: *n noma'lumli m ta* **chiziqli tenglamalar sistemasi** *deb quyidagi koʻrinishdagi sistemaga aytiladi:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (5.1)$$

Bu yerda a_{ij} va b_j $(i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n)$ – berilgan va ixtiyoriy oʻzgarmas sonlar boʻlib, a_{ij} sonlari (5.1) *sistemaning* ***koeffitsiyentlari****, b_j esa* ***ozod hadlari*** *deyiladi. Bu sistemada $x_j (j = 1,2,\dots,n)$ noma'lumlar boʻlib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.*

Yigʻindi belgisi yordamida (5.1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, m\,. \qquad (5.2)$$

Endi (5.1) yoki (5.2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to‘rtburchakli A matritsani, x_j noma’lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Unda, matritsalarni ko‘paytirish amalidan foydalanib, (5.1) sistemani ixcham va qulay bo‘lgan quyidagi matritsaviy ko‘rinishda yozish mumkin:

$$AX = B \tag{5.4}$$

2-Ta’rif: (5.1) *yoki* (5.2) *chiziqli tenglamalar sistemaning* ***yechimi*** *deb shunday* $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ *sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo‘yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya’ni to‘gri tenglikka aylanadi.*

Sistemaning yechimlari

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsa ko‘rinishda yozilsa, u (5.4) matritsaviy tenglamani to‘gri tenglikka aylantiradi. Bunda n - ta sondan tuzilgan X ustun matritsa sistemaning bitta yechimi bo‘lib hisoblanadi.

1 – Misol. 3 noma’lumli 2 ta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases} \tag{5.5}$$

Yechish. Yuqorida berilgan $n = 3$ noma’lumli $m = 2$ ta tenglamalar sistemasi uchun $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ va $x_3 = 5$ yoki

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo‘ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (5.5) sistema tenglamalariga qo‘ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) - 5 \equiv -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2\cdot 1 - 5\cdot(-2) + 4\cdot 5 \equiv 32 \end{cases}$$

to‘gri tengliklarga ega bo‘lamiz.

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va, yechim mavjud bo‘lgan taqdirda, uni topish ***sistemani yechish*** deb ataladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol bo‘lishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19 \end{cases}$$

sistema uchun $x_1 = 2$ va $x_2 = -5$ yagona yechim bo‘ladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (5.5) sistema uchun ko‘rsatilgan yechimdan tashqari $x_1 = -5$, $x_2 = 26$ va $x_3 = 43$ ham yechim bo‘lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig‘indisi bir paytning o‘zida ham 1, ham 0 bo‘ladigan sonlar mavjud emas.

3-Ta’rif: *Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bu sistema* ***birgalikda*** *deyiladi; agar yechimga ega bo‘lmasa sistema* ***birgalikda emas*** *deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u* ***aniq*** *deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, u* ***aniqmas*** *tenglamalar sistemasi deyiladi.*

Berilgan (5.1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (5.3) $m \times n$ tartibli A matritsaga B ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo‘lgan $m \times (n+1)$ tartibli

$$A^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (5.6)$$

matritsani qaraymiz .

4-Ta’rif: *A^b matritsa A matritsaning* ***kengaytirilgani*** *deb ataladi.*

5.2. Matritsalar usuli.

Bu usulda sistemaning matritsaviy ko‘rinishda yozilgan (5.4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda $r(A) = n$ shartdan sistemaning n – tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta’rifiga asosan $\Delta = |A| \neq$
$\neq 0$ bo‘ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (5.4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko‘paytirish mumkin. Natijada, teskari matritsa ta’rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \qquad (5.7)$$

(5.4) matritsaviy ko‘rinishdagi n noma’lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (5.7) formula bir noma’lumli $ax = b$ $(a \neq 0)$ chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$ formulaga o‘xshash ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

2-Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0.$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Endi (5.7) formula bo‘yicha noma’lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma’lumli n ta tenglamali aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko‘rinishdagi (5.7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig‘i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi.

5.3. Kramer usuli.

Matritsaviy ko‘rinishda (5.7) formula bilan ifodalanuvchi (5.1) sistema $(m = n)$ yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \cdots + b_nA_{nk} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu yerdan sistemaning $x_k (k = 1,2, \dots, n)$ yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \cdots + b_nA_{nk}) = \frac{1}{\Delta}\Delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ k = 1, 2, \cdots, n. \quad (5.8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, $k = 1,2, \dots, n$ uchun ushbu

$$b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\equiv\Delta_k$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishidan foydalandik. (5.8) formulalarda (5.1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

determinant sistemaning ***asosiy determinanti,*** uning k - ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan $\Delta_k(k=1,2,\dots,n)$ determinantlar esa ***yordamchi determinantlar*** deyiladi.

5-Ta’rif: (2.1) *chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi* (5.8) *tengliklar* ***Kramer formulalari*** *deb ataladi.*

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali sistemaning ma’lum bir noma’lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2 noma’lumlarni) topish mumkin. Ammo bu usul ham n katta bo‘lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo‘llash katta qiyinchiliklar bilan bog‘liq.

Kramer formulalarini $n=2$ hol uchun yozamiz. Bunda (5.1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunga o‘xshash $n = 3$ bo‘lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

3- Misol. Ushbu uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \quad .$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{18}, \quad x_{21} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{18}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{31}}{\Delta} = \frac{7}{18} \ .$$

Shuni yana bir marta ta’kidlab o‘tamizki, (5.1) sistema $n = m$ holda yagona yechimga ega, ya’ni birgalikda va aniq bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo‘lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (5.7), Kramer usulida esa (5.8) formulalar bilan topiladi.

Ko‘rsatish mumkinki, agar $n = m$ holda (5.1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo‘lsa, unda quyidagi ikki hol bo‘ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k = 0 (k = 1,2,\dots,n)$ bo‘lsa, unda (5.1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega, ya’ni birgalikda va aniqmas bo‘ladi.

2) Agar yordamchi $\Delta_k = 0 (k = 1,2,\dots,n)$ determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa , unda (5.1) sistema yechimga ega emas, ya’ni birgalikda bo‘lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 12 \end{cases}$$

sistemalarning birinchisi uchun $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ va u $x_1 = c, x_2 = \frac{3c-4}{5}$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega. Ikkinchi sistema uchun esa $\Delta = 0$, ammo $\Delta_1 = 20 \neq 0$ bo‘lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham sistemaning II tenglamasidan $3x_1 - 5x_2 = 6$ ekanligi kelib chiqadi va u sistemaning I tenglamasiga ziddir.

5.4. Gauss usuli.

Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (5.1) sistemaning o‘zi bilan ish ko‘riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (5.1) sistema boshqa bir sistemaga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo‘ladi.

6-Ta’rif: *Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami o‘zaro teng bo‘lsa, ular* ***ekvivalent (teng kuchli) sistemalar*** *deyiladi.*

Masalan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -23 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

sistemalar ekvivalent , chunki ular bir xil $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ yechimga ega.

1-Teorema: Agar (5.1) sistemaning ikkita tenglamalari o‘rni o‘zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko‘paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo‘shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 4x_1-5x_2+2x_3=-3 \\ 5x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o‘rnini almashtirish va hosil bo‘lgan sistemaning birinchi tenglamasini $\lambda=-2$ songa ko‘paytirib, uchinchi tenglamasiga qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan quyidagi sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 5x_1+x_2-3x_3=0 \\ -11x_2+4x_3=-5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1=-\frac{11}{63}, \quad x_2=\frac{25}{63}, \quad x_3=-\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo‘lgan quyidagi n noma’lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o‘tamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3+\cdots a_{kn}x_n=b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\cdots a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{5.9}$$

1-qadam. (5.9) sistemada $a_{11}\neq 0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo‘lsa, (5.9) sistemadagi tenglamalar o‘rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/a_{11}$ songa ko‘paytirib, uning k-tenglamasiga $(k=1,2,\dots,n)$ qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma’lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{k2}^{(1)}x_2 + a_{k3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{kn}^{(1)}x_n = b_k^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{5.10}$$

2- qadam. Hosil bo‘lgan (5.10) sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2 - tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko‘paytirib, uning k - tenglamasiga $(k = 3,4, \dots, n)$ qo‘shamiz. Natijada hosil bo‘ladigan ekvivalent sistemaning k - tenglamasida noma’lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{43}^{(2)}x_3 + \cdots a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \tag{5.11}$$

***n*-qadam.** Yuqoridagi jarayonni ketma-ket $n-1$ marta takrorlab, quyidagi ko‘rinishdagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\quad a_{44}^{(3)}x_4 + \cdots a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{5.12}$$

Bu ***Gauss usulining to‘g‘ri yo‘li*** , uning natijasida hosil bo‘lgan (5.12) sistema ***uchburchakli*** deyiladi.

Endi (5.12) sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma’lumning qiymati topamiz. So‘ngra x_n qiymati (5.12) sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo‘yib, undan x_{n-1} noma’lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., x_2, x_1 noma’lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo‘li*** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- Bu usulni deyarli yuqorida ko‘rsatilgan ko‘rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin;
- Bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo‘lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

4- Misol. Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma’lumlarni birin-ketin yo‘qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1 - tenglamani ikkala tomonini –3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko‘paytirib, ularni o‘zaro qo‘shamiz. So‘ngra 1 - tenglamani ikkala tomonini –2 soniga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamani 3 - tenglamaga qo‘shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82. \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2 - tenglamasini –8 soniga, 3 - tenglamasini 17 soniga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ \qquad\quad 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3 - tenglamasidan $x_3 = 3$ ekanligini topamiz.

So‘ngra bu natijani sistemaning 2 - tenglamasiga qo‘yib, undan $x_2 = -2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2 = -2$ va $x_3 = 3$ natijalarni sistemaning 1- tenglamasiga qo‘yib, undan $x_1 = 1$ ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, va $x_3 = 3$ ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi berilgan chiziqli tenglamalar sistemasini matritsaviy usul, Kramer usuli va Gauss usullari yordamida yeching.

5.1.1. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}.$

5.1.2. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}.$

5.1.3. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}.$

5.1.4. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases}.$

5.1.5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}.$

5.1.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}.$

5.1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}.$

5.1.8. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$

5.1.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}.$

5.1.10. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 = -12 \end{cases}.$

5.1.11. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = -5 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}.$

5.1.12. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 1 \end{cases}.$

5.1.13. $\begin{cases} \qquad x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 = 11 \end{cases}$

5.1.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

5.1.15. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \qquad = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \qquad = 3 \end{cases}.$

5.1.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$

5.1.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

5.1.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$.

5.1.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$.

5.1.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$.

5.1.21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$.

5.1.22. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$.

5.1.23. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$.

5.1.24. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$.

5.1.25. $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$.

5.1.26. $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$.

5.1.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 31 \end{cases}$.

5.1.28. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$.

5.1.29. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$.

5.1.30. $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$.

6- MAVZU. VEKTORLAR

Reja:

1. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirish.

2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyish.

Tayanch iboralar: nol vektor, kollinear, birlik vektor, teng vektor, vektorning yig‘indisi, vektorlarning ayirmasi, chiziqli bog‘liq, komplanar, yoyilgan, bazis.

6.1. Vektorlar ustida amallar. Vektorni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirish.

Ikki vektorni qo‘shish deb, birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektorning boshi keltirib qo‘yilganda birinchi vektorning boshidan chiqib ikkinchi vektorning oxiriga tomon yo‘nalgan vektorga aytiladi. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{k}$ vektorlarning yig‘indisi deb, quyidagicha yasaladigan $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots + \vec{k}$ vektorga aytiladi.

Ixtiyoriy O nuqtaga $\vec{a}$ vektor qo‘yiladi, uning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshi qo‘yiladi va hokazo. Olingan O nuqta $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots + +\vec{k}$ vektorning boshi, eng so‘ngi vektorning oxiri esa, yig‘indining oxiri deyiladi.

Vektorlarning yig‘indisi O nuqtani tanlab olishga bog‘liq emas.

Kollinear bo‘lmagan ikkita $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi quyidagicha ham yasalishi mumkin (parallelogramm qoidasi): ikkala $\vec{a}, \vec{b}$ vektorni bitta O nuqtadan boshlab $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar qo‘yiladi; tomonlari OA, OB bo‘lgan $OBCA$ parallelogramm yasaladi, u holda $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ hosil bo‘ladi.

$$\vec{x} + \vec{b} = \vec{a} \tag{6.1}$$

shartni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorga $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deyiladi.

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmasini yasash uchun quyidagicha ish ko‘riladi: $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bitta nuqtadan qo‘yiladi $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. U hol $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ da $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{a} \neq 0$ vektorga qarama - qarshi vektor deb $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli shu vektor moduliga teng, yo‘nalishi esa $\vec{a}$ vektor yo‘nalishiga qarama - qarshi bo‘lgan vektorga aytiladi. Ravshanki, qo‘shish amalining xossalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{(assotsiativlik)}$$
$$\vec{a} + 0 = \vec{a}$$
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(kommutativlik)} \qquad (6.2)$$

λ son bilan $\vec{a} \neq 0$ vektorning ko‘paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli $|\lambda|\,|\vec{a}|$ bo‘lgan $\vec{a}$ vektor bilan bir xil, $\lambda < 0$ holda unga qarama - qarshi yo‘nalgan $\lambda\vec{a}$ vektorga aytiladi. Agar $\lambda = 0$ yoki $\vec{a} = 0$ bo‘lsa $\lambda\vec{a} = 0$ bo‘ladi. Vektorni songa ko‘paytirish amalining xossalari:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$
$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{a}$$
$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$
$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \qquad (6.3)$$

Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar kollinear va $\vec{b} \neq 0$ bo‘lsa, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ nisbat deb shunday λ songa aytiladiki, unda $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ bo‘ladi.

1-Misol. $\vec{a}(-2; 3; 1)$ va $\vec{b}(8; -4; -6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ vektorning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang.

Yechish: Endi $3\vec{a}$ va $\frac{1}{2}\vec{b}$ vektorlarni aniqlaymiz. $3\vec{a} = \{-6; 9; 3\}$, $\frac{1}{2}\vec{b} = \{4; -2; -3\}$. Demak,

$$3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \{-6 - 4; 9 - (-2); 3 - (-3)\}$$
$$3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \{-10; 11; 6\}.$$

2-Misol. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar berilgan $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorlar yig‘indisini toping.

Yechish: $\vec{a}$ vektorni koordinatalari, $\vec{a}(1;3;-2)$ xuddi shuningdek $\vec{b}(2;1;4)$. Endi $2\vec{a}$ va $3\vec{b}$ vektorlarni aniqlaymiz. $2\vec{a}=\{2;6;-4\}$, $3\vec{b}=\{6;3;12\}$. Demak,

$$2\vec{a}+3\vec{b}=\{2+6;6+3;-4+12\}$$

$$2\vec{a}+3\vec{b}=\{8;9;8\}.$$

6.2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyish.

Vektorlar uchun bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmagan $\alpha,\beta,\gamma,\dots,x$ sonlar mavjud bo‘lib, $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{k}=0$ tenglik bajarilsa, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\dots,\vec{k}$ vektorlar ***chiziqli bog‘liq*** deb ataladi.

Ikki vektorning kollinear bo‘lishi uchun ular chiziqli bog‘liq bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Agar uchta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorni bitta nuqtaga keltirgandan keyin ular bitta tekislikda yotsa, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar ***komplanar*** deyiladi. Uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ular chiziqli bog‘liqli bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lmasa va $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar esa komplanar bo‘lmasa, u holda $\vec{c}$ vektor yagona usulda $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalanishi mumkin:

$$\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b} \tag{6.4}$$

Bu holda $\vec{c}$ vektor $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar orqali ***yoyilgan*** deyiladi.

Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lmasa, u holda ixtiyoriy $\vec{d}$ vektorni $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning kombinatsiyasi ko‘rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin:

$$\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c} \tag{6.5}$$

Bu holda ham $\vec{d}$ vektor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar yo‘nalishilari bo‘yicha ***yoyilgan*** deyiladi. M nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ deb $\overrightarrow{OM}$ vektorga aytiladi, bu yerda $O-$ tayin bir nuqta.

Agar M nuqta M_1,M_2 kesmani λ nisbatda bo‘lsa, u holda M nuqtaning $\vec{r}$ radius-vektori, M_1,M_2 nuqtalarning $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ radius-vektorlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}$$

Xususan, M nuqta M_1, M_2 kesmaning o‘rtasi bo‘lsa, $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ tartiblangan nokomplanar uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektor fazo ***bazisi*** deb ataladi, agar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar birlik va jufti-jufti bilan ortogonal bo‘lsa, u holda bazis ***ortonormallangan*** deyiladi. Ortonormallangan bazis vektorlari ko‘pincha $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi koordinatalari deb shunday x, y, z sonlarga aytiladiki, bunda

$$\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \tag{6.6}$$

koordinatalari x, y, z dan iborat $\vec{a}$ vektor $\vec{a} = \{x, y, z\}$ ko‘rinishda yoziladi. Mos koordinatalarigina teng bo‘lgan ikki vektor o‘zaro teng bo‘ladi:

$$x = x'; \;\; y = y'; \;\; z = z' \Rightarrow \vec{a}(x, y, z) = \vec{b}(x', y', z').$$

Ikki $\vec{a}(x, y, z) \neq 0, \vec{b}(x', y', z') \neq 0$ vektorning kollinear bo‘lishligining zaruriy va yetarli sharti ularning mos koordinatalarining proportsionalligidan iborat:

$$x' = \lambda \cdot x; \;\; y' = \lambda \cdot y; \;\; z' = \lambda \cdot z \tag{6.7}$$

bunda λ son $\vec{b}$ vektorning $\vec{a}$ vektorga nisbatini bildiradi.

$\vec{a} = \{x, y, z\}, \vec{b} = \{x', y', z'\}$ vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli: $\vec{a} + \vec{b} = \{x + x', y + y', z + z'\}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x - x', y - y', z - z'\}$$
$$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z\}$$

Uchta $\vec{a} = \{x, y, z\}, \vec{b} = \{x', y', z'\}, \vec{c} = \{x'', y'', z''\}$ vektorlar komplanar bo‘lishining zarur va yetarli sharti ushbu

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

tenglikning bajarilishidan iborat.

3-Misol. Tekislikda ikkita vektorlar $\vec{b}(-1; 4)$, $\vec{c}(3; -2)$ berilgan. $\vec{a}(-11; 14)$ vektorning $\vec{b}$, $\vec{c}$ bazisi bo‘yicha yoyilmasini toping.

Yechish. $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bo‘yicha yoyish, $\vec{a}$ vektorni chiziqli kombinatsiya ko‘rinishida ifodalash demakdir. $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, bu yerda λ va μ topilishi kerak bo‘lgan sonlar.

Koordinata ko‘rinishida bu quyidagicha bo‘ladi.

$$-11\vec{i} + 14\vec{j} = (-\lambda + 3\mu)\vec{i} + (4\lambda - 2\mu)\vec{j}$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu = -11 \\ \ 4\lambda - 2\mu = 14 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $\lambda = 2;\ \mu = -3$ ekanligini topamiz.

Demak, $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

4-Misol. $\vec{a}(4;2;0)$ vektorni $\vec{p}(1;-1;2)$, $\vec{q}(2;2;-1)$ va $\vec{r}(3;7;-7)$ vektorlar bo‘yicha yoying.

Yechish. $\vec{a}$ vektorni $\vec{p}$, $\vec{q}$ va $\vec{r}$ vektorlar bo‘yicha yoyish, $\vec{a}$ vektorni chiziqli kombinatsiya ko‘rinishida ifodalash demakdir.
$\vec{a} = c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r}$, bu yerda c_1, c_2 va c_3 - topilishi kerak bo‘lgan sonlar.

Koordinata ko‘rinishida bu quyidagicha bo‘ladi.

$$4\vec{i} + 2\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)\vec{i} + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)\vec{j} +$$
$$+(2c_1 - c_2 - 7c_3)\vec{k}$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $c_1 = 3;\ c_2 = -1;\ c_3 = 1$ ekanligini topamiz. Demak,

$$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

6.1. Vektorlar ustida amallar. Vektorni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirishga doir misollar

6.1.1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan vektorlardan foydalanib, quyidagi vektorlarni har birini bo‘yicha har bir vektorlarni yasang:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

6.1.2. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bo‘yicha quyidagi har bir vektorlarni yasang:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

6.1.3. $\vec{a}(12;-3)$ va $\vec{b}(-3;6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-2\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $4\vec{a}+3\vec{b}$;

6) $\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$.

6.1.4. $\vec{a}(-4;1)$ va $\vec{b}(6;-8)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$.

6.1.5. $\vec{a}(8;-4)$ va $\vec{b}(-9;-3)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{a}+2\vec{b}$; 3) $-2\vec{a}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $-3\vec{a}+2\vec{b}$

6) $\frac{1}{4}\vec{a}-2\vec{b}$.

6.1.6. $\vec{a}(-2;3;-4)$ va $\vec{b}(0;-2;6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $-\vec{a}+2\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $-\frac{2}{3}\vec{b}$; 5) $4\vec{a}+\vec{b}$;

6) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

6.1.7. $\vec{a}(-1;5;-6)$ va $\vec{b}(4;-9;-3)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{a}+2\vec{b}$; 3) $-2\vec{a}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $-3\vec{a}+2\vec{b}$

6) $\frac{1}{4}\vec{a}-2\vec{b}$.

6.1.8. $\vec{a}(3;-1;5)$ va $\vec{b}(-2;4;-6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-2\vec{b}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $3\vec{a}+4\vec{b}$;

6) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$.

6.1.9. $\vec{a}(3;-2;6)$ va $\vec{b}(-2;1;0)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

6.1.10. Uchta $\vec{a}=\{2;4\}$, $\vec{b}=\{-3;1\}$, $\vec{c}=\{5;-2\}$ vektor berilgan.
1) $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$; 2) $\vec{a}-14\vec{b}+14\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.11. Uchta $\vec{a}=\{7;-1\}$, $\vec{b}=\{2;-3\}$, $\vec{c}=\{4;-1\}$ vektor berilgan.
1) $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$; 2) $5\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.12. Uchta $\vec{a}=\{-3;1\}$, $\vec{b}=\{6;-2\}$, $\vec{c}=\{-4;-7\}$ vektor berilgan.
1) $2\vec{a}-4\vec{b}+7\vec{c}$; 2) $5\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.13. Uchta $\vec{a}=\{5;7;2\}$, $\vec{b}=\{3;0;4\}$, $\vec{c}=\{-6;1;-1\}$ vektor berilgan.
1) $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$; 2) $5\vec{a}+6\vec{b}+4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.14. Uchta $\vec{a}=\{-4;2;-1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;0\}$, $\vec{c}=\{3;-2;5\}$ vektor berilgan.
1) $2\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$; 2) $5\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.15. Uchta $\vec{a}=\{6;-3;-2\}$, $\vec{b}=\{-1;4;-3\}$, $\vec{c}=\{-4;3;-6\}$ vektor berilgan.
1) $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$; 2) $\vec{a}+9\vec{b}-7\vec{c}$ vektorlar topilsin.

6.1.16. $\vec{a}(2;4)$ va $\vec{b}(2;-1)$ vektorlar yig‘indisi va ayirmasi toping.

6.1.17. $\vec{a}(-2;3)$ va $\vec{b}(-4;5)$ vektorlar yig‘indisi va ayirmasi toping.

6.1.18. $\vec{a}(8;6)$ va $\vec{b}(4;3)$ vektorlar yig‘indisi va ayirmasi toping.

6.1.19. $\vec{a}(3;-5;8)$ va $\vec{b}(-1;1;-4)$ vektorlar yig‘indisi va ayirmasi toping.

6.1.20. $\vec{a}(-3;-1;4)$ va $\vec{b}(1;7;5)$ vektorlar yig‘indisi va ayirmasi toping.

6.1.21. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $2\vec{a}-$ $-5\vec{b}$ vektorlar ayirmasini toping.

6.1.22. $\overrightarrow{AB}=\{2;6;-4\}$ va $\overrightarrow{AC}=\{4;2;-2\}$ vektorlar ABC uchburchakning yon tomonlariga mos keladi. Uchburchakning medianalariga to‘g‘ri keluvchi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

6.1.23. ABC uchburchakda AD mediana o‘tkazilgan. $\overrightarrow{AD}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$**,** $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orqali ifodalang.

6.1.24. ABC uchburchakda $AD,\ BE,\ CF$ medianalar o‘tkazilgan. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ vektorlar yig‘indisi topilsin.

6.1.25. $\overrightarrow{AB}=\vec{p},\quad \overrightarrow{AF}=\vec{q}$ vektorlar muntazam $ABCDEF$ oltiburchakning ikkita qo‘shni tomonlari. Bu oltiburchakning tomonlari bo‘ylab qo‘yilgan $\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{EF}$ vektorlarni $\vec{p},\ \vec{q}$ vektorlar orqali ifodalang.

6.1.26. Uchburchak tekisligida shunday nuqta topilsinki, shu nuqtadan uchburchak uchlariga yo‘nalgan vektorlar yig‘indisi nolga teng bo‘lsin.

6.1.27. $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ va $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ vektorlardan tashkil topgan ABC uchburchakda quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$, 2) $\dfrac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$, 3) $\dfrac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$, 4) $-\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$

6.1.28. O nuqta ABC uchburchakning og‘irlik markazi hisoblanadi. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ ekanligini isbotlang.

6.1.29. $ABCDE$ to‘g‘ri burchakli beshburchakda uning tomonlariga to‘g‘ri keladigan vektorlar berilgan: $\overrightarrow{AB}=\vec{m},\ \overrightarrow{BC}=\vec{n},\ \overrightarrow{CD}=\vec{p},\ \overrightarrow{EA}=\vec{r}$. Quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; 2) $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\vec{r}$;

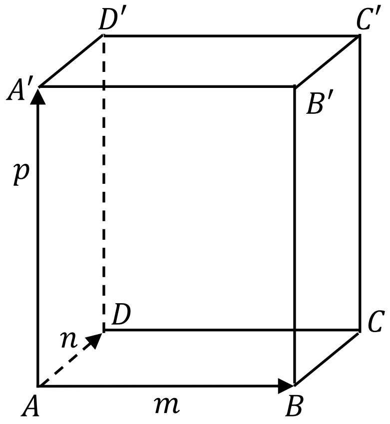
3) $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{m}-\vec{q}+2\vec{r}$.

6.1.30. $ABCDA'B'C'D'$ parallelopipedning qirralariga mos vektorlar berilgan: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{n}$, va $\overrightarrow{AA}=\vec{p}$ (2.2.1-chizma). Quyidagi har bir vektorni yasang:

1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$; 2) $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$;

3) $\frac{1}{2}\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$; 4) $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$

5) $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.



6.1.1-chizma

6.2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo‘yicha yoyishga doir misollar

6.2.1. $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ bazis bo‘yicha vektorlar yoyilmasi berilgan: $\vec{c}=16\vec{\imath}-$ $-15\vec{\jmath}+12\vec{k}$. Shu bazis bo‘yicha $\vec{c}$ vektorga parallel va qarama-qarshi $\vec{d}$ vektorning yoyilmasini aniqlang, bunda $|\vec{d}|=75$ ga teng.

6.2.2. Tekislikda $\vec{p}(2;-3)$, $\vec{q}(1;2)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\vec{a}(9;4)$ vektorni $\vec{p}\,,\vec{q}$ bazis bo‘yicha yoyilmasini toping.
6.2.3. Tekislikda $\vec{p}(-4;1)$, $\vec{q}(3;-5)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\vec{a}(11;-7)$ vektorni $\vec{p},\vec{q}$ bazis bo‘yicha yoyilmasini toping.
6.2.4. Tekislikda $\vec{p}(3;-2)$, $\vec{q}(-4;1)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\vec{a}(17;-8)$ vektorni $\vec{p},\vec{q}$ bazis bo‘yicha yoyilmasini toping.
6.2.5. Tekislikda $\vec{a}(3;-2)$, $\vec{b}(-2;1)$ va $\vec{c}(7;-4)$ vektorlar berilgan. Har bir vektorni, qolgan ikki vektorni bazis sifatida qabul qilib, yoyilmasini aniqlang.
6.2.6. $\vec{p}(3;-2;1)$, $\vec{q}(-1;1;-2)$, $\vec{r}(2;1;-3)$ va $\vec{c}(11;-6;5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ bazis bo‘yicha $\vec{c}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.
6.2.7. $\vec{p}(3;-2;1)$, $\vec{q}(-1;1;-2)$, $\vec{r}(2;1;-3)$ va $\vec{c}(11;-6;5)$ vektorlar berilgan. $\vec{c},\vec{q},\vec{r}$ bazis bo‘yicha $\vec{p}=\alpha\vec{c}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.
6.2.8. $\vec{p}(3;-2;1)$, $\vec{q}(-1;1;-2)$, $\vec{r}(2;1;-3)$ va $\vec{c}(11;-6;5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p},\vec{c},\vec{r}$ bazis bo‘yicha $\vec{q}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.
6.2.9. $\vec{p}(3;-2;1)$, $\vec{q}(-1;1;-2)$, $\vec{r}(2;1;-3)$ va $\vec{c}(11;-6;5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p},\vec{q},\vec{c}$ bazis bo‘yicha $\vec{r}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{c}$ vektorning yoyilmasini toping.
6.2.10. $\vec{p}(1;-2;1)$, $\vec{q}(-1;5;3)$, $\vec{r}(7;1;-1)$ vektorlar berilgan. $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ bazis bo‘yicha $\vec{c}(12;-9;6)$ vektorning yoyilmasini toping.
6.2.11. $\vec{a}(3;-1)$, $\vec{b}(1;-2)$, $\vec{c}(-1;7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a},\vec{b}$ bazis bo‘yicha $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorning yoyilmasini aniqlang.
6.2.12. $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(1;-1;2)$, $\vec{c}(2;2;-1)$ va $\vec{d}(3;7;-7)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Har bir vektorning yoyilmasini qolgan uchta vektorni bazis sifatida qabul qilib aniqlang.
6.2.13. $\vec{a}(2;-1;3)$ va $\vec{b}(-6;3;-9)$ vektorlar kollinearligini tekshiring. Ularning qaysi biri necha marta uzunligini, qanday yo‘nalganligini, bir tomonga yoki qarama-qarshi ekanligini ko‘rsating.
6.2.14. α,β ning qanday qiymatida $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ va $\vec{b}=\alpha\vec{i}-$ $-6\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo‘ladi?

6.2.15. $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo‘lsa, α va β ni toping.

6.2.16. $\vec{a}(2;-1;3)$, $\vec{b}(-6;3;-9)$, $\vec{c}(1;2;3)$, $\vec{d}(-6;12;18)$ vektorlar berilgan. Ulardan qaysilari o‘zaro kollinear?

6.2.17. $\vec{a}(\lambda n; n-2; n+1)$ va $\vec{b}(n-3; \mu n; n-1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘lishini aniqlang.

6.2.18. Berilgan $\vec{a}(n; 2n+1; 1-n)$, $\vec{b}(n+1; n-1; \lambda)$ va $\vec{c}(n-$ $-1; 3n; 1)$ vektorlar λ - parametrning qanday qiymatida komplanar bo‘ladi?

6.2.19. Quyidagi hollarning har birida $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{4;-2\}$, $\vec{b} = \{3;5\}$, $\vec{c} = \{1;-7\}$;

b) $\vec{a} = \{5;4\}$, $\vec{b} = \{-3;0\}$, $\vec{c} = \{19;8\}$;

c) $\vec{a} = \{-6;2\}$, $\vec{b} = \{4;7\}$, $\vec{c} = \{9;-3\}$.

6.2.20. Quyidagi hollarning har birida $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-8;7\}$, $\vec{b} = \{-2;3\}$, $\vec{c} = \{-4;1\}$;

b) $\vec{a} = \{14;-16\}$, $\vec{b} = \{2;-1\}$, $\vec{c} = \{-4;5\}$;

c) $\vec{a} = \{-1;2\}$, $\vec{b} = \{-2;4\}$, $\vec{c} = \{-1;3\}$.

6.2.21. Quyidagi hollarning har birida $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-1;2\}$, $\vec{b} = \{3;-4\}$, $\vec{c} = \{2;-3\}$;

b) $\vec{a} = \{3;-4\}$, $\vec{b} = \{-13;13\}$, $\vec{c} = \{-4;1\}$;

c) $\vec{a} = \{6;-2\}$, $\vec{b} = \{-3;1\}$, $\vec{c} = \{9;-3\}$.

6.2.22. Quyidagi hollarning har birida $\vec{d}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{2;3;1\}$, $\vec{b} = \{5;7;0\}$, $\vec{c} = \{3;-2;4\}$, $\vec{d} = \{4;12;-3\}$;

b) $\vec{a} = \{5;-2;0\}$, $\vec{b} = \{0;-3;4\}$, $\vec{c} = \{-6;0;1\}$,
$\vec{d} = \{25;-22;16\}$;

c) $\vec{a} = \{3;5;6\}$, $\vec{b} = \{2;-7;1\}$, $\vec{c} = \{12;0;6\}$, $\vec{d} = \{0;20;18\}$.

6.2.23. Quyidagi hollarning qaysi birida uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor chiziqli bog'liq bo'lishini va basharti ular chiziqli bog'liq bo'lgan holda $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{5; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 4; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; -1; 6\}$;

b) $\vec{a} = \{6; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{-9; 6; 3\}$, $\vec{c} = \{-3; 6; 3\}$;

c) $\vec{a} = \{6; -18; 12\}$, $\vec{b} = \{-8; 24; -16\}$, $\vec{c} = \{8; 7; 3\}$.

6.2.24. Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektor va uchta λ, μ, ν son qanday bo'lmasin, siz $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$, $\nu\vec{b} - \lambda\vec{c}$, $\mu\vec{c} - \nu\vec{a}$ vektorlarning komplanar ekanligini isbotlang.

6.2.25. $\vec{a}(m; -12; -2)$, $\vec{b}(0; m; 1)$ va $\vec{c}(1; 2; 3)$ vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo'lishini toping.

6.2.26. Berilgan $\vec{a}(n; 2n + 1; 1 - n)$, $\vec{b}(n + 1; n - 1; \lambda)$ va $\vec{c}(n - -1; 3n; 1)$ vektorlar λ parametrning qanday qiymatida komplanar bo'ladi?

6.2.27. λ parametrning qanday qiymatida $\vec{a}(\lambda n;\ n - 2;\ n + 1)$ va $\vec{b}(n - 3;\ \lambda n;\ n - 1)$ vektorlar ortogonal bo'lishini aniqlang.

8.2.28. $\vec{x}(n; n + 4; n - 1)$ vektorni $\vec{e}_1(1; 1; 0)$, $\vec{e}_2(1; 0; 1)$ va $\vec{e}_3(0; 1; 1)$ bazisdagi yoyilmasini toping .

6.2.29. $\vec{a}(2n; n + 3; n - 1)$, $\vec{b}(n; 2n - 13; 4n)$ va $\vec{c}(2n; 13 - -5n; -13n - 3)$ vektorlar chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsating va bu bog'lanishni toping.

6.2.30. $\vec{e}_1(n; n - 1; 2n)$, $\vec{e}_2(n + 1; 0; n + 2)$ va $\vec{e}_3(1; n; n - 3)$ vektorlar bazis tashkil etishini ko'rsating.

7- MAVZU: VEKTORLARNING SKALYAR, VEKTOR VA ARALASH KO‘PAYTMASI

Reja:

1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.

2. Vektorning vektor va aralash ko‘paytmasi.

Tayanch iboralar: nol vektor, kollinear, birlik vektor, teng vektor, vektorning yig‘indisi, vektorlarning ayirmasi, chiziqli bog‘liq, komplanar, yoyilgan, bazis, skalyar ko‘paytma, vektor va aralash ko‘paytma.

7.1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.

Berilgan ikki vektorning uzunligi va ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmasiga shu ikki vektorning ***skalyar ko‘paytmasi*** deyiladi.

Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ***skalyar ko‘paytmasi***

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi \qquad (7.1)$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda φ burchak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakdir.

$\vec{a} = 0$ yoki $\vec{b} = 0$ holda ta’rifga ko‘ra $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. $\vec{a} \perp \vec{b}$ yoki $\vec{a} = 0$, yoki $\vec{b} = 0$ holdagina $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ***skalyar ko‘paytma*** nolga teng.

Skalyar ko‘paytirish amalining xossalari:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\cdot\vec{a})\vec{b} \qquad \text{(kommutativlik)} \qquad (7.2)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 \geq 0 \qquad \text{(distributivlik)} \qquad (7.3)$$

ammo faqat $\vec{a} = 0$ holdagina $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ bo‘ladi.

Fazodagi Dekart koordinatalar sistemasida

$$\vec{a}(x; y; z), \quad \vec{b}(x'; y'; z')$$

berilgan bo‘lsa, skalyar ko‘paytmaning xossalaridan foydalanamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}) = xx'\vec{\imath}^2 + xy'\vec{\imath}\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}\vec{k} +$$
$$+x'y\vec{\imath}\vec{\jmath} + yy'j^2 + yz'\vec{\jmath}\vec{k} + x'z\vec{\imath}\vec{k} + y'z\vec{\jmath}\vec{k} + zz'\vec{k}^2 =$$
$$= xx'\cdot 1 + xy'\cdot 0 + xz'\cdot 0 + x'y\cdot 0 + yy'\cdot 1 + yz'\cdot 0 + x'z\cdot 0 +$$
$$+y'z\cdot 0 + zz'\cdot 1 = xx' + yy' + zz'$$

Skalyar ko‘paytmaning xossalaridan, ortlar uchun ushbu tengliklar o‘rinli ekanligini ko‘ramiz:

$$\vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot cos0^0 = 1, \ \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot cos90^0 = 0, \ \ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \ \ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Demak,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz', \qquad (7.4)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

$|\vec{a}| = 0, \ |\vec{b}| = 0$ shartlarida $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusi quyidagi formula bo‘yicha topiladi.

(7.1) va (7.4) formulalardan,

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$cos\varphi = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \qquad (7.5)$$

kelib chiqadi. $\vec{a}(x;y;z)$, $\vec{b}(x';y';z')$ vektorlar ortogonal (perpendikulyar) bo‘lishligining zarur va yetarli sharti ushbu tenglikdan iborat (fazoda):

$$xx' + yy' + zz' = 0. \qquad (7.6)$$

1-Misol. $\vec{a}(3;6)$ va $\vec{b}(5;-2)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.

Yechish: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga tengligidan,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' = 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) = 3$$

kelib chiqadi. Demak, berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi 3 ga teng bo‘ladi.

7.2. Vektorning vektor va aralash ko‘paytmasi.

*Ikki vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ning **vektor ko‘paytmasi** deb quyidagi xossalarga ega bo‘lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:*

1. $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya’ni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi \qquad (\varphi = \vec{a}\wedge\vec{b}) \qquad (7.7)$$

2. $\vec{c}$ vektor shu parallelogramm tekisligiga perpendikulyar, ya’ni u ham $\vec{a}$ vektorga, ham $\vec{b}$ vektorga perpendikulyardir:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ va } \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \qquad (7.8)$$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar ko‘rsatilgan tartibda olinganda vektorlarning o‘ng uchligini tashkil etadi.

Fazoda berilgan

$$\vec{a}(x; y; z), \quad \vec{b}(x'; y'; z')$$

vektorlar uchun

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right\} \qquad (7.9)$$

yoki

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \qquad (7.10)$$

tenglik o‘rinli.

Fazoda uch vektorning ***aralash ko‘paytmasi*** *deb, birinchi ikki vektorning vektor ko‘paytmasiga uchinchi vektorni skalyar ko‘paytirishga aytiladi.*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} \qquad (7.11)$$

Fazoda $\vec{a}(x; y; z)$, $\vec{b}(x'; y'; z')$ va $\vec{c}(x''; y''; z'')$ vektorlar koordinatalar bilan berilgan bo‘lsin. Ularning aralash ko‘paytmasi formulasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni vektor ko‘paytiramiz.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

bu vektor ko‘paytmani esa $\vec{c}(x''; y''; z'')$ vektorga skalyar ko‘paytiramiz va

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \cdot \left(x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}\right) =.$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\vec{k}\right)\left(x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}\right) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} x'' - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} y'' + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} z'' \right) = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \qquad (7.12)$$

hosil bo‘ladi.

2-Misol. $\vec{a}(1;-3;4)$ va $\vec{b}(3;-4;2)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (7.10) formuladan foydalanib,

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= 10\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

$\vec{c}(10;10;5)$ vektorning koordinatasini topdik.

3-Misol. $\vec{a}(3;-4;2)$, $\vec{b}(-1;2;5)$ va $\vec{c}(2;3;-4)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (7.12) formuladan foydalanib,

$$[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -24 - 6 - 40 - 8 - 45 + 16 = -107$$

ya’ni, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi -107 ga teng ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

7.1. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasiga doir misollar.

7.1.1. $\vec{a}(6;-8)$, $\vec{b}(12;9)$ va $\vec{c}(-4;3)$ vektorlar uchun

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}\vec{c}$; 3) $\vec{b}\vec{c}$ ni hisoblang.

7.1.2. $\vec{a}(3;5;7)$, $\vec{b}(-2;6;1)$ va $\vec{c}(2;-4;0)$ vektorlar uchun

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}\vec{c}$; 3) $\vec{b}\vec{c}$; 4) $(2\vec{a}-\vec{b})(3\vec{b}+\vec{c})$;

5) $(3\vec{a}+2\vec{c})(2\vec{b}-\vec{c})$ skalyar ko‘paytmasini hisoblang.

7.1.3. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(6;-8)$, $\vec{b}(12;9)$, $\vec{c}(2;-5)$, $\vec{d}(3;7)$, $\vec{m}(-2;6)$ va $\vec{n}(3;-9)$ vektorlar orasidagi

1) $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$; 2) $\vec{c}\,\hat{}\,\vec{d}$; 3) $\vec{m}\,\hat{}\,\vec{n}$ ni toping.

7.1.4. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(8;4;1)$, $\vec{b}(2;-2;1)$, $\vec{c}(2;5;4)$ va $\vec{d}(6;0;-3)$ vektorlar orasidagi
1) $\vec{a}\wedge\vec{b}$; 2) $\vec{c}\wedge\vec{d}$ ni toping.
7.1.5. $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=60^0$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.
7.1.6. $\vec{c}$ va $\vec{d}$ birlik vektor va $(\vec{c}\wedge\vec{d})=135^0$ berilgan bo‘lsa, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.
7.1.7. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\downarrow\downarrow\vec{b}$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.
7.1.8. $|\vec{c}|=3$, $|\vec{d}|=7$, $\vec{c}\downarrow\uparrow\vec{d}$ berilgan bo‘lsa, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.
7.1.9. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ burchak tashkil qiladi. $|\vec{a}|=3$ va $|\vec{b}|=4$ bo‘lsa, quyidagilarni hisoblang:
1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;
6) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$; 7) $(2\vec{a}-3\vec{b})^2$; 8) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.
7.1.10. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar, $\vec{c}$ vektor ularning har biri bilan $\varphi=\frac{\pi}{3}$ burchak hosil qilib, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$ ga teng bo‘lsa, quyidagilarni hisoblang:
1) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$;
4) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$; 5) $(2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c})(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$
7.1.11. $\vec{a}(5;-6;1)$, $\vec{b}(-4;3;0)$, $\vec{c}(5;-8;10)$ vektorlar berilgan bo‘lsa,
1) $3\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+2\vec{c}^2$;
2) $3\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}\vec{c}-5\vec{a}\vec{c}$;
3) $2\vec{a}^2+4\vec{b}^2-5\vec{c}^2$ ifodalarni hisoblang.
7.1.12. $\vec{a}(3;1;2)$, $\vec{b}(2;7;4)$, $\vec{c}(1;2;1)$ vektorlar berilgan bo‘lsa,
1) $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c}$;
2) $\vec{a}^2(\vec{b}\vec{c})$;
3) $\vec{a}^2\vec{b}+\vec{b}^2\vec{c}+\vec{c}^2\vec{a}$ ifodalarni hisoblang.
7.1.13. $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ va $C(0;1;-5)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa,
1) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$; 3) $\sqrt{\overrightarrow{BC}^2}$; 4) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$;

5) $(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CB})(3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC})$ ifodalarni hisoblang.

7.1.14. $\vec{a}(2;-4;4)$ va $\vec{b}(-3;2;6)$ vektorlar hosil qilgan burchak kosinusini toping.

7.1.15. $\vec{a}(5;2)$, $\vec{b}(7;-3)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o‘zida ikkita $\vec{a}\vec{x}=38$, $\vec{b}\vec{x}=30$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

7.1.16. $\vec{a}(3;4)$, $\vec{b}(6;-7)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o‘zida ikkita $\vec{a}\vec{x}=2$, $\vec{b}\vec{x}=19$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

7.1.17. $\vec{a}(3;-2;4)$, $\vec{b}(5;1;6)$, $\vec{c}(-3;0;2)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o‘zida $\vec{a}\cdot\vec{x}=4$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=35$, $\vec{c}\cdot\vec{x}=0$ tenglamalarni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

7.1.18. $\vec{a}(2;1;-1)$ vektorga kollinear va $\vec{x}\vec{a}=3$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

7.1.19. $\vec{x}$ vektor $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$ vektorlarga perpendikulyar, Oy o‘qi bilan o‘tmas burchak hosil qiladi. $|\vec{x}|=14$ bo‘lsa, uning koordinatalarini toping.

7.1.20. Uchta $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-$ $-4\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{x}\vec{a}=-5$, $\vec{x}\vec{b}=-11$ va $\vec{x}\vec{c}=20$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

7.1.21. Tomonlari birga teng bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ deb $\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{c}$ ifoda hisoblansin.

7.1.22. $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ vektorlar α ning qanday qiymatida o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi?

7.1.23. ABC uchburchak tomonlarining uzunliklari berilgan: $|BC|=5$, $|CA|=6$, $|AB|=7$ bo‘lsa,

1) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$;

4) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{CA}$; 5) $\overrightarrow{CA}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi topilsin.

7.1.24. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ shart bilan quyidagilar $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}\,\vec{c}+\vec{c}\,\vec{a}$ ni hisoblang.

7.1.25. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bir-birlari bilan 60^0 ga teng bo‘lgan burchak tashkil qilsa, hamda $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$ va $|\vec{c}|=6$ berilgan bo‘lsa, $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorning modulini aniqlang.

7.1.26. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ berilgan. α ning qanday qiymatida $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ va $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo‘ladi?

7.1.27. $\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\vec{a} - \vec{b}$ vektorga perpendikulyar bo‘lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

7.1.28. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ bo‘lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi α burchakni toping.

7.1.29. $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ va $C(3; -2; 1)$ uchburchakning uchlari berilgan. Uning B uchidagi ichki burchakni toping.

7.1.30. Uchburchakning $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ va $C(1; -2; 1)$ uchlari berilgan. Uning A uchidagi ichki burchakni aniqlang.

7.2. Vektorning vektor va aralash ko‘paytmasiga doir misollar.

7.2.1. Determinantlarni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ -4 & -21 \end{vmatrix} = 1$; 5) $\begin{vmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

7.2.2. Determinantlarni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 5) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

7.2.3. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

1) $\begin{cases} 3y - x = -17 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xcos\alpha - ysin\alpha = cos2\alpha \\ xsin\alpha + ycos\alpha = sin2\alpha \end{cases}$

7.2.4. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

1) $\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + 5y + 2z = -1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x+2y+3z-13=0 \\ 3x+2y+2z-16=0 \\ 4x-2y+5z-5=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 2x+y-4z=9 \\ 6x-5y+2z=17 \end{cases}$.

7.2.5. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ bo‘lsa, $|[\vec{a}\vec{b}]|$ ni hisoblang.

7.2.6. $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ va $\vec{a}\,\vec{b} = 12$ berilgan bo‘lsa, $|[\vec{a}\vec{b}]|$ ni hisoblang.

7.2.7. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ va $|[\vec{a}\vec{b}]| = 72$ bo‘lsa, $\vec{a}\,\vec{b}$ ni toping.

7.2.8. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar. $|\vec{a}| = 3$ va $|\vec{b}| = 4$ ni bilgan holda, quyidagilarni hisoblang:

1) $|[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]|$;

2) $|[(3\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})]|$.

7.2.9. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ni bilgan holda, quyidagilarni hisoblang:

1) $[\vec{a},\vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3) $[(\vec{a}+3\,\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})]^2$.

7.2.10. Ixtiyoriy $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ vektorlar berilgan. $\vec{a} = [\vec{p}\,\vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q}\,\vec{n}]$ va $\vec{c} = [\vec{r}\,\vec{n}]$ vektorlarni komplanar ekanligini isbotlang.

7.2.11. $\vec{a}(3;-1;-2)$ va $\vec{b}(1;2;-1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko‘paytmalar koordinatalarini toping:

1) $[\vec{a}\,\vec{b}]$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})\vec{b}]$; 3) $[(2\vec{a}-\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})]$.

7.2.12. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ va $C(3;2;1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko‘paytmalar koordinatalarini toping:

1) $[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}]$; 2) $[(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-2\overrightarrow{\mathrm{CA}})\overrightarrow{CB}]$.

7.2.13. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ va $C(5;2;6)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchak yuzasini hisoblang.

7.2.14. Uchburchakning $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ va $C(1;3;-1)$ uchlari berilgan. B uchidan AC yon tomonga tushirilgan balandlik uzunligini hisoblang.

7.2.15. $\vec{a}(2;-2;1)$ va $\vec{b}(2;3;6)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini hisoblang.

7.2.16. $A(3;-2;5)$, $B(1;4;-3)$ va $C(-6;2;4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa,

1) $[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}]\overrightarrow{AC}$; 2) $[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}]\overrightarrow{BC}$; 3) $[\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AB}$
aralash ko‘paytmasini toping.

7.2.17. $C(-2;4;3)$, $D(1;-5;6)$ va $E(3;7;-4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa,

1) $[\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{DE}]\overrightarrow{CE}$; 2) $(2\overrightarrow{CD}-3\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CE})(2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED})$;

3) $(3\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{ED})(2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC})(\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{CE})$ aralash ko‘paytmasini toping.

7.2.18. $\vec{a}=\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+7\vec{k}$ va $\vec{c}=-5\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa,

1) $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$; 2) $[\vec{a}\,\vec{c}]\vec{b}$; 3) $[\vec{b}\,\vec{c}]\vec{a}$;

4) $\left(\vec{b}+2\vec{\vec{a}}\right)(\vec{c}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{c})$; 5) $(3\vec{a}-\vec{c})(2\vec{b}+\vec{a})(4\vec{c}+3\vec{b})$

aralash ko‘paytmasini toping.

7.2.19. $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(-3;1;2)$ va $\vec{c}(1;2;3)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left[[\vec{a},\vec{b}]\vec{c}\right]$ va $\left[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\right]$ ni hisoblang.

7.2.20. $\vec{a}(6;-4;8)$ va $\vec{b}(-2;4;0)$ vektorlar berilgan bo‘lsa:

1) $[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]$;

2) $\left[\vec{a}(\vec{a}+\vec{\vec{b}})\right]$;

3) $\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2})\right]$ topilsin.

7.2.21. Quyidagi hollarning har birida $[\overrightarrow{a\,b}]$ vektor ko‘paytma topilsin:

1) $\vec{a}(2;3;1)$, $\vec{b}(5;6;4)$;

2) $\vec{a}(5;-2;1)$, $\vec{b}(4;0;6)$;

3) $\vec{a}(-2;6;-4)$, $\vec{b}(3;-9;6)$.

7.2.22. $\vec{a}(8;4;1)$ va $\vec{b}(2;-2;1)$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuzi hisoblansin.

7.2.23. $\vec{a}(3;1;2)$, $\vec{b}(2;7;4)$ va $\vec{c}(1;2;1)$ vektorlar berilgan:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$; 2) $\left[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}\right]$; 3) $\left[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]\right]$ topilsin.

7.2.24. Berilganlarga ko‘ra $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini toping.

1) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\imath}$, $\vec{c}=\vec{\jmath}$; 2) $\vec{a}=\vec{\imath}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{\jmath}$;

3) $\vec{a}=\vec{\jmath}$, $\vec{b}=\vec{\imath}$, $\vec{c}=\vec{k}$; 4) $\vec{a}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{b}=\vec{\jmath}$, $\vec{c}=\vec{k}$;

5) $\vec{a}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{b}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$, $\vec{c}=\vec{\jmath}$; 6) $\vec{a}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{b}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

7.2.25. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar hamda $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ va $|\vec{c}| = 3$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

7.2.26. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil qiladi va $\vec{c}$ vektor bilan perpendikulyar. $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ va $|\vec{c}| = 4$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

7.2.27. $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(-2;2;1)$ va $\vec{c}(3;-2;5)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

7.2.28. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, quyidagilarni toping.

1) $[\vec{a}\vec{b}]$; 2) $[\vec{b}\vec{c}]$; 3) $[\vec{a}\vec{c}]$; 4) $[[\vec{a}\vec{c}]\vec{b}]$; 5) $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$;
6) $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$; 7) $([\vec{a}\vec{b}]\vec{c})$; 8) $([\vec{a}\vec{c}]\vec{b})$; 9) $(\vec{a}[\vec{b}\vec{c}])$;
10) $[(2\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{a} - 5\vec{c})]$; 11) $[(\vec{a} - 2\vec{c})(3\vec{b} - 2\vec{a})]$;
12) $\left([(2\vec{b} + \vec{c})(3\vec{a} - \vec{c})](\vec{b} - 2\vec{a})\right)$.

7.2.29. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, quyidagilarni toping:

1) $(\vec{a}[\vec{c}\vec{b}])$; 2) $(\vec{c}[\vec{a}\vec{b}])$; 3) $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$; 4) $[\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]]$;
5) $\left([\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]\,\vec{c}\right)$; 6) $\left([\vec{a}[\vec{a}\vec{c}]]\,[\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]]\right)$.

7.2.30. Ayniyatni isbotlang:

1) $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] = 0$;
2) $[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}] = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$;
3) $[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}] + [\vec{a}\vec{c}]\,[\vec{d}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{d}]\,[\vec{b}\vec{c}] = 0$;
4) $[[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
5) $[\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$;
6) $\left[\vec{a}\left[\vec{a}\left[\vec{a}[\vec{a}\vec{b}]\right]\right]\right] = \vec{a}^4\vec{b}$ bu yerda, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar.

8-MAVZU. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

Reja:

1. Fazoda tekislikning ba'zi tenglamalari.

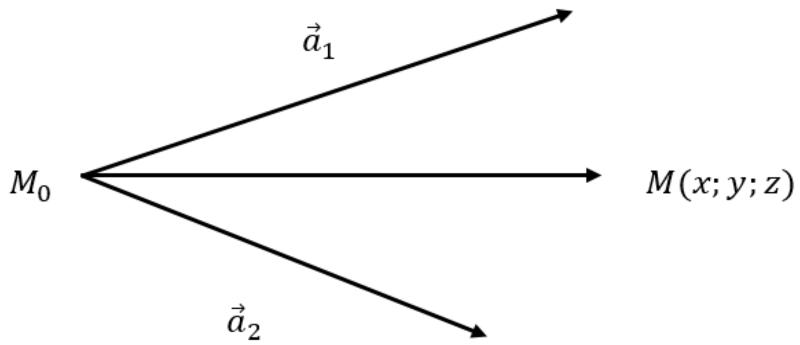
2. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari.

Tayanch iboralar: burchak koeffitsiyenti, parallellik, perpendukulyarlik, to'g'ri chiziqlar dastasi, normal, normal vektor, bissektrisa, fazo, parallellik, perpendukulyarlik, kanonik, parametrik, normal.

8.1. Fazoda tekislikning ba'zi tenglamalari.

Ikkita kollinear bo'lmagan vektorlar va berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda $\vec{a}_1(l_1; m_1; n_1)$ va $\vec{a}_2(l_2; m_2; n_2)$ kollinear bo'lmagan vektorlar va $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlardan hamda M_0 nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik. Buning uchun $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar boshini M_0 nuqtaga keltirib qo'yamiz.



8.1.1-chizma

tuzmoqchi bo'lgan tekisligimizdan ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz. Uchinchi $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0; z - z_0)$ vektorni tuzamiz.

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar komplanarligidan ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, ya'ni

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \qquad (8.1)$$

bo'lishi kerak. Bundan

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

1-Misol. $\vec{a}(-3;2;1)$, $\vec{b}(2;3;-2)$ vektorlardan va $M_0(2;1;3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Yuqorida berilgan (8.1) formuladan foydalanib,

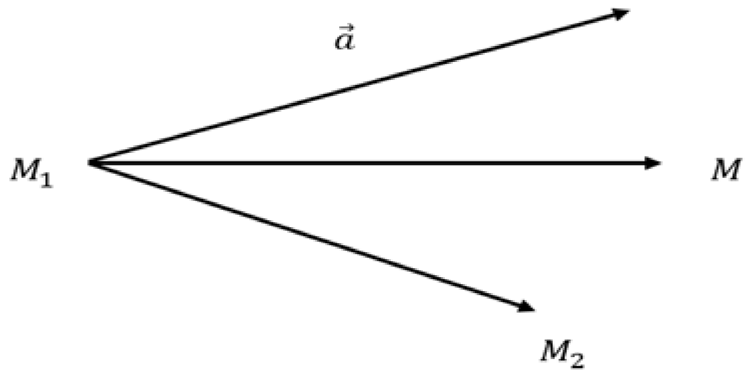
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-2)-9(z-3)+2(y-1)-4(z-3)-$$
$$-3(x-2)-6(y-1)=0$$
$$-7(x-2)-4(y-1)-13(z-3)=0$$
$$-7x+14-4y+4-13z+39=0$$
$$7x+4y+13z-57=0$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasi $7x+4y+13z-57=0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Fazoda berilgan vektordan va berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda $\vec{a}(l;m;n)$ koordinatali vektor va $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. $\vec{a}$ vektordan hamda M_1 va M_2 nuqtalardan o‘tuvchi α tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun $\vec{a}$ vektorning boshini $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtaga keltirib qo‘yamiz. Tuzmoqchi bo‘lgan tekisligimizdan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olib, $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorlarni yasaymiz.



8.1.2-chizma

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1;\ y-y_1; z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1;\ y_2-y_1; z_2-z_1),$$
$$\vec{a}(l;m;n).$$

$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir tekislikda yotishidan ularning aralash ko‘paytmasi 0 ga teng bo‘ladi.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0 \qquad (8.2)$$

bo‘lishi kerak. Bundan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

2-Misol. $\vec{a}(2;3;-1)$ vektor $M_1(-2;5;4)$ va $M_2(0;0;0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilgan vektor va ikki nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x + 2 & y - 5 & z - 4 \\ 2 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$5(x + 2) + 6(z - 4) - 8(y - 5) + 10(z - 4) + 12(x + 2) +$$

$$+2(y - 5) = 0$$

$$17(x + 2) - 6(y - 5) + 16(z - 4) = 0$$

$$17x + 34 - 6y + 30 + 16z - 64 = 0$$

$$17x - 6y + 16z = 0$$

$17x - 6y + 16z = 0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Fazoda berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

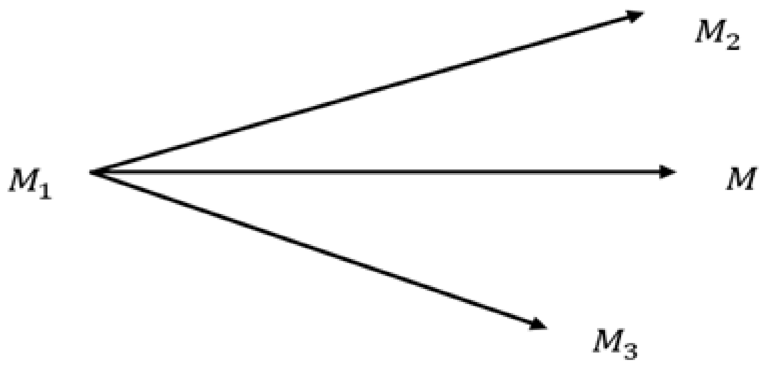
Bizga $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzish uchun tekislikdan yana bir $M(x;y;z)$ nuqta olamiz va $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlarni yasaymiz.

Bu $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$,

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1; z_3 - z_1)$$

va $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ vektorlar bitta tekislikda yotadi. Bundan kelib chiqadiki, aralash ko‘paytmasi 0 ga teng bo‘lishi kerak.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \qquad (8.3)$$



8.1.3-chizma

hamda,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishida bo‘ladi, bu tenglamaning

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaga teng kuchli ekanligini ko‘rish murakkab emas.

3-Misol. $M_1(2;3;-2)$ va $M_2(5;6;7)$ va $M_3(1;-2;1)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+2 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

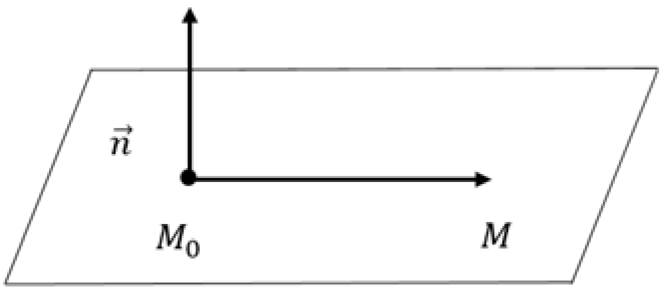
$$9(x-2) - 15(z+2) - 9(y-3) + 3(z+2) +$$
$$+45(x-2) - 9(y-3) = 0$$
$$54(x-2) - 18(y-3) - 12(z+2) = 0$$
$$54x - 108 - 18y + 54 - 12z - 24 = 0$$
$$54x - 18y - 12z - 78 = 0$$

tenglikni ikkala tomonini 6 ga bo‘lib yuborsak, $9x - 3y - 2z - 13 = = 0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan o‘tuvchi berilgan vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasi.

Fazoda koordinatalari $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $\vec{n}(A;B;C)$ vektor berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan o‘tib, $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikdan ixtiyoriy

$M(x;y;z)$ nuqtani olamiz. $\vec{n}$ vektorning boshini $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtaga keltirib qo‘yamiz.



8.1.4-chizma

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ ekanligidan, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ kelib chiqadi hamda ushbu ko‘rinishda

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

bo‘ladi. Tekislikga perpendikulyar bo‘lgan $\vec{n}$ vektor tekislikning ***normal vektori*** deyiladi.

Tekislikning normal tenglamasi

Faraz qilaylik, fazoda tekislikning koordinata o‘qlari bilan uchrashgan nuqtalari A, B va C bo‘lsin. Tekislikning koordinata o‘qlariga nisbatan o‘rni aniq bo‘lishi uchun koordinatalar boshidan unga perpendikulyar qilib tushirilgan OP ning uzunligi va uning koordinata o‘qlari bilan tashkil qilgan burchaklari ma’lum bo‘lsa kifoya qiladi. Faraz qilaylik, $OP=p$ va OP ning Ox, Oy, Oz o‘qlarining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchaklari tartib bilan α,β,γ bo‘lsin.

Tekislikdagi biror M nuqtaning koordinatalari: $x=OR$, $y=RN$, $z=MN$ bo‘lsin. M va P nuqtalarni o‘zaro tutashtirish natijasida $ORNMP$ siniq chiziq hosil bo‘ladi va bu siniq chiziqning tutashtiruvchisi OP bo‘ladi. Siniq chiziqning o‘qdagi proyeksiyasi to‘g‘risidagi teorema bo‘yicha haligi siniq chiziqning OP ga proyeksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$ORcos\alpha + NRcos\beta + NMcos\gamma + MPcos\frac{\pi}{2} = p,$$

yoki shaklga asosan

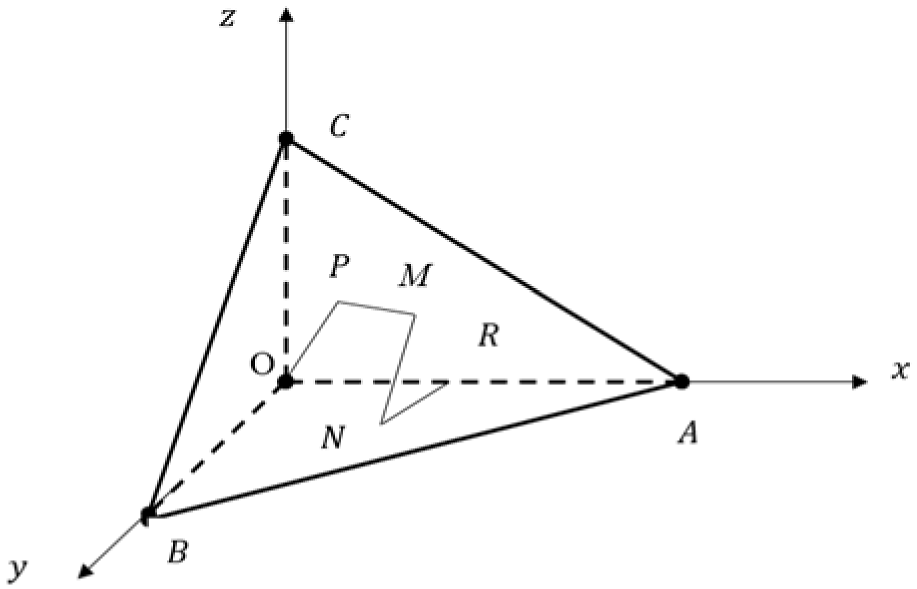
$$OR=x, \qquad NR=y, \qquad NM=z, \qquad cos\frac{\pi}{2}=0$$

bo‘lgani uchun tekislikning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (8.4)$$

chunki M nuqta tekislikning qaysi yerida bo‘lsada bu tenglama o‘z kuchini saqlaydi.

Bu tenglama tekislikning ***normal tenglamasi*** deyiladi. Bu tenglama x, y, z ga nisbatan birinchi darajali. Demak: har bir tekislik o‘zgaruvchi x, y, z koordinatalarga nisbatan birinchi darajali tenglama bilan ifoda qilinadi.



8.1.5-chizma

4-Misol. Tekislikning $2x - y + 2z - 5 = 0$ umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o‘ting.

Yechish: Normallashtiruvchi μ ko‘paytuvchini topamiz va berilgan umumiy tenglamani unga ko‘paytirib, normal tenglamani topamiz:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0.$$

Bunda ozod had $D = -5 < 0$ bo‘lgani uchun μ ishorasi musbat qilib olindi va normal tenglamada

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \qquad \cos\beta = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{2}{3}, \quad p = \frac{5}{3}$$

bo‘ladi.

Tekislikning umumiy tenglamasi.

Ixtiyoriy tekislik tenglamasi $Ax + By + Cz + D = 0 (A^2 + B^2 + +C^2 \neq 0)$ ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Buni isbotlash uchun fazoda berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekilik tenglamasini qarasak, ushbu

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Determinantni satr bo‘yicha yoyib hisoblaymiz va nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot x\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2}\cdot y\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot z\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (8.5)$$

hosil bo‘ladi.

Istalgan $Ax + By + Cz + D = 0$ ko‘rinishidagi tenglama ***tekislik tenglamasi*** bo‘ladi.

Ixtiyoriy $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. $Ax + By + Cz +$ $+D = 0$ va $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ tekislik tenglamasi berilgan bo‘lsa, tekislik tenglamalarini bir – biridan ayirsak

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D - D = 0 \Longrightarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.6)$$

natija hosil bo‘ladi. Bu tenglama $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan va $\vec{a}(-B; A; 0)$ va $\vec{b}(-C; 0; A)$ vektorlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi hisoblanadi.

5-Misol. Berilgan uchta $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(4; -1; 2)$ va $M_3(2; -3; 3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan (8.5) va (8.6) formulalardan foydalanib,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot y \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot z \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$A = -1, \ B = -1, \ C = -4, \ \ D = 11.$$

$$-x - y - 4z + 11 = 0 \Longrightarrow \ x + y + 4z - 11 = 0$$

Tekislikning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi.

1.Tekislikning fazodagi o‘rni aniq bo‘lishi uchun uning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari ma’lum bo‘lishi kifoya qiladi. Faraz qilaylik, tekislikning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

bo‘lsin. Ya’ni tekislik absissa o‘qini $A(a; 0; 0)$ nuqtada, ordinata o‘qini $B(0; b; 0)$, aplikata o‘qini esa $C(0; 0; c)$ nuqtalarda kesib o‘tadi.

Uni quyidagi ikki usul bilan isbot qilamiz:

1-usul: Buning uchun tekislikning berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tenglamasidan foydalanamiz. Ma’lumki, bu tekislik $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ va $C(0; 0; c)$ nuqtalardan o‘tadi.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot y \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot z \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot bc + y \cdot ac + z \cdot ab - abc = 0$$

tengligimizni ikkala tomonini abc ga bo‘lib yuborsak, quyidagi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (8.7)$$

natijaga erishamiz.

2-usul: Koordinatalar boshidan tekislikka perpendikulyar qilib OP = p ni o‘tkazamiz. Faraz qilaylik OP ning koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari α, β, γ bo‘lsin. Shaklga muvofiq a, b va c dan har birining OP dagi proyeksiyasi OP ning o‘zi, ya’ni p bo‘ladi. Shuning uchun

$$p = acos\alpha, \quad p = bcos\beta, \quad p = ccos\gamma,$$

yoki bulardan:

$$cos\alpha = \frac{p}{a}, \qquad cos\beta = \frac{p}{b}, \qquad cos\gamma = \frac{p}{c};$$

bular tekislikning ushbu

$$xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0$$

tenglamasiga qo‘yilsa:

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y + \frac{p}{c}z - p = 0$$

yoki tenglamani ikkala tomonini p bo‘lib, so‘ngra ozod hadini o‘ng tomonga o‘tkazsak, tenglamaning odatdagi ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Tenglamadagi a, b, c ning qiymatlari algebraik bo‘lib, ular musbat va manfiy bo‘lishlari mumkin.

Tengsizlikning umumiy tenglamasi bo‘lgan ushbu (8.6) tenglamaning koeffitsiyentlaridan hech biri nolga teng bo‘lmagan holda u tenglamani hamma vaqt (8.7) shaklga keltirish mumkin.

Buning uchun tenglamaning ozod hadi bo‘lgan D ni o‘ng tomoniga o‘tkazib, so‘ngra tenglamaning ikkala tomonini $-D$ ga bo‘lamiz:

$$-\frac{Ax}{D}-\frac{By}{D}-\frac{Cz}{D}=1.$$

yoki

$$-\frac{x}{\frac{D}{A}}-\frac{y}{\frac{D}{B}}-\frac{z}{\frac{D}{C}}=1,$$

demak,

$$a=-\frac{D}{A},\qquad b=-\frac{D}{B},\qquad c=-\frac{D}{C}$$

bo‘ladi.

6-Misol. Umumiy $2x+3y-5z-7=0$ tenglamasi bilan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasini toping.

Yechish: Umumiy tenglamani $D=7$ soniga bo‘lib, (8.7) tenglamada

$$a=\frac{D}{A}=\frac{7}{2},\;\; b=\frac{D}{B}=\frac{7}{3},\;\; c=-\frac{D}{C}=-\frac{7}{5}.$$

ekanligini topamiz. Bundan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasi

$$\frac{2x}{7}+\frac{3y}{7}-\frac{5z}{7}=1$$

yoki

$$\frac{x}{7/2}+\frac{y}{7/3}-\frac{z}{7/5}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

8.2. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari.

Berilgan vektorga parallel va berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Fazoda $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{a}(l;m;n)$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzaylik. Buning uchun tuzmoqchi bo‘lgan to‘g‘ri chizig‘imiz tenglamasini qanoatlantiradigan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqta olamiz va $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ vektorni yasaymiz.

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ vektor va $\vec{a}$ vektorimizning kollinearligidan

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{8.8}$$

kelib chiqadi va bu tenglamamiz to‘g‘ri chiziqning berilgan nuqtadan o‘tib berilgan vektorga parallel tenglamasi yoki kanonik tenglamasi deyiladi. $\vec{a}(l;m;n)$ vektor (8.8) to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.

7-Misol. $N(3;-2;4)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{a}(-2;4;-3)$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Yuqoridagi (8.8) formuladan foydalanib,

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-(-2)}{4}=\frac{z-4}{-3}\Rightarrow\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-4}{-3}$$

berilgan nuqtadan o‘tib berilgan vektorga parallel tenglamasini keltirib chiqardik.

Fazoda berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Fazoda $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik. Buning uchun izlanayotgan to‘g‘ra chizig‘imiz $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{M_2M}$ vektorlarni tuzamiz.

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$
$$\overrightarrow{M_2M}=(x-x_2;y-y_2;z-z_2)$$

bu vektorlar bir to‘g‘ri chiziqda yotadi, ya’ni ular kollinear. Bundan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{8.9}$$

kelib chiqadi.

Bu tenglamalar berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o‘tgan to‘g‘ri chiziqni ifoda qiladi, chunki bular x, y, z ga nisbatan birinchi darajali bo‘lib, har ikki nuqtaning koordinatalarini qanoatlantiradi.

8-Misol. $M_1(-1;3;-5)$ va $M_2(2;1;0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi toping.

Yechish: Yuqoridagi (8.9) formuladan foydalanib,

$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+5}{0+5} \Longrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+5}{5}$$

fazoda berilgan M_1 va M_2 nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topdik.

To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.

Fazoda $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ tenglama bilan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Biz uni

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

ko‘rinishida yozsak:

$$\begin{cases} x=lt+x_0 \\ y=mt+y_0 \\ z=nt+z_0 \end{cases} \qquad (8.10)$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

9-Misol. $M(2;-3;5)$ va $N(-1;4;-3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq parametrik tenglamasi toping.

Yechish: Yuqoridagi (8.10) formuladan foydalanib,

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{8}$$

tenglamani tuzamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bu tenglamani parametrik ko‘rinishga

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{8}=t \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}=t \\ \dfrac{y-4}{-7}=t \\ \dfrac{z+3}{8}=t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=-7t+4 \\ z=8t-3 \end{cases}$$

keltirdik.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

8.1. Fazoda tekislikning ba’zi tenglamalariga doir misollar.

8.1.1. Koordinatalar sistemasida $M_1(2;3;1)$, $M_2(3;1;4)$, $M_3(2;1;5)$ nuqtalar va $\vec{a}_1(4;1;2)$, $\vec{a}_2(-2;3;5)$, $\vec{a}_3(5;-1;3)$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

1) M_1 nuqtadan o‘tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarga;
2) M_1 nuqtadan o‘tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_3$ vektorlarga;
3) M_2 nuqtadan o‘tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.2. Koordinatalar sistemasida $N_1(2;3;-1)$, $N_2(-2;4;1)$, $N_3(3;2;-1)$ nuqtalar va $\vec{a}_1(-3;-1;2)$, $\vec{a}_2(1;-3;-5)$, $\vec{a}_3(1;2;3)$ vektorlar berilgan bo‘lsin.
1) N_1 va N_2 nuqtalardan o‘tib, $\vec{a}_1$ vektorga;
2) N_1 va N_3 nuqtalardan o‘tib, $\vec{a}_1$ vektorga;
3) N_1 va N_3 nuqtalardan o‘tib, $\vec{a}_2$ vektorga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.3. Koordinatalar sistemasida $M_1(3;7;-2)$, $M_2(4;1;3)$, $M_3(5;3;-1)$, $M_4(3;-5;1)$ va $M_3(2;3;-5)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.
1) M_1 , M_2 va M_3 nuqtalardan;
2) M_1 , M_2 va M_4 nuqtalardan;
3) M_1 , M_3 va M_5 nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.4. Koordinatalar sistemasida $N_1(-3;2;1)$ va $N_2(2;-4;3)$ berilgan bo‘lsin.
1) N_1 nuqtadan Oxy tekisligiga;
2) N_1 nuqtadan Oyz tekisligiga;
3) N_1 nuqtadan Oxz tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.5. Koordinatalar sistemasida $M_1(4;3;-1)$, $M_2(-2;4;5)$ va $M_3(3;-2;2)$ berilgan bo‘lsin.
1) M_1 nuqtadan va Ox o‘qidan o‘tuvchi;
2) M_1 nuqtadan va Oz o‘qidan o‘tuvchi;
3) M_2 nuqtadan va Ox o‘qidan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.6. Koordinatalar sistemasida $N_1(1;-2;3)$ va $N_2(2;4;-3)$ berilgan bo‘lsin.
1) N_1 nuqtadan o‘tib, Ox o‘qiga;
2) N_1 nuqtadan o‘tib, Oy o‘qiga;
3) N_1 nuqtadan o‘tib, Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.7. Koordinatalar sistemasida $M_1(3;2;-1)$, $M_2(1;3;5)$ va $M_3(2;-4;3)$ berilgan bo‘lsin.
1) M_1va M_2 nuqtalardan o‘tib, Ox o‘qiga;
2) M_2va M_3 nuqtalardan o‘tib, Ox o‘qiga;

3) M_1 va M_2 nuqtalardan o‘tib, Oy o‘qiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.1.8. Koordinatalar sistemasida uchta nuqtadan o‘tgan tekislikning kanonik tenglamasi tuzilsin.

1) $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(3; 1; 4)$, $M_3(2; 1; 5)$;

2) $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(-2; 4; 1)$, $M_3(0; 2; -1)$;

3) $M_1(3; 7; -2)$, $M_2(4; 1; 3)$, $M_3(5; 3; -1)$.

8.1.9. Ox va Oy o‘qlaridan mos ravishda 5 va -7 ga teng kesmalar ajratadigan va $N(1; 1; 2)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

8.1.10. $A(3; 5; -7)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratadigan tekislik tenglamasi tuzilsin.

8.1.11. $A(3; 5; 1)$ va $B(7; 7; 8)$ nuqtalardan o‘tib, Ox, Oy o‘qlaridan teng kesmalar ajratgan tekislik tenglamasi yozilsin.

8.1.12. Koordinatalar sistemasi o‘qlaridan mos ravishda 3, 5, -7 ga teng kesmalar ajratadigan tekislik tenglamasi tuzilsin.

8.1.13. Koordinatalar sistemasida $x - y + 7z - 4 = 0$ tekislikning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari aniqlansin.

8.1.14. Uchi $A(2; 1; 0)$, $B(1; 3; 5)$, $C(6; 3; 4)$, $D(0; -7; 8)$ nuqtalarda bo‘lgan tetraedr berilgan. AB qirradan va CD qirraning o‘rtasidan o‘tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

8.1.15. Quyidagi hollarning har biri uchun tekislikning parametrik tenglamalariga ko‘ra umumiy tenglamasi yozilsin:

1) $x = 2 + 3u - 4v;\ y = 4 - v;\ z = 2 + 3u;$

2) $x = u + v;\ y = u - v;\ z = 5 + 6u - 4v.$

8.1.16. Quyidagi tekisliklar juftlarining qaysilari parallel, kesishadi yoki ustma-ust tushishi aniqlansin:

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0, \quad 3x - 6y + 1 = 0;$

2) $3x - 4y + 6z + 9 = 0, \quad 6x - 8y - 10z + 15 = 0;$

3) $3x - 2y - 3z + 5 = 0, \quad 9x - 6y - 9z - 5 = 0$

8.1.17. $A(-3; 3; 5)$, $B(0; -7; -14)$, $C(6; 5; 1)$, $D(-3; -5; 2)$, $E(4; -7; 10)$, $F(2; 6; 1)$ nuqtalarning $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ tekislikka nisbatan vaziyatini aniqlang.

8.1.18. $A(3; 5; 1)$, $B(2; -6; 3)$ nuqtalar berilgan, AB kesmani $2x - 3y + 6z - 1 = 0$ tekislik qanday nisbatda bo‘ladi?

8.1.19. $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtasini toping.

8.1.20. Koordinata boshidan $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtasigacha bo‘lgan masofasini toping.
8.1.21. Oxy tekisligi va $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ tekislik kesishishidan hosil bo‘lgan uchburchakning yuzini toping.
8.1.22. $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ tekislik bilan va koordinatalar tekisliklari bilan chegaralangan piramida hajmini toping.
8.1.23. Tekislik $M_1(6; -10; 1)$ nuqtadan o‘tadi va absissa o‘qida $a = -3$ va aplikata o‘qida esa $c = 2$ kesmani kesib o‘tadi. Bu tekislik uchun kesmalardagi tenglamasini tuzing.
8.1.24. Quyidagi tekisliklar tenglamasining qaysi biri normal ekanligini aniqlang:
1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0;$ 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0;$
3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0;$ 4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0.$
8.1.25. Quyidagi tekislik tenglamalarini normal ko‘rinishga keltiring:
1) $2x - 2y + 2z - 18 = 0;$
2) $x - y - \sqrt{2}z + 16 = 0;$
3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0.$
8.1.26. $P(-1; 1; -2)$ nuqtadan $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ va $M_3(4; -5; -2)$ nuqtalardan o‘tadigan tekislikgacha d masofani aniqlang.
8.1.27. Quyidagi holatlarda parallel tekisliklar orasidagi masofani hisoblang:
1) $x - 2y - 2z - 12 = 0,$ $x - 2y - 2z - 6 = 0;$
2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0,$ $4x - 6y + 12z + 21 = 0.$
8.1.28. Quyidagi holatlarda 2 parallel tekisliklardan bir xil uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o‘rni tenglamasini tuzing:
1) $4x - y - 2z - 3 = 0,$ $4x - y - 2z - 5 = 0;$
2) $3x + 2y - z + 3 = 0,$ $3x + 2y - z - 1 = 0;$
3) $5x - 3y + 2z + 3 = 0,$ $10x - 6y + 2z + 7 = 0.$
8.1.29. $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ tekislik tenglamasi berilgan, λ ning qanday qiymatlarida:
1) $M_1(1; -2; 3)$ nuqtadan o‘tuvchi; 2) Ox o‘qiga parallel;
3) Oy o‘qiga parallel; 4) Oz o‘qiga parallel bo‘ladi.
8.1.30. $\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va:

1) $M_1(4;-2;-3)$ nuqtani qanoatlantiruvchi;
2) Ox o‘qiga parallel bo‘lgan;
3) Oy o‘qiga parallel bo‘lgan;
4) Oz o‘qiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

8.2. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalariga doir misollar.

8.2.1. Koordinatalar sistemasida $\vec{a}_1(4;1;2)$, $\vec{a}_2(-2;3;5)$,$\vec{a}_3(5;-1;3)$ vektorlar va $M_1(2;3;1)$, $M_2(3;1;4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.
1) $\vec{a}_1$ vektorga parallel va M_1 nuqtadan o‘tuvchi;
2) $\vec{a}_1$ vektorga parallel va M_2 nuqtadan o‘tuvchi;
3) $\vec{a}_2$ vektorga parallel va M_1 nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning;
a) kanonik; b) parametrik tenglamalarini tuzing.

8.2.2. Koordinatalar sistemasida $A(2;3;1)$, $B(3;1;4)$, $C(2;1;5)$ va $D(0;2;-1)$ nuqtalardan
1) A va B; 2) A va C; 3) A va D;
4) B va C; 5) B va D; 6) C va D o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning:
a) kanonik; b) parametrik tenglamalarini tuzing.

8.2.3. Quyida berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.
1) $\begin{cases} 3x-2y+5z-4=0 \\ 2x+3y+z+12=0 \end{cases}$;
2) $\begin{cases} x+2y-2z-2=0 \\ 3x-2y+6z+9=0 \end{cases}$.

8.2.4. Koordinatalar sistemasida $A(2;-3;1)$, $B(3;1;-4)$ va $C(-2;1;5)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.
1) A nuqtadan o‘tib, Oxy o‘qiga;
2) A nuqtadan o‘tib, Oyz o‘qiga;
3) B nuqtadan o‘tib, Oxz o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g ‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

8.2.5. $M_1(-1;4;-3)$ va $M_2(-8;2;5)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.
1) M_1 nuqtadan o‘tib, Oxy tekisligiga;
2) M_1 nuqtadan o‘tib, Oxz tekisligiga;
3) M_1 nuqtadan o‘tib, Oyz tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

8.2.6. Quyidagi nuqtalardan qaysilari bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi?
1) $A(3;0;1)$, $B(0;2;4)$, $C(-3;4;7)$;
2) $C(1;2;3)$, $D(10;8;4)$, $E(3;0;2)$.

8.2.7. Ushbu $A(5;8;15)$, $B(-1;-1;-3)$, $C(5;7;1)$, $D(0;\frac{1}{2};0)$, $E(0;0;1)$ nuqtalardan qaysilari $x = 1 + 2t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + 6t$ to‘g‘ri chiziqda yotadi?
8.2.8. Fazoda to‘g‘ri chiziqlarning parametrik tenglamalari tuzilsin:
1) $x - 2y + 4z = 0,\ 3x - 2y + 5z = 0;$
2) $x + y - z + 5 = 0,\ 2x - y + 2z - 2 = 0.$
8.2.9. 1) $M(3;5;1)$ nuqtadan o‘tib, $x = 2 + 4t,\ \ y = -3t,\ \ z = -3$ to‘g‘ri chiziqqa parallel;
2)$N(0;-5;4)$ nuqtadan o‘tib, $x + 2y + 6 = 0$, $z = 5$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamalari yozilsin.
8.2.10. Quyidagi hollarning har birida to‘g‘ri chiziqning Oxy tekislikka proyeksiyasi topilsin.
1) $5x + 8y - 3z + 9 = 0,\ \ 2x - 4y + z - 1 = 0;$
2) $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{8}$.
8.2.11. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalari topilsin:
1) $6x + 2y - z - 9 = 0,\ \ 3x + 2y + 2z - 12 = 0;$
2) $x = 6 + 2t,\ y = -2 + 4t,\ z = -5t.$
8.2.12. To‘g‘ri chiziqning ikkita koordinata tekisliklar bilan kesishish nuqtalari $M(0;y_1;z_1)$, $N(x_2;0;z_2)$ berilgan. Shu to‘g‘ri chiziqning uchinchi koordinata tekisligi bilan kesishish nuqtasini toping.
8.2. 13. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlarni
1)$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$;
2) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$;
3) $\begin{cases} x + 4y - 6z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$
koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtasini toping.
8.2.14. $\vec{a}(2;-1;-2)$ vektorga parallel bo‘lgan va
$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$
to ‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
8.2.15. $\vec{a}(7;9;17)$ vektorga parallel bo‘lgan va
$\begin{cases} 5x - 2y - z - 3 = 0 \\ x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

8.2.16. Fazoda $N(2;3;1)$ nuqtadan o‘tib $\begin{cases} x+y=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x-y+z+4=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishadigan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

8.2.17. Quyida berilgan to‘g‘ri chiziqlarning qaysi berilgan tekislikda yotadi, qaysi birida unga parallel, qaysi birida u bilan kesishadi? Agar ular kesishsa kesishish nuqtasi topilsin.

1) $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, $\quad 3x+5y-z-2=0$

2) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$, $\quad 3x-3y+2z-5=0$

8.2.18. To‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi kosinuslari topilsin:

1) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{12}$; $\qquad$ 2) $\frac{x}{12}=\frac{y-7}{9}=\frac{z+3}{20}$

8.2.19. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-5}{2}$ va $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

8.2.20. Ikki $\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

8.2. 21. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar kosinuslari topilsin:

1) $\begin{cases} x=3+t \\ y=7-2t \\ z=4+3t \end{cases}$ va $\begin{cases} x=2+5t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 3x+y-z+1=0 \\ 3x-\ y+z=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+2y-5z+1=0 \end{cases}$

8.2.22. Kanonik tenglamalari $\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+4}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+13}{\alpha}=\frac{z-6}{\sqrt{2}}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatida o‘zaro perpendikular bo‘ladi?

8.2.23. $\begin{cases} x=5+6t \\ y=1-3t \\ z=2+t \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $7x+2y-3z+5=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

8.2.24. $x+y-z=0,\ \ 2x-3y+z=0$ to‘g‘ri chiziq bilan $3x+$ $+5y-4z+2=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

8.2.25. $2x+y-z+4=0,\ \ x+y=0$ to‘g‘ri chiziqning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi tenglamasi tuzilsin.
8.2.26. $2x-y+z-8=0,\ \ 4x+3y-z+14=0$ tekisliklarning kesishish chizig‘ida $2x+3y-6z-10=0$ tekislikdan 7 masofada joylashgan nuqtalar topilsin.
8.2.27. Quyida berilgan to‘g‘ri chiziqlar juftlaridan qaysilari ayqash, qaysilari kesishadi, qaysilari parallel yoki ustma-ust tushadi? Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, ular orqali o‘tgan tekislik tenglamasi tuzilsin, agar ular kesishsa, ularni o‘z ichiga olgan tekislik tenglamasi tuzilsin va ularning kesishish nuqtasi topilsin:

1) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=7+t \\ z=3+4t \end{cases}$ va $\begin{cases} x=6+t \\ y=-1-2t; \\ z=-2+t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=-t \end{cases}$ va $\begin{cases} x=-2t \\ y=-5+3t \\ z=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=9t \\ y=5t \\ z=-3+t \end{cases}$ va $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

8.2.28. l to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$$

kanonik tenglamasidagi n parametr qanday qiymat qabul qilganda u umumiy tenglamasi $x-3y+6z+7=0$ bo‘lgan tekislikka parallel bo‘ladi?
8.2.29. l to‘g‘ri chiziqning

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

kanonik tenglamasidagi m va P tekislikning $3x-2y+Cz+1=0$ umumiy tenglamasidagi C parametrlarning qanday qiymatida ular o‘zaro perpendikulyar bo‘ladilar?
8.2.30. Fazoda $M(3;-1;-4)$ nuqtadan o‘tib, Oy o‘qni kesib o‘tadigan va $y+2z=0$ tekislikka kollinear(parallel) bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalari tuzilsin.

9-MAVZU. SONLAR KETMA–KETLIGI VA UNUNG LIMITI

Reja:

1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti.
2. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari.
3. Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala.

Tayanch iboralar: sonli ketma-ketlik, quyidan chegaralangan ketma-ketlik, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik, chegaralangan ketma-ketlik, chegaralanmagan ketma-ketlik, sonli ketma-ketlik limiti, o‘zgarmas ketma-ketlik, yaqinlashuvchi ketma-ketlik, uzoqlashuvchi ketma-ketlik, limitning yagonaligi, monoton ketma-ketliklar, limit hisoblash qoidalari, ajoyib limit.

9.1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti.

Dastlab sonli ketma-ketlik tushunchasini kiritamiz.

1-Ta‘rif: Agar har bir $n \epsilon N$ natural songa biror qonun-qoida asosida ma’lum bir $a_n \epsilon R$ haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, unda a_1, a_2, a_3, … , a_n, … ***sonli ketma-ketlik*** deb ataladi. Bunda $a_i (i \epsilon N)$ sonlari ***ketma-ketlikning hadlari*** , a_n esa ***umumiy hadi*** deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarga bir nechta misol keltiramiz.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n}$;

2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots, \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

3) $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots, \qquad a_n = (-1)^n$;

4) $3, 3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots, \quad a_n = 3$;

5) $-1, -4, -9, -16, \cdots, -n^2, \cdots, \quad a_n = -n^2$;

6) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots, \quad a_n = 2^n$;

7) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \cdots, n^{(-1)^n}, \cdots, \qquad a_n = n^{(-1)^n}$;

8) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots, (-1)^n \cdot n, \cdots, \qquad a_n = (-1)^n \cdot n$.

Kelgusida $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonli ketma-ketlikni qisqacha ketma-ketlik deb yuritamiz va $\{a_n\}$ kabi belgilaymiz.

2-Ta'rif: Agar shunday M (yoki m) soni mavjud bo'lsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $a_n \leq M$ (yoki $a_n \geq M$) shart bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deb ataladi. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik ***chegaralangan*** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan 5) ketma-ketlik yuqoridan $M = -1$ soni bilan, 6) va 7) ketma-ketliklar quyidan mos ravishda $m = 2$ va $m = 0$ soni bilan chegaralangan. 1) – 4) ketma-ketliklar esa chegaralangan bo'ladi.

3-Ta'rif: Ixtiyoriy $M > 0$ soni uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikning kamida bitta hadi $|a_n| > M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik ***chegaralanmagan*** deyiladi.

Masalan, 5) – 8) ketma-ketliklar chegaralanmagan bo'ladi. Bunda 8) quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan ketma-ketlik bo'ladi.

Endi oliy matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lgan limit ta'rifini keltiramiz.

4-Ta'rif: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun unga bog'liq shunday N_ε son topilsaki, $n > N_\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar va biror chekli A haqiqiy son uchun $|a_n - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ***chekli limiti*** deyiladi.

A soni $\{a_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti ekanligi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ yoki $\lim a_n = A$ yoki $a_n \to A$ kabi yoziladi. Bu yozuv "$\{a_n\}$ ketma-ketlik A soniga intiladi yoki yaqinlashadi" deb o'qiladi.

Masalan, 1) ketma-ketlik limiti $A = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini olib, limit ta'rifidagi N_ε sonini topishga harakat etamiz:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = N_\varepsilon .$$

Demak, 1) ketma-ketlikda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun $N_\varepsilon = 1/\varepsilon$ deb olsak, unda barcha $n > N_\varepsilon$ uchun $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ bo'ladi va, limit ta'rifga asosan, $\lim (1/n)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Shu tarzda 2) ketma-ketlik limiti ham 0 bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi yana $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti ta'rifiga murojaat etamiz. Unda $a_n \to A$ bo'lsa, tartib raqami $n > N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlar uchun

$| a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \Rightarrow A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon \Rightarrow a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli A limitga ega bo'lsa, unda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun uning tartib raqami $n > N_\varepsilon$ bo'lgan barcha a_n hadlari A nuqtaning ε – atrofiga tegishli va undan tashqarida faqat chekli sondagi hadlar joylashgan bo'ladi. Limit ta'rifining bu ifodasidan foydalanib 3) ketma-ketlik limiti mavjud emasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz va 3) ketma-ketlik limiti biror A sonidan iborat deb olamiz. Bu limit nuqtaning (A–0,5; A+0,5) atrofini qaraymiz. Unda bu atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari joylashgan bo'lishi kerak. Ammo A limit nuqtaning bu atrofiga 3) ketma-ketlikning ham 1, ham –1 hadlari bir paytda tegishli bo'la olmaydi. Bunga sabab shuki, olingan (A–0,5; A+0,5) atrof uzunligi 1 bo'lib, –1 va 1 hadlar orasidagi masofa esa 2 ga tengdir. Bu holda, masalan, agar $1 \in (A-0{,}5; A+0{,}5)$ bo'lsa, unda –1 bu atrofdan tashqarida joylashgan bo'ladi. Bundan esa (A–0,5; A+0,5) atrofdan tashqarida 3) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganligi kelib chiqadi. Ammo bu xulosa limit ta'rifiga ziddir. Demak farazimiz noto'g'ri va 3) ketma-ketlik limitga ega emas ekan.

5-Ta'rif: Hamma hadlari bir xil a soniga teng bo'lgan ketma-ketlik ***o'zgarmas ketma-ketlik*** deyiladi.

Har qanday $\{a_n = C\}$ o'zgarmas ketma-ketlik uchun $\lim a_n = \lim C = C$ tenglik o'rinli bo'lishi bevosita limit ta'rifidan kelib chiqadi. Masalan, yuqoridagi 4) $\{a_n=3\}$ o'zgarmas ketma-ketlikdir va uning uchun $\lim a_n = \lim 3 = 3$ bo'ladi.

6-Ta'rif: Ixtiyoriy $M > 0$ soni uchun bu songa bog'liq shunday N_M soni topilsaki, $\{a_n\}$ ketma-ketlik tartib raqami $n > N_M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha hadlar uchun $|a_n| > M$ tengsizlik bajarilsa, unda bu ketma-ketlik ***cheksiz limitga*** ega deyiladi.

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz ekanligi $\lim a_n = \infty$ yoki $\lim a_n = \pm\infty$ kabi ifodalanadi. Masalan, 5) ketma-ketlik uchun $\lim a_n = -\infty$ ekanligini ko'rsatamiz. ixtiyoriy $M>0$ uchun

$$|a_n| > M \Rightarrow \left|-n^2\right| > M \Rightarrow n^2 > M \Rightarrow n > \sqrt{M} = N_M .$$

Demak, 5) ketma-ketlikda ixtiyoriy M>0 soni uchun $N_M=\sqrt{M}$ deb olsak, unda barcha $n>N_M$ uchun $|a_n|=|-n^2|>M$ bo‘ladi va, barcha $a_n<0$ ekanligidan hamda cheksiz limit ta’rifiga asosan , lim $(-n^2)=-\infty$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shundek 6) ketma-ketlik uchun $\lim a_n=\lim 2^n=+\infty$ ekanligini ko‘rsatish mumkin. 8) sonli ketma-ketlik ham chegaralanmagan, ammo uning cheksiz limiti aniq bir ishoraga ega emas va shu sababli $\lim a_n=\lim(-1)^n n=\infty$ deb yoziladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki cheksiz limitga ega har qanday ketma-ketlik albatta chegaralanmagan bo‘ladi. Ammo teskari tasdiq har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, yuqorida keltirilgan 7) ketma-ketlik chegaralanmagan, ammo uning limiti mavjud emas.

7-Ta’rif: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi ketma-ketlik*** deyiladi.

Masalan, yuqoridagi 1), 2) va 4) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi, 3), 5)—8) ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchidir.

1-Teorema: Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagona bo‘ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz va bu ketma-ketlik ikkita $\lim a_n=A$, $\lim a_n=B$ $(A\neq B)$ limitga ega deb olamiz. $|A-B|=\varepsilon$ bo‘lsin. Unda, limit ta’rifiga asosan, shunday N_1 va N_2 sonlar mavjudki, $n>N_1$ bo‘lganda $|a_n-A|<\varepsilon/2$ va $n>N_2$ bo‘lganda $|a_n-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar o‘rinlidir. Agar $N=\max\{N_1,N_2\}$ deb olsak, unda $n>N$ bo‘lganda oldingi tengsizliklarni ikkalasi ham bajariladi. Bu holda

$$\varepsilon=|A-B|=|A-a_n+a_n-B|\leq|A-a_n|+|a_n-B|<(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

ya’ni $\varepsilon<\varepsilon$ ziddiyatga kelamiz. Demak farazimiz noto‘g‘ri va $A=B$, ya’ni $\{a_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik limiti yagona ravishda aniqlanadi.

Biror $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblash ikki bosqichdan iborat bo‘ladi:

1) bu ketma-ketlikni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;
2) agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limitini topish.

8-Ta’rif: Agar ixtiyoriy n=1,2,3, uchun $a_{n+1}>a_n$ ($a_{n+1}<a_n$) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, unda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ***monoton o‘suvchi (kamayuvchi)*** deyiladi.

Masalan, $\{1-1/n\}$ monoton o‘suvchi, $\{1+1/n\}$ esa monoton kamayuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

2-Teorema: Agar $\{a_n\}$ monoton o‘suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik va yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, unda $\{a_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

9.2. Sonli ketma-ketlik limitini hisoblash qoidalari.

Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjudligi ma’lum bo‘lsa, uni limit ta’rifi bo‘yicha aniqlab bo‘lmaydi, chunki bunda limit qiymati ma’lum bo‘lishi kerak. Shu sababli turli ketma-ketliklarning limitini topish uchun quyidagi teorema orqali ifodalanadigan ***limit hisoblash qoidalaridan*** foydalaniladi.

3-Teorema: Agar $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ketma-ketliklarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi va $\lim a_n=A$, $\lim b_n=B$ bo‘lsa, unda quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim(a_n \pm b_n)= \lim a_n \pm \lim b_n=A\pm B; \qquad (9.1)$$

$$\lim(a_n \cdot b_n)= \lim a_n \cdot \lim b_n=A\cdot B; \qquad (9.2)$$

$$\lim(a_n / b_n)= \lim a_n / \lim b_n=A/B \quad (\lim b_n=B\neq 0). \qquad (9.3)$$

Isbot: Faqat (9.1) tenglikni isbotini keltirish bilan chegaralanamiz. Limit ta’rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday N_a va N_b sonlari topiladiki, $n>N_a$ va $n>N_b$ bo‘lganda mos ravishda $|a_n–A|<\varepsilon/2$ va $|b_n–B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Unda $n>N=\max\{N_a , N_b \}$ bo‘lganda bu tengsizliklarning ikkalasi ham bajariladi va bundan

$$|(a_n \pm b_n) –(A\pm B|=|(a_n −A) \pm(b_n –B)|< |a_n −A| +|b_n –B|<(\varepsilon/2)+ (\varepsilon/2)=\varepsilon$$

natija kelib chiqadi. Bu natijadan, limit ta’rifiga asosan, (9.1) tenglik kelib chiqadi.

Izohlar: 1. (9.1) – (9.3) tengliklar yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun limit olish va arifmetik amallar bajarilish tartibini o‘zgartirish mumkinligini ko‘rsatadi.

2. Agar $\{a_n=C\}$ o‘zgarmas ketma-ketlik bo‘lsa, bu holda $\lim a_n=C$ ekanligidan foydalanib, (9.2) tenglikni $\lim Cb_n=C\lim b_n=Cb$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, o‘zgarmas C ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

(9.1) – (9.3) limit hisoblash qoidalari va eng sodda

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha < 0; \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases} \qquad (9.4)$$

limitdan foydalanib, bir qator ketma-ketliklarning limitini hisoblash mumkin. Bunga misol sifatida

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + p_{k-2} n^{k-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_m n^m + q_{m-1} n^{m-1} + q_{m-2} n^{m-2} + \cdots + q_1 n + q_0} \qquad (9.5)$$

limitni hisoblash masalasini ko‘ramiz. (9.5) limitni to‘g‘ridan-to‘g‘ri (9.3) qoida yordamida hisoblab bo‘lmaydi, chunki surat va maxrajdagi ketma-ketliklar yaqinlashuvchi emas.Bu limitni hisoblash uchun uch holni alohida-alohida qaraymiz.

1)$k>m$. Limit ostidagi kasrning suratidan n^k va maxrajidan n^m darajani qavsdan tashqariga chiqaramiz. So‘ngra $k-m=\alpha>0$ ekanligini hisobga olib va (9.4) limitdan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k (p_k + p_{k-1} n^{-1} + p_{k-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-k} + p_0 n^{-k})}{n^m (q_m + q_{m-1} n^{-1} + q_{m-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-m} + q_0 n^{-m})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_m} n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} (\alpha > 0) = \pm\infty .$$

2)$k=m=r$. Bu holda (9.5) limitdagi kasrning surat va maxrajini n^r darajaga bo‘lib va (9.1) – (9.3) limit hisoblash qoidalari hamda (9.4) limitdan foydalanib, ushbu javobni hosil etamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_r(n)}{Q_r(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_r n^r + p_{r-1} n^{r-1} + p_{r-2} n^{r-2} + \cdots + p_1 n + p_0}{q_r n^r + q_{r-1} n^{r-1} + q_{r-2} n^{r-2} + \cdots + q_1 n + q_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^r (p_r + p_{r-1} n^{-1} + p_{r-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{n^r (q_r + q_{r-1} n^{-1} + q_{r-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (p_r + p_{r-1} n^{-1} + p_{r-2} n^{-2} + \cdots + p_1 n^{1-r} + p_0 n^{-r})}{\lim\limits_{n\to\infty} (q_r + q_{r-1} n^{-1} + q_{r-2} n^{-2} + \cdots + q_1 n^{1-r} + q_0 n^{-r})} = \frac{p_r}{q_r} .$$

3) $k<m$. Bunda 1) holdagi singari mulohazalar yuritib,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} == \lim_{n\to\infty} \frac{p_k}{q_m} n^{k-m} = \frac{p_k}{q_m} \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} (\alpha < 0) = \frac{p_k}{q_m} \cdot 0 = 0$$

javobga erishamiz.

Misol sifatida ushbu limitni hisoblanishini to‘liq ko‘rsatamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4-3n^{-1})}{n(2+7n^{-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3n^{-1}}{2+7n^{-1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(4-3n^{-1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2+7n^{-1})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}3n^{-1}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}7n^{-1}}=\frac{4-3\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}{2+7\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}}=\frac{4-3\cdot 0}{2+7\cdot 0}=\frac{4}{2}=2\,.$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, har qanday $\{a_n\}$ ketma-ketlik limitini hisoblashning umumiy usuli mavjud bo'lmasdan, (9.5) limit singari ayrim xususiy hollarda uni hisoblash yo'lini ko'rsatish mumkin. Bunga misol sifatida quyidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash usuli bilan tanishtiramiz:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b})(\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b})}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+a})^2-(\sqrt{n+b})^2}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+a)-(n+b)}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=$$

$$=(a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=(a-b)\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}}\right]=$$

$$=(a-b)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(a/n)}+\sqrt{1+(b/n)}}=(a-b)\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=0.$$

Sonli ketma-ketliklar limitlarini hisoblashda quyidagi ***ajoyib limit*** deb ataladigan tenglikdan ham foydalanish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \tag{9.6}$$

Bu natija umumiy hadi $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan sonli ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan 3 soni bilan chegaralanganligini isbotlash (bu ustida to'xtalib o'tirmaymiz) va 2-teoremadan foydalanish orqali keltirib chiqariladi. Bu limitning javobi e=2.718281… irratsional son ekanligi va bu son matematikada juda ko'p qo'llanilishini ta'kidlab o'tamiz. Masalan, natural logarifm ln$x$ asosi mana shu e sonidan iboratdir.

9.3. Sonli ketma-ketlikka doir bir iqtisodiy masala.

Sonli ketma-ketlik tushunchasiga keluvchi bir iqtisodiy masalani ko‘ramiz. Bank mijozlardan yillik R foiz to‘lash sharti bilan omonatga jamg‘arma qabul etadi. Bunda *R* bank foizning o‘nli kasrdagi ifodasini bildiradi. Masalan, bankning foiz qo‘yilmasi 15% bo‘lsa, unda *R*=0.15 deb olinadi.Bank foizi mijoz omonatiga yil davomida *k* marta hisoblanishi mumkin. Masalan, *k*=1 bo‘lsa yilda bir marta, *k*=4 bo‘lsa har chorakda, *k*=12 holda har oyda omonatga foiz qo‘yilmasining tegishli bir qismi qo‘shib boriladi. Bunda har bir qo‘shilmada omonat miqdori *i*=*R/k* foizga ortadi.

Mijozning bankka qo‘ygan omonatining boshlang‘ich qiymati a_0 bo‘lsin. Bu omonat qiymatini vaqt o‘tishi bilan qanday o‘zgarib borishini aniqlaymiz. Omonatning birinchi qo‘shilmadan keyingi qiymatini a_1 deb belgilasak, u

$$a_1 = a_0 + ia_0 = (1 + i) \cdot a_0$$

formula bilan aniqlanadi. Omonatning ikkinchi qo‘shilmadan keyingi qiymati

$$a_2 = a_1 + ia_1 = (1 + i) \cdot a_1 = (1 + i)^2 \cdot a_0$$

bo‘ladi. Bu jarayonni davom ettirib, omonatning *n*-qo‘shilmadan keyingi qiymati

$$a_n = (1 + i)^n \cdot a_0,\ n = 1,2,3, \dots \qquad (9.7)$$

ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib omonat qiymatining o‘zgarib borishi (9.7) sonli ketma-ketlik bilan aniqlanib, u birinchi hadi $a_1 = (1 + i) \cdot a_0$ va maxraji $q = 1 + i$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Bu ketma-ketlikning limiti masalasini keyingi paragraflarda ko‘ramiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyida berilgan ketma-ketliklarning limitlarini toping.

9.1. $x_n = \frac{5\sqrt{n}}{n+1}$.

9.2. $x_n = \sqrt[n]{n}$.

9.3. $x_n = \frac{1}{n} cosn$.

9.4. $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}$.

9.5. $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

9.6. $x_n = \frac{3^n}{n!}$.

9.7. $x_n = \frac{n+1}{n}$.

9.8. $x_n = \sqrt[n]{2}$.

9.9. Ushbu $x_n = \left\{\frac{cos1!}{1\cdot 2} + \frac{cos2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{cosn!}{n(n+1)}\right\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

Quyida keltirilgan sonlar ketma-ketliklarining limitini toping.

9.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$.

9.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$.

9.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+1}\right)$.

9.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{13}+(n+2)^{10}}{(n-1)^{33}+1}$.

9.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2^n+cosn}{2^n+sinx}$.

9.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}$.

Quyidagi ketma-ketliklarning o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lishini aniqlang.

9.16. $x_n = \frac{3^n}{n!}$.

9.17. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}\ \ (n \geq 1)$.

9.18. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ \ x_1 > 1,\ a > 0$.

9.19. $x_{n+1} = x_n(2 - x_n),\ 0 < x_n < 1\ \ (n \geq 1)$.

9.20. n_0 ni qanday tanlansa, $n > n_0$ lar uchun quyidagi ketma-ketliklar monoton bo‘ladi:

1) $x_n = \frac{3^n}{n^5}$; 2) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$; 3) $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

10-MAVZU. FUNKSIYA

Reja:

1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar.
2. Funksiya grafigi.
3. Funksiyani berilish usullari.
4. Funksiya ko‘rinishlari.
5. Murakkab va teskari funksiya.
6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar.
7. Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari.

Tayanch iboralar: o‘zgarmas miqdorlar, o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya, aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, funksiya grafigi, o‘suvchi (kamaymoqchi) funksiya, kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya, monoton funksiyalar, juft funksiya, toq funksiya, davriy funksiya, chegaralangan funksiya, chegaralanmagan funksiya, o‘zgarmas funksiya, murakkab funksiya, teskari funksiya, asosiy elementar funksiyalar, elementar funksiyalar, tornkvist funksiyalari.

10.1. Funksiya va u bilan bog‘liq tushunchalar.

Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

1-Ta’rif: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, yorug‘lik tezligi c, erkin tushish tezlanishi g, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o‘zgarmas miqdorlardir.

2-Ta’rif: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi.

Masalan, tekis harakatda v tezlik o‘zgarmas miqdor bo‘lib, vaqt t va bosib o‘tilgan masofa s o‘zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o‘rganayotganimizda bir nechta o‘zgaruvchi miqdorlar o‘rtasidagi o‘zaro bog‘lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni v, vaqtni t va bosib o‘tilgan masofani s desak, u holda t va s o‘zgaruvchilar o‘zaro $s=v\cdot t$ ko‘rinishda bog‘langan bo‘ladi. Bunday bog‘lanishlarni juda ko‘p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o‘rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

3-Ta’rif: Agarda x o‘zgaruvchining biror D sonli to‘plamga tegishli har bir qiymatiga ma’lum bir qonun-qoida asosida y o‘zgaruvchining biror E to‘plamga tegishli yagona bir qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, ya’ni f: $D \rightarrow E$ bo‘lsa, unda y o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchining ***funksiyasi*** deyiladi.

Biror y o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o‘rniga F, h, g, φ kabi boshqa harflar ham qo‘llanilishi mumkin). Bu yerda x ***erkli o‘zgaruvchi yoki argument***, y esa ***erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=2x+3$, $y=3x^2+4x–1$, $y=2/x$, $y=5xe^x+6$ funksiyalarga misol bo‘ladi.

4-Ta’rif: Berilgan $f : D \rightarrow E$ funksiyada D – funksiyaning ***aniqlanish sohasi***, E − ***o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi*** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D{f}, qiymatlar sohasi esa E{f} kabi belgilanadi. Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun D{f}=[0,∞), E{f}=[–1,1].

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, oldingi paragrafda ko‘rilgan $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikni aniqlanish sohasi D{f}=N−natural sonlar to‘plami, qiymatlar sohasi esa $f(n)= a_n$, $n\in N$, haqiqiy sonlardan iborat funksiya deb qarash mumkin.

Matematik analiz fanida asosan funksiyalar a ular bilan bog‘liq bo‘lgan tasdiqlar o‘rganiladi.

10.2. Funksiya grafigi.

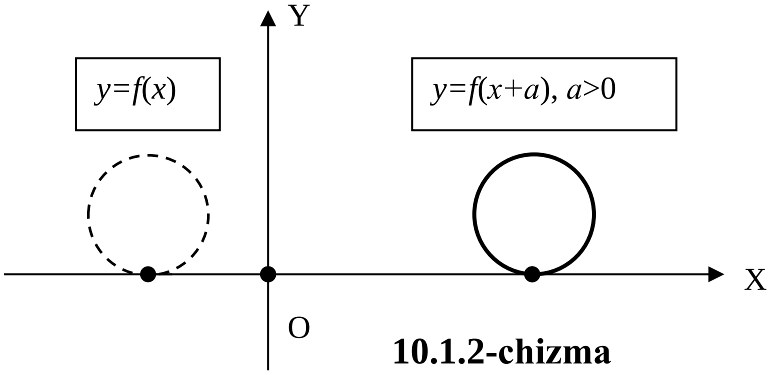
Funksiya haqida geometrik tasavvur hosil etish uchun uning grafigi tushunchasi kiritiladi.

5-Ta’rif: XOY koordinata tekislikdagi $(x,y)=(x,f(x))$, $x\in$D{f}, koordinatali nuqtalarning geometrik o‘rni $y=f(x)$ funksiyaning ***grafigi*** deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, $y=\cos x$ funksiya grafigi sinusoidadan, $y=2x+5$ funksiya grafigi esa to‘g‘ri chiziqdan iboratdir.

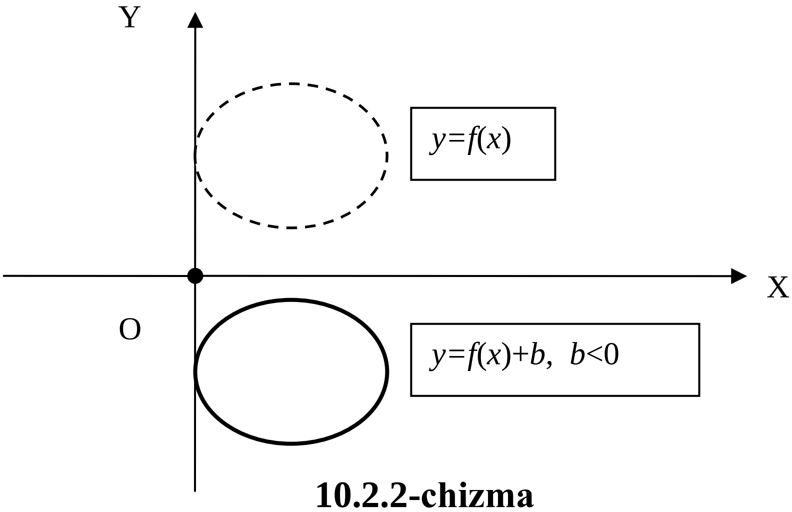
Turli masalalarni yechishda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning L grafigini ma'lum bir ko'rinishda o'zgartirishga to'g'ri keladi.

➢ $y=f(x+a)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o'qi bo'yicha $|a|$ birlik chapga (agar $a>0$ bo'lsa) yoki o'ngga (agar $a<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (10.2.1-chizmaga qarang).



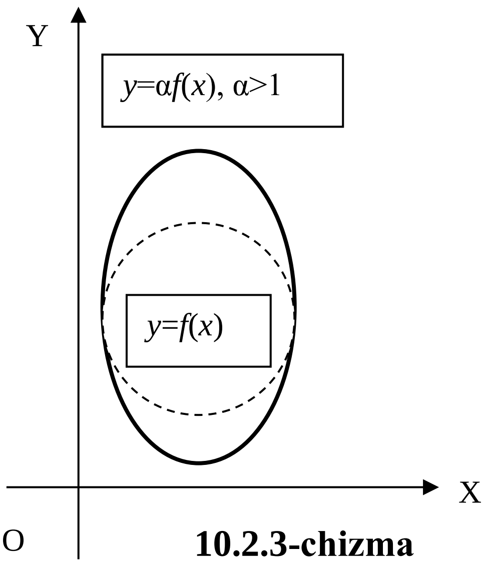
10.1.2-chizma

➢ $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha $|b|$ birlik yuqoriga (agar $b>0$ bo'lsa) yoki pastga (agar $b<0$ bo'lsa) parallel ko'chirishdan hosil bo'ladi (10.2.2-chizmaga qarang). .

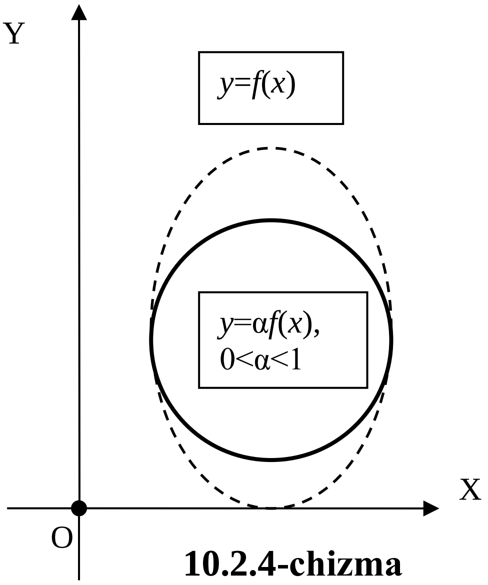


10.2.2-chizma

➢ $y=\alpha f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OY o'qi bo'yicha α marta cho'zish (agar $\alpha>1$ bo'lsa, 10.2.3-chizma) yoki qisish (agar $0<\alpha<1$ bo'lsa, 10.2.4-chizma) orqali hosil bo'ladi. Agar $\alpha<0$ bo'lsa, unda L chiziq OX o'qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.

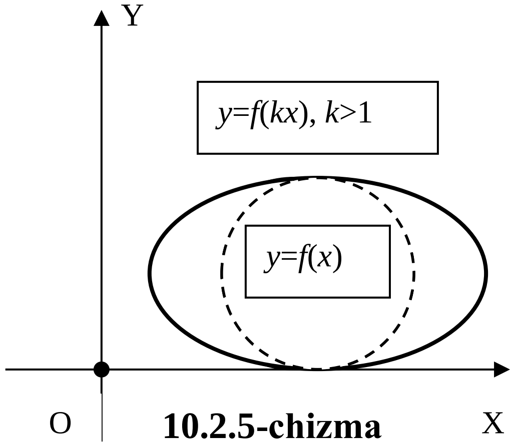


10.2.3-chizma

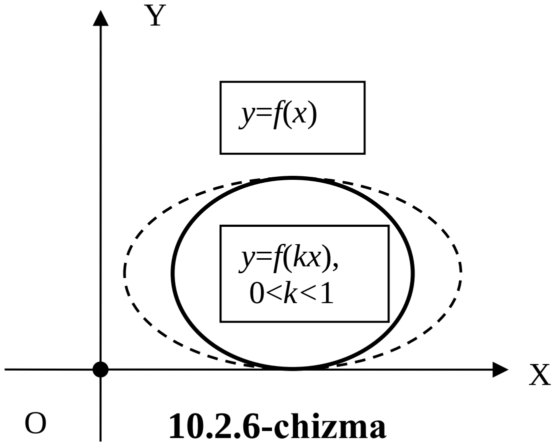


10.2.4-chizma

➢ $y=f(kx)$ funksiyaning grafigi L chiziqni OX o‘qi bo‘yicha k marta cho‘zish (agar $k>1$ bo‘lsa, 10.2.5-chizma) yoki qisish (agar $0<k<1$ bo‘lsa, 10.2.6-chizma) orqali hosil bo‘ladi. Agar $k<0$ bo‘lsa, unda L chiziq OY o‘qiga nisbatan simmetrik ravishda akslanadi.



10.2.5-chizma



10.2.6-chizma

10.3. Funksiyani berilish usullari. Turli masalalarni qarashda funksiya asosan to‘rt usulda berilishi mumkin.

❖ ***Analitik usul.*** Ko‘p hollarda funksiyalar analitik usulda, ya’ni x argument ustida bajariladigan matematik amallarni formulalar orqali ifodalash orqali beriladi. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik usulda aniqlanadi.

❖ ***Jadval usuli.*** Bu usulda funksiya

x_i	x_1	x_2	x_3	· · ·	x_{n-1}	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_1	y_2	y_3	· · ·	y_{n-1}	y_n

ko‘rinishdagi jadval orqali beriladi. Masalan, Bradisning to‘rt xonali matematik jadvallar kitobchasida funksiyalarning qiymatlari shunday ko‘rinishda berilgan. Odatda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish tajriba yoki kuzatuvlar asosida o‘rganilayotgan bo‘lsa, funksiya qiymatlari jadval ko‘rinishda ifodalanadi.

❖ ***Grafik usul.*** Bunda x argument va y funksiya orasidagi bog‘lanish bu funksiyaning grafigi orqali beriladi. Masalan, yurak faoliyatini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi. Shuningdek bu usuldan tenglamalarni grafik usulda yechishda ham foydalaniladi.

❖ ***Ta’rif usuli.*** Bu usulda funksiya qiymatini aniqlash qonuni uni ta’riflash orqali beriladi. Masalan, ***Dirixle funksiyasi*** deb ataluvchi va [0,1] kesmada aniqlangan D(x) funksiyani analitik, jadval yoki grafik ko‘rinishlarda ifodalab bo‘lmaydi. Bu funksiya qiymatlari ta’rif bo‘yicha quyidagicha aniqlanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa ;}\\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa .}\end{cases}$$

10.4. Funksiya ko‘rinishlari.

Funksiyalar u yoki bu xususiyatlariga qarab turli ko‘rinishlarga ajratiladi.

6-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2 \in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)\le f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***o‘suvchi (kamaymovchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=x^3$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(0,\infty)$ oralig‘ida o‘suvchi bo‘ladi. ***Ant’ye funksiya*** deb ataladigan $y=[x]$ funksiyaning qiymati argument x qiymatiga eng yaqin va undan katta bo‘lmagan butun son kabi aniqlanadi. Masalan, [1.2]=1, [2.98]=2, [12]=12, [–1.5]=–2. Bu holda $f(x)=[x]$ funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=Z=\{0,\pm1, \pm2,\cdots\}$ bo‘lib, u aniqlanish sohasida kamaymoqchi funksiya bo‘ladi.

7-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohaga tegishli ixtiyoriy x_1, $x_2\in D$ va $x_1<x_2$ nuqtalar uchun $f(x_1)>f(x_2)$ [$f(x_1)\ge f(x_2)$] shartni qanoatlantirsa, u shu D sohada ***kamayuvchi (o‘smoqchi) funksiya*** deyiladi.

Masalan, $y=-2x$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda, $y=x^2$ funksiya esa aniqlanish sohasining $(-\infty,0)$ oralig‘ida kamayuvchi bo‘ladi. $y=1-[x]$ funksiya esa $(-\infty;\infty)$ oraliqda o‘smoqchi bo‘ladi.

O‘suvchi yoki kamaymoqchi, kamayuvchi yoki o‘smoqchi funksiyalar birgalikda ***monoton funksiyalar*** deyiladi.

8-Ta’rif: *A*niqlanish sohasi D$\{f\}$ nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x\in$D$\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$ [$f(-x)=-f(x)$] shartni qanoatlantirsa, u ***juft*** [***toq***] ***funksiya*** deyiladi .

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiya juft yoki toq bo‘lishi shart emas. Masalan, $f(x)=x^2-3x+1$ yoki $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

Ta’rifdan juft funksiya grafigi OY koordinata o‘qiga, toq funksiya grafigi esa O koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lishi kelib chiqadi.

Teorema: Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo‘lsa, ularning umumiy D aniqlanish sohasida $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ va, $g(x)\neq 0$ bo‘lsa, $f(x)/g(x)$ funksiyalar ham juft funksiyalardir. Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo‘lsa $f(x)\pm g(x)$ toq, $f(x)\cdot g(x)$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar esa juft funksiya bo‘ladi. Agar $f(x)$ juft va $g(x)$ toq funksiya bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi va bo‘linmasi toq funksiya bo‘ladi.

Isbot: Misol sifatida faqat bir hol uchun isbotni keltiramiz, chunki boshqa hollar ham xuddi shundek ko‘riladi. Masalan, qaralayotgan $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar, ya’ni $f(-x)=f(x)$ va $g(-x)=g(x)$ bo‘lsin. Bu holda $\mathrm{F}(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiya uchun

$$\mathrm{F}(-x)=f(-x)\pm g(-x)=f(x)\pm g(x)=\mathrm{F}(x)$$

tenglik o‘rinli va , ta’rifga asosan F(x) juft funksiya bo‘ladi.

Izoh: Agar $f(x)$ aniqlanish sohasi D$\{f\}$ koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $F(x)=f(x)+$ $+f(-x)$ juft, $G(x)=f(x)-f(-x)$ esa toq funksiya bo‘lishini ko‘rish qiyin emas.

9-Ta’rif: Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday T>0 son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in$D$\{f\}$ uchun $x\pm$T$\in$D$\{f\}$ bo‘lib, $f(x\pm\mathrm{T})=f(x)$ shart bajarilsa, u ***davriy funksiya*** deb ataladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik musbat T soni shu funksiyaning ***davri*** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri T=2π, $y=\mathrm{tg}x$ esa davri T=π bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya qiymati argument x qiymatining nomanfiy kasr qismiga teng bo‘ladi. Masalan, {1.2}=0.2, {2.98}=0.98,

$\{\pm 8\}=0$, $\{-1.7\}= 0.3$ (bunda $-1.7= -2+0.3$ deb qaraladi). Bu holda $D\{f\}=(-\infty;\infty)$ va $E\{f\}=[0,1)$ bo‘lib, ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ va $n\in N=\{1,2,3.\cdots\}$ uchun $\{x+n\}=\{x\}$ bo‘ladi. Bundan $f(x)=\{x\}$ davri T=1 bo‘lgan davriy funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. $y=x^2$ yoki $y=e^x$ funksiyalar esa davriymas funksiyalarga misol bo‘ladi.

10-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday M >0 soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|f(x)|\leq M$ shart bajarilsa, u D sohada ***chegaralangan funksiya*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ ***chegaralanmagan funksiya*** deb ataladi.

Masalan, $y=\sin x$ chegaralangan funksiya, chunki barcha x uchun $|\sin x|\leq 1$. $y=2^x$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda chegaralangan va $2^x\leq 1$, ammo bu funksiya $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, chunki ixtiyoriy M>0 katta soni uchun $x>\log_2 M$ bo‘lganda $2^x > M$ bo‘ladi.

11-Ta’rif: Agar $y=f(x)$ funksiya biror D sohaning har bir x nuqtasida o‘zgarmas C soniga teng bo‘lsa, u D sohada ***o‘zgarmas funksiya*** deyiladi.

Masalan, $x\in(-\infty,\infty)$ sohada $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $x\in(-\infty,0)$ sohada $f(x)=x/|x|=-1$ o‘zgarmas funksiya bo‘ladi.

10.5. Murakkab va teskari funksiyalar.

Funksiyalar bilan bog‘liq yana ikkita tushunchani kiritamiz.

12-Ta’rif: Agar $z=\varphi(x)$ funksiya $X\rightarrow Z$, $y=f(z)$ esa $Z\rightarrow Y$ akslantirishni ifodalasa , unda $y=f(\varphi(x))$ funksiya $X\rightarrow Y$ akslantirishni ifodalaydi va ***murakkab funksiya*** deb ataladi. Bu yerda φ ***ichki***, f esa ***tashqi funksiya*** deyiladi. $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya f va φ funksiyalarning ***superpozitsiyasi*** deb ham aytiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ murakkab funksiya bo‘lib, unda $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo‘ladi. $y=\sin^2 x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo‘ladi.

13-Ta’rif: Aniqlanish sohasi $D\{f\}$ va qiymatlar sohasi $E\{f\}$ bo‘lgan $y=f(x)$ funksiya uchun har bir $y\in E\{f\}$ soniga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan yagona $x\in D\{f\}$ sonini mos qo‘yadigan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo‘lsa, u berilgan f funksiyaga ***teskari funksiya*** deb ataladi.

Berilgan f funksiyaga teskari funksiya f^{-1} kabi belgilanadi. Bunda f^{-1} faqat belgilash bo‘lib, u $1/f$ degan ma’noni ifodalamasligini ta’kidlab o‘tamiz.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lsa ,unga teskari funksiya $y=f^{-1}(x)$ mavjudligini va uni $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkinligini isbotlash mumkin. Masalan, $f(x)=3x-1$ bo‘lsa, unda $3y-1=x$ tenglamadan teskari funksiya $f^{-1}(x)=(a+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, o‘zaro teskari funksiyalar uchun $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$ va $E\{f\}=D\{f^{-1}\}$, $f[f^{-1}(x)]=x$ va $f^{-1}[f(x)]=x$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari ularning grafiklari $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi

10.6. Asosiy elementar va elementar funksiyalar.

Maktab matematikasidan bizga ma’lum bo‘lgan quyidagi funksiyalarni eslatib o‘tamiz:

❖ **Darajali *funksiya*.** Bu funksiya $y=x^{\alpha}$ ko‘rinishda bo‘lib, o‘zgarmas daraja ko‘rsatkichi $\alpha \in R$ bo‘ladi. Masalan,

$$y=1=x^0, \quad y=x^2, \quad y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, \quad y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

darajali funksiyalardir. Darajali funksiyaning xossalari α daraja ko‘rsatkichi qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, α musbat butun son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa toq α uchun $E\{f\}=(-\infty,\infty)$, juft α uchun $E\{f\}=[0,\infty)$ bo‘ladi. Agar α manfiy butun son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ aniqlanish sohasi $D\{f\}=\{x: x\neq 0\}$, qiymatlar sohasi esa $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bundan tashqari α juft son bo‘lsa, $f(x)=x^{\alpha}$ juft, α toq bo‘lsa toq funksiya bo‘ladi.

❖ ***Ko‘rsatkichli funksiya.*** Bu funksiya $y=a^x$ ko‘rinishda va unda daraja asosi $a>0$ va $a\neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi o‘zgarmas son bo‘ladi. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$, $y=e^x$ ko‘rsatkichli funksiyalardir. Bu funksiya uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, $E\{f\}=(0,\infty)$ bo‘ladi. Agar $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=a^x$ o‘suvchi, $0<a<1$ bo‘lsa kamayuvchi funksiyaga ega bo‘lamiz.

❖ ***Logarifmik funksiya.*** Bu funksiya $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$, ko‘rinishda bo‘lib, $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiyaga teskari funksiyani ifodalaydi.

Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\log_{0.8} x$, $y=\log_{10} x=\lg x$, $y=\log_e x=\ln x$ logarifmik funksiyalardir. Logarifmik $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun $D\{f\}=(0,\infty)$, $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Agar logarifm asosi $a>1$ bo‘lsa, $f(x)=\log_a x$ o‘suvchi, $0<a<1$ holda esa kamayuvchi bo‘ladi.

❖ ***Trigonometrik funksiyalar.*** Bular $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ funksiyalardan iborat. Bu yerda $f(x)=\sin x$ va $f(x)=\cos x$ funksiyalar uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$ va $E\{f\}=[0,1]$ bo‘lib, ular $T=2\pi$ davrli va chegaralangan bo‘ladi. Bunda $f(x)=\sin x$—toq, $f(x)=\cos x$—juft funksiyalardir.

$f(x)=\mathrm{tg}x$ va $f(x)=\mathrm{ctg}x$ funksiyalarning aniqlanish sohalari mos ravishda $D\{f\}=\{x:\ x\neq(2k+1)\pi/2,\ k\in Z\}$ va $D\{f\}=\{x:\ x\neq k\pi,\ k\in Z\}$, qiymatlar sohasi $E\{f\}=(-\infty,\infty)$ bo‘ladi. Bu funksiyalar $T=\pi$ davrli, toq va chegaralanmagan bo‘ladi.

❖ ***Teskari trigonometrik funksiyalar.*** Bularga $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar kiradi. Ular mos trigonometrik funksiyalarga teskari bo‘ladi. $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\arccos x$ uchun $D\{f\}=[-1,1]$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=[-\pi/2,\ \pi/2]$ va $E\{f\}=[0,\ \pi]$ bo‘ladi. $f(x)=\mathrm{arctg}x$ va $f(x)=\mathrm{arcctg}x$ uchun $D\{f\}=(-\infty,\infty)$, qiymatlar sohasi esa mos ravishda $E\{f\}=(-\pi/2,\ \pi/2)$ va $E\{f\}=(0,\pi)$ bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x)=\arcsin x$ va $f(x)=\mathrm{arctg}x$ toq funksiyalardir.

14-Ta’rif: 1-5 funksiyalar ***asosiy elementar funksiyalar*** deb ataladi.

Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi arifmetik va superpozitsiallash amallari orqali hosil qilingan funksiyalar ***elementar funksiyalar*** deyiladi. Masalan , $y=2\ln\sin x+x^2/5$, $y=a^x\ln(x+1)$ elementar funksiya bo‘ladi. $y=\{x\}$ va $y=[x]$ elementar bo‘lmagan funksiyalarga misol bo‘ladi.

10.7. Funksiyalarning ayrim iqtisodiy tatbiqlari.

Iqtisodiyotning nazariy va amaliy masalalarini o‘rganishda funksiyalardan keng foydalaniladi. Masalan, ishlab chiqarish funksiyasi (ishlab chiqarish natijalarini turli omillarga bog‘liqligi), xarajatlar funksiyasi (ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bilan xarajatlar o‘rtasidagi bog‘lanish), talab funksiyasi (mahsulotga talab hajmi va narx, foyda kabi turli omillar orasidagi bog‘lanishlar) kabi funksiyalar iqtisodiyotda ko‘p qo‘llaniladi.

Yana bir misol sifatida aholining daromadi x va uning turli tovarlarga ehtiyoji y orasidagi bog‘lanishlarni o‘rganish uchun shved iqtisodchi olimi Tornkvist tomonidan taklif etilgan quyidagi funksiyalarini qaraymiz:

- $y=\dfrac{a(x-b)}{x-c}$ $(x>b)$, y – inson hayoti uchun I navbatda zarur bo‘lgan oziq-ovqat mahsulotlari, kiyim-kechak kabi tovarlarga ehtiyoj;
- $y=\dfrac{a(x-d)}{x-c}$ $(x>d>b)$, y – inson hayoti uchun II navbatda zarur bo‘lgan televizor, mebel, kosmetika kabi tovarlarga ehtiyoj ;
- $y=ax\dfrac{x-m}{x-c}$ $(x>m>d>b)$, y–avtomobil, tilla bezaklar,dala hovlisi kabi qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj .

Bu funksiyalar quyidagi iqtisodiy qonuniyatlarni ifodalaydi:

✓Daromad x ma’lum bir b, d yoki m qiymatdan oshgandan keyin tegishli tovarlarni xarid etish mumkin ;

✓Daromad x oshib borishi bilan I va II navbatda zarur bo‘lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y funksiya o‘sishi sekinlashibdi ;

✓I va II navbatda zarur bo‘lgan tovarlarga ehtiyojni ifodalovchi y yuqoridan a soni (to‘yinish nuqtasi) bilan chegaralangan, chunki ularning iste’moli cheksiz o‘sishi mumkin emas;

✓Daromad x oshib borishi bilan qimmatbaho buyumlarga ehtiyoj ham o‘sib boradi va yuqoridan chegaralanmagan .

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

10.1. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\lg(x+1)}}{x-1}+2^{\sqrt{10-x}}$.

10.2. $y=\dfrac{\sqrt[6]{16-x^2}}{\lg(x-1)^2}$.

10.3. $y=\sqrt{4-x^2}tgx$.

10.4. $y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\lg x}$.

10.5. $y=\dfrac{\sqrt{\sin x-0.5}}{\sqrt[3]{x-2}}-\lg(x-1)\ln(4-x)$.

10.6. $y=\dfrac{x}{\sqrt[4]{25-x^2}}$.

10.7. $y=\dfrac{3^{\sqrt{x}}}{\lg(3-x)}$.

10.8. $y=\sqrt{x+2}-\ln(4-x)$.

10.9. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}\ln(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{5^x}}-\dfrac{\sqrt[4]{x-1}}{x}$. **10.10.** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sin 5x}$.

Quyidagi funksiyalarning o'zgarish sohasini toping:

10.11. $y=3\sin x+4\cos x$. **10.12.** $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

10.13. $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$. **10.14.** $y=\dfrac{3}{(\sin x+\cos x)^2+2}$.

10.15. $y=\log_{\pi}(\arccos x)$. **10.16.** $y=\dfrac{2\sqrt{2}x-1}{x^2+1}$.

10.17. $y=6\sin x-8\cos x$. **10.18.** $y=2\cdot 5^{-2x^2}$.

10.19. $y=-3x^2+10x-3$. **10.20.** $y=-5x^2+26x+5$.

Quyidagi funksiyalarni juft va toqlikka tekshiring:

10.21. $y=x+\sin x$. **10.22.** $y=x\sin^3 x$.

10.23. $y=x\cos x$. **10.24.** $y=\dfrac{\lg(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}$.

10.25. $y=\dfrac{x^3\cos x}{2^{x^2}}$. **10.26.** $y=\lg\left(\dfrac{2-x^2}{2+x^3}\right)$.

10.27. $y=\dfrac{\sin x}{x^3}$. **10.28.** $y=(\sin^2 x+\cos x)x^3$.

10.29. $y=x^2\ln x$. **10.30.** $y=3^{4x}\cdot x^2+\cos x$.

Murakkab funksiyaga doir quyidagi masalalarni yeching:

10.31. $y(x)=\dfrac{1+x}{1-x},\quad y\left(\dfrac{4-x}{2+x}\right)=?$

10.32. $y(x)=2^x,\ y(\log_{\frac{1}{2}} x)=?$.

10.33. $y(x)=\dfrac{3-x}{2+x},\quad y\left(\dfrac{1+z(x)}{2}\right)=\dfrac{1}{x},\quad z(x)-?$.

10.34. $y=3^x,\quad y(4z(x))=\dfrac{1}{x^2},\quad z(x)-?$.

10.35. $f(g(x))=tg\sqrt{1+x^2}$. $f(x)=?$, $g(x)=?$

10.36. $f(g(x))=\sqrt{1+tg^2x}$. $f(x)=?$, $g(x)=?$

11-MAVZU. FUNKSIYA LIMITI

Reja:
1. Funksiya limiti .
2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.
3. Cheksiz katta miqdorlar.
4. Funksiya limitini hisoblash qoidalari.
5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari.
6. Ajoyib limitlar.
7. Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig*‘i.*

Tayanch iboralar: funksiyaning limiti, limitning yagonaligi, chap limit, o‘ng limit, limitning mavjudlik sharti, cheksiz kichik miqdor, cheksiz katta miqdor, algebraik yig‘indining limiti, ko‘paytmaning limiti, bo‘linmaning limiti, ajoyib limitlar, jamg‘arma haqidagi masala.

11.1. Funksiya limiti.

Biz sonli ketma-ketlik uchun oliy matematikaning poydevorida yotgan asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan limit tushunchasini kiritgan edik. Endi bu tushunchani funksiya uchun umumlashtiramiz.

1-Ta’rif: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog‘liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ va biror A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $y=f(x)$ ***funksiyaning*** $\boldsymbol{x\to a}$ ***bo‘lgandagi limiti*** deb ataladi.

Ta’rifdagi tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko‘rinishda yoziladi. Misol sifatida,

$$\lim_{x\to 3} x^2=9$$

ekanligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatamiz. Bu yerda $x\to 3$ bo‘lgani uchun $2<x<4$, ya’ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik oʻrinli boʻlishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya’ni δ(ε)=ε/7 deb olish mumkin. Demak, limit ta’rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik oʻrinli boʻladi.

2-Ta’rif: Agar har qanday katta N>0 son uchun shunday δ=δ(N)>0 son mavjud boʻlsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik oʻrinli boʻlsa, unda $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ (a−chekli son) boʻlganda ***cheksiz limitga*** (+∞ yoki –∞) ega deyiladi .

Ta’rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ koʻrinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x^3-8)^2}=+\infty$$

ekanligini koʻrsatish mumkin. Bu yerda $x\to 2$ boʻlgani uchun $1<x<3$ deb olishimiz mumkin. Bu holda berilgan N>0 soni boʻyicha δ=δ(N)>0 sonini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\frac{1}{(x^3-8)^2}=\frac{1}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2}>\frac{1}{(x-2)^2(3^2+2\cdot 3+4)^2}=$$

$$=\frac{1}{361(x-2)^2}>N\Rightarrow (x-2)^2<\frac{1}{361N}\Rightarrow |x-2|<\frac{1}{19\sqrt{N}}=\delta(N) \quad .$$

Demak, ta’rifga asosan, yuqoridagi limit cheksiz boʻladi.

3-Ta’rif: Agar har qanday kichik ε>0 soni uchun shunday katta M=M(ε)>0 son mavjud boʻlsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ va biror chekli A soni uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik oʻrinli boʻlsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ boʻlganda ***chekli limitga*** ega deyiladi.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ koʻrinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

ekanligini koʻrsatamiz. Ixtiyoriy kichik ε>0 uchun

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x+1}{x}-1\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}=M(\varepsilon),$$

ya'ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta'rifga asosan, yuqoridagi limit qiymati haqiqatan ham birga teng ekanligi kelib chiqadi.

4-Ta'rif: Agar har qanday katta $N>0$ soni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo'lganda ***cheksiz limitga*** ega deyiladi,

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, ta'rifdan foydalanib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

1-Teorema: Agar $x\to a$ bo'lganda $y=f(x)$ funksiya limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda ikkita A va B limitlarga ega bo'lsin. Unda, limit ta'rifiga ko'ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va $0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ deb olsak, unda $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda yuqoridagi ikkala tengsizlik ham bajariladi va shu sababli, absolut qiymat xossalariga asosan,

$$|A-B|=|A-f(x)+f(x)-B|\le|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon>0$ ixtiyoriy kichik son bo'lganidan va A, B sonlar x ga bog'liq emasligidan $|A-B|=0$, ya'ni $A=B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak funksiya limiti mavjud bo'lsa, u faqat yagona bo'ladi.

Ba'zi hollarda funksiyaning chap va o'ng limiti tushunchalari kerak bo'ladi.

5-Ta'rif: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir chekli a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o'ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda ($x\to a-0$ yoki $x\to a+0$ kabi belgilanadi) funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, bu sonlar funksiyaning a nuqtadagi ***chap yoki o'ng limiti*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limiti

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0) \qquad \text{yoki} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$$

kabi belgilanadi. Masalan , ***signum funksiya*** deb ataladigan ushbu

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases} \tag{11.1}$$

funksiya uchun x=0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlar mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$\operatorname{sgn}(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1,$$

$$\operatorname{sgn}(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

2-Teorema: Biror a nuqtada $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uning shu a nuqtadagi chap va o‘ng limitlari o‘zaro teng va $f(a–0)= f(a+0)$=A shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning isboti bevosita yuqorida ko‘rib o‘tilgan limit ta’riflaridan kelib chiqadi va o‘quvchiga havola etiladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo‘lavermaydi. Masalan, y=sgn(x) funksiya $x\to 0$ bo‘lganda limitga ega emas, chunki bu holda sgn(0–0)= –1 va sgn(0+0)=1 bo‘lib, sgn(0–0)≠ sgn(0+0).

11.2. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.

Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

6-Ta’rif: Agar $\alpha(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda ***cheksiz kichik miqdor*** deb ataladi .

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$, $\alpha(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ va $\alpha(x)=x^{-2}$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

3-Teorema: Agar $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo‘lib, $f(x)$ esa ixtiyoriy chegaralangan funksiya bo‘lsa, u holda $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$, $f(x)\cdot\alpha(x)$, $C\alpha(x)$ (C=const, ya’ni o‘zgarmas son) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo‘ladi.

Isbot: $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\beta(x)=0$$

bo‘lgani uchun, limit ta’rifiga asosan, ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ soni uchun shunday $\delta>0$ soni topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda o‘rinli bo‘ladi. Agar $|f(x)|\le M$ (M– biror chekli son) bo‘lsa, unda $0<|x-a|<\delta$ shartda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le |\alpha(x)|+|\beta(x)| <(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\cdot\beta(x)|= |\alpha(x)|\cdot|\beta(x)| <(\varepsilon/2)\cdot(\varepsilon/2)=\varepsilon^2/4,$$

$$|f(x)\cdot\alpha (x)|= |f(x)|\cdot|\alpha(x)|<|M|\varepsilon/2, \qquad |C\alpha(x)|=|C|\cdot|\alpha(x)|<|C|\varepsilon/2$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizliklar va funksiya limiti ta’rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0, \quad \lim_{x\to a}[\alpha(x)\cdot\beta(x)]=0,$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\alpha(x)]=0, \quad \lim_{x\to a}C\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Bu yerdan, cheksiz kichik miqdor ta’rifiga asosan, teorema isboti kelib chiqadi.

Natija: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig‘indisi, ko‘paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo‘ladi.

Bu natijaning isboti oldingi teoremani bir necha marta qo‘llash orqali keltirib chiqariladi.

Izoh: Agar $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsa, unda ularning nisbati $\alpha(x)/\beta(x)$ cheksiz kichik miqdor bo‘lishi shart emas.

Masalan, $x\to 0$ bo‘lganda $\alpha(x)=Ax^n$ va $\beta(x)= Bx^m$ (n,m–natural, A,B– noldan farqli ixtiyoriy haqiqiy sonlar) cheksiz kichik miqdorlar bo‘ladi va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^n}{Bx^m}=\lim_{x\to 0}\frac{A}{B}x^{n-m}=\begin{cases}0, & n>m;\\ A/B, & n=m;\\ \pm\infty, & n<m.\end{cases}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, yuqoridagi misolda $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbat faqat $n>m$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

7-Ta’rif: $x\to a$ bo‘lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar va

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$$

bo‘lsin. Bunda A=0 bo‘lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo‘lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Agar $A\neq 0$ va chekli son bo‘lsa, unda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)=0(\beta(x))$ kabi belgilanadi. Jumladan A=1 bo‘lsa $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ ***ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar*** deyiladi va $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi. Agar $A=\pm\infty$ bo‘lsa, $\alpha(x)$ $x\to a$ bo‘lganda $\beta(x)$ ga nisbatan ***quyi tartibli cheksiz kichik miqdor*** deyiladi va $\beta(x)=o(\alpha(x))$ kabi belgilanadi.

11.3. Cheksiz katta miqdorlar.

Endi cheksiz katta miqdor tushunchasi va uning xossalari bilan tanishamiz.

8-Ta’rif: Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

shart bajarilsa, unda bu funksiya $x\to a$ (a−ixtiyoriy chekli yoki cheksiz son) bo‘lganda ***cheksiz katta miqdor*** deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\mathrm{tg}x$ funksiya $x\to\pi/2$, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ va $f(x)=x^2$ funksiya $x\to\pm\infty$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

4-Teorema: Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, unda $x\to a$ shartda quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir:

1) $|f(x)|+|g(x)|$ va $f(x)\cdot g(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

2) Agar $\lim\limits_{x\to a} h(x)\neq 0$ bo‘lsa, unda $f(x)\cdot h(x)$ va $f(x)/h(x)$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi;

3) Ixtiyoriy C o‘zgarmas soni va chegaralangan $\varphi(x)$ funksiya uchun $Cf(x)$ va $\varphi(x)f(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Teoremaning isboti bevosita 8-ta’rifdan kelib chiqadi va uning ustida to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Izoh: Yuqoridagi teorema shartlarida $|f(x)|-|g(x)|$ va $f(x)/g(x)$ funksiyalar cheksiz katta miqdor bo‘lishi shart emas. Bu funksiyalar $x\to a$ bo‘lganda mos ravishda $\infty-\infty$ va ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklar deyiladi va ular kelgusida(VIII bob, §6) to‘liqroq ko‘rib chiqiladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

5-Teorema: Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Aksincha, agar $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘lsa, unda shu holda $1/\alpha(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Bu teoremani ham isbotsiz qabul etamiz. Masalan, $f(x)=(x-1)^{-3}$ funksiya $x\to 1$ bo‘lganda cheksiz katta miqdor, $\alpha(x)=1/f(x)=(x-1)^3$

funksiya esa $x \to 1$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Shu sababli kelgusida biz asosan cheksiz kichik miqdorlar bilan ish ko‘ramiz.

11.4. Funksiya limitini hisoblash qoidalari.

Funksiya limitini uning ta’rifi bo‘yicha hisoblash har doim ham oson emas. Shu sababli funksiya limiti asosan uni hisoblash qoidalari yordamida topiladi.

Lemma: $y=f(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda chekli A limitga ega bo‘lishi uchun uni $f(x)=A+\alpha(x)$ ko‘rinishda bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda biror cheksiz kichik miqdorni ifodalaydi.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta’riflaridan kelib chiqadi.

Asosiy teorema: Agar $x \to a$ bo‘lganda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chekli A va B limitlarga ega bo‘lsa, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B, \tag{11.2}$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x) = CA \quad (C=\text{const.}), \tag{11.3}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = A\cdot B \tag{11.4}$$

va, agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B\neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B} \tag{11.5}$$

tengliklar o‘rinlidir.

Isbot: Teorema shartlari va lemmaga asosan $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ tengliklarni yoza olamiz. Bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x \to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x) =[A+\alpha(x)] \pm [B+\beta(x)]=(A\pm B)+[\alpha(x) \pm\beta(x)]$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu yerda $\gamma(x)=\alpha(x) \pm\beta(x)$ funksiya $x \to a$ bo‘lganda cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = A\pm B = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Asosiy teoremada keltirilgan limit hisoblash qoidalari va $f(x)=C$ (C-const.) o‘zgarmas funksiyaning limiti shu sonni o‘ziga teng bo‘lishidan foydalanib, murakkabroq limitlarni soddaroq limitlarga keltirish orqali hisoblash mumkin.

Masalan,

$$\lim_{x\to1} x^2e^x = \lim_{x\to1} x^2 \cdot \lim_{x\to1} e^x = 1\cdot e = e\,, \quad \lim_{x\to1}(x^2+e^x) = \lim_{x\to1} x^2 + \lim_{x\to1} e^x = 1+e\,,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to1} e^x}{\lim\limits_{x\to1} x^2} = \frac{e}{1} = e\,, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x} = \lim_{x\to\infty}(2-\frac{3}{x}) = \lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = 2-0 = 2\,.$$

11.5. Funksiya limitining mavjudlik shartlari.

Yuqorida ko‘rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo‘lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Oldin bu savolga chap va o‘ng limitlar orqali (2-teoremaga qarang) javob berilgan edi. Endi bu savol bo‘yicha quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

6-Teorema: Agar $x=a$ nuqtaning biror atrofida $\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\to a$ bo‘lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining chekli limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\Psi(x) = A$$

shart bajarilsa, u holda $x\to a$ bo‘lganda $f(x)$ funksiya uchun ham chekli limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, barcha $x\neq0$ uchun

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,, \quad \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = 0\,.$$

7-Teorema: Agarda $x=a$ nuqtaning biror atrofida $y=f(x)$ funksiya o‘suvchi (yoki kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (yoki quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq M \quad (\text{yoki} \lim_{x\to a} f(x) \geq m)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Masalan, $x>1$ bo‘lganda

$$f(x) = \frac{2x^4+3x^2}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^2}$$

funksiya kamayuvchi va quyidan m=2 soni bilan chegaralangan. Bu yerda

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x^2}) = 2$$

bo‘lib, teorema tasdig‘i o‘rinlidir.

11.6. Ajoyib limitlar.

Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{(I)}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281.... \quad \text{(II)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x} = a \quad \text{(III)}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad \text{(IV)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha \quad \text{(V)}.$$

Bu tengliklar matematikada ***ajoyib limitlar*** deb ataladi va ularning isboti keyinchalik beriladi.

11.7. Funksiya limitining bir iqtisodiy tatbig‘i.

Endi funksiya limiti tushunchasini bir iqtisodiy masalani yechish uchun tatbiq etamiz.

R foiz ustama to‘lash sharti bilan omonatga qo‘yilgan jamg‘armaning boshlang‘ich qiymati a_0 bo‘lsa, ustama n-marta hisoblangandan keyin uning qiymati

$$a_n = (1+i)^n a_0, \ n=1, 2, 3,$$

formula bilan topilishi ko‘rsatilgan edi. Bunda $i=R/k$ bo‘lib, k–yillik R foiz ustama jamg‘armaga yil davomida necha martada hisoblanishini ifodalaydi.

Endi bank jamg‘armaga R foiz ustamani yil davomida uzluksiz ravishda hisoblab borganda, jamg‘arma qiymati qanday aniqlanishini ko‘rib chiqamiz. Bu holda $k\to\infty$ bo‘ladi va har qanday k uchun $t=n/k$ omonatga jamg‘arma qo‘yilgandan keyin o‘tgan yillar sonini ifodalaydi. Bu holda yuqoridagi a_n uchun formula va (II) ajoyib limit yordamida quyidagi natijani olamiz:

$$a_t=\lim_{k\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}(1+i)^n a_0=a_0\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^n=a_0\lim_{k\to\infty}\left\{(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{R\frac{n}{k}}=$$

$$=a_0\left\{\lim_{k\to\infty}(1+\frac{R}{k})^{\frac{k}{R}}\right\}^{Rt}=a_0\left\{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\right\}^{Rt}=a_0e^{Rt}.$$

Bu yerda $k/R=x, k\to\infty\Rightarrow x\to\infty$ ekanligidan foydalanilgan. Demak, jamg‘armaga bankning yillik *R* foiz ustamasi uzluksiz tarzda hisoblab borilsa, uning *t* yildan keyingi qiymati $a_t=a_0e^{Rt}$ formula bilan aniqlanadi va ko‘rsatkichli funksiya orqali ifodalanadi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Ko‘phadlar nisbatidan iborat funksiyaning limitini hisoblang.

11.1.1. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$.

11.1.2. $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-8x+12}{x^3-7x^2+6x}$.

11.1.3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+x-1}{x^3-3x-2}$.

11.1.4. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$.

11.1.5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

11.1.6. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$.

11.1.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

11.1.8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

11.1.9. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-x^3+x-1}{2x^2-x-1}$.

11.1.10. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

11.1.11. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$;

11.1.12. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

11.1.13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

11.1.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x-2}{x^3+2x^2-x-2}$.

11.1.15. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$.

11.1.16. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-x^2-x+1}$.

11.1.17. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^3+2x^2-4x-8}$.

11.1.18. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

11.1.19. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x+1}{x^2-x-2}$.

11.1.20. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^2}$.

11.1.21. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^3-4x^2-2}{5x^3+8x^2+1}$.

11.1.22. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-2x^2-x+2}$.

11.1.23. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^2-5x-6}{3x^3-7x^2+2x}$.

11.1.24. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4+2x^3+x^2}{x^4+2x+1}$.

11.1.25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-3x-2}$.

11.1.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$.

11.1.27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-7x^2+2x}{4x^2-5x-6}$.

11.1.28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

11.1.29. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-2x-1}{(x^2-x-2)^2}$.

11.1.30. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

Irratsional ifodali funksiya limitini hisoblang.

11.2.1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-5x+3}\right)$.

11.2.2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

11.2.3. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

11.2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

11.2.5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

11.2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+3}\right)$.

11.2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

11.2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

11.2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$.

11.2.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

11.2.11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$.

11.2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

11.2.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25-2x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

11.2.14. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)$.

11.2.15. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

11.2.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+3)(x-2)}-x\right)$.

11.2.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

11.2.18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

11.2.19. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

11.2.20. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

11.2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$.

11.2.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$.

11.2.23. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$.

11.2.24. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

11.2.25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

11.2.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

11.2.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x}}$.

11.2.28. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

11.2.29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

11.2.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

12-MAVZU. FUNKSIYA HOSILASI

Reja:

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar.
2. Hosila ta'rifi va uning amaliy ma'nolari.
3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.
4. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari.

Tayanch iboralar: funksiyaning hosilasi, hosilaning mexanik ma'nosi, hosilaning geometrik ma'nosi, hosilaning iqtisodiy ma'nosi, differensiallanuvchi funksiya, differensiallash amali, oraliqda differensiallanuvchi funksiya, funksiyaning elastikligi.

Differensial hisob oliy matematikaning eng asosiy va eng kuchli, samarali usullaridan biri bo'lib hisoblanadi. Matematik tahlilning bu bo'limi nisbatan yosh bo'lib, uning dastlabki kurtaklari XVII asrda Ferma, Paskal, Dekart kabi matematiklarning ishlarida shakllangan va XVIII asrda buyuk ingliz olimi Nyuton (1642–1727) va mashhur olmon matematigi Leybnits (1646–1716) tomonidan unga asos solingan va turli masalalarni yechish uchun keng qo'llanilgan.

12.1. Hosila tushunchasiga olib keladigan amaliy masalalar.

Differensial hisob asosida funksiya hosilasi tushunchasi yotadi va u tarixan quyidagi amaliy masalalarni yechish jarayonida paydo bo'lgan.

❖ **Oniy tezlik masalasi.** Bizga ma'lumki, to'g'ri chiziq bo'yicha tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning ixtiyoriy t vaqtdagi tezligi $v(t)=v_0=\text{const}$, ya'ni o'zgarmas bo'ladi. Bunda harakat boshlangandan keyin t vaqt o'tgach nuqtaning bosib o'tgan masofasi $S(t)=vt$ funksiya bilan aniqlanadi va ***harakat tenglamasi*** deb ataladi. Endi bu nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha notekis harakatda bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda moddiy nuqtaning tezligi t vaqt o'tishi bilan o'zgarib boradi va biror $v=v(t)$ funksiyani hosil qiladi. Moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi tezligi ***oniy tezlik*** deb ataladi. Biz notekis harakat tenglamasi $S=S(t)$ ma'lum bo'lgan taqdirda moddiy nuqtaning biror t_0 vaqtdagi $v_0=v(t_0)$ oniy tezligini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun ikkinchi bir $t=t_0+\Delta t$ vaqtni qaraymiz. Unda moddiy nuqtaning ko‘rilayotgan $(t_0, t)=(t_0, t_0+\Delta t)$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan masofasi

$$S(t)-S(t_0)=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\Delta S,$$

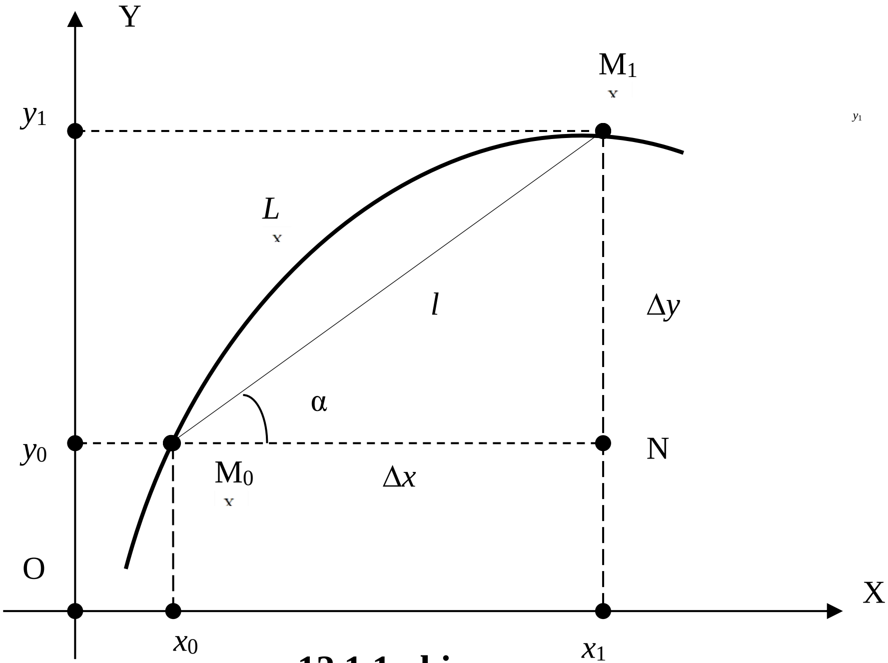
ya’ni harakat tenglamasini ifodalovchi $S=S(t)$ funksiyaning orttirmasiga teng bo‘ladi. Agar notekis harakatdagi moddiy nuqtaning bu vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligini $\bar{v}(\Delta t)$ deb belgilasak, uning qiymati $\bar{v}(\Delta t)=\Delta S/\Delta t$ formula bilan aniqlanadi. Bu holda $v(t_0)$ oniy tezlik $\bar{v}(\Delta t)$ o‘rtacha tezlikning $t\to t_0$, ya’ni $\Delta t\to 0$ bo‘lgandagi limiti kabi aniqlanadi. Demak, notekis harakatda $v(t_0)$ oniy tezlik

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (12.1)$$

limitni hisoblash orqali topiladi.

❖ **Urinma masalasi.** Dastlab tekislikdagi berilgan L chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tushunchasini kiritamiz.

Berilgan L chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi (12.1.1-chizmaga qarang).



12.1.1-chizma

Bu vatar yotgan to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi

$$y-y_0=k(x-x_0), \quad k=tg\alpha=\frac{|NM_1|}{|NM_0|}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-Ta'rif: Agar *L* chiziqning M_0M_1 vatari yotgan *l* to'g'ri chiziq M_1 nuqta *L* chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1 \to M_0$) biror l_0 to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l \to l_0$), unda l_0 berilgan *L* chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

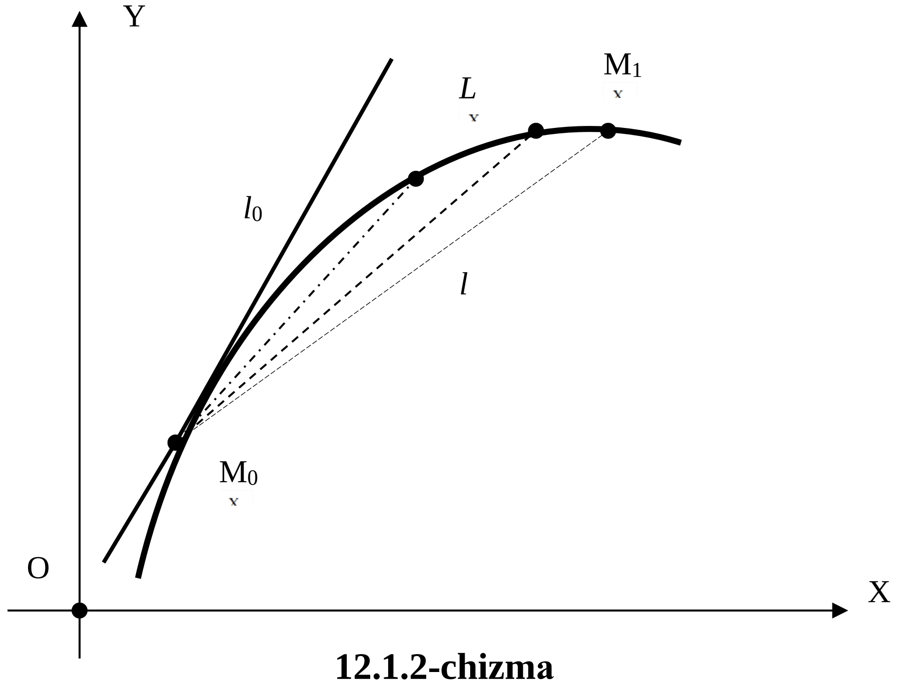
Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lgani uchun (12.1.2-chizmaga qarang) uning ham tenglamasi vatar tenglamasi singari $y-y_0=k_0(x-x_0)$ ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun *L* chiziq tenglamasini ifodalovchi $y=\varphi(x)$ funksiya berilgan deb hisoblaymiz. Urinma ta'rifiga asosan

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0 \,,\, y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \,,\, \Delta y \to 0$$

bo'lgani uchun M_0M_1 vatarning *k* burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \qquad (12.2)$$

natijani olamiz.



12.1.2-chizma

❖ **Mehnat unumdorligi masalasi.** Ishchining ish kuni davomidagi mehnat unumdorligi o'zgaruvchi miqdor bo'ladi. Ertalab ish kuni boshlangach, ma'lum bir paytgacha u ishga kirishish jarayonida bo'lib, bu davrda uning mehnat unumdorligi oshib boradi. So'ngra ma'lum bir vaqt davomida ishchi deyarli bir xil mehnat unumdorligi bilan ishini davom ettiradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari toliqish natijasida ishchining mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib, ish kuni davomida t vaqt o‘zgarib borishi bilan ishchining mehnat unumdorligi biror $z=z(t)$ funksiya orqali ifodalanadi. Uni topish uchun ishchining ish kuni boshlangandan keyin t vaqt o‘tgach ishlab chiqargan mahsulot hajmini ifodalovchi $h=h(t)$ funksiya ma’lum deb olamiz. Bu funksiya yordamida ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topamiz. Bu maqsadda ish kunining t_0 va $t_1=t_0+\Delta t$ vaqt oralig‘ini qaraymiz. Bu vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $h(t_0+\Delta t)-h(t_0)=\Delta h$ kabi aniqlanadi. U holda uzunligi Δt bo‘lgan bu vaqt oralig‘idagi ishchining o‘rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t)=\Delta h/\Delta t$ nisbat orqali aniqlanadi. Bu yerdan ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t\to 0$ deb olishimiz kerak va natijada

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{z}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t} \qquad (12.3)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Bu uchala masala mazmunan turlicha bo‘lsa ham, ularni yechish bir xil matematik usulda amalga oshirilganligi va bu yechimlar (12.1) va (12.3) formulalar orqali bir xil ko‘rinishida ifodalanganligini ta’kidlab o‘tamiz.

12.2. Hosila ta’rifi va uning amaliy ma’nolari.

Yuqoridagi masalalarni yechish uchun amalga oshirilgan ishlarni umumiy holda qaraymiz. Bizga biror $y=f(x)$ funksiya berilgan. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga kiruvchi x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argument qiymatlarini qaraymiz, ya’ni x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz. Argumentning bu Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning $\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmasini topamiz. So‘ngra Δf funksiya orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ holdagi limitini hisoblaymiz.

2-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (12.4)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini uning ta'rifiga asosan topamiz: $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2 \Rightarrow$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Demak, $(x^2)'=2x$. Shunday tarzda $x'=1$ va $(x^3)'=3x^2$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Oldin ko'rilgan masalalarning (12.1) – (12.3) javoblarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz. Harakat tenglamasi $S=S(t)$ funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 vaqtdagi oniy tezlik uchun topilgan (12.1) natijadan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0) \qquad (12.1')$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o'zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma'nosi*** deyiladi. Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo'nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni "flyuktsiya" deb atagan. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, bu yerda "tezlik" tushunchasi faqat harakat tezligini ifodalamasdan, u keng ma'noda tushuniladi. Masalan, ximiyaviy reaksiya tezligi, texnologik jarayon tezligi, iqtisodiy islohotlarni amalga oshirish tezligi va hokazo.

Endi $y=\varphi(x)$ funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0;\ \varphi(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (12.2) formulani eslab, undan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'(x_0) \qquad (12.2')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning grafigini $M_0(x_0,y_0)=M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma'nosi*** deyiladi. Nyutonning hosila bo'yicha ishlaridan bexabar holda Leybnits mana shunday geometrik masalalarni yechish jarayonida hosila tushunchasiga kelgan.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (12.5)$$

ko‘rinishda topiladi.

Misol sifatida $f(x)=x^2$ parabolaning $x_0=3$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasini topamiz. Bunda $f(x_0)= f(3)=3^2=9$, $f'(x_0)=2x_0=2\cdot3=6$ va shu sababli, (5) formulaga asosan, izlangan urinma tenglamasi

$$y=6(x-3)+9 \Rightarrow y=6x-9$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mehnat unumdorligi to‘g‘risidagi masalaning (12.3) javobini hosila orqali

$$z(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = h'(t_0) \qquad (12.3')$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va buni ***hosilaning iqtisodiy ma’nosi*** deb qarash mumkin.

12.3. Differensiallanuvchi funksiya va uning uzluksizligi.

Dastlab differensiallanuvchi funksiya tushunchasini kiritamiz.

3-*Ta’rif:* Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada ***differensiallanuvchi*** deyiladi. Aks holda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada ***differensiallanmovchi*** deb ataladi. Funksiyani $f'(x)$ hosilasini topish amali ***differensiallash amali*** deb ataladi.

Funksiyaning differensiallanuvchiligi va uzluksizligi orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

Teorema: Agarda $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun, funksiyaning uzluksizligi ta’rifiga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \qquad (12.6)$$

shart bajarilishini ko‘rsatish kifoya. Hosila ta’rifini ifodalovchi (12.4) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko‘rib o‘tilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \Delta f = (f'(x) + \alpha(\Delta x))\Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $\Delta x \to 0$ bo‘lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} (f'(x) + \alpha(\Delta x))\Delta x = f'(x) \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x)\cdot 0 + 0 = 0\,.$$

Demak, (12.6) shart o‘rinli va shu sababli $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Izoh: Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, $x=0$ nuqtada argumentga Δx orttirma berganimizda funksiya orttirmasi uchun $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)= f(\Delta x)= |\Delta x|$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} |\Delta x| = 0,$$

ya’ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Ammo

$$\lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,\ \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki $\Delta x \to 0$ bo‘lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas va shu sababli $x=0$ nuqtada $f'(0)$ hosila mavjud emas.

4-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u shu ***oraliqda differensiallanuvchi*** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday (a,b) oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa $x=0$ nuqtani o‘z ichiga olmaydigan barcha oraliqlarda differensiallanuvchi, ammo $x=0$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi oraliqlarda differensiallanuvchi bo‘lmaydi

12.4. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari.

Hosilani iqtisodiy mazmunini ifodalovchi mehnat unumdorligi haqidagi masalani yuqorida ko‘rib o‘tgan edik. Ammo hosilani iqtisodiyotga tatbig‘i bu bilan chegaralanib qolmasdan, u iqtisodiyotda juda keng qo‘llaniladi. Masalan, ishlab chiqarish xarajatlari y va mahsulot hajmi x orasidagi bog‘lanish biror $y=f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi bilan berilgan bo‘lsa, unda $y'=f'(x)$ hosila ishlab chiqarishning ***limitik xarajati*** deyiladi va bir birlik qo‘shimcha mahsulot ishlab chiqarish uchun kerak bo‘ladigan qo‘shimcha xarajatlarning taqribiy qiymatini ifodalaydi. Shunday tarzda limitik daromad, limitik tushum, limitik mahsulot, limitik unumdorlik kabi muhim iqtisodiy tushunchalar hosila orqali ifodalanadi. Iqtisodiy tatbiqlarda hosila biror iqtisodiy jarayon, obyektni vaqt yoki boshqa bir omil bo‘yicha o‘zgarish tezligini o‘rganish uchun ham qo‘llaniladi. Hosila tushunchasini yana bir iqtisodiy tatbig‘iga misol sifatida, iqtisodiy jarayonlarni o‘rganish va bir qator amaliy masalalarni yechish uchun qo‘llaniladigan funksiyaning elastikligi tushunchasini qaraymiz.

5-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $\Delta f/f$ funksiya nisbiy orttirmasini $\Delta x/x$ argument nisbiy orttirmasiga nisbatini $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limiti ***funksiyaning elastikligi*** deb ataladi .

Berilgan $y=f(x)$ funksiya elastikligi $E_x(f)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$E_x(f)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{f}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{f}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{x}{f}\cdot f'(x)=\frac{x}{y}\cdot f'(x) \qquad (12.7)$$

formula bilan hisoblanadi. Funksiyaning elastikligi x argument qiymati 1% o‘zgarganda $y=f(x)$ funksiya qiymati taqriban necha % o‘zgarishini ifodalaydi.

Masalan, korxonaning ishlab chiqarayotgan mahsulotiga aholining talabi y va bu mahsulot narxi x orasidagi $y=f(x)$ bog‘lanishni o‘rganishda funksiyaning elastikligi $E_x(f)$ keng qo‘llaniladi. Bu holda $E_x(f)$ mahsulot narxi x 1% o‘zgarganda aholining talabi taqriban necha % o‘zgarishini ifodalaydi.

Agar $|E_x(f)|>1$ bo‘lsa, talab narxga nisbatan ***elastik,*** $|E_x(f)|<1$ bo‘lsa –***noelastik*** , $|E_x(f)|=1$ bo‘lsa –***bir elastikli*** deb ataladi. Bu tushuncha ma’nosini aniqlash uchun korxonaning Mr kabi belgilanadigan limitik daromadini qaraymiz. Bu iqtisodiy ko‘rsatkich talab elastikligi orqali

$$Mr=(1-|E_x(f)|^{-1})x$$

formula bilan ifodalanadi. Bu yerdan ko‘rinadiki, talab elastik bo‘lganda narx o‘sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad ham oshadi (kamayadi). Noelastik talabda esa narx o‘sishi (kamayishi) bilan mahsulotni sotishdan olinadigan umumiy daromad aksincha kamayadi (oshadi).

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Differensiallashning oddiy qoidalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

12.1. $y=3x^3-4x^2+7x-9$.

12.2. $y=\frac{2}{x}+\ln x$.

12.3. $y=3\sin x+5^x$.

12.4. $y=-2\sin x+\mathrm{tg}x$.

12.5. $y=\frac{1}{x}-1000$.

12.6. $y=25t^{10}+2\sqrt{t}$.

12.7. $y=\sin x+\cos x$.

12.8. $y=6x^{15}-9x^{20}$.

12.9. $y=100x^2-100$.

12.10. $y=e-3^x+4$.

12.11. $y=3x^7-6x^6+5x^2-7$.

12.12. $y=(x^3-2x^2-1)(x^5+x^2)$.

12.13. $y=\sqrt[3]{3x}+\sqrt{2x}+10$.

12.14. $y=\frac{1}{x\sqrt{2x}}$.

12.15. $y=10^{x+3}-7$.

12.16. $y=5\sqrt[5]{x^2}+7$.

12.17. $y=\frac{11-5x+x^6}{\sqrt{x}}$.

12.18. $y=e^{2x^2+3x-5}$.

12.19. $y=\frac{1}{2x}-\ln x+e^{x+2}$.

12.20. $y=e^{2x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}$.

12.21. $y=(ax^2+вx+c)^3$.

12.22. $y=\left(e^{2x}-\frac{2}{x^3}+\ln\sqrt{x}\right)^2$.

12.23. $y=\sin 3(ax+в)$.

12.24. $y=\cos(e^x-e^{-x})$.

12.25. $y=\mathrm{tg}^2(\ln 2x)$.

12.26. $y=ctg^3(tg2x)$.

12.27. $y=\ln^2(\ln 4x)$.

12.28. $y=(e^{\sin x}+3^{4x})^5$.

12.29. $y=7^{\cos^3 4x}$.

12.30. $y=\sin^m x\cdot\sin mx$.

12.31. $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5$.

12.32. $y=\frac{bx+c}{a}$.

12.33. $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$.

12.34. $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$.

12.35. $y=x+2\sqrt{x}$.

12.36. $y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$.

12.37. $y = \frac{10}{x^3}$.

12.38. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

12.39. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$.

12.40. $y = 3x - 6\sqrt{x}$.

12.41. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

12.42. $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

12.43. $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

12.44. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

12.45. $y = x - \sin x$.

12.46. $y = x - tgx$.

12.47. $y = x^2 \cos x$.

12.48. $y = y^2 ctgx$.

12.49. $y = \frac{\cos x}{x^2}$.

12.50. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

13-MAVZU. FUNKSIYA DIFFERENSIALI

Reja:

1. Hosilani hisoblash algoritmi.
2. Differensiallash qoidalari.
3. Logarifmik differensiallash usuli.
4. Hosilalar jadvali.

Tayanch iboralar: hosilani hisoblash algoritmi, o‘zgarmas son hosilasi, algebraik yig‘indi hosilasi, ko‘paytmaning hosilasi, bo‘linmaning hosilasi, teskari funksiya hosilasi, murakkab funksiya hosilasi, logarifmik differensiallash, darajali-ko‘rsatkichli funksiya, hosilalar jadvali.

13.1. Hosilani hisoblash algoritmi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topish, ya’ni uni differensiallash, oldingi mavzuda keltirilgan ta’rifga asosan quyidagi algoritm bo‘yicha amalga oshiriladi:

- funksiyaning x argumentiga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
- funksiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ formula bo‘yicha hisoblaymiz;
- $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni topamiz;
- $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ bo‘lgandagi limitini aniqlaymiz.

Misol sifatida asosiy elementar funksiyalardan biri bo‘lgan $f(x)=\sin x$ hosilasini yuqorida keltirilgan algoritm bo‘yicha topamiz:

✓ x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyaning $f(x)=\sin x$ va $f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$ qiymatlarini hisoblaymiz;

✓ trigonometrik ayirmani ko‘paytmaga keltirish formulasidan foydalanib, Δf funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2)$;

✓ $\Delta f/\Delta x$ orttirmalar nisbatni tuzamiz:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Ko‘paytmaning limiti, I ajoyib limit hamda y=cos$x$ funksiya uzluksizligidan foydalanib, $\Delta f/\Delta x$ nisbatning $\Delta x \to 0$ bo‘lgandagi limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right]=\left(\frac{\Delta x}{2}=\alpha\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\cos(x+\alpha)=1\cdot\cos x=\cos x\,.$$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x \tag{13.1}$$

formula o‘rinli ekan. Xuddi shunday tarzda

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{13.2}$$

ekanligini aniqlaymiz.

Yana bir misol sifatida $f(x)=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya hosilasini topamiz:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a\,. \tag{13.3}$$

Bu yerda ajoyib limitlardan biri bo‘lgan

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

limit qiymatidan foydalanildi. Jumladan, $a=e$ holda $(e^x)'=e^x\ln e=e^x$ natijaga ega bo‘lamiz.

13.2. Differensiallash qoidalari.

Har qanday funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo‘yicha hisoblash oson emas va ancha murakkab hisoblashlarni talab etadi. Shu sababli amalda $y=f(x)$ funksiya hosilasini hisoblash quyidagi ***differensiallash qoidalari*** yordamida osonroq amalga oshirilishi mumkin.

1-qoida: O‘zgarmas funksiya, ya’ni ixtiyoriy C o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng, ya’ni

$$(C)'=0 \quad (C\text{–const}) \tag{13.4}$$

Isbot: Har qanday o‘zgarmas $f(x)$=C funksiya uchun argumentning ixtiyoriy $\Delta x\neq 0$ orttirmasida

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0$$

tenglik o‘rinli ekanligidan va hosila ta’rifidan

$$(C)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(3{,}2)'=0$, $(-7)'=0$, $(\sin 25^0)'=0$, $(\pi)'=0$ va hokazo.

2-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\pm v(x)=u\pm v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasini

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \tag{13.5}$$

formula bilan hisoblash mumkin.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Bu yerdan hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidasiga asosan kerakli tenglikni olamiz:

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Demak, ikkita differensiallanuvchi funksiyalarning algebraik yig‘indisi differensiallanuvchi funksiya bo‘lib, algebraik yig‘indining hosilasi hosilalarning algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$(x^2+\sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x+\cos x,$$

$$(5-\cos x)' = (5)' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x.$$

1-natija: Differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaga ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni qo‘shsak, uning hosilasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)' = f'(x)+C' = f'(x)+0 = f'(x)$.

Izoh: Yuqoridagi 2- qoidada keltirilgan tasdiqning teskarisi umuman olganda o‘rinli emas. Masalan, $u=|x|$ va $v=1-|x|$ funksiyalar yig‘indisi $u+v=1$ o‘zgarmas funksiya sifatida barcha x nuqtalarda, jumladan $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi. Ammo u va v qo‘shiluvchi funksiyalar $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

3-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, bu nuqtada $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \tag{13.6}$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta’rifiga asosan

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$$

ekanligidan foydalanib, $\Delta(u\cdot v)$ funksiya orttimasini topamiz:

$$\Delta(u\cdot v)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=[u(x)+\Delta u]\cdot[v(x)+\Delta v]-u(x)\cdot v(x)==u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

natijani olamiz. Shartga asosan $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, demak uzluksiz ham bo‘lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$$

tengliklar o‘rinli bo‘ldi. Bu tengliklarni oldingi natijaga qo‘yib, $y=u\cdot v$ funksiya differensiallanuvchi va

$$(u\cdot v)'=u\cdot v'+v\cdot u'+u'\cdot 0=u\cdot v'+v\cdot u',$$

ya’ni (13.6) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Masalan,

$$(e^x\cdot\sin x)'=(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x=(\sin x+\cos x)e^x.$$

2-natija: O‘zgarmas C ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Haqiqatan ham, (13.4) va (13.6) formulalarga asosan

$$[C\cdot f(x)]'=C'\cdot f'(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x).$$

Masalan, $(5x^2)'=5\cdot(x^2)'=5\cdot 2x=10x$.

4-qoida: Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi va bu yerda $v=v(x)\neq 0$ shart bajarilsa, unda bu nuqtada $y=u(x)/v(x)=u/v$ funksiya ham differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \qquad (13.7)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Bu tasdiqni isboti oldingi qoida isbotiga o‘xshash tarzda amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida taklif etiladi.

Bu qoidadan foydalanib, $y=\text{tg}x$ va $y=\text{ctg}x$ asosiy elementar funksiyalarning hosilasini topamiz. $\cos x\neq 0$ shartda, ya’ni $x\neq(\pi/2)\pm\pi n$ ($n=0,1,2,3,\ldots$) bo‘lganda

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda, $\sin x \neq 0$ shartda, ya'ni $x \neq \pm\pi n$ (n=0,1,2,3, ….) bo'lganda, $(\text{ctg}x)' = -1/(\sin^2 x)$ ekanligi topiladi. Demak, $y=\text{tg}x$ va $y=\text{ctg}x$ funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo'lib, ularning hosilalari

$$(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x, \quad (\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{ctg}^2 x) \qquad (13.8)$$

formula bilan topiladi.

5-qoida: Berilgan $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida qat'iy monoton (o'suvchi yoki kamayuvchi) va uzluksiz bo'lsin. Bundan tashqari $y=f(x)$ funksiya bu x nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x) \neq 0$ bo'lsin. Bu shartlarda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud va differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi uchun

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)} \text{ yoki } x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (13.9)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isbot: Keltirilgan shartlarda tegishli $y=f(x)$ nuqtaning biror atrofida $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud, qat'iy monoton va uzluksiz bo'lishini ko'rsatish mumkin.Bu funksiyani differensiallanuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning y argumentiga $\Delta y \neq 0$ orttirma beramiz. Bu holda $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya

$$\Delta x = f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)$$

orttirma oladi. Bunda $f^{-1}(y)$ teskari funksiya qat'iy monoton ekanligidan $\Delta x \neq 0$, uzluksiz ekanligidan esa $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu holda, $f'(x)$ mavjud va noldan farqli ekanligi hamda hosila ta'rifidan ushbu natijani olamiz:

$$\{f^{-1}(y)\}' = x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = (y'_x)^{-1} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demak, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya differensiallanuvchi va (13.9) formula o'rinli.

Bu qoidadan foydalanib yana bir nechta asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini aniqlaymiz.

Dastlab $y=f(x)=\arcsin x$ teskari trigonometrik funksiya hosilasini topamiz. Ta'rifga asosan, $x\in(-1, 1)$ bo'lganda bu funksiya $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ qiymatlarni qabul etadi hamda $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo'ladi. Bu yerda $y\in(-\pi/2, \pi/2)$ bo'lgani uchun, $x=\sin y$ teskari funksiyaning hosilasi

$$x'_y=(\sin y)'=\cos y>0,$$

ya'ni noldan farqli bo'ladi. Bu holda, (9) formulaga asosan,

$$(\arcsin x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

natijani hosil qilamiz. Demak,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1) \tag{13.10}$$

formula o'rinli ekan. Xuddi shunday usulda

$$(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\mathrm{arctg}\,x)'=-(\mathrm{arcctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{13.11}$$

formulalarni isbotlash mumkin.

Endi $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$) logarifmik funksiya hosilasini topamiz. Bunda $x\in(0,\infty)$ va $y\in(-\infty, \infty)$ hamda logarifmik funksiya qat'iy monoton bo'lib, u $x=a^y$ ko'rsatkichli funksiyaga teskaridir. Bundan tashqari $x=a^y$ differensiallanuvchi va $(a^y)'=a^y\ln a\neq0$. Shu sababli, (13.9) formulaga asosan, logarifmik funksiya hosilasi mavjud va

$$(\log_a x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

ekanligini topamiz. Demak,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}, \quad (\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{13.12}$$

5-qoida: Berilgan $y=f(u)$ murakkab funksiyada tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funksiya x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'_x(u)=f'_u(u)\cdot u'(x) \tag{13.13}$$

formula bilan, ya’ni tashqi va ichki funksiyalar hosilalarining ko‘paytmasi kabi topiladi.

Isbot: *u(x)* funksiya differensiallanuvchi ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x \to 0$ => $\Delta u \to 0$ bo‘ladi. Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$f'_x(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u) \cdot u'(x),$$

ya’ni $y=f(u)$ murakkab funksiya differensiallanuvchi va (13.13) formula o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $(\sin x^2)'=(u=x^2)=(\sin u)'_x\ (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$,

$(\sin^2 x)' = (u=\sin x) = (u^2)'_x = (u^2)'_u \cdot u' = 2u \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Bu qoidadan foydalanib, $y=x^\alpha$ (α–ixtiyoriy haqiqiy son), $x \in (0, \infty)$, darajali funksiyaning differensiallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun darajali funksiyani $y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ ko‘rinishdagi murakkab ko‘rsatkichli funksiya kabi ifodalaymiz. Unda, (13.13) formula, ko‘rsatkichli va logarifmik funksiya hosilasidan foydalanib,

$$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (u = \alpha \ln x) = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

natijaga kelamiz. Demak, $y=x^\alpha$, $x \in (0,\infty)$, darajali funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \qquad (13.14)$$

formula orqali hisoblanadi. Masalan,

$$(x)'=1, \quad (x^2)'=2x, \quad (x^3)'=3x^2, \quad (x^{-1})'=(\frac{1}{x})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},$$

$$(x^{1/2})'=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x^{1/3})'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Izoh: (13.15) formula nafaqat $x \in (0, \infty)$ sohada, balkim $y=x^{\alpha-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasida ham o‘rinli bo‘ladi. Jumladan, $\alpha=n \in N$, ya’ni natural son bo‘lsa, (13.15) formula ixtiyoriy $x \in (-\infty, \infty)$, $\alpha = -n \in Z^-$, ya’ni manfiy butun son bo‘lganda esa barcha $x \neq 0$ uchun o‘rinli bo‘ladi.

13.3. Logarifmik differensiallash usuli.

Ba’zi hollarda differensiallanuvchi $y=f(x)>0$ funksiya hosilasini uning logarifmi orqali quyidagicha topish mumkin:

$$[\ln f(x)]'=(u=f(x))=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow f'(x)=[\ln f(x)]'\cdot f(x) \quad (13.16)$$

1-Ta’rif: Funksiyaning $f'(x)$ hosilasini (13.16) formula orqali topish ***logarifmik differensiallash usuli*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2e^{2x}(1+x^4)^3$ funksiya hosilasini bevosita hisoblash ancha murakkab. Biroq logarifmik differensiallash usulida bu hosila osonroq topiladi:

$$\ln f(x)=\ln[x^2e^{2x}(1+x^4)^3]=2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\ln f(x)]'=[2\ln x+2x+3\ln(1+x^4)]'=\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4}=\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})f(x)=(\frac{2}{x}+2+\frac{12x^3}{1+x^4})\cdot x^2e^{2x}(1+x^4)^3=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^3+2x^2e^{2x}(1+x^4)^3+12x^5e^{2x}(1+x^4)^2=$$

$$=2xe^{2x}(1+x^4)^2[1+x^4+x(1+x^4)+6x^4]=2xe^{2x}(1+x^4)^2(x^5+7x^4+x+1).$$

Yana bir misol sifatida $f(x)=x^{\alpha}$ ($x>0$, α-ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya hosilasini logarifmik differensiallash usulida aniqlaymiz:

$$\ln f(x)=\ln x^{\alpha}=\alpha\ln x\Rightarrow[\ln f(x)]'=(\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow(x^{\alpha})'=\frac{\alpha}{x}\cdot x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Bu yerdan (13.15) formula o‘rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

2-Ta’rif: Agar $u=u(x)>0$, $v=v(x)$ esa ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, unda $y=u(x)^{v(x)}=u^v$ ko‘rinishdagi murakkab funksiya ***darajali-ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Agar $u=u(x)>0$ va $v=v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsa, unda $y=u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya ham differensiallanuvchi bo‘ladi va uning hosilasini logarifmik differensiallash usulida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$\ln y=v\cdot\ln u\Rightarrow(\ln y)'=(v\cdot\ln u)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\Rightarrow y'=y\cdot(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}).$$

Bu natijani ushbu ko‘rinishda yozamiz:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' \ . \qquad (13.17)$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, $y= u^v$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya hosilasi ikkita qo‘shiluvchidan iborat. Bunda birinchi qo‘shiluvchi $y= u^v$ funksiyani murakkab ko‘rsatkichli funksiya (u o‘zgarmas) singari qarab, undan hosila olish natijasida hosil bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchi esa bu funksiyani murakkab darajali funksiya (v o‘zgarmas) deb, undan hosila olish orqali topilishi mumkin.

Misol sifatida $y=x^x$ funksiya hosilasini (13.17) formula orqali topamiz:

$$(x^x)'= x^x \cdot \ln x \cdot x' + x \cdot x^{x-1} \cdot x' = (1+\ln x)\, x^x. \qquad (13.18)$$

13.4. Hosilalar jadvali.

Oldin ko‘rilganlarga asosan barcha asosiy elementar funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasida differensiallanuvchi bo‘ladi. Ularning hosilalari va differenrsiallash qoidalarini ***hosilalar jadvali*** ko‘rinishda ifodalaymiz. Bu jadvaldan foydalanib ixtiyoriy elementar funksiyani hosilasini topish mumkin va u matematik tahlil “Differensial hisob” bo‘limining asosiy quroli bo‘lib hisoblanadi. Bunda elementar funksiyalarning hosilalari yana elementar funksiya bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

H O S I L A L A R   J A D V A L I

I. DARAJALI FUNKSIYALAR			
1	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$	2	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \ u = u(x)$
3	$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x \ , \ (x^3)' = 3x^2,$ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4	$(u^2)' = 2uu' \ , \ (u^3)' = 3u^2 u',$ $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2} \ , \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
II. KO‘RSATGICHLI FUNKSIYALAR			
5	$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$	6	$(a^u)' = a^u u' \ln a, u = u(x)$
7	$(e^x)' = e^x, \quad (10^x)' = 10^x \ln 10$	8	$(e^u)' = e^u \cdot u', \quad u = u(x)$
III. LOGARIFMIK FUNKSIYALAR			
9	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$	10	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} = \frac{u' \log_a e}{u}, u = u(x)$
11	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	12	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u', \quad u = u(x)$

IV. TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR			
13	$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$	14	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
15	$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	16	$(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
V. TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR			
17	$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18	$(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21	$(\mathrm{arctg}x)' = -(\mathrm{arcctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$		$(\mathrm{arctg}u)' = -(\mathrm{arcctg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
DIFFERENSIALLASH QOIDARLARI			
27	$(C)'=0$, (C–const.), $(C \cdot u)' = C \cdot u'$	28	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
29	$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	30	$[f(u)]'_x = f'_u(u) \cdot u'$, $u = u(x)$
31	$\{f^{-1}(y)\}' = \dfrac{1}{f'(x)}$, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$	32	$(u^v)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Murakkab funksiya hosilasi. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

13.1. $y = \sin 6x$.

13.2. $y = \cos(a - bx)$.

13.3. $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$.

13.4. $y = 6\cos\dfrac{x}{3}$.

13.5. $y = (1-5x)^4$.

13.6. $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$.

13.7. $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^5}$.

13.8. $y = \sqrt{1-x^2}$

13.9. $y = \sqrt{\cos 4x}$.

13.10. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$.

13.11. $y = \sin^4 x = (\sin x)^4$.

13.12. $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$.

13.13. $y = x^2\sqrt{1-x^2}$.

13.14. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

13.15. $y = \sqrt[3]{1+\cos 6x}$.

13.16. $y = tgx + \dfrac{2}{3}tg^3 x + \dfrac{1}{5}tg^5 x$.

Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalarning hosilalariga doir quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

13.17. $y = x\ln x$.

13.18. $y = \frac{1+\ln x}{x}$; $y = \lg(5x)$.

13.19. $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$.

13.20. $y = \ln(x^2 + 2x)$.

13.21. $y = \ln(1 + \cos x)$.

13.22. $y = \ln\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

13.23. $y = x^2 + 3^x$.

13.24. $y = x^2 2^x$.

13.25. $y = x^2 e^x$

13.26. $y = a^{\sin x}$.

13.27. $y = e^{-x^2}$.

13.28. $y = x^2 e^{-2x}$.

13.29. $y = 2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$

13.30. $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.

13.31. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

13.32. $y = e^{\frac{x}{a}}\cos\frac{x}{a}$.

Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalarini toping.

13.33. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$.

13.34. $y = x - arctgx$.

13.35. $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$.

13.36. $y = \arcsin\frac{x}{a}$.

13.37. $y = arctg\frac{x}{a}$.

13.38. $y = \arccos(1-2x)$.

13.39. $y = arctg\frac{1+x}{1-x}$.

13.40. $y = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$.

14-MAVZU. ANIQMAS INTEGRAL

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral.
2. Aniqmas integral xossalari.
3. Integrallar jadvali.
4. Bo'laklab integrallash usuli.

Tayanch iboralar: boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o'zgaruvchisi, aniqmas integralning geometrik ma'nosi, integrallash amali, integralning chiziqlilik xossasi, integrallar jadvali.

14.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral.

Funksiya differensiali mavzusida berilgan $y=F(x)$ funksiyasining $F'(x)=f(x)$ hosilasini topish masalasi bilan shug'ullanganmiz. Ammo bir qator savollarga javob izlashda teskari, ya'ni $y=F(x)$ funksiyani uning ma'lum bo'lgan $F'(x)=f(x)$ hosilasi bo'yicha topish masalasiga duch kelamiz.

Masalan, moddiy nuqtaning harakat tenglamasi $S=S(t)$ berilgan bo'lsa, unda t_0 vaqtgacha bosib o'tilgan masofa $S_0=S(t_0)$ kabi aniqlanadi.Ammo harakat tenglamasi $S=S(t)$ noma'lum bo'lib, uning hosilasi $S'(t)=v(t)$, ya'ni oniy tezlik berilgan holda $S_0=S(t_0)$ masofani qanday topish masalasi paydo bo'ladi. Bu kabi masalalar integral tushunchasiga olib keladi va uni o'rganishga kirishamiz.

1-Ta'rif: Biror chekli yoki cheksiz (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada differensiallanuvchi va hosilasi

$$F'(x)=f(x) \tag{14.1}$$

shartni qanoatlantiruvchi $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiya uchun ***boshlang'ich funksiya*** deyiladi.

Masalan, $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $x\in(-\infty,\infty)$, funksiya uchun $F(x)=a^x/\ln a$ boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki ixtiyoriy x uchun

$$F'(x)=(a^x/\ln a)'=a^x\ln a/\ln a=a^x=f(x)$$

tenglik o'rinlidir.

Xuddi shunday $F(x)=x^5/5$ funksiya barcha x nuqtalarda $f(x)=x^4$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, chunki bunda (14.1) tenglik bajariladi.

Berilgan $y=F(x)$ funksiyaning $y'=F'(x)=f(x)$ hosilasi bir qiymatli aniqlanadi. Masalan, $y=x^2$ funksiya yagona $y'=2x$ hosilaga ega. Ammo $y=f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich $F(x)$ funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C o‘zgarmas son uchun $F(x)+C$ funksiya ham $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Haqiqatan ham, differensiallash qoidalariga asosan,

$$(F(x)+C)'= F'(x)+(C)'=f\,(x)+0= f\,(x)$$

va, ta’rifga asosan, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=2x$ uchun ixtiyoriy C o‘zgarmasda x^2+C boshlang‘ich funksiyalar bo‘ladi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $F(x)+C$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda $F(x)$ birorta boshlang‘ich funksiyani, C esa ixtiyoriy o‘zgarmas sonni ifodalaydi.

Bu yerda berilgan $y=f(x)$ funksiya uchun barcha boshlang‘ich funksiyalarni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu savolga javob berish uchun dastlab ushbu lemmani (yordamchi teoremani) qaraymiz.

Lemma: Agar $y=\mathrm{Q}(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqda differensiallanuvchi va bu oraliqning har bir nuqtasida uning hosilasi $\mathrm{Q}'(x)=0$ bo‘lsa, unda bu funksiya (a,b) oraliqda o‘zgarmas, ya’ni $\mathrm{Q}(x)=C$ (C - const) bo‘ladi.

Isbot: Qaralayotgan (a,b) oraliqdan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 ($x_1\neq x_2$) nuqtalarni olamiz. Unda $y=\mathrm{Q}(x)$ funksiya olingan $[x_1, x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli

$$\mathrm{Q}(x_2)-\mathrm{Q}(x_1)=\mathrm{Q}'(\xi)(x_2-x_1)\ , \quad x_1<\xi< x_2\ ,$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Lemma sharti bo‘yicha (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $\mathrm{Q}'(x)=0$ bo‘lgani uchun ξ nuqtada ham $\mathrm{Q}'(\xi)=0$ bo‘ladi. Bu yerdan, oldingi tenglikka asosan, $\mathrm{Q}(x_2)-\mathrm{Q}(x_1)=0$, ya’ni $\mathrm{Q}(x_2)=\mathrm{Q}(x_1)$ tenglikka ega bolamiz. Bu esa $\mathrm{Q}(x)=C$ ekanligini ifodalaydi. Lemma isbot bo‘ldi.

Endi quyidagi teoremani qaraymiz.

1-Teorema: Agar $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda biror C o'zgarmas sonda $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga asosan $F(x)$ va $\Phi(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lgani uchun $F'(x)=f(x)$ ва $\Phi'(x)=f(x)$ tenglik o'rinlidir. Bu yerdan $Q(x)=\Phi(x)–F(x)$ funksiyaning hosilasi

$$Q'(x) = [\Phi(x)–F(x)]'= \Phi'(x)–F'(x)=f(x)–f(x)=0$$

ekanligini ko'ramiz. Unda, oldingi lemmaga asosan, $Q(x)=C$ natijani olamiz. Demak, $Q(x)=\Phi(x)–F(x)=C$ va haqiqatan ham $\Phi(x)=F(x)+C$ tenglik o'rinli.

Bu teoremadan ushbu muhim xulosa kelib chiqadi: agar $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, uning barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$ (C-ixtiyoriy o'zgarmas son) kabi aniqlanadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini topish uchun uning birorta $F(x)$ boshlang'ich funksiyasini topib, unga C o'zgarmas sonni qo'shib qo'yish kifoyadir. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari x^2+C ko'rinishda bo'ladi.

2-Ta'rif: Agar $F(x)$ biror (a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, unda $F(x)+C$ (C – ixtiyoriy o'zgarmas son) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi .

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan, birorta $F(x)$ boshlang'ich funksiya bo'yicha

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (14.2)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son ekanligini yana bir marta eslatib o'tamiz.

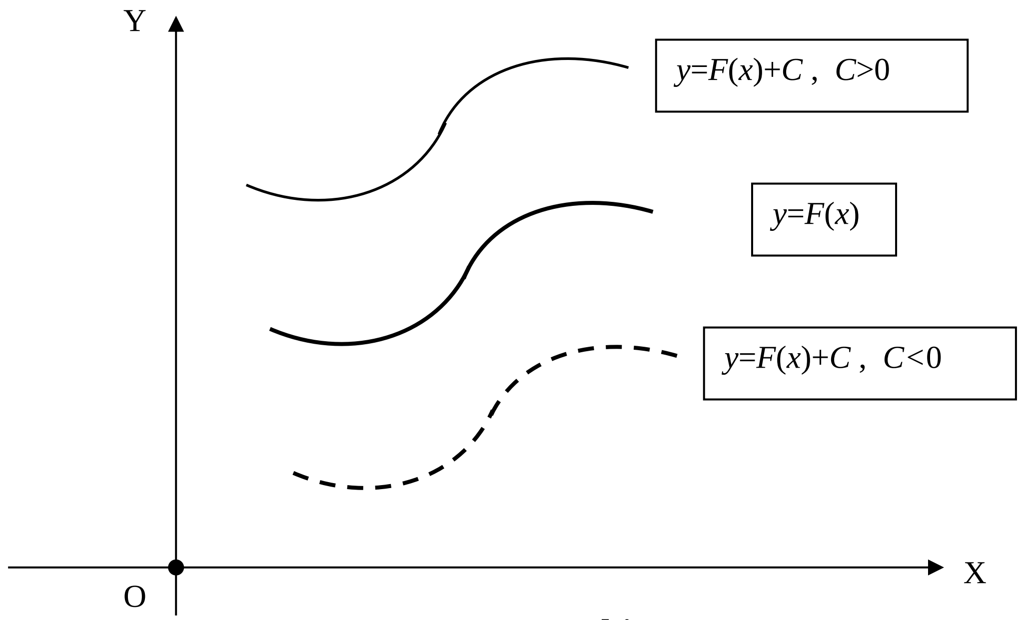
(14.2) tenglikda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ ***integral ostidagi ifoda***, x esa ***integrallash o'zgaruvchisi*** deyiladi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\int f(x)dx$ aniqmas integralini topish amali bu funksiyani ***integrallash*** deb ataladi.

Izoh: Berilgan $f(x)$ uchun qaysi shartda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya, demak $\int f(x)dx$ aniqmas integral, mavjud bo‘lish masalasi kelgusida qaraladi.

Yuqorida topilgan boshlang‘ich funksiyalar bo‘yicha quyidagi aniqmas integrallarni yozish mumkin:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C, \quad \int 2x dx = x^2 + C.$$

Aniqmas integral ta’rifini ifodalovchi (14.2) tenglikdan ko‘rinadiki, aniqmas integral $y=F(x)+C$(C-ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiyalar sinfini ifodalaydi. Shu sababli, geometrik nuqtai-nazardan, aniqmas integral $y=F(x)$ funksiya grafigini OY koordinata o‘qi bo‘ylab parallel ko‘chirishdan hosil bo‘ladigan chiziqlar sinfidan iborat bo‘ladi (14.1.1-chizmaga qarang).



14.1.1-chizma

14.2. Aniqmas integral xossalari.

Aniqmas integral ta’rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

I. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Isbot: Aniqmas integral va boshlang‘ich funksiya ta’rifini ifodalovchi (2) va (1) tengliklarga asosan

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

II. Aniqmas integral differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Isbot: Differensial ta’rifi va oldingi xossaga asosan

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Izoh: Bu yerdan differentsiallash amali integrallash amaliga teskari amal ekanligini ko‘ramiz.

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy C o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x)+C.$$

Isbot: Agar $F'(x)=f(x)$ deb belgilasak, unda $F(x)$ hosil qilingan $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Unda, aniqmas integral ta’rifiga asosan,

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C.$$

IV. Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan o‘zgarmas yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

Isbot: Differensial ta’rifi va oldingi xossaga asosan

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C.$$

Izoh: Bu yerdan integrallash amali differentsiallash amaliga o‘zgarmas son aniqligida teskari amal ekanligini ko‘ramiz.

V. O‘zgarmas k ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Bu tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: I xossaga asosan ikkala aniqmas integral bir xil $kf(x)$ hosilaga ega. Demak, bu aniqmas integrallarning ikkalasi ham $kf(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi va shu sababli ular bir-biridan faqat o‘zgarmas songa farq qilishi mumkin.

Masalan,

$$\int 10xdx = \int 5\cdot 2xdx = 5\int 2xdx = 5(x^2+C) = 5x^2+5C = 5x^2+C.$$

Bu yerda C ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lgani uchun $5C$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘ladi va shu sababli uni yana C deb belgilash mumkin.

VI. Ikkita funksiya algebraik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu yerda ham tenglik o‘zgarmas son aniqligida tushuniladi.

Isbot: Aniqmas integralning I xossasiga asosan

$$(\int [f(x) \pm g(x)]dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Algebraik yig‘indining hosilasi va I xossaga asosan

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' = f(x) \pm g(x).$$

Demak, VI xossadagi tenglikning ikkala tomonidagi funksiyalar bir xil hosilaga ega va shu sababli ular o‘zgarmas son aniqligida teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\int (5^x + 2x)dx = \int 5^x dx + \int 2x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + x^2 + C.$$

Izoh: VI xossa chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig‘indisi uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

3-Ta’rif: V va VI xossalar aniqmas integralning ***chiziqlilik xossalari*** deyiladi.

Aniqmas integralning chiziqlilik xossalarini bitta

$$\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx \qquad (14.3)$$

tenglik orqali ham ifodalash mumkin.

VII. Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, unda quyidagi tasdiq o‘rinlidir:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad .$$

Isbot: Ikkinchi integral javobi to‘g‘riligini differensiallash orqali ko‘rsatamiz. Shartga ko‘ra $F'(x)=f(x)$ bo‘lgani uchun va murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

Masalan,

$$\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C \Rightarrow \int (2x-3)^4dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^5}{5}+C=\frac{(2x-3)^5}{10}+C.$$

14.3. Integrallar jadvali.

Hosilalar jadvali, oldin hisoblangan hosilalar va aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, asosiy integrallar jadvalini yozamiz. Bunda aniqmas integral javobining to'g'riligini tenglikning o'ng tomonidan hosila olish orqali tekshirish mumkin. Natijada integral ostidagi funksiya hosil bo'lishi kerak. Masalan,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

integral javobi to'g'riligini tekshiramiz. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan

$$(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2\pm a^2})'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}(x^2\pm a^2)']=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}})=.$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}+x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo'ldi. Demak, integral javobi to'g'ri ko'rsatilgan.

INTEGRALLAR JADVALI

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$
2. $\int dx=x+C$
3. $\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$
4. $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$
6. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
7. $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
8. $\int e^xdx=e^x+C$
9. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
10. $\int\cos xdx=\sin x+C$
11. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\mathrm{tg}^2x)dx=\mathrm{tg}x+C \quad (x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}x + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

13. $\int \text{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

14. $\int \text{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \text{arctg}x + C \\ -\text{arcctg}x + C \end{cases}$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Bu jadval, integralning ko‘rib o‘tilgan xossalari va kelgusida qaraladigan integrallash usullaridan foydalanib juda ko‘p integrallarni hisoblash mumkin.

14.4. Bo‘laklab integrallash usuli.

Faraz qilaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differentsialini yozamiz:

$$d(uv) = vdu + udv\ .$$

Bu yerdan

$$udv = d(uv) - vdu$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini hadma-had integrallab, quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu\ .$$

Bu yerdan, integralning oldingi paragrafda ko‘rsatilgan IV xossasiga asosan, ushbu formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int udv = uv - \int vdu\ . \qquad (14.4)$$

Bu natija ***bo‘laklab integrallash formulasi*** deyiladi. Ayrim hollarda (14.4) formulaning chap tomonidagi integralni hisoblash murakkab, o‘ng tomondagi integral esa osonroq hisoblanadi.

Demak, berilgan $\int f(x)dx$ integralni (14.4) formula orqali bo‘laklab integrallash usulida hisoblash quyidagi algoritm asosida amalga oshirilishi mumkin:

- integral ostidagi $f(x)dx$ ifodani ikki bo‘lakka ajratamiz;

▪ hosil bo‘lgan bo‘laklardan dx qatnashganini dv , ikkinchisini esa u orqali belgilaymiz;

▪ hosil qilingan dv differensial bo‘yicha biror v boshlang‘ich funksiyani topamiz. Buning uchun $v=\int dv$ aniqmas integralni hisoblab, unda ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni C=0 deb olish mumkin;

▪ hosil qilingan u funksiya bo‘yicha du differensialni hisoblaymiz;

▪ (14.4) tenglikni o‘ng tomonidagi $\int vdu$ integralni hisoblaymiz;

▪ Berilgan $\int f(x)dx=\int udv$ integralni (4) tenglikning o‘ng tomoni orqali topamiz.

Bunda $f(x)dx=udv$ bo‘laklashda u va dv shunday tanlanishi kerakki, (14.4) formuladagi $\int vdu$ jadval integrali yoki hisoblanishi osonroq bo‘lgan integraldan iborat bo‘lsin.

Bo‘laklab integrallash usuliga misol sifatida $\int xe^x dx$ integralni hisoblaymiz. Bunda ikki holni qaraymiz.

1-hol. Integral ostidagi $xe^x dx$ ifodani $u=e^x$, $dv=xdx$ ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda

$$du=de^x=(e^x)'dx=e^x dx\,,\quad v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$$

bo‘lgani uchun, C=0 deb, (14.4) formuladan

$$\int xe^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$$

tenglikka kelamiz. Ammo bunda hosil bo‘lgan o‘ng tomondagi integral berilgan integralga nisbatan murakkabroq ko‘rinishga ega. Demak, bunday bo‘laklash maqsadga muvofiq emas.

2-hol. Bu holda $u=x$, $dv=e^x dx$ deb olamiz. Bunda

$$du=dx\,,\quad v=\int dv=\int e^x dx=e^x+C$$

bo‘ladi. Bu yerda C=0 deb va (4) formuladan foydalanib, berilgan integralni quyidagicha oson hisoblaymiz:

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C\,.$$

Ayrim integrallarni hisoblash uchun bo‘laklab integrallash formulasini bir necha marta qo‘llashga to‘g‘ri keladi. Bunga misol sifatida ushbu integralni

qaraymiz:

$$\int x^2\sin xdx=\begin{bmatrix} u=x^2, \quad dv=\sin xdx, \\ du=2xdx, \quad v=\int\sin xdx=-\cos x\end{bmatrix}=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x, \quad dv=\cos xdx, \\ du=dx, \ v=\int\cos xdx=\sin x\end{bmatrix}=-x^2\cos x+2(x\sin x-\int\sin xdx)=$$

$$=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C.$$

Shunday qilib, bu yerda (14.4) bo‘laklab integrallash formulasidan ikki marta foydalandik.

Izoh: Yuqoridagidek mulohaza yuritib, $\int x^n\sin xdx$, n=1,2,3, … , integral bo‘laklab integrallash formulasini n marta qo‘llash orqali hisoblanishini ko‘rish mumkin.

Ba’zi integrallarni hisoblash uchun dastlab bo‘laklab integrallash orqali ularga nisbatan tenglama hosil qilinib, so‘ngra bu tenglamani yechib ko‘zlangan maqsadga erishiladi. Misol sifatida $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$ integralni hisoblaymiz.

$$I=\int\sqrt{1-x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{1-x^2}, \quad dv=dx, \\ du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \ v=x\end{bmatrix}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x+C.$$

Shunday qilib izlanayotgan I integral uchun

$$I=x\sqrt{1-x^2}-I+\arcsin x+C\Rightarrow 2I=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$$

chiziqli tenglamani hosil qildik. Bu tenglamani yechib,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=I=\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}+C$$

natijaga erishamiz.

Bo‘laklab integrallash usulida

$$\int x^n\cos axdx, \quad \int x^n\sin axdx, \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx, \quad \int x^na^xdx, \quad \int x^n\ln xdx,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx, \quad \int e^{ax}\sin bxdx, \quad \int x^n\arccos xdx, \quad \int x^n\mathrm{arctg}xdx, \quad \int\sin\ln xdx$$

va shularga o‘xshash integrallarni hisoblash mumkin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

14.1. $\int (x^3+5\sin x-9)dx.$

14.2. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3^3\sqrt{x^2}}\right)dx.$

14.3. $\int (x^2+2x+\frac{1}{x})dx.$

14.4. $\int \left(\frac{10x^8+3}{x^4}\right)dx.$

14.5. $\int \left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx.$

14.6. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)dx.$

14.7. $\int \frac{3\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

14.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

14.9. $\int \frac{5x^8+6}{x^4}dx.$

4.10. $\int (\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3})dx.$

14.11. .$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx.$

14.12. .$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

14.13. $\int \frac{dx}{x^2-49}.$

14.14. $\int (\frac{4}{9+x^2}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}})dx.$

14.15. $\int \frac{dx}{x^2+16}.$

14.16. $\int (\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+3}})dx.$

14.17. $\int (3x+1)^7dx.$

14.18. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,x\,dx.$

14.19. $\int e^{\sin x}\cdot\cos x dx.$

14.20. $\int x^2e^{3x}dx.$

14.21. $\int (5-2x)^9dx.$

14.22. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}}dx.$

14.23. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx.$

14.24. $\int x\ln x dx.$

14.25. $\int \arcsin x dx.$

14.26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}.$

14.27. $\int arctgx dx.$

14.28. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx.$

14.29. $\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

14.30. $\int x\ln x dx$

15-MAVZU. INTEGRALLASH USULLARI

Reja:

1. Ratsional funksiyalar.
2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash.
3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar.
4. Ratsional funksiyalarni integrallash.
5. Irratsional funksiyalarni integrallash.

Tayanch iboralar: ratsional kasr (funksiya), noto‘g‘ri ratsional kasr, to‘g‘ri ratsional kasr, I tur eng sodda ratsional kasr, II tur eng sodda ratsional kasr, III tur eng sodda ratsional kasr, IV tur eng sodda ratsional kasr, mavhum birlik, kompleks son, qo‘shma kompleks sonlar, ratsional kasr yoyilmasi, noma’lum koeffitsiyentlar usuli.

15.1. Ratsional funksiyalar.

Ma’lumki ,

$$P_n(x)=a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +\ldots a_1x + a_0 \quad (a_n\neq 0) \qquad (15.1)$$

ko‘rinishdagi funksiya ***ko‘phad*** deyiladi. Bunda $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ o‘zgarmas sonlar bo‘lib, ular ko‘phadning ***koeffitsiyentlari***, n esa ko‘phadning ***darajasi*** deb ataladi.

Masalan, $P_3(x)=5x^3 -x^2 +2x+4$ – III darajali, $P_2(x)=3x^2 -5x+2$ – II darajali, $P_1(x)=8x+3$ – I darajali ko‘phadlardir.

Izoh: Har qanday o‘zgarmas funksiyani $P_0(x)=a_0$ – 0-darajali ko‘phad deb qarash mumkin.

1-Ta’rif: Ikkita ko‘phad nisbatidan iborat funksiya ***ratsional kasr yoki ratsional funksiya*** deyiladi.

Odatda ratsional kasr $R(x)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0} \qquad (15.2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Masalan,

$$\frac{3x-5}{x^2-2x+7}, \quad \frac{4x^2+x-3}{5x^2-3x+1}, \quad \frac{6x^3+5x^2+9x-3}{5x^2-3x+1}$$

ratsional kasrlardir.

Izoh: Har qanday $Q_m(x)$ ko‘phadni maxraji $P_0(x)=1$ bo‘lgan ratsional kasr kabi qarash mumkin va shu nuqtai nazardan ko‘phadlar ba’zan butun funksiyalar deb ataladi.

Ma’lumki, m/n oddiy (sonli) kasrda maxraj suratdan katta, ya’ni $n>m$ bo‘lsa, bu kasr to‘g‘ri, $n\leq m$ holda esa noto‘g‘ri kasr deyiladi. Bu tushuncha ratsional kasrlar uchun quyidagicha kiritiladi.

2-Ta’rif: Agar (15.2) ratsional kasrda maxrajning darajasi $n>m$ bo‘lsa, u ***to‘g‘ri***, $n\leq m$ holda esa ***noto‘g‘ri ratsional kasr*** deb aytiladi.

Masalan,

$$R(x)=\frac{3x^4-x^3+2x^2-5x+1}{x^6+2x^4+3x^2+7}$$

to‘g‘ri,

$$R_1(x)=\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{x^3+x^2-6x+1}, \quad R_2(x)=\frac{2x^5-3x^3+x+5}{x^3+2x^2-4x+1}$$

noto‘g‘ri ratsional kasrlar bo‘ladi.

Har qanday noto‘g‘ri m/n ($m>n$) oddiy kasrni

$$\frac{m}{n}=k+\frac{r}{n}, \quad k\in Z, \quad r<n$$

ko‘rinishda, ya’ni butun son va to‘g‘ri kasr yig‘indisi kabi ifodalash mumkin. Xuddi shunday tasdiq noto‘g‘ri ratsional kasrlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ular uchun ushbu tenglikni hosil qilish mumkin:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=L_{m-n}(x)+\frac{G_r(x)}{P_n(x)}, \quad r<n. \tag{15.3}$$

Bunda $L_{m-n}(x)$ va $G_r(x)$ ko‘rsatilgan tartibli ko‘phadlar bo‘ladi.

Demak, har doim noto‘g‘ri ratsional kasrni ko‘phad (butun funksiya) va to‘g‘ri ratsional kasr yig‘indisi kabi ifodalash mumkin.

Masalan,

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$$

noto‘g‘ri ratsional kasr suratini maxrajiga ustun usulida bo‘lib, uni

$$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}=2x^2-5x+9+\frac{-19x+19}{x^2+x-2}$$

ko‘rinishga keltira olamiz.

Har qanday ko‘phad darajali funksiyalarning algebraik yig‘indisi sifatida oson integrallamadi va uning integrali yana ko‘phaddan iborat, ya'ni elementar funksiya bo'ladi. Demak, (15.3) tenglikka asosan, har qanday ratsional kasrni integrallash masalasi to'g'ri ratsional kasrni integrallash masalasiga olib keladi. Shu sababli kelgusida faqat to'g'ri ratsional kasrlarni integrallash bilan shug'ullanamiz.

15.2. Eng sodda ratsional funksiyalar va ularni integrallash.

Quyidagi ko'rinishdagi to'g'ri ratsional kasrlarni qaraymiz:

$$\text{I. } R_I(x)=\frac{A}{x-a}\ , \qquad \text{II. } R_{II}(x)=\frac{A}{(x-a)^k}\ ,$$

$$\text{III. } R_{III}(x)=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\ , \qquad \text{IV. } R_{IV}(x)=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\ .$$

Bunda A, B, a, p, q–haqiqiy sonlar, k=2,3,4, ... , va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni uning diskriminanti $D=p^2-4q<0$ deb olinadi.

3-Ta'rif: Yuqorida kiritilgan $R_{\text{I}}(x)$ – $R_{\text{IV}}(x)$ mos ravishda I–IV tur ***eng sodda ratsional kasrlar*** deb ataladi.

Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash masalasini qaraymiz.

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\int R_I(x)dx=\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$$

$$\int R_{II}(x)dx=\int\frac{Adx}{(x-a)^{\kappa}}=A\int(x-a)^{-\kappa}d(x-a)=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1}+C=\frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}}+C\,,\quad k=2,3,4,\cdots\ .$$

III turdagi eng sodda $R_{\text{III}}(x)$ ratsional kasrning integralini hisoblash usuli oldingi paragrafda (I_3 integral) ko'rilgan edi. Shunday bo'lsada, bayonimizni to'liq bo'lishi va hisoblashlarni so'ngi nuqtasigacha yetkazish maqsadida , bu usulni biz qarayotgan

$$p^2-4q<0\Rightarrow q-\frac{p^2}{4}=\sigma^2>0$$

hol uchun yana bir marta eslatamiz:

$$\int R_{III}(x)dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\begin{bmatrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{bmatrix}=\frac{A}{2}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|-(B-\frac{Ap}{2})\cdot\frac{1}{\sigma}\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sigma}+C\ .$$

Endi IV turdagi eng sodda $R_{\text{IV}}(x)$ kasrning integralini hisoblaymiz:

$$\int R_{IV}(x)dx=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k}=\frac{A}{2}I_k+(B-\frac{Ap}{2})J_k\ .$$

Bu yerdagi

$$I_k=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}\ ,k=2,3,4,\cdots\quad ,$$

$$J_k=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2]^k}\ ,\ \sigma=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\ ,k=2,3,4,\cdots$$

integrallarni hisoblaymiz:

$$I_k=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k}=\begin{bmatrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)dx=dt \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^k}=$$

$$=\frac{1}{(1-k)t^{k-1}}+C=\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C;$$

$$J_k=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+\sigma^2)^k}=\begin{bmatrix} t=x+\frac{p}{2}, \\ dt=dx \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2+\sigma^2-t^2}{(t^2+\sigma^2)^n}dt=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}.$$

Bu tenglikdagi oxirgi integralga bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llaymiz. Buning uchun integral ostidagi ifodani

$$u=t,\quad dv=\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}$$

ko‘rinishda bo‘laklaymiz. Bu holda $du=dt$ va

$$v=\int dv=\int\frac{tdt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\sigma^2)}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}$$

bo‘lgani uchun , bo‘laklab integrallash formulasiga asosan, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{t}{2(1-k)(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}.$$

Natijada J_k integralni hisoblash uchun

$$J_k=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+\frac{t}{2(k-1)\sigma^2(t^2+\sigma^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}=$$

$$=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\left[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}\right]$$

formulani hosil etamiz. Bu yerdan J_k integralni hisoblash uchun ushbu

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+\sigma^2)^k}=\frac{1}{2(k-1)\sigma^2}\left[\frac{t}{(t^2+\sigma^2)^{k-1}}+(2k-3)J_{k-1}\right]\quad(15.4)$$

rekkurent formula o‘rinli ekanligini ko‘ramiz. Bu rekkurent formula bo‘yicha J_k integralni hisoblash xuddi shu ko‘rinishdagi, ammo k parametrining qiymati bittaga kichik bo‘lgan J_{k-1} integralni hisoblashga olib keladi. O‘z navbatida J_{k-1} integralni hisoblash J_{k-2} integralga keltiriladi va bu jarayon quyidagi J_1 jadval integrali hosil bo‘lguncha davom ettiriladi:

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+\sigma^2}=\frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sigma}+C.$$

J_k integral uchun hosil qilingan ifodaga t va σ o‘rniga ularning

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad \sigma = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

qiymatlarini qo‘yib, bu integral javobini topamiz.

Misol sifatida IV turdagi ratsional kasrning ushbu integralini hisoblaymiz:

$$I = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+3)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2J_2 . \qquad (15.5)$$

Bunda J_2 quyidagi integralni ifodalaydi:

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \begin{bmatrix} t = x+1, \\ dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} \ .$$

Oxirgi integralni yuqorida ko‘rsatilgan usulda bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \begin{bmatrix} u = t, \ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+2)^2} \\ du = dt, v = -\dfrac{1}{2(t^2+2)} \end{bmatrix} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = -\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$

Demak ,

$$J_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{4(x^2+2x+3)} + C .$$

J_2 integralning bu qiymatini I uchun hosil qilingan (15.5) tenglikka qo‘yib, berilgan I integral javobini topamiz :

$$I = \int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$

Shunday qilib, I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar elementar funksiyalarda integrallanuvchi va ularning integrallari logarifmik, arctg($ax+b$) ko‘rinishdagi teskari trigonometrik funksiyalar hamda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi.

15.3. Kompleks sonlar haqida tushunchalar.

Ratsional funksiyalarni integrallash bo‘yicha keyingi tasdiqlarni ifodalash uchun bizga kompleks son tushunchasi kerak bo‘ladi. $i^2=-1$ yoki $i=\sqrt{-1}$ tenglik bilan aniqlanadigan i belgi ***mavhum birlik*** deb ataladi. Mavhum birlik yordamida manfiy sondan ham kvadrat ildiz olish imkoniyati paydo bo‘ladi. Masalan,

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25\cdot i^2}=5i.$$

Mavhum birlik i va x, y haqiqiy sonlar orqali $z=x+yi$ kabi aniqlanadigan ifodalar ***kompleks sonlar*** deyiladi. Bunda $y=0$ desak, $z=x$ haqiqiy son hosil bo‘ladi, ya’ni kompleks sonlar to‘plami haqiqiy sonlarni o‘z ichiga oladi.

Ikkita $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi algebraik ikkihadlar yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi kabi aniqlanadi:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\,,\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\,,$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i+y_1y_2i^2=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\,.$$

Masalan, $z_1=3+4i$, $z_2=5-2i$ kompleks sonlar uchun

$$z_1+z_2=8+2i,\quad z_1-z_2=-2+6i,\qquad z_1z_2=23+14i.$$

Ikkita $x+yi$ va $x-yi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar ***qo‘shma kompleks sonlar*** deyiladi. Qo‘shma kompleks sonlar yig‘indisi $2x$ va ko‘paytmasi x^2+y^2 doimo haqiqiy son bo‘ladi.

Agar $x^2+px+q=0$ kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=(p/2)^2-q<0$ bo‘lsa, unda bu tenglama ikkita $a\pm ib$ ko‘rinishdagi qo‘shma kompleks sonlardan iborat ildizlarga ega bo‘ladi .

Masalan, $x^2-8x+25=0$ kvadrat tenglamada diskriminanti

$$D=(-4)^2-25=-9 \text{ va } \sqrt{D}=\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9i^2}=3i$$

bo‘lgani uchun, bu tenglamaning ildizlari $x_1=4-3i$ va $x_2=4+3i$ qo‘shma kompleks sonlardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

15.4. Ratsional funksiyalarni integrallash.

Endi umumiy holda $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni integrallash masalasi ustida qisqacha to‘xtalib o‘tamiz. Bunda “Oliy algebra” fanida ko‘riladigan va isbotlanadigan bir qator teoremalarni isbotsiz keltiramiz. Ularning orasida ushbu teorema asosiy vazifani bajaradi:

1-Teorema: Har qanday (2) ko‘rinishdagi $R(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrni

$$R(x)=\sum_{k=1}^{r} R_k(x) \tag{15.6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $R_k(x)$ I–IV turdagi eng sodda ratsional kasrlar, ularning umumiy soni $r \leq n$ bo‘ladi.

Demak, har qanday to‘g‘ri ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlarning (15.4) chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida yozish mumkin. Kelgusida (15.6) tenglikni $R(x)$ ratsional kasrning yoyilmasi deb yuritamiz.

Masalan, ushbu ratsional kasrlar uchun

$$\frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}, \tag{15.7}$$

$$\frac{3x-2}{x^3+3x^2+4x+2}=\frac{-5}{x+1}+\frac{5x+8}{x^2+2x+2} \tag{15.8}$$

yoyilmalar o‘rinli ekanligini bevosita tekshirib ko‘rish mumkin.

1-teoremadan har qanday $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr, eng sodda ratsional kasrlarning yig‘indisi sifatida, elementar funksiyalarda integrallanuvchi va uning integrali logarifmik, arktangens hamda ratsional funksiyalar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Ammo bu integralni hisoblash uchun bizga ratsional kasrning (15.6) yoyilmasi kerak bo‘ladi. Shu sababli $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning (15.6) yoyilmasini topish masalasini qaraymiz.

Dastlab (15.4) yoyilmada qatnashadigan eng sodda $R_k(x)$ kasrlarning turi va soni qanday aniqlanishini ko‘ramiz. Bu savolga javob maxrajining nollari, ya’ni

$$P_n(x)=0 \tag{15.9}$$

algebraik tenglamaning ildizlari yordamida topiladi. Shu sababli (15.9) algebraik tenglamaning ildizlari to‘g‘risidagi ayrim ma’lumotlarni va ulardan kelib chiqadigan natijalarni qisqacha, isbotsiz keltiramiz.

Biror $x=a$ soni (15.9) tenglamani ayniyatga aylantirsa, ya’ni $P_n(a)\equiv 0$ bo‘lsa, u shu tenglamaning ***ildizi*** deyiladi. Masalan, $x=-1$ soni

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=0 \qquad (15.10)$$

tenglamaning ildizi bo‘ladi, chunki $P_3(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+2\equiv 0$.

(15.9) tenglama uchun $x=a$ ildiz bo‘lib, $P_n'(a)\neq 0$ shart bajarilsa, unda $x=a$ bu tenglamaning ***oddiy ildizi*** deyiladi. Bu holda (15.9) tenglamani chap tomonidagi ko‘phadni $P_n(x)=(x-a)L_{n-1}(x)$ ko‘paytma ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi. Bu tenglikda $L_{n-1}(x)$ ko‘paytuvchi biror $(n-1)$- darajali ko‘phad bo‘lib, u $L_{n-1}(a)\neq 0$ shartni qanoatlantiradi.

Masalan, $x=-1$ soni (15.10) tenglamaning oddiy ildizi bo‘ladi, chunki

$$P_3'(x)=(x^3+3x^2+4x+2)'=3x^2+6x+4 \Rightarrow P_3'(-1)=1\neq 0\,.$$

Bunda haqiqatan ham yuqorida aytilgan tasdiq o‘rinli bo‘lib,

$$P_3(x)=x^3+3x^2+4x+2=(x+1)(x^2+2x+2)=(x+1)L_2(x) \qquad (15.11)$$

tenglik bajarilishini va $L_2(-1)=1\neq 0$ ekanligini tekshirib ko‘rish mumkin.

2-Teorema: Agar $x=a$ soni (15.9) tenglamaning, ya’ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining oddiy ildizi bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (15.6) yoyilmasida bitta $A/(x-a)$ ko‘rinishdagi I tur eng sodda ratsional kasrdan iborat qo‘shiluvchi qatnashadi.

Masalan, (15.8) ratsional kasrning maxraji uchun $x=-1$ oddiy ildizi bo‘lishini yuqorida ko‘rib o‘tdik va shu sababli ratsional kasrning (15.8) yoyilmasida bitta $-5/(x+1)$ qo‘shiluvchi qatnashmoqda.

Agar (15.9) tenglamaning $x=a$ ildizi uchun

$$P_n^{(k)}(a)=0\ (k=1,2,\cdots,s-1)\,, \quad P_n^{(s)}(a)\neq 0$$

shartlar bajarilsa, $x=a$ bu tenglamaning ***s karrali ildizi*** deyiladi. Bu holda (15.7) tenglamaning chap tomonini $P_n(x)=(x-a)^sL_{n-s}(x)$ $[L_{n-s}(a)\neq 0]$ ko‘rinishda ifodalab bo‘ladi.

Masalan, $P_3(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ tenglama uchun $x=2$ ikki karrali ildiz bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$P_3(2)=0\,,\ P_3'(x)\big|_{x=2}=(3x^2-2x-8)\big|_{x=2}=0\,,\ P_3''(x)\big|_{x=2}=(6x-2)\big|_{x=2}=10\neq 0$$

va

$$P_3(x)= x^3-x^2-8x+12 =(x-2)^2(x+3) \qquad (15.12)$$

tenglik o‘rinli.

3-Teorema: Agar $x=a$ soni (15.9) tenglamaning, ya’ni $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasr maxrajining s karrali ildizi bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (6) yoyilmasida

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}, \quad k=1,2,\cdots,s$$

ko‘rinishdagi bitta I tur va s–1 ta II tur eng sodda ratsional kasrlardan iborat qo‘shiluvchilar qatnashadi.

Masalan, (15.12) tenglikdan

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}$$

ratsional kasrning maxraji uchun x=2 ikki karrali va x=–3 oddiy ildiz ekanligi kelib chiqadi va bunda

$$R(x)=\frac{2x^2-2x+1}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x+3}$$

yoyilma o‘rinli bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Agar biror $x_1=a+bi$ kompleks son (15.9) algebraik tenglamaning ildizi bo‘lsa, unda $x_2=a-bi$ qo‘shma kompleks son ham bu tenglamaning ildizi bo‘lishini isbotlash mumkin. Demak, $P_n(x)=0$ tenglama kompleks ildizlarga ega bo‘lsa, bu ildizlar albatta qo‘shma kompleks sonlar juftliklaridan iborat bo‘ladi.

Agar $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar $P_n(x)=0$ tenglamaning oddiy ildizi bo‘lsa, unda

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)L_{n-2}(x)=(x^2+px+q)L_{n-2}(x) \quad [L_{n-2}(x_{1,2})\neq 0,\ p=-2a,\ q=a^2+b^2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Masalan,

$$P_4(x)=2x^4-17x^3+77x^2-107x-75$$

ko‘phad uchun $x_{1,2}=3\pm 4i$ oddiy kompleks ildiz bo‘ladi. Bu holda

$$(x-x_1)(x-x_2)= x^2-6x+25 \Rightarrow P_4(x)=(x^2-6x+25)(2x^2-5x-3) \qquad (15.13)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

***4-Teorema*:** Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar juftligidan iborat oddiy ildizga ega bo‘lsa, unda $R(x)$ kasrning (15.4) yoyilmasida bitta

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (p=-2a\,, \quad q=a^2+b^2)$$

ko‘rinishdagi III tur eng sodda ratsional kasr qatnashadi.

Masalan, (15.13) tenglikka asosan,

$$\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x^2-5x-3)}=\frac{2x^3-x^2+5x+1}{(x^2-6x+25)(2x+1)(x-3)}=$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-6x+25}+\frac{C}{2x+1}+\frac{D}{x-3}$$

ko‘rinishdagi yoyilma o‘rinli bo‘ladi.

5-Teorema: Agar $R(x)=Q_m(x)/P_n(x)$ ratsional kasrning maxraji uchun $x_{1,2}=a\pm bi$ qo‘shma kompleks sonlar s karrali ildizi bo‘lsa, unda

$$P_n(x)=(x^2+px+q)^s L_{n-2s}(x) \quad [L_{n-2s}(x_{1,2})\neq 0,\ p=-2a,\ q=a^2-b^2]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi va $R(x)$ ratsional kasrning chiziqli yoyilmasida

$$\frac{A_k x+B_k}{(x^2+px+q)^k}\,, \quad k=1,2,\cdots,s$$

ko‘rinishdagi bitta III tur va s–1 ta IV tur eng sodda ratsional kasrlar qatnashadi.

Masalan, $P_4(x)=(x^2+9)^3(x-5)=0$ tenglama uchun $x=\pm 3i$ uch karrali kompleks ildiz, $x=5$ esa oddiy haqiqiy ildiz bo‘lgani uchun ushbu ratsional kasr quyidagi ko‘rinishdagi yoyilmaga ega bo‘ladi:

$$\frac{4x^3-3x^2+x-6}{(x^2+9)^3(x-5)}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+9}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+9)^2}+\frac{A_3}{x-5}\ .$$

Demak, yuqoridagi 2 - va 5- teoremalardan

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasrning (15.6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari aniqlanadi. Ammo (15.6) yoyilmani to‘liq aniqlash uchun unga kiruvchi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k, B_k koeffitsiyentlarni ham aniqlash kerak bo‘ladi. Bu masala ***noma’lum koeffitsiyentlar usuli*** deb ataluvchi usulda hal qilinishi mumkin. Bu usulning mohiyatini quyida misol orqali tushuntiramiz.

Shunday qilib, ratsional kasrning $\int R(x)dx$ integralini hisoblash uch bosqichda amalga oshiriladi.

I. Dastlab $R(x)$ kasr maxrajning nollari orqali uning (15.6) yoyilmasidagi eng sodda ratsional kasrlarning turlari va sonlari 2 – va 5 – teoremalar yordamida aniqlanadi.

II. Yoyilmadagi eng sodda ratsional kasrlarning suratlaridagi A_k va B_k qiymatlari noma'lum koeffitsiyentlar usulida topiladi.

III. $R(x)$ kasrning eng sodda ratsional kasrlardagi (15.6) chiziqli yoyilmasi to'liq topilgach, $\int R(x)dx$ integral bu yoyilma bo'yicha integralning chiziqlilik xossalari va eng sodda ratsional kasrlarning integrallaridan foydalanilib hisoblanadi.

Yuqorida aytilganlarni

$$I=\int\frac{x+1}{x^5-x^2}dx$$

integralni hisoblashga tatbiq etamiz.

I. Dastlab maxrajning nollarini aniqlaymiz:

$$x^5-x^2=0\Rightarrow x^2(x^3-1)=0\Rightarrow x^2(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Bu yerdan ko'rinadiki, maxraj uchun x_1=0 ikki karrali, x_2=1 oddiy haqiqiy ildizlar bo'ladi. Bundan tashqari uchinchi ko'paytuvchidan maxrajning bir juft oddiy qo'shma kompleks ildizi ham mavjudligini ko'ramiz. Shu sababli integral ostidagi ratsional kasr quyidagi ko'rinishda eng sodda ratsional kasrlarga yoyiladi:

$$\frac{x+1}{x^5-x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4x+B}{x^2+x+1}\ .$$

II. Bu yoyilmadagi A_1, A_2, A_3, A_4 va B sonlarni noma'lum koeffitsiyentlar usulida topamiz. Buning uchun yoyilmaning o'ng tomonidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz. So'ngra hosil bo'lgan kasrning suratini yoyilmaning chap tomonidagi kasrning suratiga tenglashtiramiz. Natijada quyidagi tenglikka kelamiz:

$$A_1x(x-1)(x^2+x+1)+A_2(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+A_3x^2(x^2+x+1)+(A_4x+B)x^2(x-1)=x+1\ .$$

Bu tenglikdagi qo'shiluvchilarni x darajalari bo'yicha guruhlaymiz:

$$(A_1+A_3+A_4)x^4+(A_2+A_3-A_4+B)x^3+(A_3-B)x^2-A_1x-A_2=x+1.$$

Bu tenglik x o'zgaruvchining barcha qiymatlarida o'rinli, ya'ni ayniyat bo'lishi kerak. Bu esa x o'zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni teng bo'lishini taqozo etadi. Bundan A_1, A_2, A_3, A_4 va

B noma’lumlar uchun quyidagi 5 noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + A_4 = 0 \\ A_2 + A_3 - A_4 + B = 0 \\ A_3 - B = 0 \\ -A_1 = 1 \\ -A_2 = 1 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib,

A_1=–1 , A_2=–1 , A_3=2/3 , A_4=1/3 , B=2/3

ekanligini topamiz. Demak, integral ostidagi ratsional kasr

$$\frac{x+1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

ko‘rinishda eng sodda ratsional kasrlar orqali ifodalanadi. Shu bilan ratsional kasrli integralni hisoblashning I –II bosqichlari yakunlandi. Endi III bosqichga, ya’ni bevosita integralni hisoblashga o‘tamiz.

III. $$I = \int \frac{x+1}{x^5 - x^2} dx = \int \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} \right] dx =$$

$$= -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{3(x-1)} dx + \int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3} J \;.$$

Yakuniy natijaga erishish uchun J integralni hisoblash qoldi. Bu III tur eng sodda ratsional kasrdan olingan integral bo‘lib, uni yuqorida ko‘rsatilgan usulda hisoblaymiz:

$$J = \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \;.$$

Bu natijani izlanayotgan I integral uchun hosil qilingan oldingi tenglikka qo‘yib, ushbu oxirgi natijani olamiz:

$$\int \frac{x+1}{x^5-x^2}dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}{|x|^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Kelgusida bir qator funksiyalarni integrallash ratsional kasrlarni integrallash masalasiga olib kelishini ko‘ramiz.

15.5. Irratsional funksiyalarni integrallash.

Agar $y=f(x)$ funksiya x argumentning kasr darajalari ishtirok etgan algebraik ifodadan iborat bo‘lsa, uni ***irratsional funksiya*** deb ataymiz. Masalan,

$$y=\sqrt[3]{x^6+x^3+1}, \quad y=2x-5\sqrt{x}+\sqrt[6]{x^5}=2x-5x^{1/2}+x^{5/6}, \quad y=\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}+x}$$

kabilar irratsional funksiyalar bo‘ladi.

Biz bu yerda ayrim irratsional funksiyalarni integrallash masalasi bilan shug‘ullanamiz. Oldin shuni ta’kidlab o‘tamizki, har qanday irratsional funksiyadan olingan aniqmas integral elementar funksiyalarda ifodalanmaydi.

Masalan, ushbu

$$I_1=\int\sqrt{1+x^2}\,dx, \quad I_2=\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$$

irratsional ifodali integrallardan I_1 elementar funksiyalar orqali ifodalanadi, ammo I_2 uchun bunday deb bo‘lmaydi.

Dastlab ***binomial integral*** deb ataladigan va

$$I(r,s,p)=\int x^r(a+bx^s)^p\,dx$$

ko‘rinishda bo‘lgan integrallarni qaraymiz. Bunda r, s, p – ratsional va a, b – haqiqiy sonlarni ifodalaydi. Agar r, s, p sonlarning uchalasi ham butun son bo‘lsa, unda integral ostida ratsional funksiya hosil bo‘ladi va bu holda binomial integral elementar funksiyalarda ifodalanadi. Agar r, s, p sonlardan kamida bittasi butun bo‘lmasa, unda binomial integral ostida irratsional funksiya hosil bo‘ladi. Bunda binomial integral faqat quyidagi uch holda elementar funksiyalarda ifodalanishi mumkinligi buyuk rus matematigi P.L.Chebishev(1821-1894 y.) tomonidan isbotlangan:

1) p–butun son. Bu holda $t=\sqrt[m]{x}$, $x=t^m$ almashtirma (m – integral ostidagi r va s sonlarning umumiy maxraji) bajaramiz. Agar $r=k/m$, $s=q/m$ deb olsak, unda

$$x^r=t^k,\ x^s=t^q,\ dx=dt^m=mt^{m-1}dt$$

bo‘ladi va binomial integral

$$I(r,s,p)=m\int t^{k+m-1}(a+bt^q)^p\,dt$$

ko‘rinishni olib, ratsional funksiyadan olingan integralga keladi.

Misol sifatida

$$I=\int\frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

integralni hisoblaymiz. Bu parametrlari $r=-1$, $s=1/3$ va $p=-2$ bo‘lgan binomial integral bo‘lib, uni yuqorida ko‘rsatilganga asosan $t=\sqrt[3]{x}$, $x=t^3$ almashtirma yordamida hisob, ushbu natijaga ega bo‘lamiz:

$$I=\int\frac{3t^2dt}{t^3(1+t)^2}=3\int\frac{dt}{t(1+t)^2}=3[\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{(t+1)^2}]=$$

$$=3\left[\ln|t|-\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right]+C=3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right]+C\ .$$

2) $n=(r+1)/s$ – butun son . Bu holda $p=k/m$ bo‘lsa, unda $a+bx^s=t^m$ almashtirmadan foydalaniladi. Bunda

$$(a+bx^s)^p=t^k,\quad x^r=\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{r}{s}},\quad dx=\frac{m}{bs}\left(\frac{t^m-a}{b}\right)^{\frac{1}{s}-1}t^{m-1}dt$$

bo‘lib, binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=\frac{m}{b^n s}\int(t^m-a)^{n-1}t^{k+m-1}dt\ .$$

3) $n=p+(r+1)/s$ – butun son. Bu holda $p=k/m$ bo‘lsa, unda $ax^{-s}+b=t^m$ almashtirma qo‘llaniladi. Bunda

$$x=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}},\quad (a+bx^s)^p=x^{ps}(ax^{-s}+b)^p=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^p t^k,$$

$$x^r=\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{r}{s}},\quad dx=-\frac{ma}{s}\left(\frac{a}{t^m-b}\right)^{\frac{1}{s}-1}\frac{t^{m-1}}{(t^m-b)^2}dt$$

bo‘ladi va binomial integral quyidagi ratsional kasrli integralga keladi:

$$I(r,s,p)=-\frac{ma^n}{s}\int\frac{t^{k+m-1}}{(t^m-b)^{n-1}}dt\ .$$

❖ $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}})dx$ ko‘rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bunda R orqali unga kiruvchi x, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ o‘zgaruvchilarga nisbatan faqat ratsional amallar bajarilishi ifodalangan va m, n, ..., r, s –natural sonlardir. Bu integralni hisoblash uchun unda qatnashuvchi kasr daraja ko‘rsatkichlarining k umumiy maxrajini topamiz va $x=t^k\,,dx=kt^{k-1}dt$ almashtirma bajaramiz. Bu holda x, $x^{m/n}$,..., $x^{r/s}$ kasr ko‘rsatkichli darajalar yangi t o‘zgaruvchining butun darajalari orqali ifodalanadi va natijada $I=\int R_1(t)dt$ ratsional kasrli integralni hosil etamiz. Bu integralni hisoblab va olingan natijada $t=x^{1/n}$ deb, berilgan aniqmas integralni topamiz.

Misol sifatida

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$$

irratsional ifodali integralni hisoblaymiz.

Integral ostidagi x o‘zgaruvchining daraja ko‘rsatkichlari 1/2 va 1/3 kasrlardan iborat bo‘lib, ularning umumiy maxraji 6 bo‘lgani uchun $x=t^6$, $dx=6t^5dt$ almashtirma bajaramiz. Natijada berilgan integralni quyidagicha hisoblaymiz:

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{(t^3+1-1)dt}{t+1}=6\int(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt=$$

$$=6[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{d(t+1)}{t+1}]=6[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|]+C=(t=\sqrt[6]{x})=$$

$$=6[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln|1+\sqrt[6]{x}|]+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+C\,.$$

❖ $I=\int R\left[x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz By yerda R, m, n, s, r uchun oldingi integralda qo‘yilgan shartlar saqlanadi. Kasrdagi a,b,c va d haqiqiy sonlar uchun $a/b\neq c/d$ shartni qo‘yamiz, chunki bu shart bajarilmasa

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b}{d}\cdot\frac{\frac{a}{b}x+1}{\frac{c}{d}x+d}=\frac{b}{d}$$

bo‘ladi va integraldagi irratsionallik yo‘qoladi.

Agar m/n, … , r/s kasrlarning umumiy maxraji k bo‘lsa, bu integralni hisoblash uchun

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\kappa}, \quad t=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirma bajaramiz. Bu holda

$$x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, \quad dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt,$$

ya’ni x va dx yangi t o‘zgaruvchi orqali ratsional ifodalanadi. Shu sababli yuqoridagi almashtirma natijasida berilgan integral uchun $I=\int R_1(t)dt$ ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz. Bu integralni hisoblab va hosil bo‘lgan natijada t o‘rniga uning yuqoridagi ifodasini qo‘yib, berilgan I integral javobini topamiz.

Misol sifatida ushbu integralni hisoblaymiz:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}.$$

Bu yerda a =–2, b = 1, c =0 , d =1 va 1/2, 1/4 kasrlarning umumiy maxraji 4 ekanligini nazarga olib,

$$1-2x=t^4, \quad x=(1-t^4)/2, \quad dx=-2t^3dt, \quad t=\sqrt[4]{1-2x}$$

almashtirma bajaramiz. Natijada berilgan integral quyidagi ko‘rinishga keltiriladi va hisoblanadi:

$$I=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=-2\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=-2[\int(t+1)dt+\int\frac{d(t-1)}{t-1}]=$$

$$=-2[\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+C=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=$$

$$=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

15.1. $\int\frac{x^4}{x^2+9}dx.$ **15.2.** $\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx.$

15.3. $\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$ **15.4.** $\int\frac{x-2}{x^3+2x^2}dx$

15.5. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

15.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

15.7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$

15.8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$

15.9. $\int \frac{x^3}{x-3}dx.$

15.10. $\int \frac{x^4}{x^2+25}dx.$

15.11. $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx.$

15.12. $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2}dx.$

15.13. $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx..$

15.14. $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx.$

15.15. $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx.$

15.16. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx.$

15.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}};.$

15.18. $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

15.19. $\int \sin 2x \cos 7x dx.$

15.20. $\int \cos 7x \cos 3x dx.$

15.21. $\int \sin 4x \sin 2x dx.$

15.22. $\int \sin 5x \cos 3x.$

15.23. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

15.24. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$

15.25. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

15.26. $\int \cos 4x \cos 2x dx.$

15.27. $\int \sin x \sin 3x dx..$

15.28. $\int \sin^2 5x dx.$

15.29. $\int \sin^4 x dx.$

15.30. $\int \cos^4 x dx.$

16-MAVZU. ANIQ INTEGRAL

Reja:

1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar.
2. Aniq integralning ta’rifi va mavjudlik sharti.
3. Aniq integralning xossalari.

Tayanch iboralar: integral yig‘indi, aniq integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash o‘zgaruvchisi, quyi chegara, yuqori chegara, integrallanuvchi funksiya, integralning geometrik ma’nosi, integralning mexanik ma’nosi, integralning iqtisodiy ma’nosi, funksiyaning o‘rta qiymati.

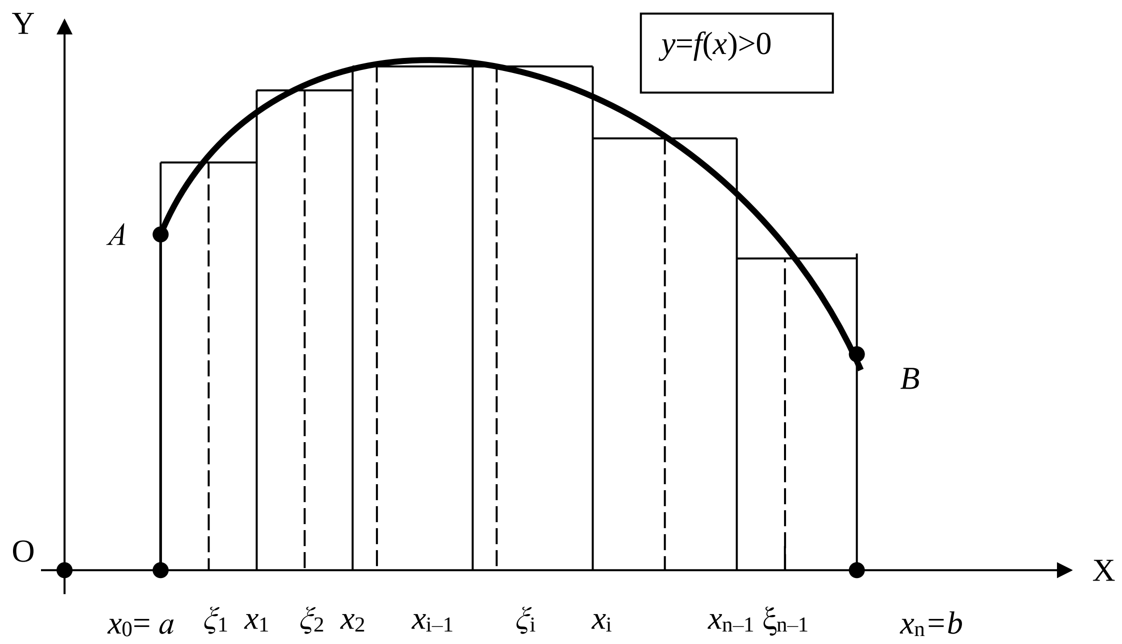
16.1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar.

Bir qator matematik, fizik, mexanik va iqtisodiy masalalarni yechish uchun aniq integral tushunchasi juda katta ahamiyatga ega. Bu tushunchani kiritishdan oldin unga olib keladigan ayrim masalalarni qaraymiz.

Egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasi. Turli geometrik shakllarning yuzalarini topish masalasi matematikaning eng qadimgi masalalaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Qadimgi Vavilon va Misrda ko‘pburchaklarning yuzalarini hisoblay olganlar. Buyuk yunon olimi Arximed (miloddan oldingi 287-212 y.) parabola segmentining yuzasini hisoblashni bilgan.O‘rta Osiyolik yurtdoshlarimiz Beruniy va Al-Xorazmiy doira va doiraviy sektor yuzalarini topa olganlar. Ammo bu geometrik shaklarning yuzalari o‘ziga xos usullarda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy geometrik shaklning yuzasini hisoblashga imkon beradigan umumiy usul ma’lum emas edi. Differensial va integral hisob yaratilgach bu masala geometrik shakllarning nisbatan keng sinfi uchun o‘z yechimini topdi.

1-Ta’rif: Berilgan $y=f(x)$ uzluksiz funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda OX o‘qi bilan chegaralangan geometrik shakl ***egri chiziqli trapetsiya*** deb ataladi.

Quyidagi 16.1.1-chizmada ko‘rsatilgan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini topish masalasini qaraymiz.



16.1.1-chizma

Buning uchun dastlab *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning asosini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ bo‘lgan ixtiyoriy $n-1$ ta nuqta yordamida bo‘laklarga ajratamiz. Bu nuqtalarga $a=x_0$ va $b=x_n$ nuqtalarni birlashtirsak, $[a,b]$ kesma ular orqali

$$[x_0, x_1]\,, \quad [x_1, x_2]\,, \quad \ldots\,, \quad [x_{i-1}, x_i]\,, \quad \ldots.\,, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

n ta kichik kesmachalarga bo‘linadi.

So‘ngra x_i, $i=1,2, \ldots, n-1$ bo‘linish nuqtalaridan OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tqazib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga (yuqoridagi 69-rasmga qarang) ajratamiz. Ravshanki *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shu sababli, agar asosi $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,3,\ldots, n)$ bo‘lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalarini ΔS_i kabi belgilansa, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (16.1)$$

Bu yerda ΔS_i $(i=1,2, \ldots , n)$ ham egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari bo‘lgani uchun ularning aniq qiymatlarini topa olmaymiz. Bu yuzalarning taqribiy qiymatini aniqlash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2, \ldots , n)$ kesmalarning har biridan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda AB egri chiziqni ifodalovchi $y=f(x)>0$

funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Endi har bir ΔS_i (i=1,2, ... , n) yuzalarni asoslari $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ va balandliklari $h_i= f(\xi_i)>0$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzalari bilan almashtirib, quyidagi taqribiy tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\Delta S_1 \approx f(\xi_1)\Delta x_1\ ,\ \Delta S_2 \approx f(\xi_2)\Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i\ ,\ \ldots,\ \Delta S_n \approx f(\xi_n)\Delta x_n\ .$$

Bu taqribiy tengliklarni (16.1) yig‘indiga qo‘yib, berilgan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning izlanayotgan S yuzasi uchun ushbu taqribiy tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (16.2)$$

(16.2) taqribiy tenglikning geometrik ma’nosi shundan iboratki, biz hozircha hisoblay olmaydigan egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi to‘g‘ri to‘rtburchaklardan hosil qilingan pog‘onasimon shakl yuzasi bilan almashtirildi. Bunda bo‘laklar soni n qanchalik katta qilib olinsa, pog‘onasimon shaklning yuzasi egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini shunchalik darajada aniqroq ifodalaydi. Bu mulohazadan izlanayotgan S yuzaning aniq qiymati

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (16.3)$$

limit bilan aniqlanishi mumkinligini ko‘ramiz.

• ***O‘zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash masalasi***. Yo‘nalishi va kattaligi o‘zgarmas bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. Bunda kuch yo‘nalishi bilan moddiy nuqtaning harakat yo‘nalishi bir xil deb olamiz. Agar bu shartlarda kattaligi f bo‘lgan kuch ta’sirida moddiy nuqta L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab a nuqtadan b nuqtaga ko‘chirilsa, ya’ni $b-a$ masofaga siljigan bo‘lsa, unda bajarilgan ish $A=f\cdot(b-a)$ formula bilan aniqlanishi bizga maktab fizika kursidan ma’lum.

Endi yuqoridagi shartlardan kuch kattaligi o‘zgarmas degan shartdan voz kechib, u harakatning har bir x nuqtasida biror uzluksiz $f(x)$ funksiya bo‘yicha o‘zgarib boradigan umumiyroq holni qaraymiz. Bu holda kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan A ishni hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun moddiy nuqtani bosib o‘tgan yo‘lini ifodalovchi $[a,b]$ kesmani oldingi masaladagi singari n ta bo‘laklarga ajratib, har bir $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1,2, ... , n) kichik kesmada o‘zgaruvchi kuchning bajargan ishini

ΔA_i deb belgilaymiz. Bu holda $[a, b]$ kesmada bajarilgan umumiy A ish qiymatini

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad (16.4)$$

yig'indi ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda ham ΔA_i ishning aniq qiymatini hisoblay olmaymiz. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning har biridan ixtiyoriy ξ_I nuqtani tanlab olamiz va unda kuchning $f(\xi_i)$ qiymatini hisoblaymiz. Uzunligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bo'lgan bu kichik kesmada kuch kattaligi o'zgarmas va $f(\xi_i)$ deb hisoblab, ushbu taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\cdot \Delta x_1$, $\Delta A_2 \approx f(\xi_2)\cdot \Delta x_2$,…, $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, …, $\Delta A_n \approx f(\xi_n)\cdot \Delta x_n$.

Bularni (16.4) yig'indiga qo'yib, izlanayotgan A ishning taqribiy qiymatini topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (16.5)$$

Bu yerda ham $[x_{i-1}, x_i]$ bo'laklar soni n oshib borgan sari (16.5) taqribiy tenglik xatoligi tobora kamayib boradi deb kutish mumkin. Shu sababli A ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (16.6)$$

limit orqali ifodalanadi.

- ***Mahsulot hajmini topish masalasi.*** Agar ish kuni davomida mehnat unumdorligi o'zgarmas, ya'ni ixtiyoriy t vaqtda uning kattaligi f bo'lsa, unda (T_1,T_2) vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $V=f\cdot(T_2-T_1)$ formula bilan hisoblanadi. Masalan, sozlangan avtomatik qurilma uchun bu holni o'rinli deb olish mumkin.

Ammo ishchining mehnat unumdorligi to'g'risida bunday deb bo'lmaydi. Masalan, ish kunining boshlang'ich davrida (ishga ko'nikish) uning mehnat unumdorligi ma'lum bir vaqtgacha o'sib boradi. So'ngra, ishga kirishib ketgandan keyin, ma'lum bir vaqt oralig'ida bir xil unumdorlik bilan mahsulot ishlab chiqaradi. Ish kuni oxiriga yaqinlashgan sari, charchash tufayli, mehnat unumdorligi pasayib boradi. Shunday qilib mehnat unumdorligi o'zgaruvchan va t vaqtga bog'liq ravishda biror uzluksiz $f(t)$ funksiya orqali aniqlangan bo'ladi. Bu holda (T_1,T_2) vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi V uchun yuqoridagi formula o‘rinli bo‘lmasligi ravshandir va uni topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala ham oldingi masalalardagi mulohazalar asosida quyidagicha yechiladi. (T_1,T_2) vaqt oralig‘ini ixtiyoriy ravishda tanlangan

$$T_1=t_0< t_1< t_2< \cdots t_i<\cdots t_{n-1}< t_n=T_2$$

nuqtalar bilan n ta (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots , n)$ vaqt oraliqchalariga bo‘laklaymiz. Bu vaqt oraliqchalarida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ΔV_i $(i=1,2,3, \cdots , n)$ deb belgilasak, unda butun vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \qquad (16.7)$$

yig‘indi kabi ifodalanadi. Bu yig‘indidagi qo‘shiluvchilarning taqribiy qiymatlarini topish maqsadida (t_{i-1}, t_i) $(i=1,2,3, \cdots , n)$ vaqt oraliqchalaridan ixtiyoriy bir ξ_i vaqtni tanlab olamiz va unda $f(\xi_i)$ mehnat unumdorligini aniqlaymiz. Kichkina (t_{i-1}, t_i) oraliqda uzluksiz $f(t)$ funksiya o‘z qiymatini unchalik ko‘p o‘zgartira olmaydi va shu sababli bu yerda mehnat unumdorligini o‘zgarmas va uning qiymati $f(\xi_i)$ deb olishimiz mumkin. Shu sababli $\Delta t_i= t_i- t_{i-1}$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi uchun

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i\,, \quad i=1,2,3, \cdots , n,$$

taqribiy tengliklarni yozish mumkin. Bu taqribiy tengliklarni (16.7) yig‘indiga qo‘yib,

$$V\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (16.8)$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu holda mahsulot hajmining aniq qiymati

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \qquad (16.9)$$

limit orqali topiladi.

Yuqoridagi geometrik, fizik va iqtisodiy mazmunli uchta turli masala bir xil matematik usulda o‘z yechimini topib, (16.3), (16.6) va (16.9) ko‘rinishdagi bir xil limit orqali ifodalandi. Shu sababli bu usul va limitni umumiy holda qarash ma’noga egadir.

16.2. Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik sharti.

Berilgan $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmani ixtiyoriy

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

bo'linish nuqtalari yordamida n ta

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

kichik kesmachalarga ajratamiz. Hosil bo'lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) kichik kesmachalardan ixtiyoriy bir ξ_i nuqtani tanlaymiz. Tanlangan ξ_i nuqtalarda berilgan $f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) qiymatlarini va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarning $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) uzunliklarini hisoblaymiz. Bu qiymatlaridan foydalanib ushbu yig'indini tuzamiz:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{16.10}$$

2-Ta'rif: (16.10) tenglik bilan aniqlanadigan $S_n(f)$ yig'indi $y=f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo'yicha ***integral yig'indi*** deb ataladi.

$S_n(f)$ integral yig'indi ta'rifidan ko'rinadiki uning qiymati $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalar uzunligi Δx_i, ularning soni n va tanlangan ξ_i nuqtalarga bog'liq bo'ladi. $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

3-Ta'rif: Agar $S_n(f)$ integral yig'indilar ketma-ketligi $n\to\infty$ va $\Delta_n\to 0$ bo'lganda x_i bo'linish nuqtalari hamda $[x_{i-1}, x_i]$ kichik kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan biror chekli $S(f)$ limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati $S(f)$ berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan ***aniq integral*** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan quyidagicha aniqlanadi :

$$\int\limits_a^b f(x)dx=S(f)=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(f)=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \tag{16.11}$$

Bu yerda a – aniq integralning ***quyi chegarasi***, b – ***yuqori chegarasi***, $[a, b]$ –integrallash kesmasi, x–integrallash o'zgaruvchisi,

$f(x)$ – ***integral ostidagi funksiya***, $f(x)dx$ – ***integral ostidagi ifoda*** deyiladi.

4-Ta'rif: Agar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo'yicha olingan aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo'lsa, unda $f(x)$ bu kesmada ***integrallanuvchi funksiya*** deb ataladi.

Izoh: Aniq integralning yuqorida keltirilgan ta'rifi olmoniyalik buyuk matematik Riman (1826–1866 y.) tomonidan taklif etilgan va shu sababli Riman integrali deb yuritiladi. Bundan tashqari aniq integralning Koshi, mashhur farang matematigi Lebeg (1875–1941 y.) va niderlandiyalik matematik Stilt'yes (1856–1894 y.) tomonlaridan kiritilgan ta'riflari ham mavjud va keng qo'llaniladi.

Oldin ko'rilgan masalalarga qaytsak, (16.3) va (16.11) tengliklarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

(16.6) va (16.11) tengliklarga asosan o'zgaruvchi kuch bajargan ish

$$A=\int_a^b f(x)dx,$$

(16.9) va (16.11) tengliklarga asosan ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\int_a^b f(t)dt$$

aniq integrallar orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Bu tengliklarni aniq integralning geometrik, mexanik va iqtisodiy ma'nolari deb olishimiz mumkin.

Aniq integral ta'rifidan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun ancha og'ir shartlarni qanoatlantirishi kerak. Haqiqatan ham, qaralayotgan $[a,b]$ kesmani bo'linish nuqtalari x_i (i=1,2, ⋯, n) va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalardan tanlanadigan ξ_i nuqtalar qanday bo'lmasin aniq integralni ifodalovchi (16.11) limit qiymati $S(f)$ bir xil bo'lishi kerak. Bu esa har qanday funksiya uchun bajarilavermaydi. Masalan, [0,1] kesmada aniqlangan D(x) Dirixle funksiyasi uchun integral yig'indini qaraymiz. Agar $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan olinadigan ξ_i nuqtalar ratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=1$ va integral yig'indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1-0=1\ ;$$

agar ξ_i nuqtalar irratsional sonlarni ifodalasa, unda $D(\xi_i)=0$ va integral yig‘indi

$$S_n(D)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0$$

bo‘ladi. Bu yerdan ko‘rinadiki, $n\to\infty$ bo‘lganda $S_n(f)$ integral yig‘indi limitining qiymati ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq. Bundan esa $D(x)$ funksiya [0,1] kesmada integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi.

Shu sababli (16.11) limitni, ya’ni $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaysi shartda mavjud bo‘lishini aniqlashimiz kerak. Bu savolga javob isbotsiz beriladigan ushbu teoremalarda keltiriladi.

1-Teorema: Berilgan $[a,b]$ kesmada chegaralangan va unda chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

Natija: Berilgan $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

Haqiqatan ham, Veyershtrass teoremasiga asosan $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo‘lib, oldingi teorema shartlarini qanoatlantiradi va shu sababli bu kesmada integrallanuvchidir.

Bu tasdiqlardan funksiyalarning nisbatan keng sinfi uchun ularning aniq integrallari mavjud ekanligini ko‘ramiz. Aniq integrallarning qiymatini topish (integralni hisoblash) masalasini kelgusiga qoldirib, bu masalani yechish uchun kerak bo‘ladigan aniq integralning xossalari bilan tanishamiz.

16.3. Aniq integralning xossalari.

Avvalo yuqorida ko‘rib o‘tilgan aniq integral ta’rifiga ikkita qo‘shimcha kiritamiz.

Aqar aniq integralda quyi a va yuqori b chegaralar ($a<b$) o‘rni almashsa, unda

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \qquad (16.12)$$

tenglik o‘rinli deb qabul etamiz. Bunday qarorni quyidagicha tushuntirish mumkin. (16.12) tenglikning chap tomonidagi integralda x integrallash o‘zgaruvchisi OX o‘qda $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga qarab o‘sadi va shu sababli $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$ bo‘ladi. O‘ng tomondagi integralda esa aksincha bo‘lib, x integrallash o‘zgaruvchisi $x=b$ nuqtadan $x=a$ nuqtaga qarab kamayib boradi va unda $\delta x_i = x_{i-1} - x_i = -\Delta x_i < 0$ bo‘ladi. Demak, (16.12) tenglikdagi integrallar uchun ularning integral yig‘indilari faqat ishoralari bilan farq qiladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan, (12) tenglikni qabul etish mumkinligini ko‘ramiz.

(16.12) tenglikdan

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{16.13}$$

deb qabul qilishimiz mumkinligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham bu holda

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \Rightarrow 2\int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Izoh: Aniq integral ta’rifini ifodalovchi (16.11) tenglikdan ko‘rinadiki, uning qiymati biror sondan iborat bo‘ladi. Bu son faqat integral ostidagi $f(x)$ funksiya va $[a,b]$ integrallash kesmasiga bog‘liq bo‘lib, integrallash o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas. Shu sababli aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini har xil belgilash mumkin, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \cdots \quad .$$

I xossa: Aniq integralda o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni k o‘zgarmas son bo‘lsa,unda

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \tag{16.14}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Aniq integral ta’rifi va limit xossasiga asosan

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\Delta x_i = k \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx \ .$$

II xossa: Ikki yoki undan ortiq funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \qquad (16.15)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bunda tenglikning o‘ng tomonidagi aniq integrallar mavjud deb hisoblanadi.

Isbot: Aniq integral ta’rifi va limit xossasiga asosan

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_m(x)]dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) \pm f_2(\xi_i) \pm \cdots \pm f_m(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \pm \cdots \pm \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f_m(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_m(x)dx \quad .$$

III xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ va integrallanuvchi bo‘lsa, unda uning aniq integrali uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (16.16)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu holda integral yig‘indida $f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i > 0$ ($i=1,2,3,\cdots, n$) bo‘lgani uchun va aniq integral ta’rifi hamda limit xossasiga asosan

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n \to 0}} S_n(f) \geq 0,$$

ya’ni (16) tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

IV xossa: Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar integrallanuvchi hamda $f(x) \leq g(x)$ bo‘lsa, unda ularning aniq integrallari uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (16.17)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: II xossaga asosan $h(x)=g(x)-f(x)$ funksiya berilgan $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Bundan tashqari $f(x) \leq g(x)$ shartdan $h(x) \geq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Unda, IV va II xossalardan foydalanib, (16.17) tengsizlikka quyidagicha erishamiz:

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0 \Rightarrow$$

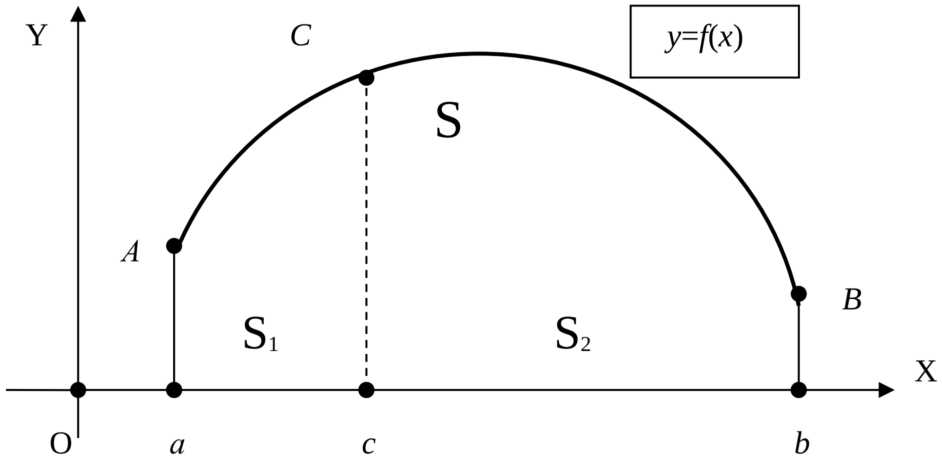
$$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad .$$

V xossa: Agar $a<c<b$ va $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo‘lsa, unda u $[a,b]$ kesmada ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (16.18)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu xossani qat’iy matematik isbotini keltirmasdan, uni integralning geometrik mazmuniga asoslangan (16.3.1-chizmaga qarang) talqinini keltirish bilan chegaralanamiz.



16.3.1-chizma

(16.18) tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan *aACc* egri chiziqli trapetsiyaning S_1 yuzasini, ikkinchi integral *cCBb* egri chiziqli trapetsiyaning S_2 yuzasini ifodalaydi. (16.18) tenglikning chap tomondagi integral esa $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasini ifodalaydi. Bu yerda $S=S_1+S_2$ tenglik o‘rinli va uni integrallar orqali ifodalab, (16.18) tenglikni hosil etamiz.

Izoh: III xossani ifodalovchi (18) tenglik $c<a$ va $c>b$ holda ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, $c>b$ holda $a<b<c$ bo‘lgani uchun (16.18) tenglik yuqoridagi mulohazalar va (16.12) tenglikka asosan quyidagicha keltirib chiqariladi:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

VI xossa: Har qanday $[a,b]$ kesmada o‘zgarmas $f(x)=1$ funksiya integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b-a \qquad (16.19)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Bu holda integral yig‘indida $f(\xi_i)=1$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ ($i=1,2,3,\cdots$, n), $x_0=a$ va $x_n=b$ bo‘lgani uchun

$$S_n(1)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1}) = x_n - x_0 = b-a.$$

Bu yerdan integral ta’rifi va limit xossasidan (19) tenglik kelib chiqadi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} S_n(1) = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} (b-a) = b-a.$$

Izoh: Integralning geometrik ma’nosiga ko‘ra (16.19) tenglikdagi aniq integral asosi $[a,b]$ kesmadan iborat va balandligi $f(x)=1$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasini ifodalaydi va bu yuza $S=1\cdot(b-a)= b-a$ ekanligidan ham (16.19) tenglikka ishonch hosil etish mumkin.

VII xossa: Agar $[a,b]$ kesmada ($a<b$) integrallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo‘lsa, unda aniq integral uchun

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (16.20)$$

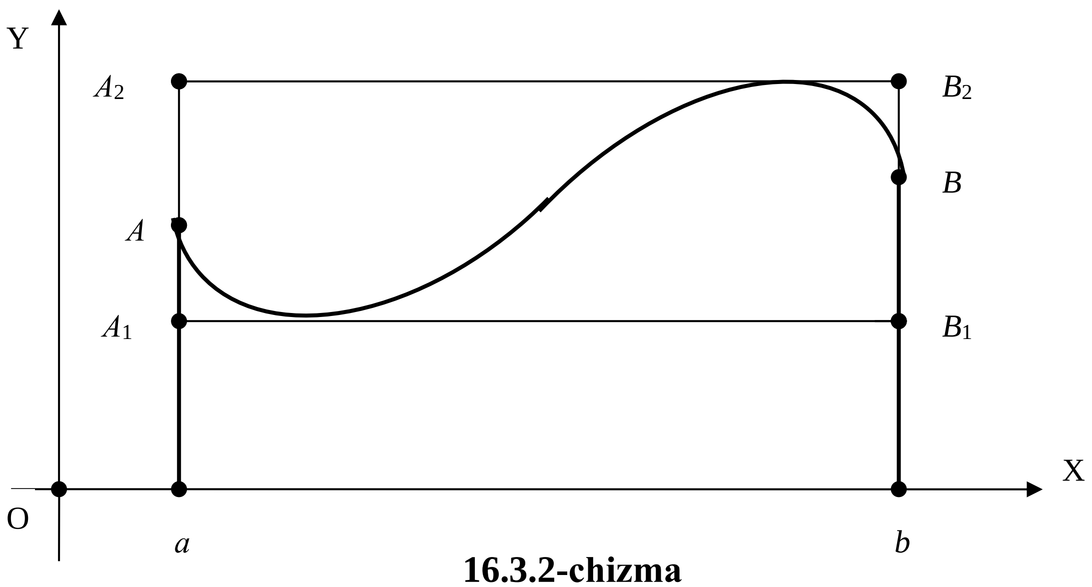
qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Shartga asosan $[a,b]$ kesmada $m\le f(x)\le M$ bo‘lgani uchun IV xossa va (16.19) tenglikdan hamda I xossadan foydalanib, quyidagilarni olamiz:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \Rightarrow m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Bu xossaning geometrik ma’nosi shundan iboratki (16.3.2-chizmaga qarang), $[a,b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiya grafigi orqali hosil qilingan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi asoslari $b-a$, balandliklari esa mos ravishda m va M bo‘lgan aA_1B_1b va aA_2B_2b to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalari orasida joylashgan bo‘ladi .



16.3.2-chizma

VIII xossa: Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi va quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \tag{16.21}$$

Isbot: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ qo‘sh tengsizlikni hadlab integrallab, bu tasdiqqa quyidagicha erishamiz:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\ .$$

IX xossa (O‘rta qiymat haqidagi teorema): Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday ξ nuqta mavjudki, unda

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \tag{16.22}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Berilgan $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun, Veyershtrass teoremasiga asosan, u bu kesmada o‘zining eng kichik m va eng katta M qiymatlarini qabul etadi. Shu sababli bu funksiya uchun VII xossani ifodalovchi (16.20) qo‘sh tengsizlik o‘rinli va uni quyidagicha yozish mumkin:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M\ .$$

Bu qo‘sh tengsizlik orasida turgan sonni μ deb belgilasak, unda kesmada uzluksiz funksiya xossasiga asosan, $[a,b]$ kesmada shunday ξ

nuqta mavjudki, unda $f(\xi)=\mu$ bo‘ladi. Bu yerdan, belgilashimizga asosan,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\mu=f(\xi)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

ekanligi kelib chiqadi.

5-Ta'rif: (16.22) tenglik orqali aniqlanadigan

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

soni $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***o‘rta qiymati*** deb ataladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

16.1. $\int_1^4 x^2dx$.

16.2. $\int_2^4 (x^3+x)\,dx$.

16.3. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$.

16.4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$.

16.5. $\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

16.6. $\int_{-5}^2 \frac{dx}{x^2+4x-21}$.

16.7. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

16.8. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

16.9. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$

16.10. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

16.11. $\int_\pi^0 x\cos x\,dx$.

16.12. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

16.13. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

16.14. $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$.

16.15. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

16.16. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$

16.17. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}dx$.

16.18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

16.19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$.

16.20. $\int_0^a \left(x^2-ax\right)dx$.

16.21. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

16.22. $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x^2}$.

16.23. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

16.24. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

16.25. $\int_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

16.26. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

16.27. $\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$.

16.28. $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$.

16.29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

16.30. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x\,dx$.

17-MAVZU. ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH

Reja:

1. Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash.
2. Nyuton – Leybnits formulasi.
3. Bo‘laklab integrallash usuli.
4. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli.
5. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash.

Tayanch iboralar: yuqori chegarasi o‘zgaruvchan integral, Nyuton-Leybnits formulasi, bo‘laklab integrallash formulasi, o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli, kvadratur formulalar, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi, trapetsiyalar formulasi.

17.1. Aniq integralni ta’rif bo‘yicha hisoblash.

Biz aniq integral ta’rifi va asosiy xossalarini o‘rgangan bo‘lsak ham, ammo hozircha faqat bitta $f(x)=1$ o‘zgarmas funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral qiymatini bilamiz xolos. Bu yo‘nalishda yana bir misol sifatida $f(x)=x$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan

$$I=\int_a^b x dx$$

aniq integralni uning ta’rifidan foydalanib hisoblaymiz. $f(x)=x$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun u integrallanuvchi, ya’ni I aniq integral mavjud. Unda, ta’rifga asosan, $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda kichik $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga bo‘laklab va ulardan istalgan ξ_i nuqtalarni tanlab,

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_i-x_{i-1})$$

integral yig‘indini hosil etib, uning $n\to\infty$, $\max\Delta x_i\to 0$ bo‘lgandagi limitini topsak, bu limit qiymati doimo bir xil bo‘ladi va I integral qiymatini ifodalaydi. Shu sababli biz $[a,b]$ kesmani o‘zaro teng bo‘lgan n bo‘lakka ajratamiz. Bu holda hosil bo‘lgan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachaning uzunligi bir xil va $\Delta x_i=h=(b-a)/n$, ularning chegaralari esa $x_i=a+ih$, $i=0,1,2,\cdots, n-1, n$ kabi aniqlanadi.Har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan ξ_i nuqta sifatida uning chap chegarasini, ya’ni $\xi_i=x_{i-1}$

(i=1,2,⋯, n) deb olamiz. Bu holda integral yig'indi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i=h\sum_{i=1}^{n}\xi_i=h\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)h]=h[\sum_{i=1}^{n}a+h\sum_{i=1}^{n}(i-1)]=$$

$$=h[na+h\frac{n(n-1)}{2}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n-1}{2}]\ .$$

Bu yerdan, aniq integral ta'rifi va limit xossalariga asosan,

$$I=\lim_{n\to\infty}S_n(f)=\lim_{n\to\infty}(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}]=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}]=$$

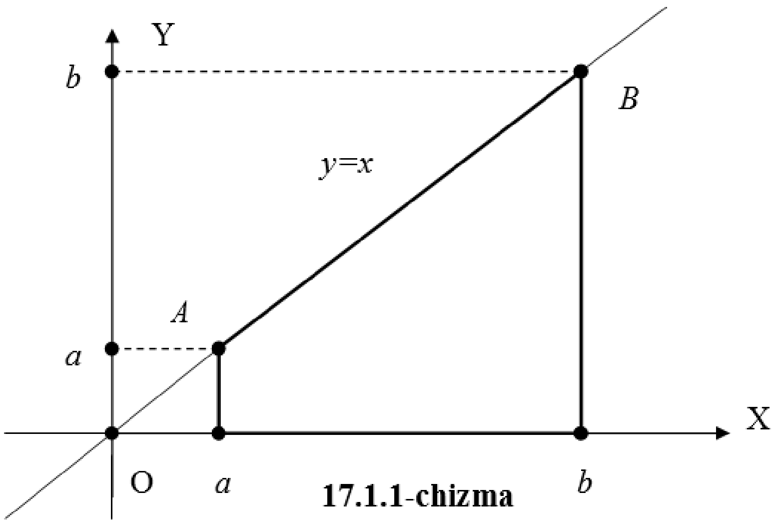
$$=(b-a)[a+\frac{b-a}{2}\cdot 1]=(b-a)\cdot\frac{b+a}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

natijani olamiz. Demak,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2} \qquad (17.1)$$

Bu natijaga aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib ham kelish mumkin. Haqiqatan ham, (17.1) aniq integral $y=x$, $x=a$, $x=b$ va y=0 chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ trapetsiya (17.1.1-chizmaga qarang) yuzini ifodalaydi. Chizmadan ko'rinadiki, bu trapetsiyaning balandligi $H=b–a$, asoslari esa a va b. Shu sababli

$$I=\int_a^b xdx=S_{aABb}=\frac{a+b}{2}H=\frac{a+b}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2}\ .$$



17.1.1-chizma

17.2. Nyuton – Leybnits formulasi.

Oldingi natijalardan ko'rinadiki, aniq integralni uning ta'rifi, ya'ni integral yig'indining limiti orqali topish masalasi hatto oddiy $y=x$ funksiya misolida ancha qiyinchilik bilan yechiladi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning qulayroq, osonroq usulini topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala integral hisobning asosiy formulasi bo‘lmish Nyuton – Leybnits formulasi orqali o‘z yechimini topadi. $y=f(x)$ biror $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsin. Unda $y=f(x)$ bu $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya bo‘ladi. Bu yerdan ixtiyoriy $x\in[a,b]$ uchun

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \tag{17.2}$$

aniq integral mavjud ekanligi kelib chiqadi. Bunda quyi chegara a o‘zgarmas, yuqori chegara x esa o‘zgaruvchi deb qaralsa, unda (17.2) tenglik $[a,b]$ kesmada aniqlangan biror $\Phi(x)$ funksiyani ifodalaydi va ***yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral*** deb ataladi. Bu funksiya differensial va integral hisob orasidagi chuqur bog‘lanishni ifodalovchi quyidagi muhim xususiyatga ega.

1-Teorema: Agar (17.1) tenglikda $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa , unda $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi va

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x) \tag{17.3}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: $\Phi(x)$ funksiya differensiallanuvchi ekanligini va uning hosilasini ta’rif bo‘yicha topamiz. Buning uchun uning x argumentiga Δx orttirma berib va, aniq integralning oldin ko‘rib o‘tilgan V xossasidan foydalanib, $\Delta\Phi(x)$ funksiya orttirmasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Bu tenglikni, aniq integralning oldin ko‘rsatilgan o‘rta qiymati haqidagi xossasiga asosan,

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x,\ \ \xi\in[x,\, x+\Delta x]$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerdan, hosila ta’rifi va $f(x)$ funksiya uzluksizligiga asosan,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$$

natijani, ya’ni isbotlanishi kerak bo‘lgan (17.3) tenglikni hosil qilamiz. Bu natijani olishda $\xi \in [x, x+\Delta x]$ bo‘lgani uchun $\Delta x \to 0$ holda $\xi \to x$ bo‘lishidan foydalanildi.

***Izoh*:** Bu teoremadan (17.2) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(x)$ berilgan uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud va uni (17.2) formula orqali topish mumkin ekan.

2-Teorema: Agar $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (17.4)$$

tenglik o‘rinlidir.

Isbot: $F(x)$ uzluksiz $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Oldingi teoremaga asosan (17.2) tenglik bilan aniqlangan $\Phi(x)$ funksiya ham $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Bizga ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning har qanday ikkita boshlang‘ich funksiyalari bir-biridan faqat biror C o‘zgarmas qo‘shiluvchi bilan farq qiladi, ya’ni

$$\Phi(x) = F(x) + C \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Bu tenglikda $x=a$ deb va $\int_a^a f(x)dx = 0$ ekanligidan foydalanib, $C=-F(a)$ ekanligini aniqlaymiz. Bu natijani oldingi tenglikka qo‘yib, ushbu formulaga kelamiz:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Oxirgi tenglikda $x=b$ desak,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formulada t integrallash o‘zgaruvchisini x bilan almashtirib (aniq integralda integrallash o‘zgaruvchisini ixtiyoriy tarzda belgilash mumkinligini eslatib o‘tamiz), isbotlanishi kerak bo‘lgan (17.4) formulani hosil qilamiz.

Izoh: (17.4) formulada $F(x)$ sifatida $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy bir boshlang‘ich funksiyasini olish mumkin. Bunga sabab shuki, $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy ikkita $F_1(x)$ va $F_2(x)$ boshlang‘ich funksiyalari bir – biridan faqat biror C o‘zgarmas son bilan farqlanadi va $F_1(b)–F_1(a)= F_2(b)–F_2(a)$ bo‘ladi.

1-Ta’rif: (17.4) tenglik aniq integralni hisoblashning ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Aniqmas va aniq integral tushunchalari bir-biriga bog‘liqmas ravishda kiritilgan edi. Aniqmas integral $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari sinfi singari , aniq integral esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indilarining limiti singari kiritilganligini eslatamiz. Ammo bu ikkala tushuncha orasida chambarchas bog‘lanish mavjudligi va ularning ikkalasi ham “integral” deb atalishi bejiz emasligini ko‘rsatish uchun Nyuton – Leybnits formulasini shartli ravishda quyidagicha yozamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)+C]\Big|_a^b = \int f(x)dx\,\Big|_a^b \qquad (17.5)$$

Demak, aniq integralni Nyuton – Leybnits formulasi bo‘yicha hisoblash uchun dastlab uning chegaralarini “unutib”, uni aniqmas integral singari qaraymiz va hisoblaymiz. So‘ngra chegaralar borligini “eslab”, aniqmas integralni hisoblangan ifodasiga x o‘rniga yuqori chegara b va quyi chegara a qiymatlarini qo‘yamiz. Natijada hosil bo‘lgan sonlar ayirmasini olib, berilgan aniq integral qiymatini topamiz. Bunda aniqmas integral javobidagi ixtiyoriy C o‘zgarmas sonni hisobga olmasak ham bo‘ladi.

Misol sifatida, $f(x)=x^{\alpha}$ ($\alpha\neq-1$) darajali funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integralni (17.4) Nyuton – Leybnits formulasi yordamida hisoblaymiz:

$$\int_a^b x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ .$$

Bevosita ta’rif bo‘yicha hisoblangan (17.1) natija bu yerdan $\alpha=1$ bo‘lganda kelib chiqadi.

Shunday qilib, Nyuton – Leybnits formulasi orqali aniq integralni hisoblash masalasi bizga tanish bo‘lgan aniqmas integralni hisoblash masalasiga keltiriladi. Bunga yana bir nechta misol keltiramiz:

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}; \qquad \int_a^b e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b = \frac{e^{4b}-e^{4a}}{4};$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2};$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2-1=1.$$

17.3. Bo‘laklab integrallash usuli.

$u=u(x)$ va $v=v(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Bu holda $(uv)'=u'v+uv'$ ekanligidan uv funksiya $u'v+uv'$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘ladi. Shu sababli, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b [u'v+uv']dx = uv\Big|_a^b$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, aniq integralning II xossasi va $u'dx=du$, $v'dx=dv$ ekanligidan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (17.6)$$

2-Ta’rif: (17.6) tenglik aniq integralni ***bo‘laklab integrallash formulasi*** deb ataladi.

Bu yerdan ko‘rinadiki, aniq integralni bo‘laklab integrallash xuddi aniqmas integralga o‘xshash usulda amalga oshiriladi. Buni quyidagi misollarda ko‘ramiz:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \begin{bmatrix} u=x, & dv=\cos xdx \\ du=dx, & v=\sin x \end{bmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2};$$

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} u=\ln x, & dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=2\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2}\sqrt{x}\frac{dx}{x} =$$

$$= 4e - 4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4.$$

17.4. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli.

Berilgan uzluksiz $y=f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni ba’zi hollarda biror $x=\varphi(t)$ differensiallanuvchi funksiya orqali “eski” x o‘zgaruvchidan “yangi” t o‘zgaruvchiga o‘tish usulida hisoblash mumkin bo‘ladi. Bunda $\varphi(t)$ funksiya ***almashtirma*** deb ataladi va unga quyidagi shartlar qo‘yiladi:

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;
2. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar $t\in[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz ;
3. $f\ [\varphi(t)]$ murakkab funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz.

Bu shartlarda ushbu formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{17.7}$$

Isbot: $F(x)$ berilgan integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Unda, Nyuton – Leybnits formulasiga asosan,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerdan, integralni invariantlik xossasi va yuqoridagi 1 – 3 shartlardan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi(t) = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Oldingi va bu tenglikning o‘ng tomonlarini taqqoslab, (17.7) formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

3-Ta’rif: (17.7) tenglik aniq integralda ***o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi*** deb ataladi.

Ushbu aniq integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi yordamida hisoblaymiz.

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1}=t, & x=t^2-1, dx=2tdt \\ \alpha=\sqrt{0+1}=1, & \beta=\sqrt{3+1}=2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2(\frac{t^3}{3}-t)\Big|_1^2 = 2(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x=\sin t,\ dx=\cos tdt,\ 1-x^2=\cos^2 t \\ \alpha=\arcsin 0=0, \quad \beta=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

17.5. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash.

Yuqorida ko‘rib o‘tilgan usullarda $I=\int_a^b f(x)dx$ aniq integral qiymatini hisoblash masalasi integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning biror $F(x)$ boshlang‘ich funksiyani topish va uning qiymatlarini hisoblash masalasiga keltiriladi. Ammo ayrim aniq integrallar uchun bu usullarni qo‘llashda quyidagi muammolar paydo bo‘lishi mumkin:

1) $F(x)$ boshlang‘ich funksiyani topish murakkab;

2) $F(x)$ boshlang‘ich funksiya murakkab ko‘rinishda bo‘lib, uning $F(a)$ va $F(a)$ qiymatlarini hisoblash qiyinchilik tug‘diradi;

3) $F(x)$ boshlang‘ich funksiya elementar funksiyalarda ifodalanmaydi;

4) integral ostidagi $f(x)$ funksiya jadval ko‘rinishida berilgan.

Bunday hollarda aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblash masalasi paydo bo‘ladi. Bu masalani yechish uchun matematikada turli formulalar topilgan bo‘lib, ular umumiy holda ***kvadratur formulalar*** deb ataladi. Shu formulalardan eng soddalaridan ikkitasini qisqacha ko‘rib o‘tamiz.

I. *To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi.* Bu formulani keltirib chiqarish uchun dastlab $[a,b]$ kesmani uzunligi bir xil va $\Delta x=(b-a)/n$ bo‘lgan n ta $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalarga ($i=1, 2, \cdots, n$) ajratamiz. Bunda x_i bo‘linish nuqtalari

$$x_i = a + i\Delta x = a + \frac{b-a}{n}i, \quad i=0,1,2,\cdots,n \qquad (17.8)$$

formula bilan topiladi.

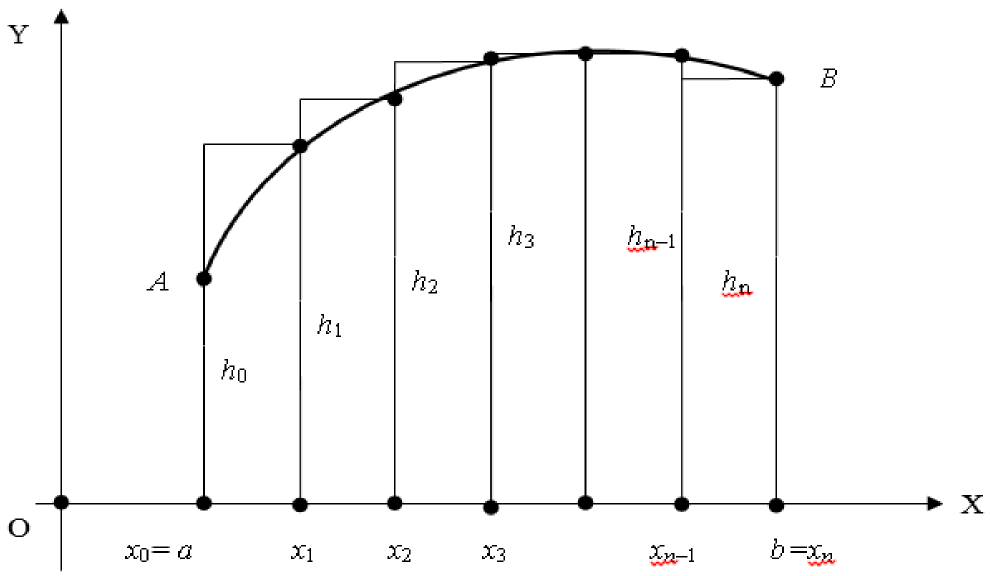
So‘ngra integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning x_i bo‘linish nuqtalaridagi $f(x_i)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) qiymatlarini hisoblaymiz. Bu qiymatlar va $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalar uzunligi Δx bo‘yicha

$$S_n(f)= f(x_1)\Delta x+ f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x+ \cdots + f(x_n)\Delta x$$

integral yig‘indini hosil qilamiz. Ta’rifga asosan I aniq integral $S_n(f)$ integral yig‘indilar ketma – ketligining $n\to\infty$ bo‘lgandagi limitiga teng. Shu sababli, n katta son bo‘lganda, $I\approx S_n(f)$ deb olish mumkin. Natijada ushbu taqribiy formulaga ega bo‘lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\cdot[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_n)]=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (17.9)$$

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)>0$ deb olsak, unda (17.9) taqribiy tenglikning o‘ng tomonidagi yig‘indi asoslari bir xil Δx uzunlikli $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan, balandliklari esa $h_i= f(x_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onasimon geometrik shaklning (74-rasmga qarang) yuzini ifodalaydi. Chap tomondagi aniq integral qiymati esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.



17.5.1-chizma

3-Ta’rif: Aniq integral uchun (17.9) taqribiy tenglik ***to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi*** deyiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta\le M_1\frac{(b-a)^2}{4n}, \quad M_1=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)| \qquad (17.10)$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi yordamida

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4} \qquad (17.11)$$

aniq integralning taqribiy qiymatini topamiz. Buning uchun [0,1] integrallash kesmasini $n=10$ teng bo‘lakka ajratamiz va hisoblashlar natijalarini quyidagi jadval ko‘rinishida ifodalaymiz.

i	$x_i=0.1i$	$1+x_i^2$	$f(x_i)=\dfrac{1}{1+x_i^2}$	$\sum_i f(x_i)$
1	0.1	1.01	0.9901	0.9901
2	0.2	1.02	0.9615	1.9516
3	0.3	1.09	0.9174	2.8690
4	0.4	1.16	0.8621	3.7311
5	0.5	1.25	0.8000	4.5311
6	0.6	1.36	0.7353	5.2664
7	0.7	1.49	0.6711	5.9375
8	0.8	1.64	0.6098	6.5473
9	0.9	1.81	0.5525	7.0998
10	1.0	2.0	0.5000	7.5998

Bizning misolda $\Delta x=(1–0)/10=0.1$ bo‘lgani uchun, (17.9) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1\cdot 7.5998 = 0.75998.$$

Bu taqribiy natijani xatoligini (17.10) formula bo‘yicha baholaymiz. Bizning misolda

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow |f'(x)|=\left|-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right| < \frac{2\cdot 1}{(1+0^2)^2}=2$$

va shu sababli (17.10) formulada $M_1=2$ deb olish mumkin. Bu holda

$$\Delta \le 2\cdot(1–0)^2/(4\cdot 10)=1/20=0.05$$

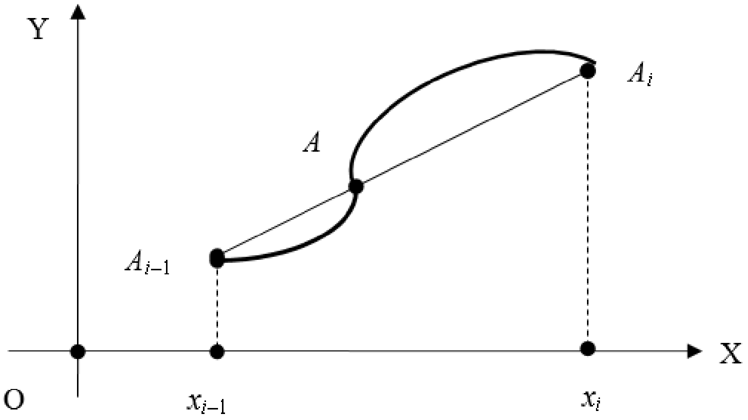
bo‘lgani uchun (17.11) aniq integralning qiymati

$$0.75998–0.05 < I < 0.75998+0.05 \;\; => 0.70998 < I < 0.80998$$

oraliqda yotadi. Bu natijani (17.11) integralning aniq qiymati $\pi/4\approx 0.7854$ bilan taqqoslab, yo‘l qo‘yilgan absolut xatolik $\Delta=0.0255$ ekanligini ko‘rishimiz mumkin. Shunday qilib, hatto unchalik katta bo‘lmagan $n=10$ holda ham (17.9) to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi ancha yaxshi natija berdi.

II. *Trapetsiyalar formulasi.* Soddalik uchun bu formulani I integral ostidagi funksiya $f(x)>0$ bo‘lgan holda qaraymiz.Bu yerda ham $[a,b]$ integrallash kesmasini (17.8) nuqtalar bilan bir xil Δx uzunlikli n

ta $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1, 2, ···, n) kesmachalarga bo‘laklaymiz. So‘ngra $y=f(x)$ funksiya grafigidagi $A_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ va $A_i(x_i, f(x_i))$ nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmasi (vatar) bilan tutashtirib, egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyani to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiya bilan (75-rasmga qarang) almashtiramiz.



17.5.2-chizma

Bu holda to‘g‘ri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}A_ix_i$ trapetsiyaning yuzi

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x \quad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

egri chiziqli $x_{i-1}A_{i-1}AA_ix_i$ trapetsiyaning yuziga taqriban teng deb olish mumkin. Unda bu yuzalarning yig‘indisi aniq integralning taqribiy qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right] \qquad (17.12)$$

taqribiy formula o‘rinli bo‘ladi.

4-Ta’rif: Aniq integral uchun (17.12) taqribiy tenglik ***trapetsiyalar formulasi*** deyiladi.

Trapetsiyalar formulasining absolut xatoligi

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2 \quad , \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)| \qquad (17.13)$$

formula bilan baholanadi.

Misol sifatida (17.11) aniq integralning taqribiy qiymatini n=10 bo‘lgan holda trapetsiyalar formulasi orqali hisoblaymiz. Oldingi hisoblash natijalaridan foydalanib,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.1\cdot\left[\frac{1+0.5}{2} + 7.0998\right] = 0.78498$$

taqribiy tenglikni hosil etamiz. Bunda hosil qilingan taqribiy natijaning absolyut xatoligi

$$\Delta=\pi/4–0.78498=0.7854–0.78498=0.0004$$

bo‘lib, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi absolut xatoligiga (unda Δ=0.0255 ekanligini eslatib o‘tamiz) qaraganda ancha kichikdir. Demak, trapetsiyalar formulasi to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasiga nisbatan aniqroq natija beradi. Buni ularning xatoliklarini ifodalovchi (17.10) va (17.13) formulalar orqali ham ko‘rish mumkin.

Ko‘rib o‘tilgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalariga nisbatan aniq integralning taqribiy qiymatini aniqroq hisoblashga imkon beradigan boshqa kvadratur formulalar ham mavjudligini ta’kidlab o‘tamiz. Masalan, ingliz matematigi Simpson tomonidan topilgan parabolalar formulasi, Chebishevning kvadratur formulasi shular jumlasidandir.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

17.1. $\int\limits_1^4 x^2 dx$. **17.2.** $\int\limits_0^{36} \sqrt{x}dx$.

17.3. $\int\limits_1^2 (x^3+5x^2-4)dx$. **17.4.** $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$.

17.5. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$. **17.6.** $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$.

17.7. $\int\limits_0^{10\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$. **17.8.** $\int\limits_1^e (x\ln x)^2 dx$.

17.9. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. **17.10.** $\int\limits_{-1}^1 \left(x^3-2x^2+x-1\right)dx$.

17.11. $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. **17.12.** $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17.13. $\int\limits_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}$. **17.14.** $\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$.

17.15. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$. **17.16.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

17.17. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}dx$. **17.18.** $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

17.19. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$. **17.20.** $\int\limits_0^2 |1-x|dx$.

18-MAVZU. ANIQ INTEGRALLARNING TATBIQLARI

Reja:

1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash.
2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.
3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash.
4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari.
5. Aniq integralni ayrim iqtisodiy tatbiqlari.

Tayanch iboralar: egri chiziqli trapetsiya yuzasi, tekislikdagi shakl yuzasi, egri chiziq yoyi uzunligi, ko‘ndalang kesim bo‘yicha jism hajmi, aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchi kuch bajargan ish, notekis harakatda bosib o‘tilgan masofa, lorents egri chizig‘i, jini koeffitsiyenti, talab funksiyasi, taklif funksiyasi, bozor muvozanati, iste’molchining yutug‘i, ishlab chiqaruvchining yutug‘i.

18.1. Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash.

Bizga ma’lumki, $y=f(x)\geq 0$ funksiya grafigi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar hamda $y=0$, ya’ni OX koordinata o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (18.1)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o‘qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo‘ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (18.2)$$

formula orqali topiladi.

Masalan, $x\in[\pi/2,\pi]$ holda $y=\cos x\leq 0$ va bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

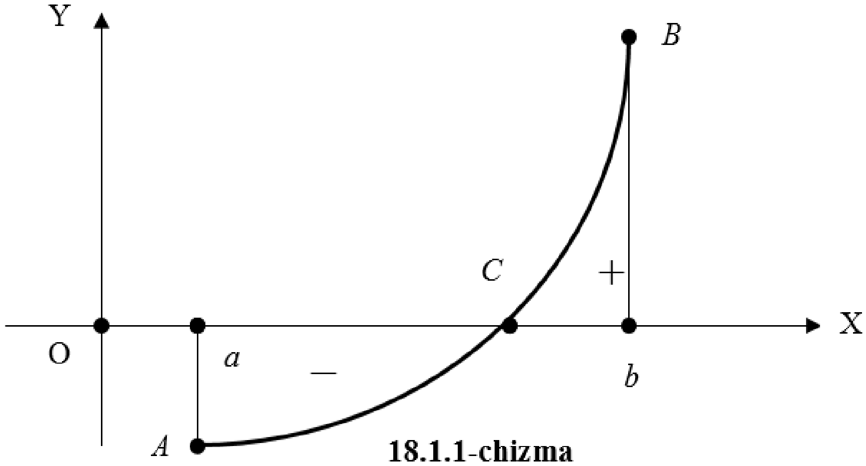
$$S=\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx\right|=\left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right|=|0-1|=1 \ .$$

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ ishorasi o‘zgaruvchan funksiya bo‘lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi OX o‘qidan yuqorida, bir qismi esa pastda joylashgan bo‘ladi (18.1.1-chizmaga qarang).

Bu holda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi (18.1) va (18.2) formulalardan foydalanib topiladi va ularni birlashtirib

$$S=\int_a^b |f(x)|dx \qquad (18.3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

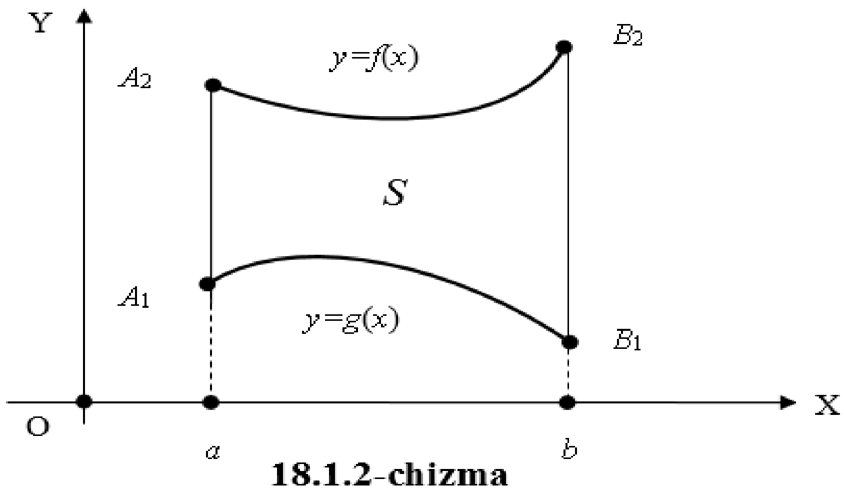


18.1.1-chizma

Masalan, $x\in[0,\pi]$ holda $y=\cos x$ funksiya $[0,\pi/2)$ sohada musbat, $(\pi/2,\pi]$ sohada esa manfiy qiymatlar qabul etadi. Bunda hosil bo‘ladigan egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1-(-1)=2.$$

$y=f(x)$ va $y=g(x)$ $[f(x)\geq g(x)]$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan geometrik shaklning (18.1.2-chizma) S yuzasini hisoblash talab etiladi.



18.1.2-chizma

Chizmadan va aniq integralning geometrik ma'nosidan foydalanib, quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$S = S_{A_1A_2B_2B_1} = S_{aA_2B_2b} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (4)$$

Masalan, $y=x^2$ va $y=x$, $x=2$ va $x=4$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi geometrik shakl yuzasini (18.4) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$S = \int_2^4 (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{56}{3} - 6 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}\ .$$

Endi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha, \beta]$) parametrik tenglama bilan berilgan chiziqdan hosil qilingan egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash masalasini qaraymiz. Unda (18.1) formuladagi aniq integralda x o'zgaruvchini t o'zgaruvchi bilan almashtirib, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta \psi(t)d\varphi(t) = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

Misol sifatida yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsning S yuzasini topamiz. Bu ellipsning parametrik tenglamasi $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ($t\in[0,2\pi]$) ekanligi bizga ma'lum. Ellipsning simmetrikligidan hamda (18.5) formuladan foydalanib, uning yuzasi S uchun

$$S = 4\int_0^a f(x)dx = 4\int_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2 tdt =$$

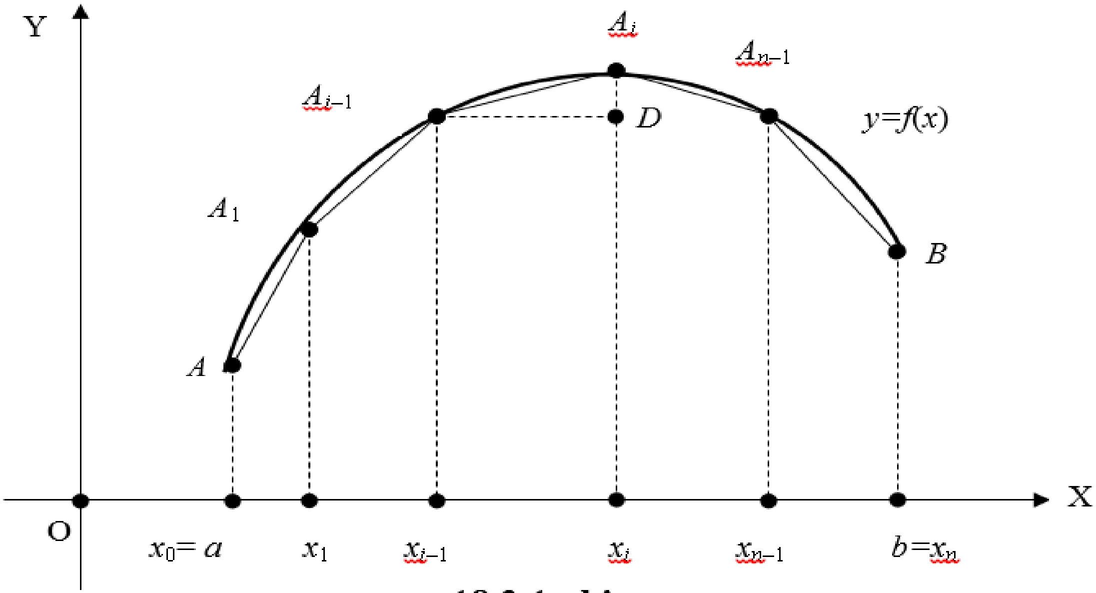
$$= -4ab\int_{\pi/2}^0 \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^0 = \pi ab$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bunda $a=b=R$ desak, unda ellips aylanaga o‘tadi va yuqoridagi formuladan doira yuzasi uchun bizga tanish bo‘lgan $S=\pi R^2$ formula kelib chiqadi.

18.2. Tekislikdagi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.

Maktab geometriyasida tekislikdagi egri chiziqlardan faqat aylana va uning yoylari uzunligini hisoblash formulasi beriladi. Parabola, giperbola, sinusoida kabi egri chiziqlarning turli yoylari uzunligini hisoblash masalasi amaliyotda kerak bo‘ladi. Bu masala ham aniq integral yordamida o‘z yechimini topadi.

$y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya bilan berilgan egri chiziqning AB yoyi uzunligini topish masalasini qaraymiz (18.2.1-chizmaga qarang).



18.2.1-chizma

Bunda $f(x)$ differensiallanuvchi va uning $f'(x)$ hosilasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb hisoblaymiz. Berilgan $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz. Natijada AB yoy n ta kichik $A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ yoychalarga ajraladi.

Agar AB yoy uzunligi l va $A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ yoychalar uzunliklari Δl_i deb olsak, unda

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$$

deb yozish mumkin. Endi kichik A_{i-1} A_i (i=1, 2, ···, n) yoychalarni ularning vatari, ya'ni $A_{i-1}A_i$ kesmalar bilan almashtiramiz. To'g'ri burchakli $A_{i-1}A_iD$ uchburchakda

$$|A_{i-1}D| = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \qquad |A_iD| = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta f(x_i)$$

katetlar bo'yicha $A_{i-1}A_i$ gipotenuza uzumligini Pifagor teoremasidan foydalanib topamiz:

$$|A_{i-1}A_i| = \sqrt{|A_{i-1}D|^2 + |A_iD|^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i .$$

Bu yerda $\Delta l_i \approx |A_{i-1}A_i|$ deb, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun ushbu taqribiy tenglikni hosil etamiz:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n} |A_{i-1}A_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = L_n .$$

Bu taqribiy tenglikdan aniq tenglikka o'tish uchun $n \to \infty$, $\Delta_n \to 0$ deb olamiz. Bu holda, hosila ta'rifiga asosan,

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} \approx f'(x_i)$$

deb olish mumkin. Shu sababli yuqoridagi L_n yig'indini $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo'yicha integral yig'indi deb qarash mumkin. Unda, aniq integral ta'rifiga asosan, izlanayotgan yoy uzunligi l uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$l = \lim_{\substack{n \to \infty, \\ \Delta_n \to 0}} L_n = \lim_{\substack{n \to \infty, \\ \Delta_n \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \qquad (6)$$

Misol sifatida y=lnsin$x$ egri chiziqning x=π/3 va x=π/2 abssissali nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Bunda y'=ctg$x$ ekanligidan va universal almashtirmadan foydalanib, (18.6) formulaga asosan, ushbu natijani olamiz:

$$l = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2 x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = tg\dfrac{x}{2}, \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \alpha = tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \beta = tg\dfrac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \ln t \Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} = \ln \sqrt{3} .$$

Agar egri chiziq $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($t\in[\alpha, \beta]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, unda $dx=\varphi'(t)dt$, $dy=\psi'(t)dt$ va

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

bo‘lgani uchun (18.6) formula quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t))}]^2}\varphi'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt \qquad (18.7)$$

Misol sifatida $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ ($t\in[0,\ln\pi]$) parametrik tenglamasi bilan berilgan egri chiziq yoyi uzunligini topamiz. Bunda

$$x'=\varphi'(t)=e^t(\cos t-\sin t),\quad y'=\psi'(t)=e^t(\cos t+\sin t)$$

bo‘lgani uchun, (18.7) formulaga asosan, quyidagi javobga ega bo‘lamiz:

$$l=\int_0^{\ln\pi}\sqrt{[e^t(\cos t-\sin t)]^2+[e^t(\cos t+\sin t)]^2}dt=\sqrt{2}e^t\Big|_0^{\ln\pi}=\sqrt{2}(\pi-1).$$

18.3. Aniq integral yordamida jismlar hajmini hisoblash.

Maktab geometriyasidan biz faqat eng sodda jismlar bo‘lmish prizma, piramida, konus, silindr va shar hajmlarini hisoblash formulalarini bilamiz. Aniq integral yordamida bir qator murakkabroq jismlarning hajmini hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lamiz.

Jism hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi bo‘yicha hisoblash. Bizga biror J jism berilgan bo‘lib, uni OX o‘qiga perpendikular tekisliklar bilan kesganimizda hosil bo‘ladigan kesimlarning yuzasi ma’lum va bu yuza biror uzluksiz $S(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya orqali ifodalansin. Bu holda J jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

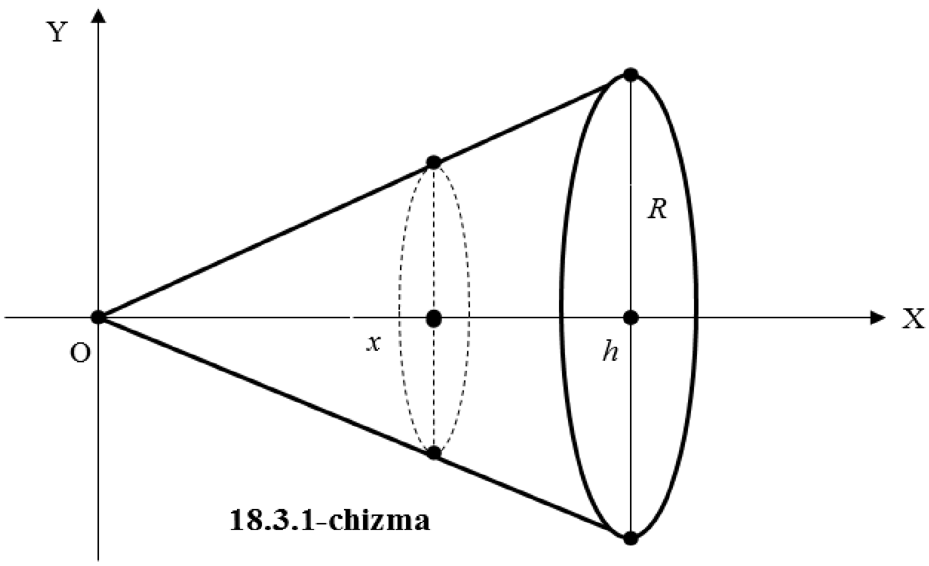
nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka ajratamiz va bu nuqtalar orqali OX o‘qiga perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bu tekisliklar jismni J_i (i=1, 2, ···, n) qatlamlarga ajratadi. Bu qatlamlarning hajmlarini ΔV_i (i=1, 2, ···, n) deb belgilasak, unda izlangan V hajmni $V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n$ yig‘indi ko‘rinishida yozish mumkin. Yuqorida ko‘rsatilgan x_i bo‘linish nuqtalari orqali hosil qilingan har bir $[x_{i-1}, x_i]$ kesmachalardan (i=1, 2, ···, n) ixtiyoriy bir ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz. Endi J_i (i=1, 2, ···, n) qatlamlarning har birini balandligi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, asosining yuzasi esa $S(\xi_i)$ bo‘lgan silindrik jismlar bilan almashtiramiz. Bu holda $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ taqribiy tenglik o‘rinli ekanligini nazarga olsak, yuqoridagi yig‘indidan

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i = V_n$$

taqribiy natijaga ega bo‘lamiz. Bu taqribiy tenglikda bo‘laklar soni n qanchalik katta va $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ qanchalik kichik bo‘lsa, V_n yig‘indi izlanayotgan V hajm qiymatiga shunchalik yaqin bo‘ladi deb olish mumkin. Shu sababli J jismning hajmi V yuqoridagi V_n yig‘indilar ketma-ketligining $n\to\infty$, $\Delta_n\to 0$ bo‘lgandagi limiti deb olinadi. Unda V_n yig‘indi $S(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indi ekanligini hisobga olib va aniq integral ta’rifidan foydalanib, berilgan J jismning V hajmini uning ko‘ndalang kesimi yuzasi $S(x)$ bo‘yicha hisoblash uchun quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}} V_n=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx \qquad (18.8)$$

Misol sifatida asosining radiusi R, balandligi esa h bo‘lgan doiraviy konusning (18.3.1-chizmaga qarang) V hajmini (18.8) formula yordamida topamiz.



18.3.1-chizma

Bunda ko‘ndalang kesimlar doiralardan iborat bo‘lib, ularning radiuslari $r=Rx/h$, $x\in[0,h]$, funksiya bilan aniqlanadi. Demak, ko‘ndalang kesim yuzasi

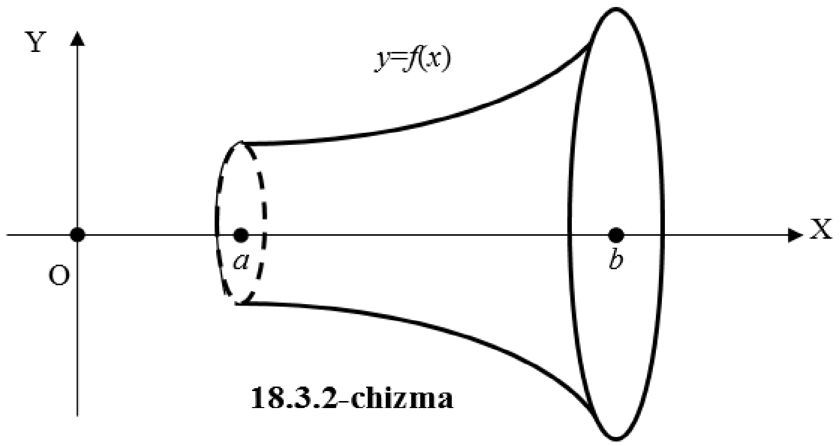
$$S(x)=\pi r^2=\pi(Rx/h)^2$$

funksiya bilan ifodalanadi. Unda bu konus hajmi uchun, (8) tenglikka asosan,

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{\pi R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

formulaga , ya'ni bizga maktabdan tanish bo'lgan natijaga kelamiz.

Aylanma jismlarining hajmini hisoblash. Endi $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, funksiya grafigi orqali hosil qilingan egri chiziqli trapetsiyaning OX koordinata o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan J aylanma jismning (18.3.2-chizmaga qarang) V hajmini topish masalasini ko'ramiz.



18.3.2-chizma

Bunda aylanma jismning ko'ndalang kesimlari doiralardan iborat bo'lib, ularning yuzasi S(x)=$\pi f^2(x)$ funksiya bilan ifodalanadi. Demak, (18.8) formulaga asosan, aylanma jism hajmi V uchun ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (18.9)$$

Misol sifatida oldin ko'rib o'tilgan doiraviy konusning hajmini yana bir marta hisoblaymiz. Bu konusni uning $y=Rx/h$ tenglamali yasovchisini OX koordinata o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma jism deb qarash mumkin ya shu sababli, (18.9) formulaga asosan,

$$V=\pi\int_0^h \frac{R^2x^2}{h^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{3h^2}\bigg|_0^h=\frac{\pi R^2h^3}{3h^2}=\frac{\pi R^2h}{3}=\frac{1}{3}S_{asos}\cdot h$$

natijaga, ya'ni oldin hosil qilingan formula o'rinli ekanligiga yana bir marta ishonch hosil etamiz.

Yana bir misol sifatida yarim o‘qlari *a* va *b* bo‘lgan ellipsni OX o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan ellipsoidning hajmini topamiz. Ellipsning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})\,,\ x\in[-a,a]$$

ekanligini topamiz. Bu natijani (18.7) formulaga qo‘yib, ellipsoidning *V* hajmini hisoblaymiz:

$$V=\pi\int_{-a}^{a} f^2(x)dx=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2\,.$$

Agar bunda $a=b=R$ deb olsak, unda ellipsoid radiusi *R* bo‘lgan sharga aylanadi va bu holda sharning halmi uchun yuqoridagi natijadan bizga maktabdan tanish bo‘lgan $V=4\pi R^3/3$ formula kelib chiqadi.

18.4. Aniq integralni mexanika masalalariga tatbiqlari.

Biz oldin kattaligi o‘zgaruvchan va $f(x)$ funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani $[a,b]$ kesma bo‘yicha harakatlantirganda bajarilgan *A* ish qiymati aniq integral orqali

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanishini ko‘rsatgan edik. Ammo bu bilan aniq integralni mexanika masalalarini yechishga tatbig‘i chegaralanib qolmaydi. Bunga misol sifatida bu yo‘nalishda yana ikkita masalani ko‘rib o‘tamiz.

Notekis harakatda bosib o‘tilgan masofani hisoblash. Ma’lumki, biror *v* o‘zgarmas tezlik bilan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tekis harakat qilayotgan moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan *s* masofasi $s=v(b-a)$ formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi har bir *t* vaqtda o‘zgaruvchan va $v=v(t)$ funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning $[a,b]$ vaqt oralig‘ida bosib o‘tadigan *s* masofani hisoblash masalasini ko‘ramiz. Buning uchun $[a,b]$ vaqt oraligini $a=t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy *n* bo‘lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalari uzunliklarini Δt_i kabi belgilaymiz va undan ixtiyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalarida bosib o‘tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning v_i tezligi taqriban o‘zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i\,\Delta t_i = v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo‘lib, bosib o‘tilgan s masofa uchun

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i \approx \sum_{i=1}^{n}v_i\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n}v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofaning aniq qiymatini topish maqsadida bo‘lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Bunda $\Delta_n=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ cheksiz kamayib boradi deb hisoblaymiz. Natijada, aniq integral ta’rifiga asosan,

$$s=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \Delta_n\to 0}}\sum_{i=1}^{n}v(\tilde{t}_i)\Delta t_i=\int_a^b v(t)dt \qquad (18.10)$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Misol sifatida tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo‘yicha o‘zgaradigan notekis harakatda [3,8] vaqt oralig‘ida bosib o‘tilgan s masofani (18.10) formulaga asosan topamiz:

$$s=\int_3^8(3t^2+4t)dt=(t^3+2t^2)\Big|_3^8=(8^3+2\cdot 8^2)-(3^3+2\cdot 3^2)=640-45=595.$$

Bundan tashqari aniq integral bir jinsli bo‘lmagan sim massasini, yassi chiziq va geometrik shaklning og‘irlik markazi, inersiya momentlarini hisoblash uchun ham qo‘llaniladi.

18.5. Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari.

Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda, o‘zgaruvchan mehnat unumdorligi bo‘yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko‘rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida

$$z=f(t)=-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96$$

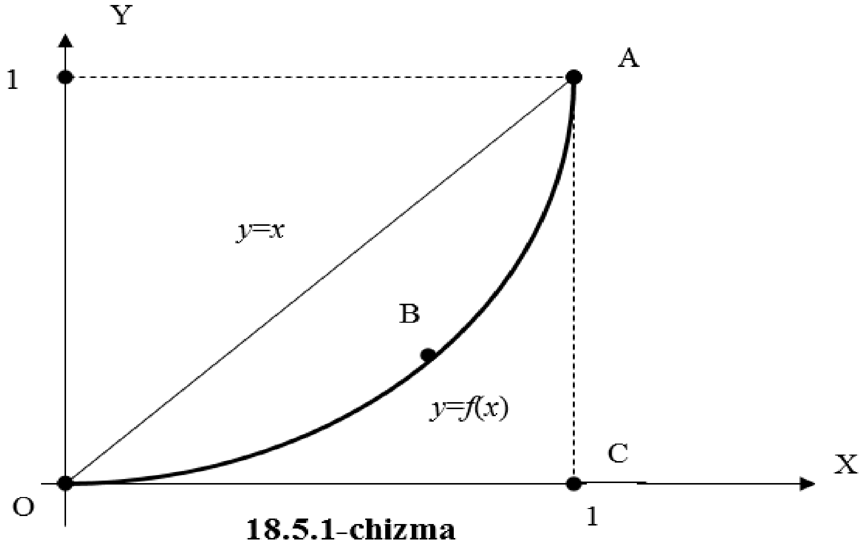
funksiya bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $0\le t\le 8$ bo‘lib, t vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (258 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz:

$$Q=258\int_0^8(-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96)dt=258\cdot(-0{,}0011t^3-0{,}0445t^2+20{,}96t)\Big|_0^8=$$

$$=258\cdot(-0{,}5632-2{,}848+167{,}68)=258\cdot 164{,}2688=42381{,}3504.$$

Demak, bu korxona bir yilda 42381 dona mahsulot ishlab chiqaradi. Biz bu yerda yana bir qator iqtisodiy masalalarni aniq integral yordamida yechilishi bilan tanishamiz.

Djini koeffitsiyentini hisoblash masalasi. Aholi o‘rtasida daromadni qanchalik darajada notekis taqsimlanganligini ifodalovchi $y=f(x)$, $x\in[0,1]$, funksiyani qaraymiz (keyingi betdagi 81-rasmga qarang). Bunda y – daromad ulushini, x – aholi ulushini belgilaydi.



18.5.1-chizma

Bu funksiya grafigini ifodalovchi OBA egri chiziq ***Lorents egri chizig‘i*** deyiladi.

Daromad aholi o‘rtasida tekis taqsimlangan holda $y=x$ bo‘ladi va bunda Lorents egri chizig‘i bissektrisadagi OA kesmaga aylanadi. Shu sababli har qanday $x\in[0,1]$ uchun $0\le f(x)\le x$ qo‘sh tengsizlik bajariladi. Bunda OABO geometrik shakl yuzasi qanchalik katta bo‘lsa, daromadni notekis taqsimlanish darajasi ham shunchalik katta bo‘ladi. Shu sababli aholi o‘rtasida daromadni notekis taqsimotini o‘lchovi sifatida OABO shakl yuzasini OAC uchburchak yuzasiga nisbati olinadi. Bu nisbat ***Djini koeffitsiyenti*** deb ataladi va k orqali belgilanadi. Bu yerda yuzalarni aniq integral orqali ifodalab, Djini koeffitsiyenti uchun quyidagi formulani hosil etamiz:

$$k=\frac{S_{OABO}}{S_{OAC}}=\frac{\int_0^1[x-f(x)]dx}{\int_0^1 xdx}=2\int_0^1[x-f(x)]dx \qquad (18.11)$$

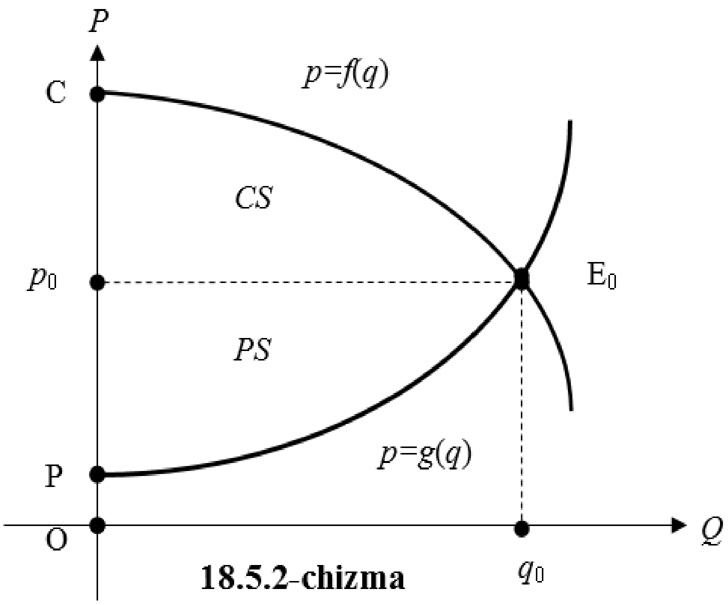
Masalan, Lorents egri chizig‘i $y=x/(3–2x)$, $x\in[0,1]$, funksiya bilan berilgan holda Djini koeffitsiyentini (18.11) formula bo‘yicha hisoblaymiz:

$$k=2\int_0^1(x-\frac{x}{3-2x})dx=2\int_0^1(x+\frac{x-1{,}5+1{,}5}{2x-3})dx=2\int_0^1(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x-3})dx=$$

$$=2(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\cdot\ln|2x-3|)\Big|_0^1=2(1-\frac{3}{4}\cdot\ln 3)\approx 0{,}352\ .$$

Iste’molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlari masalasi. Dastlab talab va taklif funksiyalari tushunchalarini kiritamiz.

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni iste’molchi tomonidan xarid qilinish halmi q orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi $p=f(q)$ funksiya ***talab funksiyasi*** deb ataladi. Iqtisodiyotda narx p, hajm (miqdor) q harfi bilan belgilanadi va shu sababli talab funksiyasi an’anaviy $y=f(x)$ ko‘rinishda yozilmasdan, $p=f(q)$ ko‘rinishda yozildi (82-rasmga qarang).



18.5.2-chizma

Mazmuniga asosan bu funksiya kamayuvchi bo‘ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni xarid qilish hajmi q kamayadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni ishlab chiqarilish hajmi q orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi $p=g(q)$ funksiya ***taklif funksiyasi*** deb ataladi. Mazmuniga asosan bu funksiya o‘suvchi bo‘ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni ishlab chiqarish hajmi q oshadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Talab va taklif funksiyalarning grafiklari qandaydir bir $E_0(q_0,p_0)$ nuqtada kesishadi. Bu nuqtada iste’molchining talabi hajmi va ishlab chiqaruvchining taklif hajmi o‘zaro teng bo‘ladi. Bunday holat ***bozor muvozanati*** deb ataladi. Bozor muvozanatini keltirib chiqaruvchi mahsulot hajmi q_0 va narxi p_0 qiymatlari berilgan talab va taklif funksiyalari bo‘yicha

$$\begin{cases} f(q) = p \\ g(q) = p \end{cases} \qquad (18.12)$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

Bozor muvozanati shartida iste’molchilar o‘zlarining q_0 hajmdagi talablarini qondirishlari uchun mahsulot birligining p_0 narxda xarid qilib, jami p_0q_0 miqdorda xarajat qilishlari mumkin. Ammo bir qism iste’molchilar u yoki bu sabablar bo‘yicha mahsulot xarid qilishni bozor muvozanati erishiladigan vaqtgacha kutib o‘tira olmaydilar. Bundan tashqari ishlab chiqaruvchi ham o‘z mahsulotini iloji boricha p_0 narxdan yuqoriroq bahoda sotishga harakat qiladi. Shu sababli iste’molchi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni ishlab chiqaruvchi bozorga birdaniga chiqarmasdan va uning hammasini birdaniga p_0 narxda sotmasdan, u o‘z mahsulotini Δq_i (i=1,2,3,···, n) hajmdagi kichik-kichik partiyalarda bozorga chiqarib, uni $f(q_i)>p_0$ narxda sotadi. Natijada iste’molchi o‘ziga kerak bo‘lgan q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun p_0q_0 miqdorda xarajat qilish o‘rniga

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i$$

miqdor xarajat qiladi. Mahsulot ishlab chiqarish va uni xarid qilish jarayonlari uzluksiz ravishda ro‘y berib turadi. Shu sababli $f(x)$ talab funksiyasini uzluksiz va mahsulotni kichik-kichik Δq_i hajmli partiyalar soni $n\to\infty$ deb olish mumkin. Bu holda , aniq integral ta’rifiga asosan, iste’molchining q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun qilgan xarajatining asl qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} f(q)dq \qquad (18.13)$$

Bu yerdan ko‘rinadiki, agar iste’molchi o‘zi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 bozor muvozanati narxida xarid qilganda, uning xarajatlari

$$CS = S - p_0q_0 = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0q_0 = \int_0^{q_0}[f(q) - p_0]dq \qquad (18.14)$$

miqdorda kam bo‘lar edi. Shu sababli *CS* ***iste’molchining yutug‘i***, ba’zan esa ***iste’molchining ortiqcha xarajati*** deb yuritiladi. Yuqoridagi 18.5.2-chizmada bu ko‘rsatkich p_0E$_0$C egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Xuddi shundek, ishlab chiqaruvchi bozor muvozanatida o‘zi taklif etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 narxda sotganda p_0q_0 miqdordagi pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Ammo u bozor muvozanati bo‘lishini kutib o‘tirmasdan, Δq_i hajmda (i=1,2,3,···, n) ishlab chiqargan mahsulotini darhol bozorga chiqarib, uning har birligini $g(q_i)<p_0$ narxda sotadi. Natijada ishlab chiqaruvchining q_0 hajmdagi mahsulotni sotish orqali erishgan asl pul mablag‘i quyidagicha bo‘ladi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n(g) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(q_i)\Delta q_i = \int_0^{q_0} g(q)dq < p_0q_0 .$$

Shunday qilib, ishlab chiqaruvchi o‘z mahsulotini bozor muvozanati shartida sotganda

$$PS = p_0q_0 - \int_0^{q_0} g(q)dq = \int_0^{q_0}[p_0 - g(q)]dq \qquad (18.15)$$

qoshimcha pul mablag‘iga ega bo‘lar edi. Shu sababli *PS* ***ishlab chiqaruvchining yutug‘i*** deb ataladi. Yuqoridagi 18.5.2-chizmada bu ko‘rsatkich Pp_0E$_0$ egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Masalan, talab funksiya $p=f(q)=240–q^2$, taklif funksiya esa $p=g(q)=q^2+2q+20$ ko‘rinishda bo‘lganda iste’molchi va ishlab chiqaruvchi yutuqlarini aniqlaymiz. Buning uchun dastlab ushbu tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} p = 240 - q^2 \\ p = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ 240 - q^2 = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ q^2 + q - 110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 140 \\ q_0 = 10 \end{cases}$$

Demak, bozor muvozanati narxi p_0=140, hajmi esa q_0=10 bo‘ladi. Unda, (18.15) formulaga asosan, iste’molchining yutug‘i

$$CS=\int_0^{q_0}[f(q)-p_0]dq=\int_0^{10}[240-q^2-140]dq=(100q-\frac{q^3}{3})\Bigg|_0^{10}=666,(6)\approx 667,$$

ishlab chiqaruvchining yutug‘i esa, (18.16) formulaga asosan,

$$PS=\int_0^{q_0}[p_0-g(q)]dq=\int_0^{10}[120-q^2-2q]dq=(120q-\frac{q^3}{3}-q^2)\Bigg|_0^{10}=766,(6)\approx 767.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

18.1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y=x^2-6x+8,\ \ y=0;$ 2) $x=4-y^2,\ x=0;$ 3) $y=\ln x,\ x=e,\ y=0;$

4) $y=\dfrac{x^2}{2}$ parabola, $x=1,\ x=3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x=2-y^2-y^2,\ x=0;$ 6) $y=2-x^2,\ y=x^2;$

7) $y=x^2+4x,\ y=x+4;$ 8) $x=3t^2,\ \ y=^3 t-t^3$.

18.2. $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

1) $y^2=(x+4)^3$ *va* $x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y=x^3,\ x=0,\ y=8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

18.3. $\int_0^1 x^2dx$ integralni $n=5$ bo‘lakka bo‘lib, trapesiyalar formulasi bilan hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

18.4. $\int_1^2 \dfrac{dx}{1+x}$ integralni $n=10$ teng bo‘laklarga bo‘lib, trapesiyalar va Simpson formulalari yordamida hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan yuzlar hisoblansin.

18.5. $y=4-x^2,\ y=0.$

18.6. $y^2=2px,\ x=h.$

18.7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$
18.8. $y=4-2x-x^2,\ y=0.$
18.9. $xy=4, \quad x=1,$
$x=4,\ \ y=0.$
18.10. $y=lnx,\ x=e,\ y=0.$
18.11. $y=6x-x^2,\ \ y=0.$
18.12. $y^2=1-x$ va $x=-3.$
18.13. $y=x^3,\ \ y=8,\ \ x=0.$
18.14. $y=x^2+4x+5,\quad x=0,\quad y=0$ va berilgan parabolaning minimal ordinatasi bilan chegaralangan yuzini toping.
18.15. $y=sinx$ sinusoidaning bitta yarim to‘lqini va $y=0$ orasidagi yuz.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning aylanishidan hosil bo‘lgan jismlarning hajmlari aniqlansin.

18.16. $y^2=2px$ va $x=h$, Ox o‘q atrofida.
18.17. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ va $y=\pm b$, Oy o‘q atrofida.
18.18. $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0,\ Ox$ o‘q atrofida.
18.19. $y^2=(x+4)^3$ va $x=0,\ Oy$ o‘q atrofida.
18.20. $x^2+y^2=a^2,\ x=b>a$ to‘g‘ri chiziq atrofida.

19-MAVZU. SONLI QATORLAR VA ULARNING YAQINLASHISHI

Reja:

1. Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar.
2. Sonli qator xossalari.
3. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti.
4. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar.
5. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar.
6. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Tayanch iboralar: sonli qator, sonli qator hadlari, n-xususiy yig‘indi, yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) sonli qator, sonli qator yig‘indisi, qator yaqinlashuvining zaruriy sharti, garmonik qator, ishorasi navbatlanuvchi sonli qator, Leybnits alomati, ishorasi o‘zgaruvchi sonli qator, absolut yaqinlashuvchi qator, shartli yaqinlashuvchi qator, Riman teoremasi

19.1. Sonli qatorlar va umumiy tushunchalar.

Dastlab sonli qator tushunchasini kiritamiz.

1-Ta’rif: Agar $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ cheksiz sonli ketma – ketlik berilgan bo‘lsa, unda

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (19.1)$$

ifoda ***sonli qator*** deyiladi. Bunda $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – ***sonli qator hadlari***, u_n esa uning ***umumiy hadi*** deyiladi.

Bunda har qanday natural n soni uchun (19.1) sonli qatorning u_n umumiy hadi ma’lum deb hisoblanadi. Masalan, umumiy hadi

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

formula bilan ifodalangan sonli qator

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \cdots$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2-Ta’rif: Berilgan (19.1) sonli qatorning dastlabki n ta hadidan tuzilgan

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k\,, \quad n = 1,2,3,\cdots \;, \qquad (19.2)$$

yig‘indi bu qatorning ***n – xususiy yig‘indisi*** deb ataladi.
(19.1) sonli qatorning n –xususiy yig‘indilari S_n (n=1,2,3, ···)
$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, · · · , $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, · · ·
sonli ketma – ketlikni tashkil etadi va shu sababli uning limitini qarash mumkin.

3-Ta’rif: Agar S_n (n=1,2,3, ···) xususiy yig‘indilar ketma – ketligi chekli limitga ega va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\,, |S| < \infty$, bo‘lsa, unda (1) sonli qator ***yaqinlashuvchi***, S esa uning ***yig‘indisi*** deb aytiladi. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ yoki mavjud bo‘lmasa, (19.1) sonli qator ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(19.1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S ekanligi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$$

ko‘rinishda ifodalanadi.

Sonli qatorlarga doir asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini tekshirishdan iborat bo‘ladi.

Misol sifatida

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \qquad (19.3)$$

sonli qatorni tekshiramiz. Bu qatorning n-xususiy yig‘indisini qaraymiz:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Bu yerdan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S$$

natijani olamiz. Demak, berilgan (19.3) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S=1 ekan.

Yana bir umumiyroq misol sifatida ushbu

$$b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{n-1} + \ldots \qquad (19.4)$$

sonli qatorni tekshiramiz. Bunda b va q parametrlar noldan farqli ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar juftligini ifodalaydi. Bu sonli qator birinchi hadi b va maxraji q bo‘lgan geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan. Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadining yig‘indisi formulasidan foydalanib, $q\neq 1$ holda berilgan (19.4) sonli qatorning S_n xususiy yig‘indilarini

$$S_n=\frac{b-bq^n}{1-q}=\frac{b}{1-q}(1-q^n)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz.

1) Agar $|q|<1$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{1-q}(1-q^n)=\frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n)=\frac{b}{1-q}=S\,.$$

Demak, $|q|<1$ holda berilgan (19.4) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=b/(1-q)$ bo‘ladi.

2) Agar $q>1$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{1-q}(1-q^n)=\frac{b}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q^n-1)=+\infty\,,$$

$q<-1$ bo‘lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ mavjud emas. Demak, $|q|>1$ holda (4) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Endi $q=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bunda (4) sonli qator

$$b+b+\cdots+b+\cdots$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $S_n=nb$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}nb=\infty$ ekanligidan (19.4) sonli qatorning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. Va nihoyat oxirgi $q=-1$ holni qaraymiz. Bu holda (19.4) sonli qator

$$b-b+b-b\cdots+(-1)^{n+1}b+\cdots$$

ko‘rinishda bo‘lib, uning n–xususiy yig‘indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$S_n=\begin{cases} b\,, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa;}\\ 0\,, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa.}\end{cases}$$

Bu yerdan ko‘rinadiki

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}b=b\,,\quad \lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}0=0\,.$$

Demak, $q=-1$ holda $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ mavjud emas va shu sababli bu holda ham (19.4) sonli qator uzoqlashuvchidir.

Shunday qilib, (19.4) sonli qator $|q|<1$ holda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ holda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

19.2. Sonli qator xossalari.

Endi sonli qatorlarning ayrim xossalarini ko‘rib chiqamiz.

1-Teorema: Agar berilgan (19.1) sonli qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish bilan hosil qilingan sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lsa, unda (19.1) sonli qatorning o‘zi ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi. Aksincha, agar berilgan sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘lsa, uning bir nechta hadlarini tashlash bilan hosil qilingan sonli qator ham yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo‘ladi.

Isbot: Berilgan (19.1) sonli qatorning tashlab yuborilgan hadlari

$$u_{k_1}, u_{k_2}, \cdots, u_{k_m} \quad va \quad S(m) = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_m}$$

bo‘lsin. Bu holda $n>k_m$ bo‘lganda (19.1) sonli qatorning n-xususiy yig‘indisini

$$S_n = S_n(m) + S(m) \tag{19.5}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda $S_n(m)=S_n–S(m)$ bo‘lib, u (19.1) sonli qatorning yuqorida ko‘rsatilgan m hadini tashlab yuborishdan hosil bo‘lgan sonli qatorning xususiy yig‘indisini ifodalaydi. (19.5) tenglik va limit xossasiga asosan S_n va $S_n(m)$ xususiy yig‘indilar limiti bir-biridan o‘zgarmas $S(m)$ soniga farq qiladi. Demak, S_n va $S_n(m)$ xususiy yig‘indilarning limitlari bir paytda yoki chekli (bunda ikkala qator yaqinlashuvchi), yoki cheksiz yoki mavjud emas (bunda ikkala qator uzoqlashuvchi) bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan sonli qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi yangi hadlarni birlashtirish uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligiga ta’sir etmasligi kelib chiqadi.

2-Teorema: Agar (19.1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsa, unda bu qatorning barcha hadlarini biror C o‘zgarmas songa ko‘paytirishdan hosil qilingan

$$Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} Cu_k \tag{19.6}$$

sonli qator ham yaqinlashi va uning yig‘indisi $C·S$ bo‘ladi.

Isbot: Agar (19.1) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi S_n bo‘lsa, (19.6) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi $C·S_n$ bo‘ladi. Bu yerdan, limit xossasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty} (C \cdot S_n) = C \lim_{n\to\infty} S_n = C \cdot S$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, yaqinlashuvchi sonli qator uchun C o‘zgarmas ko‘paytuvchini qator belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

4-Ta’rif: Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ va $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ sonli qatorlarning algebraik yig‘indisi deb ularning mos hadlarining algebraik yig‘indilaridan hosil etilgan sonli qatorga aytiladi.

Demak, ta’rifga asosan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k).$$

3-Teorema: Agar $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (19.7) va $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ (19.8) sonli qatorlar yaqinlashuvchi va yig‘indilari mos ravishda $S(u)$ va $S(v)$ bo‘lsa, u holda ularning algebraik yig‘indisi bo‘lmish $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ (19.9) sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi $S(u \pm v) = S(u) \pm S(v)$ tenglikdan topilishi mumkin.

***Isbot*:** $S_n(u)$, $S_n(v)$ va $S_n(u \pm v)$ orqali mos ravishda (19.7), (19.8) va (19.9) sonli qatorlarning n- xususiy yig‘indilarini belgilaymiz. Unda $S_n(u \pm v) = S_n(u) \pm S_n(v)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerdan, limit xossasi va sonli qator yig‘indisi ta’rifiga asosan, teorema tasdig‘idagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(u \pm v) = \lim_{n\to\infty} [S_n(u) \pm S_n(v)] = \lim_{n\to\infty} S_n(u) \pm \lim_{n\to\infty} S_n(v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(u \pm v) = S(u) \pm S(v).$$

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, bu teorema tasdig‘iga teskari tasdiq har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Masalan, (19.7) qatorda $u_n = 1 + 0.5^n$ va (19.8) qatorda $v_n = 1 - 0.5^n$ deb olamiz. Bunda hadlari $u_n - v_n = 2 \cdot 0.5^n$ bo‘lgan (19.9) qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi $S(u - v) = 2$, chunki uning hadlari maxraji $q = 0.5$ va birinchi hadi $b = 1$ bo‘lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Ammo biz ko‘rayotgan holda (19.7) va (19.8) qatorlarning ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo‘ladi. Haqiqatan ham bu holda

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} (1 + 0.5^k) = n + 1 - 0.5^n \Rightarrow S(u) = \lim_{n\to\infty} S_n(u) = \lim_{n\to\infty} (n + 1 - 0.5^n) = \infty,$$

$$S_n(v) = \sum_{k=1}^{n} (1 - 0.5^k) = n - 1 + 0.5^n \Rightarrow S(v) = \lim_{n\to\infty} S_n(v) = \lim_{n\to\infty} (n - 1 + 0.5^n) = \infty.$$

19.3. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti.

Endi berilgan sonli qatorning yaqinlashuvi va uzoqlashuvini aniqlashga imkon beradigan shartlarni ko‘rishga o‘tamiz.

4-Teorema: Agar (19.1) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda uning umumiy hadi u_n uchun

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{19.10}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: (19.1) sonli qatorning yig‘indisi S bo‘lsin. Bu holda $u_n=S_n - S_{n-1}$ ekanligidan foydalanib, (19.10) tenglikni quyidagicha hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Shunday qilib, sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning umumiy hadi albatta (19.10) shartni qanoatlantirishi lozim, ya’ni (19.10) ***qator yaqinlashuvining zaruriy shartini*** ifodalaydi. Bu shart bajarilmasa, sonli qator albatta uzoqlashuvchi bo‘ladi. Masalan, yuqorida ko‘rilgan qatorlarda $u_n=1+0.5^n$, $v_n=1-0.5^n$ va

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (1+0.5^n) = 1 \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (1-0.5^n) = 1 \neq 0$$

bo‘lgani uchun bu qatorlar uzoqlashuvchi ekanligiga yana bir marta ishonch hosil qilamiz.

Ammo (19.10) shart sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun yetarli emas. Masalan, ***garmonik qator*** deb ataluvchi ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{19.11}$$

sonli qatorning umumiy hadi $u_n=1/n$ bo‘lib, (19.10) shartni qanoatlantiradi. Ammo garmonik qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Buni teskarisini faraz qilish orqali isbotlaymiz. (19.11) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S deb olamiz va S_n hamda S_{2n} xususiy yig‘indilarni qaraymiz. Unda bir tomondan sonli qator yig‘indisi ta’rifi va farazimizga asosan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0 \tag{19.12}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ikkinchi tomondan esa

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

va, limit xossasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0 \tag{19.13}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. (19.12) va (19.13) bir-biriga qarama-qarshi tasdiqlarni ifodalaydi. Demak, (19.11) garmonik qator yaqinlashuvchi degan farazimiz noto‘g‘ri va bu qator uzoqlashuvchi ekan.

19.4. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlar.

Dastlab hadlarining ishoralari turlicha bo‘lgan sonli qatorlarning maxsus bir holini ko‘rib chiqamiz.

5-Ta’rif: Barcha hadlari musbat bo‘lgan $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ sonli ketma-ketlikdan tuzilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}u_n+\cdots \quad (u_n>0) \tag{19.14}$$

ko‘rinishdagi qator ***ishorasi navbatlashuvchi qator*** deb ataladi.

Masalan,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \quad , \tag{19.15}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots \quad , \tag{19.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots \tag{19.17}$$

ishorasi navbatlanuvchi qatorlar bo‘ladi. Bunday qatorlar yaqinlashuvini quyidagi teorema yordamida tekshirish mumkin.

***5-Teorema: (Leybnits alomati)*:** Ishorasi navbatlashuvchi (19.14) qatorning hadlari absolut qiymatlari bo‘yicha monoton kamayuvchi va nolga intiluvchi, ya’ni

$$u_1>u_2>u_3>\cdots>u_n>\cdots \quad (19.18) \quad \text{va} \quad \lim_{n\to\infty}u_n=0 \quad (19.19)$$

shartlarni qanoatlantirsin. Unda bu qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S uchun $0<S\leq u_1$ qo‘sh tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: (19.14) qatorning dastlabki $n=2m$ ta ($m=1,2,3,\cdots$) hadidan hosil qilingan S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligini qaraymiz:

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}) \quad .$$

Teoremadagi (19.18) shartga asosan bu yig‘indida har bir qavs ichidagi ifoda musbatdir. Bu yerdan $S_{2m}>0$ va monoton o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi S_{2m} xususiy yig‘indini quyidagi ko‘rinishda ifodalaymiz:

$$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}\ .$$

Bunda, (19.18) shartga ko‘ra, har bir qavs ichidagi ifoda musbat va shu sababli $S_{2m}<u_1$ bo‘ladi. Shunday qilib, S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligi monoton o‘suvchi va yuqoridan u_1 soni bilan chegaralangan. Bundan $\lim_{m\to\infty} S_{2m}=S$ limit mavjud va $0<S\le u_1$ ekanligi kelib chiqadi. Bu bilan teorema tasdig‘i faqat $n=2m$ hol uchun isbotlandi. Agar $n=2m+1$ bo‘lsa, unda teoremadagi (19.19) shart va oldingi natijadan foydalanib, ushbu tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2m+1}=\lim_{n\to\infty} S_{2m}+\lim_{n\to\infty} u_{2m+1}=S+0=S\ .$$

Demak, $\lim_{n\to\infty} S_n=S$ limit mavjud, ya’ni ishorasi navbatlanuvchi (19.14) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $0<S\le u_1$ bo‘ladi. Teorema isboti yakunlandi.

Masalan, yuqorida keltirilgan (19.15) va (19.16) ishorasi navbatlanuvchi qatorlar Leybnits alomatidagi ikkala shartni ham qanoatlantiradi va shu sababli ular yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indilari $u_1=1$ sonidan katta bo‘lmaydi. Kelgusida (19.15) qator yig‘indisi $S=\ln 2$, (19.16) qator yig‘indisi esa $S=\pi/4$ ekanligini ko‘ramiz. Ishorasi navbatlanuvchi (19.17) qator uchun Leybnits alomatining (19.19) sharti bajariladi, ammo bu qator hadlari monoton kamayuvchi emas, ya’ni (19.18) shart bajarilmaydi. Shu sababli bu qator uchun Leybnits alomatini qo‘llab bo‘lmaydi. Bu qatorni tekshirish uchun uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(\sqrt{n+1}+1)-(\sqrt{n+1}-1)}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ .$$

Bu yerdan ko‘rinadiki (19.17) qator uzoqlashuvchi, chunki u garmonik qatorni ikkiga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan.

19.5. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar.

Endi ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlarni xususiy hol sifatida o‘z ichiga oluvchi ishorasi o‘zgaruvchi qatorlarni qaraymiz.

6-Ta'rif: Agar sonli qatorning hadlari orasida musbat qiymatlilari ham, manfiy qiymatlilari ham bo'lsa, u ***ishorasi o'zgaruvchi qator*** deb ataladi.

Ishorasi o'zgaruvchi sonli qatorlarni

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (19.20)$$

ko'rinishda yozsak, unda u_n (n=1,2,3, · · ·) ishoralari ixtiyoriy bo'lishini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz.

Masalan,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \quad ,$$

$$\sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \cdots + \frac{\sin n}{n} + \cdots$$

ishorasi o'zgaruvchi sonli qatorlar bo'ladi.

Ishorasi o'zgaruvchi (19.20) sonli qator yaqinlashuvini tekshirish uchun uning hadlarini absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \qquad (19.21)$$

musbat hadli sonli qatorni qaraymiz. Bu holda (19.20) sonli qator yaqinlashuvining yetarli sharti ushbu teorema orqali ifodalanadi.

6-Teorema: Agar (19.21) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda (19.20) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot: S_n va $\|S_n\|$ orqali mos ravishda (19.20) va (19.21) sonli qatorlarning n-xususiy yig'indilarini belgilaymiz. Bundan tashqari S_n^+ va S_n^- orqali mos ravishda S_n xususiy yig'indiga kiruvchi musbat ishorali hadlar va manfiy ishorali hadlarning absolut qiymatlari yig'indilarini belgilaymiz. S_n^+ va S_n^- (n=1,2,3, · · ·) musbat qiymatli va monoton o'suvchi sonli ketma-ketliklarni tashkil etadi. Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\| = A$ mavjud va chekli. Bu yerdan, $\|S_n\| = S_n^+ + S_n^-$ tenglikka asosan, monoton o'suvchi S_n^+ va S_n^- (n=1,2,3, · · ·) ketma-ketliklar yuqoridan A musbat son bilan chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bu xulosadan o'z navbatida $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = S^+$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^- = S^-$ limitlar mavjud va chekli ekanligini ko'ramiz. Va nihoyat, $S_n = S_n^+ - S_n^-$ ekanligidan hamda limit xossalaridan foydalanib,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^+ - S_n^-) = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-$$

natijani olamiz. Bundan, ta'rifga asosan, ishorasi o'zgaruvchi (19.20) sonli qator yaqinlashuvchi ekanligiga ishonch hosil etamiz. Teorema isboti yakunlandi.

Misol sifatida

$$\cos\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2^3} + \frac{\cos 3\alpha}{3^3} + \cdots + \frac{\cos n\alpha}{n^3} + \cdots \quad (0 < \alpha < \pi) \qquad (19.22)$$

ishorasi o'zgaruvchi sonli qatorning yaqinlashuvini tekshiramiz. Buning uchun uning hadlari absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$|\cos\alpha| + \frac{|\cos 2\alpha|}{2^3} + \frac{|\cos 3\alpha|}{3^3} + \cdots + \frac{|\cos n\alpha|}{n^3} + \cdots \quad (0 < \alpha < \pi) \qquad (19.23)$$

sonli qatorni qaraymiz. Bu qatorda $|\cos n\alpha| \le 1$ ekanligidan uning uchun

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

majoranta qator bo'ladi. Bu qator parametri $p=3>1$ bo'lgan umumlashgan garmonik qator sifatida yaqinlashuvchi. Demak (19.23) qator yaqinlashuvchi va shu sababli (19.22) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

19.6. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.

Yuqorida ko'rib o'tilgan 2-teoremadagi shart ishorasi o'zgaruvchi (19.20) sonli qator yaqinlashuvi uchun yetarli, ammo zaruriy bo'lmaydi. Demak (19.20) qator yaqinlashuvchi ekanligidan (19.21) qatorning yaqinlashuvchiligi har doim ham kelib chiqmaydi. Masalan,

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots \qquad (19.24)$$

ishorasi navbatlanuvchi (demak ishorasi o'zgaruvchi) sonli qator Leybnits alomatiga ko'ra yaqinlashuvchi. Ammo uning hadlarining absolut qiymatlaridan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

sonli qator parametri $p=0.5<1$ bo'lgan umumlashgan garmonik qator sifatida uzoqlashuvchi bo'ladi.

7-Ta'rif: Agar (19.21) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda ishorasi o'zgaruvchi (19.20) sonli qator ***absolut yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar

(19.21) qator uzoqlashuvchi bo‘lib, ishorasi o‘zgaruvchi (19.20) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda (19.20) ***shartli yaqinlashuvchi qator*** deb ataladi.

Masalan, (19.22) qator absolut, (19.24) qator esa shartli yaqinlashuvchidir. Absolut yaqinlashuvchi $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qatorlar chekli $\sum_{k=1}^{n} u_k$ yig‘indilarga o‘xshash xususiyatlarga ega bo‘ladi. Masalan, ularni o‘zaro qo‘shganda, ayirganda yoki ko‘paytirganda yana absolut yaqinlashuvchi sonli qatorlar hosil bo‘ladi. Bundan tashqari ular uchun quyidagi teorema ham o‘rinlidir.

7-Teorema: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator absolut yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsin. Unda bu qator hadlarining o‘rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo‘lgan $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator ham absolut yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi ham S bo‘ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul etamiz.

Ammo shartli yaqinlashuvchi sonli qatorlar uchun yuqoridagi teorema tasdig‘i o‘rinli bo‘lmaydi. Bu mashhur olmon matematigi G.Riman (1826–1866 y.) tomonidan isbotlangan ushbu teoremadan kelib chiqadi.

8-Teorema: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ qator shartli yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsin. Unda bu qator hadlarining o‘rinlarini shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo‘lgan $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator yig‘indisi oldindan berilgan ixtiyoriy $S_0 \neq S$ soniga teng bo‘ladi. Bundan tashqari $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k$ sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lishiga ham erishish mumkin.

Bu teoremaning isboti ancha murakkab bo‘lgani uchun buni ham isbotsiz qabul etib, undagi tasdiqni ushbu misol orqali ko‘rsatish bilan chegaralanamiz. Bizga ma’lumki, oldin ko‘rib o‘tilgan (19.15) sonli qator

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

shartli yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S=ln2. Bu qator hadlarining joylarini shunday almashtiramizki, bitta musbat haddan keyin ikkita manfiy had kelsin:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

Berilgan va hosil etilgan sonli qatorlarning n-xususiy yig‘indilarini mos ravishda S_n va $\tilde{S}_n$ kabi belgilaymiz. Bu holda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\tilde{S}_{3n}=(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n})=$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\cdots+(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n})=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2n})=\frac{1}{2}S_{2n}\ .$$

Bu yerdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}S_{2n}=\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\ln 2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(\tilde{S}_{3n}+\frac{1}{2n+1})=\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln 2+0=\frac{1}{2}\ln 2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(\tilde{S}_{3n+1}-\frac{1}{4n+2})=\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{3n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+2}=\frac{1}{2}\ln 2-0=\frac{1}{2}\ln 2\ .$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_n=\frac{1}{2}\ln 2$, ya’ni hosil qilingan qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi berilgan qator yig‘indisining yarmiga teng.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

19.1. Ushbu

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+...+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+...$$

qatorning yaqinlashuvchiligi aniqlansin, yig‘indisi topilsin.

19.2. Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+...$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

19.3. Ushbu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

19.4. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

19.5. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

19.6. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n} = \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3^2 - 2} + \ldots + \frac{1}{3^n - n} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

19.7. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligi ko‘rsatilsin va ularning yig‘indilari topilsin:

19.8. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$.

19.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

19.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

19.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

19.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

19.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

19.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$.

19.15. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$.

19.16. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

19.17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

19.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{3\alpha}{2^{n+1}}$.

19.19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$.

19.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

20-MAVZU. TASODIFIY HODISALAR VA EHTIMOLLIK

Reja:

1. Hodisaning ehtimoli.
2. Ehtimolning klassik ta'rifi.
3. Ehtimolning statistik va geometrik ta'riflari.
4. Shartli ehtimollik. Hodisalar to'la guruhi.
5. To'la ehtimol va Bayes formulalari.
6. Erkli sinovlar ketma-ketligi va Bernulli sxemasi.

Tayanch iboralar: Kolmogorov aksiomalari, o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar, guruhlashlar, klassik ta'rif, geometrik ta'rif, nisbiy chastota, statistik ta'rif, shartli ehtimollik, hodisalar to'la guruhi, to'la ehtimol, shartli ehtimollik, hodisalar to'la guruhi, to'la ehtimol, Bayes formulalari, bog'liqsiz tajriba, Bernulli sxemasi, eng ehtimolli son, Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari, Puasson teoremasi.

20.1. Hodisaning ehtimoli.

Elementar hodisalar fazosi cheksiz bo'lsin: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n,...\}$. S esa Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan hodisalar algebrasi bo'lsin. Har bir $\omega_i\in\Omega$, $i=1,2,...$ elementar hodisaga $p(\omega_i)$ sonni mos qo'yamiz. $p(\omega_i)$ - elementar hodisaning ehtimoli deyiladi. Demak, Ω da quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi sonli $p(\omega_i)$ funksiya kiritamiz:

1. $\forall\omega_i\in\Omega,\ P(\omega_i)\geq 0;$
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p(\omega_i)=1.$

U holda $A\in\Omega$ hodisaning ehtimoli yig'indi shaklida ifodalanadi:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A}P(\omega_i).$$

Ehtimolni bunday aniqlash Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(A)=\sum\limits_{\omega_i\in A}P(\omega_i)\geq 0$, chunki har bir $P(\omega_i)\geq 0.$

2. $P(\Omega)=\sum_{\omega_i\in\Omega} p(\omega_i)=\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)=1.$

3. Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$P(A+B)=\sum_{\omega_i\in A+B} p(\omega_i)=\sum_{\omega_i\in A} p(\omega_i)+\sum_{\omega_i\in B} p(\omega_i)=P(A)+P(B).$$

Bunday aniqlangan $\{\Omega,S,P\}$ uchlik ehtimolliklar fazosi (yoki diskret ehtimolliklar fazosi) deyiladi.

Agar $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ – chekli fazo va tajribadagi barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli, ya’ni

$$p(\omega_1)=p(\omega_2)=...=p(\omega_n)=\frac{1}{n}$$

bo‘lsa, u holda A hodisaning ehtimoli quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A} p(\omega_i)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{m}=\frac{m}{n},$$

bu yerda m A hodisaga tegishli elementar hodisalar soni.

20.1-misol. Simmetrik tanga ikki marta tashlanganda kamida bir marta “gerb” tushishi ehtimolini toping.

Yechish. Bu tajribaning elementar hodisalar fazosi

$$\Omega=\{GG,\ GR,\ RG,\ RR\}.$$

A hodisani belgilab olamiz:

$$A=\{камида\ битта\ герб\}=\{GG,\ GR,\ RG\}.$$

A hodisaning ehtimoli uni tashkil etuvchi elementar hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng, shuning uchun

$$P(A)=P(GG)+P(GR)+P(RG)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

20.2. Ehtimolning klassik ta’rifi.

Ω chekli n ta yagona mumkin bo‘lgan va teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsin.

1-Ta’rif (klassik ta’rif). A hodisaning ehtimoli deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{k}{n}.$$

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

1. $P(\varnothing)=0.$
2. $P(\Omega)=1.$
3. $0\le P(A)\le 1.$
4. Agar $A\cdot B=\varnothing$ bo‘lsa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B).$
5. $\forall A,B\in\Omega$ uchun $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$

Klassik ta’rifdan foydalanib hodisaning ehtimolini hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba’zi elementlarini keltiramiz. Kombinatorikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ chekli to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Qo‘shish qoidasi: agar A to‘plam elementlari soni n ta va B to‘plam elementlari soni m ta bo‘lib, $A\cdot B=\varnothing$ (A va B to‘plamlar kesishmaydigan) bo‘lsa, u holda $A+B$ to‘plam elementlari soni $n+m$ ta bo‘ladi.

Ko‘paytirish qoidasi: A va B to‘plamlardan tuzilgan barcha (a_i,b_j) juftliklar to‘plami $C=\{(a_i,b_j): i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\}$ ning elementlari soni $n\cdot m$ ta bo‘ladi.

n ta elementdan $m\,(0<m\le n)$ tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o‘rniga qaytariladi.

1. Qaytarilmaydigan tanlash sxemasi.

Guruhlashlar soni: n ta elementdan $m\,(0<m\le n)$ tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

O‘rinlashtirishlar soni: n ta elementdan $m\,(0<m\le n)$ tadan o‘rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

O‘rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o‘rinlashtirish o‘rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n=n!$$

2. Qaytariladigan tanlash sxemasi.

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan $m\,(0<m\le n)$ tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni: n ta elementdan $m\,(0<m\le n)$ tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni: k xil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta, …, k-element n_k marta qaytarilsin va $n_1+n_2+...+n_k=n$ bo‘lsin, u holda n ta elementdan iborat o‘rin almashtirishlar $P_n(n_1,n_2,...,n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

20.2-misol. Abonent telefon nomerini terayotganda oxirgi ikkita raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilganlik ehtimolini toping.

Yechish. Oxirgi ikki raqamni $A_{10}^2=90$ ta usul bilan terish mumkin, demak mumkin bo‘lgan jami elementar hodisalar soni 90 ga teng. Bu elementar hodisalar yagona mumkin bo‘lgan va teng imkoniyatli. $A=$ {telefon nomeri to‘g‘ri terilgan} hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun, klassik ta’rifga ko‘ra

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}\approx 0.011.$$

20.3. Ehtimolning statistik va geometrik ta’riflari.

A hodisa n ta bog‘liqsiz tajribalarda m marta ro‘y bersin. m son A hodisaning chastotasi (ro‘y berishlar soni), $\frac{m}{n}$ munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi va $W(A)$ bilan belgilanadi, demak $W(A)=\frac{m}{n}$.

2-Ta'rif. Agar tajribalar soni yetarlicha ko'p bo'lib, bu tajribalarda A hodisaning nisbiy chastotasi biror o'zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning *statistik ehtimoli* deyiladi.

20.3-misol. 10000 ta tarvuzdan 34 tasi tashish paytida yorilgan. Yorilgan tarvuzlarning nisbiy chastotasini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra hammasi bo'lib $n=10000$ ta tarvuz bor, ulardan $m=34$ tasi yorilgan. Demak, yorilgan tarvuzlarning nisbiy chastotasi $W(A)=\frac{m}{n}=\frac{34}{10000}=0,0034$ ga teng.

Hodisaning ehtimolini klassik ta'rifga ko'ra Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimoldan foydalanamiz.

O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi. $A=\{X\in D\}-X$ nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

3-Ta'rif. A hodisaning geometrik ehtimoli deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda mes orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

20.4-misol (uchrashuv haqidagi masala). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa, u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi kishi kelgan momentni x, ikkinchisiniki y bo'lsin: $0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60.$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x-y|\le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. x va y larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz. U holda

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

20.4. Shartli ehtimollik. Hodisalar to‘la guruhi.

A va B hodisalar biror tajribadagi hodisalar bo‘lsin.

4-Ta’rif. B hodisaning A hodisa ro‘y bergandagi *shartli ehtimoli* deb,

$$\frac{P(A\cdot B)}{P(A)} \quad (P(A)\neq 0)$$

nisbatga aytiladi. Bu ehtimolni $P(B/A)$ orqali belgilaymiz.

Shartli ehtimollik ham Kolmogorov aksiomalarini qanoatlantiradi:

1. $P(B/A)\geq 0.$
2. $P(\Omega/A)=\frac{P(\Omega\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1.$
3. Agar $B\cdot C=\varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$P((B+C)/A)=\frac{P((B+C)\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A+C\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B\cdot A)+P(C\cdot A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{P(B\cdot A)}{P(A)}+\frac{P(C\cdot A)}{P(A)}=P(B/A)+P(C/A),$$

chunki $B\cdot C=\varnothing$ ekanligidan, $(B\cdot A)\cdot(C\cdot A)=B\cdot A\cdot A\cdot C=B\cdot C\cdot A=\varnothing\cdot A=\varnothing.$

20.5-misol. Idishda 3 ta oq va 7 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket bittadan 2 ta shar olinadi. Birinchi shar oq rangda bo‘lsa, ikkinchi sharning qora rangda bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Bu misolni ikki usul bilan yechish mumkin: $A=$\{birinchi shar oq rangda\}, $B=$\{ikkinchi shar qora rangda\}. A hodisa ro‘y berganidan so‘ng idishda 2 ta oq va 7 ta qora shar qoladi. Shuning uchun

$$P(B/A)=\frac{7}{9}.$$

Shartli ehtimollik formulasidan foydalanib, hisoblaymiz:

$$P(A)=\frac{3}{10},\quad P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Shartli ehtimollik formulasiga ko‘ra: $P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{7/30}{3/10}=\frac{7}{9}.$

Shartli ehtimollik formulasidan hodisalar ko‘paytmasi ehtimoli uchun ushbu formula kelib chiqadi:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Bu tenglik ko‘paytirish qoidasi (teoremasi) deyiladi. Bu qoidani n ta hodisa uchun umumlashtiramiz:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

Agar $P(A/B)=P(A)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda A hodisa B hodisaga bog‘liq emas deyiladi va $A\perp B$ orqali belgilanadi.

Agar $A\perp B$ bo‘lsa, u holda formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A).$$

A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq emas deyiladi, agar $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa.

Lemma. Agar $A\perp B$ bo‘lsa, u holda $A\perp\overline{B}$, $\overline{A}\perp B$ va $\overline{A}\perp\overline{B}$ bo‘ladi.

***5-Ta’rif*.** Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro‘y berishi muqarrar hodisa bo‘lsa, u holda tajribaning bu hodisalari to‘plami hodisalar to‘la guruhini tashkil etadi deyiladi.

20.6-misol. Mergan nishonga qarata 2 ta o‘q uzadi. $A_1=$\{nishonga bitta o‘q tegishi\}, $A_2=$\{nishonga ikkita o‘q tegishi\} va $A_3=$\{nishonga tegmaslik\} hodisalar to‘la gruppa tashkil qiladi.

***1-Teorema*.** To‘la guruh tashkil etuvchi $A_1,A_2,\ldots,A_n$ hodisalarning ehtimollari yig‘indisi birga teng: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$

20.5. To‘la ehtimol va Bayes formulalari.

$A_1,A_2,\ldots,A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la guruhini tashkil etsin, ya’ni $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ va $A_i\cdot A_j=\varnothing,\ \ i\neq j$. U holda $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$ ekanligini hisobga olib, B ni

$$B=B\Omega=B(A_1+A_2+\ldots+A_n)=BA_1+BA_2+\ldots+BA_n$$

ko‘rinishda yozamiz. $A_i\cdot A_j=\varnothing,\ \ i\neq j$ ekanligidan $(B\cdot A_i)\cdot(B\cdot A_j)=\varnothing,\ \ i\neq j$ ekani kelib chiqadi. B hodisaning ehtimolini hisoblaymiz:

$$P(B)=P(BA_1+BA_2+\ldots+BA_n)=P(BA_1)+P(BA_2)+\ldots+P(BA_n).$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P(B\cdot A_i)=P(A_i)\cdot P(B/A_i),\ \ i=\overline{1,n}$ bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)P(B/A_n).$$

Agar $B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i$ bo‘lsa, u holda

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik to‘la ehtimol formulasi deyiladi.

20.7-misol. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25% ni, ikkinchi ishchi 35% ni, uchinchisi esa 40% ni tayyorlaydi. Bu uchala ishchi tayyorlagan detallarning sifatsiz bo‘lish ehtimollari mos ravishda 0,05, 0,04 va 0,02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. $A_i =$ {detal $i-$ishchi tomonidan tayyorlangan} $i=\overline{1,3}$, $B =$ {tekshirish uchun olingan detal sifatsiz} hodisalarni kiritamiz va quyidagi ehtimollarni hisoblaymiz:

$$P(A_1) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25,\ P(A_2) = \frac{35\%}{100\%} = 0,35,\ P(A_3) = \frac{40\%}{100\%} = 0,4,$$

$P(B/A_1) = 0,05,\ P(B/A_2) = 0,04,\ P(B/A_3) = 0,02.$ To‘la ehtimol formulasiga asosan, $P(B) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0345.$

A_i va B hodisalar ko‘paytmasi uchun

$$P(A_i \cdot B) = P(B) \cdot P(A_i / B),$$
$$P(A_i \cdot B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

tengliklar o‘rinli. Bu tengliklardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(B) \cdot P(A_i / B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i),$$
$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(B)}.$$

Oxirgi tenglik Bayes formulasi deyiladi. Bayes formulasi yana gipotezalar teoremasi deb ham ataladi. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarni gipotezalar deb olsak, u holda $P(A_i)$ ehtimollik A_i gipotezaning aprior (“a priori” lotincha tajribagacha), $P(A_i / B)$ shartli ehtimollik esa aposterior (“a posteriori” tajribadan keyingi) ehtimolligi deyiladi.

20.8-misol. 1.23-misolda sifatsiz detal ikkinchi ishchi tomonidan tayyorlangan bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechish. Bayes formulasiga ko‘ra:

$$P(A_2 / B) = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02} = \frac{28}{69} \approx 0,4.$$

20.6. Erkli sinovlar ketma-ketligi va Bernulli sxemasi.

Agar bir necha tajribalar o‘tkazilayotganida har bir tajribada biror A hodisaning ro‘y berish ehtimoli boshqa tajriba natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tajribalar bog‘liqsiz tajribalar deyiladi.

n ta bog‘liqsiz tajribalar o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(A)=p$ va ro‘y bermasligi ehtimoli $P(\overline{A})=1-p=q$ bo‘lsin.

Masalan, 1) nishonga qarata o‘q uzish tajribasini ko‘raylik. Bu yerda $A=${o‘q nishonga tegdi} va $\overline{A}=${o‘q nishonga tegmadi}; 2) n ta mahsulotni sifatsizlikka tekshirilayotganda $A=${mahsulot sifatli} va $\overline{A}=$ {mahsulot sifatsiz} bo‘ladi.

Bu kabi tajribalarda elementar hodisalar fazosi Ω faqat ikki elementdan iborat bo‘ladi: $\Omega=\{\omega_0, \omega_1\}=\{\overline{A}, A\}$, bu yerda ω_0-A hodisa ro‘y bermasligini, ω_1-A hodisa ro‘y berishini bildiradi. Bu hodisalarning ehtimollari mos ravishda p va q $(p+q=1)$ lar orqali belgilanadi.

n ta bog‘liqsiz tajribalar o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(A)=p$ va ro‘y bermasligi ehtimoli $P(\overline{A})=1-p=q$ bo‘lsin.

6-Ta’rif. Agar n ta bog‘liqsiz tajribaning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p ga va ro‘y bermasligi ehtimoli q ga teng bo‘lsa, u holda A hodisaning m marta ro‘y berish ehtimoli quyidagi ifodaga teng bo‘ladi:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,...n..$$

Bu formula *Bernulli formulasi* deyiladi.

$P_n(m)$ ehtimolliklar uchun $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n(m)=1$ tenglik o‘rinlidir.

Xossalari:

1. $\sum\limits_{m=0}^{n} P_n(m)=1.$

2. Agar $m_1 \le m \le m_2$ bo‘lsa, $P_n(m_1 \le m \le m_2)=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$

3. n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning kamida bir marta ro‘y berish ehtimoli $P=1-q^n$ bo‘ladi, chunki

$$P_n(0)+\underbrace{P_n(1)+...+P_n(n)}_{P}=1 \Rightarrow P=1-P_n(0)=1-q^n.$$

4. Agar $P_n(m)$ ehtimollikning eng katta qiymati $P_n(m_0)$ bo‘lsa, u holda m_0 quyidagicha aniqlanadi: $np-q \le m_0 \le (n+1)p$, m_0-eng ehtimolli son deyiladi va

a) agar $np-q$ kasr son bo‘lsa, u holda m_0 yagonadir;

b) agar $np-q$ butun son bo‘lsa, u holda m_0 ikkita bo‘ladi.

20.9-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o‘ynashmoqda. Qaysi hodisaning ehtimoli katta: 4 ta partiyadan 2 tasida yutishmi yoki 6 ta partiyadan 3 tasida yutish (durang natijalar hisobga olinmaydi)?

Yechish. Birinchi holda: $n=4,\ m=2,\ p=\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko‘ra

$$P_4(2)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=6\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{6}{16}.$$

Ikkinchi holda $n=6,\ m=3,\ p=\frac{1}{2}$ va Bernulli formulasiga ko‘ra $P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-3}=20\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{5}{16}$. $\frac{6}{16}>\frac{5}{16}\Rightarrow P_4(2)>P_6(3)$. Demak, 4 ta partiyadan 2 tasida yutish ehtimoli katta ekan.

Agar p $(p\ne 0,\ p\ne 1)$ ehtimol nol atrofidagi son bo‘lmasa va n yetarlicha katta bo‘lsa, u holda $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash uchun Muavr-Laplas teoremasidan foydalanish mumkin.

2-Teorema (Muavr-Laplas). Agar n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $0<p<1$ bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n larda

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

taqribiy formula o‘rinli. Bu yerda $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiya Gauss funksiyasi deyiladi.

$\varphi(x)$ funksiya uchun x argument qiymatlariga mos qiymatlari jadvali tuzilgan (1-ilova). Jadvaldan foydalanayotganda quyidagilarni e’tiborga olish kerak:

1) $\varphi(x)$ funksiya juft funksiya, ya’ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$;

2) agar $x \geq 4$ bo‘lsa, $\varphi(x) = 0$ deb olish mumkin.

20.10-misol. Nishonga bitta o‘q uzilganda o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga teng. 200 ta o‘q uzilganda nishonga 160 ta o‘q tegishi ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda $n = 200,\ m = 160,\ p = 0,7,\ q = 1 - p = 0,3.$

$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = \sqrt{42} \approx 6,48, \quad x = \dfrac{160 - 200 \cdot 0,7}{\sqrt{42}} = \dfrac{20}{6,48} \approx 3,09.$ Agar $\varphi(3,09) \approx 0,0034$ ekanligini hisobga olsak, u holda $P_{200}(160) \approx \dfrac{1}{6,48} \cdot 0,0034 \approx 0,0005.$

Agar n yetarlicha katta va A hodisa n ta tajribada kamida m_1 va ko‘pi bilan m_2 marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ ni topish talab etilsa, u holda Muavr-Laplasning integral teoremasidan foydalanish mumkin.

3-Teorema (Muavr-Laplas). Agar A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $(0 < p < 1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

taqribiy formula o‘rinli, bu yerda $x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1,2$.

Bu formuladan foydalanilganda hisoblashlarni soddalashtirish uchun maxsus funksiya kiritiladi:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dt.$$

Bu funksiya Laplas funksiyasi deyiladi.

1. $\Phi_0(x)$ funksiya toq funksiya.

2. $\Phi_0(-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = [t = -z] = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\Phi_0(x).$

3. Agar $x \geq 5$ bo‘lsa, u holda $\Phi_0(x) = 0,5$ deb hisoblash mumkin.

Teoremadagi tenglikning o‘ng qismini $\Phi_0(x)$ funksiya orqali ifodalaymiz:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1).$$

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – Laplasning funksiyasi bilan bir qatorda Gauss funksiyasi deb nomlanuvchi funksiyadan ham foydalaniladi:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Bu funksiya uchun $\Phi(-x)+\Phi(x)=1$ tenglik o‘rinli va u $\Phi_0(x)$ funksiya bilan

$$\Phi(x)=0,5+\Phi_0(x)$$

formula orqali bog‘langan.

20.11-misol. Sex ishlab chiqargan mahsulotining o‘rtacha 96% sifatli. Bazada mahsulotni qabul qilib oluvchi sexning 200 ta mahsulotini tavakkaliga olib tekshiradi. Agar tekshirilgan mahsulotlardan sifatsizlari soni 10 tadan ko‘p bo‘lsa, butun mahsulotlar partiyasi sifatsiz deb sexga qaytariladi. Mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimolini toping.

Yechish. Bu yerda $n=200,\ p=0,04$ (mahsulotning sifatsiz bo‘lish ehtimoli), $q=0,96,\ m_1=0,\ m_2=10$ va mahsulotlar partiyasining qabul qilinishi ehtimoli $P_{200}(0\le m\le 10)$ ni hisoblaymiz:

$$x_1=\frac{0-200\cdot 0,04}{\sqrt{200\cdot 0,04\cdot 0,96}}\approx -2,89,\quad x_2=\frac{10-200\cdot 0,04}{\sqrt{200\cdot 0,04\cdot 0,96}}\approx 0,72,$$

$P_{200}(0\le m\le 10)=\Phi_0(0,72)-\Phi_0(-2,89)=0,26424+0,49807=0,7623.$ Agar $\Phi(x)$ funksiyadan foydalansak, $P_{200}(0\le m\le 10)=\Phi(0,72)-\Phi(-2,89)=$
$=0,7642-(1-\Phi(2,89))=0,7642-(1-0,998074)=0,7623.$

Agar n va m lar katta sonlar bo‘lsa, u holda Bernulli formulasidan foydalanib, $P_n(m)$ ehtimollikni hisoblash qiyinchilik tug‘diradi. Xuddi shunday, $p\,(q)$ ehtimollik juda kichik qiymatlar qabul qilsa ham qiyinchiliklarga duch kelamiz. Shu sababli, $n\to\infty$ da $P_n(m)$ uchun asimptotik (taqribiy) formulalar topish muammosini tug‘diradi.

7-Ta’rif (Puasson). Agar $n\to\infty$ da A hodisaning ro‘y berish ehtimoli p har bir tajribada cheksiz kamaysa (ya’ni, $np\to\lambda>0$), u holda

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad m=1,2,...$$

Bu formula Puassonning asimptotik formulasi deyiladi.

20.12-misol. Telefon stansiyasi 2000 ta abonentga xizmat ko‘rsatadi. Agar har bir abonent uchun uning bir soat ichida qo‘ng‘iroq qilishi ehtimoli 0,003 bo‘lsa, bir soatning ichida 5 ta abonent qo‘ng‘iroq qilishi ehtimolini toping.

Yechish. $n = 2000,\ p = 0{,}003,\ m = 5,\ \lambda = np = 2000 \cdot 0{,}003 = 6 < 10.$

Demak, Puasson formulasiga ko‘ra $P_{2000}(5) = \frac{6^5}{5!} e^{-6} \approx 0{,}13.$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

20.1. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta shunday tajriba o‘tkazilganda hodisaning kamida 70 va ko‘pi bilan 80 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

20.2. Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 10000 ta bir jinsli shartnomalar o‘rganildi. Bu guruhdagi har bir mijozning tabiiy sabablar bilan o‘lish ehtimoli 0,004 ga teng. Sug‘urta kompaniyasiga a) 10 tadan ko‘p bo‘lmagan da’voning kelib tushishi; b) 100 tadan 120 tagacha da’voning kelib tushishi ehtimolini toping.

20.3. Sug‘urta kompaniyasi shaxtada ishlovchi mehnat jamoasi bilan tibbiy sug‘urta bo‘yicha shartnoma tuzdi. Shaxtyorning sil kasali bilan og‘rishi ehtimoli 0,002 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan nechta shaxtyordan kasallanmasligini 0,9 ehtimol bilan kutish mumkin?

20.4. 900 ta bog‘liqmas tajribaning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisaning ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi 0,02 dan oshmasligi ehtimolini toping.

20.5. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi 0,02 dan katta bo‘lmasligini 0,95 ehtimol bilan kutish uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak?

20.6. Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 10 yil muddatga tuziladigan shartnomalarni ko‘raylik. Bu sug‘urta shartnomalari bo‘yicha to‘lovni talab etish ehtimoli 0,25 ga teng. Sug‘urta kompaniyasi 100 ta bog‘liqmas sug‘urta shartnomalarini tuzdi.

a) 30 tadan ortiq to‘lovni talab etish; b) rosa 25 ta to‘lovni talab etish ehtimolini toping.

20.7. Bankka keluvchilar soni Puasson taqsimotiga bo‘ysinadi. Bankka har 3 minutda o‘rtacha 1 ta mijoz kirib keladi.

a) 1 minut mobaynida bankka 1 ta mijoz kirishi ehtimoli nimaga teng?

b) 1 minut mobaynida bankka hech bo‘lmaganda 3 ta mijoz kirishi ehtimoli nimaga teng?

20.8. Zargarlik do‘koni sotuvchisining aniqlashicha, xaridorlar bilan yuzlashganda zargarlik buyumini sotish ehtimoli 0,03 ga teng. Ish kuni mobaynida sotuvchiga 100 ta xaridor murojaat qildi. Uning kamida bitta buyumni sotish ehtimoli nimaga teng?

20.9. Restoran boshqaruvchisining tajribasidan ma’lumki, kechki buyurtmani buyurgan mijozlarning 70% restoranga kechki taomni tanavvul qilishga keladilar. Restoranda bo‘sh stollar 15 ta bo‘lishiga qaramay, boshqaruvchi bugun kechqurunga 20 ta buyurtmani qabul qilishga qaror qildi. 15 tadan ko‘p buyurtma bergan mijozlarning restoranga kelishi ehtimoli nimaga teng?

20.10. Universitetga o‘qishga kirish uchun kirish imtihonlarini muvaffaqiyatli topshirish kerak. Abiturientlarning o‘rtacha 25% bu imtihonlarni muvaffaqiyatli topshira oladi. Qabul hay’atiga 1889 ta ariza kelib tushdi. Hech bo‘lmaganda 500 abiturientning imtihonlarni muvaffaqiyatli topshirishi ehtimoli nimaga teng?

20.11. O‘g‘il va qiz bolalar tug‘ilish ehtimolini bil xil deb olib, Bernulli tengsizligi yordamida yangi tug‘ilgan 1000 ta bolalardan o‘g‘il bolalar soni 465 bilan 535 orasida bo‘lish ehtimolini baholang.

20.12. Akademiya talabalarining 38% i statistikadan o‘tkazilgan imtihonni a’lo va yaxshi baholarga topshirishdi. Tasodifiy tanlangan 100 talabadan kamida 30 tasining statistikadan a’lo va yaxshi baholar olishi ehtimoli nimaga teng?

20.13. Shahardagi o‘rta maktablardagi 500 ta bitiruvchilardan 72% i oliygohga o‘qishga kirishga tayyorlanadilar. Tasodifiy tanlangan bitiruvchilar ichida oliygohga kirishni xohlovchilar ulushi 80% dan yuqori bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

20.14. Talabalarning 50% i “statistika” fanidan bo‘ladigan imtihonni “a’lo”ga topshiradilar. Tanlanmadagi 100 ta talabadan “a’lo”ga topshiradiganlari 50% dan ko‘p bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

20.15. Do‘kon boshqaruvchisi tajribasiga ko‘ra, do‘konga kiruvchi xaridorlarning 25% xaridni amalga oshiradilar. Deylik, do‘konga 200 xaridor kirdi.

a) xaridni amalga oshiruvchi xaridorlar ulushi nechaga teng? b) tanlanma ulushining dispersiyasi nimaga teng? v) tanlanma ulushining o‘rtacha kvadratik chetlanishi nimaga teng? g) tanlanma ulushining 0,25 bilan 0,3 orasida bo‘lishi ehtimoli nimaga teng?

20.16. 100 ta lotereya chiptalaridan 5 tasi yutuqli. Sotib olingan a) 2 ta chiptadan; b) 4 ta chiptadan hech bo‘lmaganda bittasi yutuqli chiqish ehtimolini toping.

20.17. 100 dollarlik kupyuralar ichida 1% i qalbaki bo‘lib, valyuta almashtirish shohobchasidagi ishchi ularning o‘ndan bir qismini beixtiyor haqiqiy deb qabul qiladi. Bir kunda ushbu shohobchada taxminan 200 ta 100 dollarlik kupyura qabul qilinsa, ulardan kamida bittasi qalbaki bo‘lish ehtimolini toping.

20.18. Mijoz o‘z brokeriga qimmatli qog‘ozlarni sotish yoki sotib olishni so‘rab murojaat qiladi. Bunday so‘rovlar ketma-ketligini oddiy oqim deb qabul qilamiz. Haftasiga o‘rtacha bitta so‘rov tushadi. Oxirgi so‘rov ikki kun avval tushdi. Kelayotgan sutkada yana bir so‘rov tushishi ehtimoli qanday?

20.19. Aniq bir reysga dastlabki buyurtmani bergan yo‘lovchilarning o‘rtacha 5% undan foydalanmaydi. Agar aviakompaniya 155 o‘rinli samolyotga 160 ta chipta sotgan bo‘lsa, buyurtma bergan va uchishni rejalashtirayotgan har bir yo‘lovchi uchun o‘rin yetarli bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

20.20. Kompyuter sistemasi 45 ta bir xil mikroelementlardan iborat. Ixtiyoriy mikroelementning belgilangan vaqtda ishlash ehtimoli 0,8 ga teng. Kerakli amalni bajarish uchun kamida 30 mikroelementning ish holatida bo‘lishi talab etiladi. Kerakli amalning muvaffaqiyat bilan bajarilish ehtimoli nimaga teng?

SINOV TESTI

1. Matritsa mazmuni qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
A) sonlar yig‘indisi
B) sonlar ko‘paytmasi
C) sonlar jadvali
D) sonlar to‘plami

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

A) 3×3 B) 3×2 C) 2×2 D) 2×3

3. A=$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ matritsaning elementlari bo‘yicha $a_{13} + a_{21}$ yig‘indini toping.

A) -4 B) 5 C) 4 D) -5

4. Birlik matritsani ko‘rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ matritsa bo‘yicha 2A matritsani toping.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

6. Qanday matritsalarni qo‘shish va ayirish mumkin?
A) ustunlar soni bir xil bo‘lgan matritsalarni
B) satrlar soni bir xil bo‘lgan matritsalarni
C) har qanday matritsalarani
D) faqat kvadrat matritsalarni

7. Ushbu M va N matritsalarning $M + N$ yig‘indisini toping:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

8. Quyidagi A va B matritsalarning $A \cdot B$ ko‘paytmasini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A) $AB=\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}$ B) $AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}$ C) $AB=\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$ D) $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

9. $\begin{vmatrix}5 & -2\\3 & 4\end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

A) 26 B) -26 C) 1414 D) 0

10. $\begin{vmatrix}x-1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}=0$ tenglamani yeching.

A) $x=7$ B) $x=-1$ C) $x=2$ D) $x=4$

11. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 2 & 4\\3 & 1 & 6\end{vmatrix}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -2

12. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\x & 1 & 1\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

A) $x=1$ B) $x=2,5$ C) $x=0,5$ D) $x=0$

13. Ushbu IV- tartibli determinant qiymatini toping:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 5 & 6 & 7\\2 & 4 & 6 & 8\\0 & 0 & 0 & 10\end{vmatrix}.$$

A) $x=24$ B) $x=-300$ C) $x=300$ D) $x=0$

14. Ushbu determinantning A_{23} algebraik to‘ldiruvhisini hisoblang:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\5 & -2 & 0\\3 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

A) 0 B) 7 C) -7 D) 35

15. Agar $M=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ bo‘lsa, M^{-1} teskari matritsani toping.

A) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsientlarining yig‘indisini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

A) 5 B) 10 C) 0 D) 15

17. Matritsaviy ko‘rinishdagi $AX = B$ tenglamani yeching:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

A) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ B) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ C) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ D) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

18. Quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi haqidagi qaysi tasdiq o‘rinli?

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

A) Sistema cheksiz ko‘p yechimga ega
B) Sistema yagona yechimga ega
C) Sistema yechimga ega emas
D) Sistemaning yechimi nollardan iborat

19. Tenglamalar sistemasini yeching va $x_1^2 + x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

A) 2 B) 1 C) 5 D) 3

20. Ushbu 2 noma’lumli 3 ta chiziqli tenglamalar sistemaning yechimini toping:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases}.$$

A) $\begin{cases} x_1 = C/4 \\ x_2 = C \end{cases}$ B) $\begin{cases} x_1 = 3C/4 \\ x_2 = C \end{cases}$ C) $\begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 1/4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x_1 = 3C/4 \\ x_2 = C/4 \end{cases}$

21. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ va $\vec{b} = 2\vec{j}$ bo‘lsa, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini ko‘rsating.

A) $(-4; 12)$ B) $(-4; 0)$ C) $(4; 0)$ D) $(2; -6)$

22. To‘rtburchakning uchi $M(2; 4)$, $N(-4; 0)$ va $P(2; -2)$ uchlari berilgan. Agar $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{QP}$ bo‘lsa, Q uchining koordinatalarini toping.

A) $(-7; -2)$ B) $(3{,}5; -1)$ C) $(7; -1)$ D) $(3{,}5; 2)$

23. $\vec{m}(-1; 2)$, $\vec{p}(4; -2)$, va $\vec{n}(2; -3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ vektorni $\vec{m}$ va $\vec{p}$ vektorlar orqali ifodalang.

A) $-\frac{5}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{p}$ B) $-\vec{m} + 2\vec{p}$

C) $3\vec{m} - 4\vec{p}$ D) $2\vec{m} + \vec{p}$

24. Agar $A(-5; 2; 8)$ nuqta va $\overrightarrow{AB}(-3; 4; 1)$, $\overrightarrow{BD}(-2; 4; 1)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $ABCD$ parallelogram C uchining koordinatalari yig‘indisini toping.

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12

25. $\vec{a}(1; 4/3)$ vektor berilgan. $3\vec{a}$ vektorning modulini toping.

A) 4,5 B) 3,5 C) 5 D) 5,5

26. $\vec{a}(1; 2; 3)$ va $\vec{b}(4; -2; 9)$ bo‘lsa, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

A) 5,5 B) 4 C) 13 D) 8

27. $\vec{a}(-2; 6; 3)$ vektorga yo‘nalishdosh bo‘lgan birlik vektorning koordinatalarini toping.

A) $\left(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$ B) $(-1; -3; -1)$

C) $\left(-\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}\right)$ D) $\left(-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right)$

28. $\vec{a}(3; 1)$ va $\vec{b}(1; 3)$ vektorlarga qurilgan parallelogram diagonallarining uzunliklari yig‘indisini toping.

A) $2\sqrt{2}$ B) 6 C) $6\sqrt{2}$ D) 8

29. $|\vec{a}| = \sqrt{137}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ va $|\vec{a} - \vec{b}| = 18$ bo‘lsa, $|\vec{b}|$ ni toping.

A) $11\sqrt{6}$ B) 15 C) 12 D) 8

30. $\vec{a}(4; -12; z)$ vektorning moduli 13 ga teng bo‘lsa, z ning qiymatini toping.

A) 3 B) 4 C) -3 D) ± 3

31.Absissa o‘qiga nisbatan $M(-3; 5)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan nuqtani toping.

A)$(-3; -5)$ B)$(3; 5)$ C)$(3; -5)$ D)$(-3; 5)$

32. Uchlari $A(2;4)$, $B(-3;-2)$, $C(-3;4)$ va $D(2;-2)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni perimetrini toping.
A) 10 B) 23 C) 40 D) 22
33.Ordinata o‘qiga nisbatan $M(-4;-9)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan nuqtani toping.
A)$(4;9)$ B)$(4;-9)$ C)$(-4;-9)$ D)$(-4;9)$
34. Uchlari $A(1;1)$, $B(-2;1)$ va $C(1;7)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzini toping.
A) 9 B) 18 C) 8 D) 5
35. $ABCD$ parallelogrammda $A(1;3)$ va $C(-5;7)$ bo‘lsa, uning digonallar kesishgan nuqtasi koordinatasini toping.
A)$(5;2)$ B)$(-4;3)$ C)$(-2;5)$ D)$(2;1)$
36. $ABCD$ rombda $B(4;3)$ uchi va $O(2;1)$ diagonallar kesishgan nuqtasi koordinatasi bo‘lsa, uning $D(x;y)$ uchi koordinatasini toping.
A)$(1;2)$ B)$(0;-1)$ C)$(2;2)$ D)$(1;3)$
37. Agar $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ va $\varphi = 30^0$ bo‘lsa, $|\vec{a}\vec{b}| =$?
A) 20 B) 10 C) $10\sqrt{3}$ D) 41
38. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(1;0;4)$ va $\vec{c}(5;-2;0)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ hisoblansin.
A) 0 B) 23 C) -46 D) -23
39. m parametrning qanday qiymatlarida $\vec{a}(2;0;1)$, $\vec{a}(1;1;m)$, va $\vec{c}(-1;3m;1)$ vektorlar komplanar bo‘ladi?
A) 1 va $-0{,}5$ B) 1 va -1
C) 0,5 va 1 D) 0,5 va -1
40. $\vec{a}(2;4;1)$ va $\vec{b}(-1;1;3)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.
A)$(11;-7;6)$ B)$(11;3;8)$
C)$(13;7;6)$ D)$(14;7;1)$
41. $\vec{a}(-2;1;3)$ va $\vec{b}(0;1;2)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.
A)$(-3;7;-6)$ B)$(11;-3;8)$
C)$(-1;4;-2)$ D)$(14;-7;-1)$
42. $\vec{a}(1;2;1)$ va $\vec{b}(1;-1;3)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.
A)$(-1;-7;6)$ B)$(7;-2;-3)$
C)$(-3;7;-6)$ D)$(-4;-7;1)$

43. $\vec{a}(1;0;4)$ va $\vec{b}(3;-2;4)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.

A) 19 B) 15 C)13 D)14

44. $\vec{a}(3;-1;2)$ va $\vec{b}(3;1;0)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.

A) 19 B) 8 C) 5 D) 6

45. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-y=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

A)$(3;2)$ B)$(1;-1)$ C)$(1;1)$ D)$(3;3)$

46.$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

A)$(3;-2)$ B)$(7;-1)$ C)$(1;1)$ D)$(3;3)$

47. $\vec{a}=8\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ va $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchakni aniqlang.

A) 90^0 B) 30^0 C) 0^0 D) 60^0

48. $\vec{a}(1;2)$ va $\vec{b}(2;1)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini toping.

A) $1/5$ B) $3/5$ C) $4/7$ D) $2/3$

49. $\vec{a}(1;6;-4)$, $\vec{b}(-3;2;7)$ va $\vec{c}(-5;-6;2)$vektorlar berilgan bo‘lsa $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ aralash ko‘paytmani toping.

A) -240 B) 240 C) 244 D) 144

50. $\vec{a}(1;6;-4)$, $\vec{b}(-3;2;7)$ va $\vec{c}(-5;-6;2)$ vektorlar berilgan bo‘lsa $[\vec{a}\,\vec{c}]\vec{b}$ aralash ko’paytmani toping.

A) 156 B) 240 C) -240 D) 144

51. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ burchak tashkil qiladi. $|\vec{a}|=3$ va $|\vec{b}|=4$ bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}$ ni toping.

A) 4 B) 6 C)-6 D)-9

52. $\vec{a}(5;2)$, $\vec{b}(7;-3)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o‘zida ikkita $\vec{a}\vec{x}=38$, $\vec{b}\vec{x}=30$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

A)$(-6;4)$ B)$(6;4)$ C)$(-4;6)$ D)$(6;-4)$

53. Tomonlari birga teng bo‘lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ deb $\vec{a}\,\vec{b}+\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{c}$ ifoda hisoblansin.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C)$\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$

54. $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \alpha\vec{k}$ vektorlar α ning qanday qiymatida o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi?

A) -6 B) 3 C) -3 D) 2

55. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bir-birlari bilan 60^0 ga teng bo‘lgan burchak tashkil qilsa, hamda $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ va $|\vec{c}| = 6$ berilgan bo‘lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning modulini aniqlang.

A) 12 B) 10 C) 9 D) 11

56. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$

A) 3 B) 4 C) -3 D) 2

57. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ -4 & -21 \end{vmatrix} = 1$

A) 17 B) 14 C) 15 D) -17

58. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

A) 92 B) 100 C) -87 D) 102

59. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 8 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

A) 51 B) 207 C) -43 D) 0

60. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} 3y - x = -17 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$$

A) $(5; -2)$ B) $(2; -5)$ C) $(-2; 5)$ D) $(-5; 2)$

61. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}$$

A) $(-3; 2; 1)$ B) $(2; 3; -1)$ C) $(1; 2; 3)$ D) $(3; 2; -1)$

62. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ni bilgan holda, quyidagini hisoblang: $[\vec{a}\,\vec{b}]^2$.

A) 3 B) 4 C) 9 D) 2

63. $\vec{a}(3;-1;-2)$ va $\vec{b}(1;2;-1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko‘paytmalar koordinatasini toping: $[\vec{a}\,\vec{b}]$.

A)$(5;-1;7)$ B)$(-3;1;-7)$ C)$(5;1;-4)$ D)$(5;1;7)$

64. $\vec{a}(3;-1;-2)$ va $\vec{b}(1;2;-1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko‘paytmaning koordinatasini toping: $[(2\vec{a}+\vec{b})\vec{b}]$.

A)$(5;1;6)$ B)$(10;2;14)$ C)$(2;5;3)$ D)$(4;1;5)$

65. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ va $C(3;2;1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko‘paytmaning koordinatasini toping: $[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}]$.

A)$(8;2;-4)$ B)$(5;3;12)$ C)$(6;-4;-6)$ D)$(3;-2;5)$

66. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ va $C(3;2;1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko‘paytmalar koordinatalarini toping:$[(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-2\overrightarrow{\mathrm{CA}})\overrightarrow{CB}]$.

A)$(12;-8;12)$ B)$(10;4;-6)$ C)$(-11;6;4)$ D)$(-12;8;12)$

67. $\vec{a}(2;-2;1)$ va $\vec{b}(2;3;6)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini hisoblang.

A) $sin\alpha=\frac{5\sqrt{17}}{21}$ B) $sin\alpha=-\frac{3\sqrt{17}}{21}$

C) $sin\alpha=-\frac{5\sqrt{17}}{21}$ D) $sin\alpha=\frac{4\sqrt{17}}{21}$

68. $A(3;-2;5)$, $B(1;4;-3)$ va $C(-6;2;4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, $[\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}]\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ aralash ko‘paytmasini toping.

A) -13 B) -28 C) 0 D) 28

69. $C(-2;4;3)$, $D(1;-5;6)$ va $E(3;7;-4)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, $(2\overrightarrow{\mathrm{CD}}-3\overrightarrow{\mathrm{DE}})(\overrightarrow{\mathrm{DC}}+3\overrightarrow{\mathrm{CE}})(2\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{ED}})$ aralash ko‘paytmasini toping.

A) -3 B) 0 C) 3 D)-2

70. $\vec{a}=\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+7\vec{k}$ va $\vec{c}=-5\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $[\vec{a}\,\vec{c}]\vec{b}$ aralash ko‘paytmasini toping.

A) 240 B) 244 C) -240 D)120

71. $\vec{a}=\vec{\imath}+6\vec{\jmath}-4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+7\vec{k}$ va $\vec{c}=-5\vec{\imath}-6\vec{\jmath}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $(\vec{b}+2\vec{a})(\vec{c}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{c})$ aralash ko‘paytmasini toping.

A) -920 B) 940 C) 960 D)-930

72. $\vec{a}(6;-4;8)$ va $\vec{b}(-2;4;0)$ vektorlar berilgan bo‘lsa: $\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2})\right]$ topilsin.

A)$(24;12;-12)$ B)$(-14;13;12)$

C)$(12; 24; -12)$ D)$(-24; -12; 12)$

73. $\vec{a}(8; 4; 1)$ va $\vec{b}(2; -2; 1)$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuzi hisoblansin.

A) $8\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{2}$ C)$18\sqrt{3}$ D)$9\sqrt{2}$

74. Berilganlarga ko‘ra $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini toping. $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath}$, $\vec{c} = \vec{\jmath}$.

A) 1 B) -1 C) 0 D)-2

75. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini toping.
$\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{c} = \vec{k}$.

A) 1 B) -1 C) 0 D)-2

76. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil qiladi va $\vec{c}$ vektor bilan perpendikulyar. $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ va $|\vec{c}| = 4$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

A) 20 B) 36 C)-12 D) 24

77. $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{\jmath} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left([\vec{a}\vec{c}]\vec{b}\right)$ ni toping.

A) -15 B) 12 C) 15 D) 10

78. $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{\jmath} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left[(\vec{a} - 2\vec{c})\left(3\vec{b} - 2\vec{a}\right)\right]$ ni toping.

A)$(5; -40; 5)$ B)$(40; 15; -5)$
C)$(-5; 40; -5)$ D)$(-15; 45; 5)$

79. $\vec{a} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]\vec{c}$ ni toping.

A)-146 B) -156 C) 180 D) -180

80. $\vec{a} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left[\vec{a}[\vec{a}\vec{c}]\right]\left[\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]\right]$ ni toping.

A)1926 B) 1350 C) 2120 D)2020

81. Quyida berilgan aylana tenglamasidan aylana markazi va radiusi topilsin.
$x^2 + y^2 - 6y = 0$

A)$R = 3$, $(0; 3)$; C) $R = 9$, $(0; 3)$;
B) $R = 3$, $(0; -3)$; D) $R = 9$, $(0; -3)$.

82. Ellipsning yarim o‘qlarini toping: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$

A) ±3 va ±5 C) 3 va 5

B) ±5 va ±3 D) 5 va 3

83. Quyidagilardan qaysi biri ellips tenglamasini ifodalaydi?

A) $x^2+25y^2=4$ C) $x^2-16y^2=16$

B) $x^2+9y^2=0$ D) $x^2-y^2=1$

84. Radiusi $R=5$, markazi $(2;-4)$ nuqtada bo‘lgan aylana tenglamasini toping.

A) $x^2+y^2+4x+8y+5=0$

C) $x^2+y^2-4x-8y+5=0$

B) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$

D) $x^2+y^2-4x+8y-5=0$

85. Ellips fokuslarining koordinatalarini toping: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1.$

A) $(\pm6;0)$ C) $(6;0)$ B) $(0;\pm6)$ D) $(0;-6)$

86. Quyidagi ellips tenglamasining ekssentrisitetini aniqlang:

$x^2+4y^2=1$

A) $\varepsilon=\sqrt{3}$ C) $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $\varepsilon=\pm\sqrt{3}$ D) $\varepsilon=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

87. Direktrisalari $x=\pm\frac{7}{2}$ ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{7}}$ bo‘lgan ellips tenglamasi topilsin.

A) $7x^2+3y^2=21$ C) $3x^2+7y^2=1$

B) $7x^2+3y^2=1$ D) $3x^2+7y^2=21$

88. Quyidagi ellips tenglamasining fokuslari orasidagi masofani aniqlang: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$

A) 8 B) 12 C)18 D) 24

89. Yarim o‘qlari 2 va 5 bo‘lgan ellips tenglamasini ko‘rsating.

A) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ C) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$

B) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

90. Tekislikda berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rniga …… . . deyiladi.

A) ellips C) shar

B) aylana D) giperbola

91. Parabola tenglamasining umumiy ko‘rinishini ko‘rsating.

A) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ C) $y^2 = 2px$

B) $x^2+y^2 = R^2$ D) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

92. $y^2 = 8x$ parabolaning direktrisasini toping.

A) $y=2$ C) $x=2$

B) $y=-2$ D) $x=-2$

93. Direktrisasi $y=-6$ bo‘lgan parabola tenglamasini aniqlang.

A) $y^2 = 24x$ C) $y^2 = -24x$

B) $x^2 = 24y$ D) $x^2 = -24y$

94. $y^2 = 12x$ parabola tenglamasining fokusi nimaga teng?

A) $F(0;3)$ C) $F(3;0)$

B) $F(0;-3)$ D) $F(-3;0)$

95. Agar $F(-5;0)$ fokus va direktrisa tenglamasi $x=5$ bo‘lsa, parabola tenglamasini tuzing.

A) $y^2 = -20x$ C) $y^2 = -10x$

B) $y^2 = 20x$ D) $y^2 = 10x$

96. Quyidagi nuqtalardan qaysilari $y^2 = 18x$ parabolaga tegishli?

A) $A(2;6)$ C) $C(1;18)$

B) $B(2;36)$ D) $D(-1;18)$

97. Ushbu nuqtalar tegishli bo‘lgan parabola tenglamasi toping?

$A(-7;7), B(-1;\sqrt{7})$.

A) $y^2 = -6x+7$ C) $y^2 = -2x+5$

B) $y^2 = -7x$ D) $y^2 = -\sqrt{7}x$

98. Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo‘lgan masofa 4 ga teng. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

A) $y^2 = 16x$ C) $y^2 = -8x$

B) $y^2 = -16x$ D) $y^2 = 8x$

99. $y^2 = 20x$ parabola tenglamasi berilgan. Fokal radiusi 10 ga teng bo‘ladigan M nuqtani toping.

A) $(8;-11),(8;11)$ C) $(11;-8),(11;8)$

B) $(-11;8),(11;8)$ D) $(-8;11),(8;11)$

100. $x^2 = 10y$ parabola $(5;7)$ nuqtadan o‘tganda ushbu nuqtada fokal radius topilsin.

A) $\sqrt{41}$ C) $\sqrt{26}$

B) $\sqrt{53}$ D) $\sqrt{50}$

101. Giperbola tenglamasi uchun qaysi shart bajarilganda teng yonli giperbola deyiladi?

A) $a \neq b$ C) $a > b$

B) $a < b$ D) $a = b$

102. Haqiqiy o‘qi 10, mavhum o‘qi 8 ga teng bo‘lgan giperbola tenglamasi topilsin.

A) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1$ C) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{8} = 1$

B) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$

103.Fokuslari orasidagi masofa $2c = 8$, ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{4}{3}$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasini aniqlang.

A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ C) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$

B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$

104. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning ikki asimptotasigacha bo‘lgan masofalar ko‘paytmasi har doim …….. ga teng bo‘ladi.

A) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ C) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

B) $\frac{a^2b^2}{a+b}$ D) $\frac{ab}{a+b}$

105. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$ giperbola tenglamasi berilgan bo‘lsa, uning yarim o‘qlari topilsin.

A) 3 va 8 C) -8 va -3

B) 8 va 3 D) -3 va -8

106. Yarim o‘qlari $a = 6$, $b = 4$ bo‘lgan giperbolaning ekssentrisiteti nimaga teng?

A) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B)$-\frac{\sqrt{13}}{2}$ C) $-\frac{\sqrt{13}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

107. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{15} = 1$ giperbolaning asimptotalarini aniqlang.

A) $y = \pm\sqrt{\frac{7}{15}}x$ C) $y = \pm\sqrt{\frac{15}{7}}x$

B) $x = \sqrt{\frac{7}{15}}y$ D) $x = \pm\sqrt{\frac{15}{7}}y$

108. Asimptotalari $y = \pm\frac{4}{3}x$, fokuslari orasidagi masofa 20 bo‘lgan giperbolaning ekssentrisitetini toping.

A) $\varepsilon = \frac{5}{4}$ B) $\varepsilon = \frac{5}{3}$ C) $\varepsilon = \frac{4}{5}$ D) $\varepsilon = \frac{3}{5}$

109. Quyidagi nuqtalardan qaysi biri ushbu giperbolani qanoatlantiradi: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{14} = 1$

A) $(2\sqrt{10}\,;\ \sqrt{14})$ C) $(\sqrt{10}\,;\ \sqrt{14})$

B) $(2\sqrt{10}\,;\ 2\sqrt{14})$ D) $(\sqrt{10}\,;\ 2\sqrt{14})$

110. Teng tomonli giperbola $x^2 - y^2 = 18$ berilgan. Unga fokusdosh bo‘lib, $M(10; 8)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasi topilsin.

A) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ C) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$

B) $\frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{6} = 1$ D) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{30} = 1$

111. $A(4; \frac{2\pi}{3})$ nuqtaga qutb o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan B nuqtani toping.

A) $B(-4; \frac{2\pi}{3})$ B) $B(4; \frac{5\pi}{3})$ C) $B(4; \frac{\pi}{3})$ D) $B(-4; \frac{4\pi}{3})$

112. $B(2; \frac{2\pi}{3})$ nuqtaga qutb o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan C nuqtani toping.

A) $C(2; \frac{\pi}{3})$ B) $C(-2; \frac{2\pi}{3})$ C) $C(2; \frac{5\pi}{3})$ D) $C(2; \frac{4\pi}{3})$

113. $A(3; \frac{\pi}{6})$ nuqtani qutb o‘qi atrofida $\frac{3\pi}{4}$ burchakka musbat yo‘nalishda burilsa bu nuqtaning koordinatalarini aniqlang.

A) $(3; \frac{17\pi}{12})$ B) $(3; \frac{2\pi}{3})$ C) $(-3; \frac{2\pi}{5})$ D) $(3; \frac{5\pi}{6})$

114. Qutb koordinatalar sistemasida $A(8; -\frac{2\pi}{3})$ va $B(6; \frac{\pi}{3})$ nuqtalar berilgan. AB kesma o‘rtasining koordinatalarini toping.

A) $(3; -\frac{2\pi}{3})$ B) $(2; \frac{\pi}{3})$ C) $(1; -\frac{2\pi}{3})$ D) $(1; \frac{2\pi}{3})$

115. Dekart koordinatalar sistemasida $M(\sqrt{3}; 1)$ nuqta berilgan. Uni qutb koordinatalarini toping.

A) $(2; \frac{\pi}{6})$ B) $(1; \frac{2\pi}{3})$ C) $(2; \frac{\pi}{3})$ D) $(3; \frac{\pi}{3})$

116.Qutb koordinatalarida a radiusli, markazi koordinatalar boshida bo‘lgan aylana tenglamasini toping.

A) $r = 2a$ B) $r = a$ C) $r = a^2$ D) $r = 3a$

117.Qutb koordinatalar sistemasida $M(3;\frac{5\pi}{6})$ va $N(2;\frac{\pi}{6})$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

A) $\sqrt{19}$ B) 2 C) 3 D)$\sqrt{5}$

118.Qutb koordinatalar sistemasida $r=\frac{2}{1-\cos\varphi}$ tenglama bilan berilgan chiziqni dekart koordinatalar sistemasida tenglamasini toping.

A) $y^2=4(x+1)$ B) $y^2+x^2=1$

C) $x=y^2$ D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

119. Qutb koordinatalar sistemasida $M(3;\frac{5\pi}{6})$ va $N(4;\frac{\pi}{3})$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

A) 6 B) 3 C) 7 D) 5

120. $\rho=\frac{4cos\varphi}{sin^2\varphi}$ parabolaning direktrisa tenglamasini toping.

A) $x=5$ B) $x=-3$ C) $x=-1$ D) $x=-2$

121. Quyidagi $3x^2-2xy+3y^2+2x-4y+1=0$ egri chiziqni markazi topilsin.

A) $(-1;1)$ B) $(-\frac{1}{8};\frac{5}{8})$ C) $(\frac{1}{2};-4)$ D) $(2;-3)$

122. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$ berilgan ikkinchi tartibli chiziqning turini aniqlang.

A)giperbola B)parabola C)parallel to‘g‘ri chiziqlar D)ellips

123. Ushbu $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$ ikkinchi tartibli chiziqning eksentrisitetini aniqlang.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{7}{5}$

124. Quyidagi $32x^2+52xy-7y^2+180=0$ egri chiziqning asimptotalarini toping.

A) $\pm\frac{2}{3}x$ B) $\pm\frac{5}{2}x$ C) $\pm\frac{4}{3}x$ D) $\pm\frac{1}{3}x$

125. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$ ellipsning fokuslari orasidagi masofani aniqlang.

A) 5 B) 6 C) 10 D) 8

126. Ushbu $7x^2+60xy+32y^2-14x-60y+7=0$ ikkinchi tartibli chiziqning tipini aniqlang.

A) giperbola B) parallel to‘g‘ri chiziqlar C) ellips D) parabola

127. Quyidagi $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$ tenglama bilan berilgan ikkikinchi tartibli chiziqning direktrisasini aniqlang.

A) $x=-\frac{5}{3}$ B) $x=-\frac{7}{2}$ C) $x=-\frac{4}{3}$ D) $x=-\frac{5}{2}$

128. Ushbu $5x^2+12xy-12x-22y-19=0$ egri chiziqning haqiqiy o‘qining burchak koeffitsiyentini aniqlang.

A) $k=\frac{1}{3}$ B) $k=\frac{3}{4}$ C) $k=\frac{2}{3}$ D) $k=\frac{1}{2}$

129. Quyidagi $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ ikkinchi tartibli chiziqning markazi qaysi nuqtada joylashgan?

A) $(1;1)$ B) $(-2;3)$ C) $(-3;1)$ D) $(-1;1)$

130. $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning turini aniqlang.

A) parabola B) ellips C) parallel to‘g‘ri chiziqlar D) giperbola.

SINOV TESTI JAVOBLARI

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	C	A	B	D	A	A	A
1	A	B	C	D	B	A	C	D	B	A
2	C	C	B	A	D	C	C	D	C	B
3	D	A	D	B	A	C	B	B	C	A
4	A	C	B	A	B	C	A	A	B	A
5	B	C	B	D	A	B	A	C	B	D
6	B	D	A	D	B	C	D	A	C	B
7	A	C	D	B	A	D	B	A	C	D
8	B	A	C	A	D	B	C	D	B	A
9	B	C	D	B	C	A	A	B	D	C
10	A	D	B	B	C	A	D	C	B	A
11	C	B	D	A	C	A	B	A	A	D
12	C	B	A	C	A	C	B	D	C	A
13	D									

GLOSSARIY

Matematika-Haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fan

Model-O‘rganilayotgan ob’yektning ma’lum bir muhim xususiyatlarini ifodalovchi moddiy yoki ideal ko‘rinishdagi qurilma

Iqtisodiy-matematik model-Iqtisodiy jarayonlarni soddalashtirilgan, formallashtirigan ko‘rinishda ifodalovchi matematik modellar

To‘plam-Biror xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan ob’yektlar majmuasi

To‘plamlar birlashmasi-A va B to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami va $A\cup B$ kabi belgilanadi.

To‘plamlar kesishmasi-A va B to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami va $A\cap B$ kabi belgilanadi.

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi-$a\in A$ va $b\in B$ elementlardan tuzilgan (a,b) juftliklar to‘plami va $A\times B$ kabi belgilanadi.

Chekli to‘plam-Elementlar soni chekli bo‘lgan to‘plam.

Cheksiz to‘plam-Chekli bo‘lganmagan to‘plam.

Ekvivalent to‘plamlar-O‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘ladigan to‘plamlar.

Sanoqli to‘plam-Natural sonlar to‘plamiga ekvivalent bo‘lgan to‘plam.

Sanoqsiz to‘plam-Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam.

Kontinuum quvvatli to‘plam-[0,1] kesmaga ekvivalent bo‘lgan to‘plam.

Kombinatorik masala-Chekli to‘plamning turli qism to‘plamlarini hosil qilish bilan bog‘liq masalalar.

Kombinatorika-Matematikaning kombinatorik masalalar bilan shug‘ullanadigan bo‘limi.

Matritsa-m ta satr va n ta ustun shaklida joylashtirilgan $m\cdot n$ ta sondan iborat jadval.

Birlik matritsa-Barcha diagonal elementlari $a_{ii}=1$, qolgan elementlari $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ bo‘lgan kvadrat matritsa.

Nol matritsa-Barcha elementlari $a_{ij}=0$ bo‘lgan matritsa.

Determinant-Kvadrat matritsaning elementlaridan ma’lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son.

Chiziqli tenglamalar sistemasi-Noma’lumlar birinchi darajada, chiziqli ko‘rinishda qatnashgan n noma’lumli m ta tenglamalardan iborat sistema.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi-Barcha ozod hadlari nolga teng bo‘lgan chiziqli tengamalar sistemasi.

Trivial yechim-Bir jinsli sistemaning faqat nollardan iborat yechimi.

Fundamental yechimlar-Sistemaning barcha yechimlari ularning chiziqli kombinatsiyasi kabi ifodalanishi mumkin bo‘lgan chiziqli bog‘liqmas yechimlar.

Leont’ev modeli-Ko‘p tarmoqli xalq xo‘jaligining tarmoqlararo balans munosabatlarini ifodalovchi chiziqli tenglamalar sistemasi.

Skalyar-Sonli qiymati bilan to‘liq aniqlanadigan miqdor

Vektor-Ham sonli qiymati, ham yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalik.

Vektorning moduli-Vektorning sonli qiymati, uzunligi.

Nol vektor-Boshi va uchi bitta nuqtada bo‘lgan vektor.

Kollinear vektorlar-Bir to‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda joylashgan vektorlar.

Ort vektorlar (ortlar)-Koordinata o‘qlarida joylashgan, musbat yo‘nalgan va modullari birga teng bo‘lgan vektorlar.

Vektorning koordinatlari-Vektor yoyilmasidagi ortlar oldidagi sonli koeffitsiyentlar.

Komplanar vektorlar-Bitta yoki parallel tekisliklarda joylashgan uch va undan ortiq vektorlar.

n o‘lchovli vektor-Tartiblashtirilgan *n* ta sondan iborat matematik ifoda.

Vektor fazo-Vektorlar to‘plami va unda aniqlangan chiziqli amallardan iborat tizim.

Operator-R^n vektor fazoni R^m vektor fazoga akslantirish.

Chiziqli operator-$A(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=A(\boldsymbol{x}_1)+A(\boldsymbol{x}_2)$ va $A(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ (λ-const.) shartlarni qanoatlantiruvchi operator.

Operatorning xususiy soni-$A(\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan λ sonlar.

Operatorning xususiy vektori-$A(\boldsymbol{x})=\lambda A(\boldsymbol{x})$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $\boldsymbol{x}$ vektorlar.

Operatorning xarakteristik tenglamasi-A matritsali chiziqli operator uchun $|A-\lambda E|=0$ (E–birlik matritsa) tenglama.

Kvadratik forma- $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ ko‘rinishdagi yig‘indi

Geometrik ob’yekt tenglamasi-Geometrik ob’yektga tegishli nuqtalarining koordinatalari uchun o‘rinli bo‘ladigan tenglik .

Aylana-Markaz deb ataluvchi O nuqtadan bir xil R masofada joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni. R aylana radiusi deyiladi.

Ellips-Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalarining yig‘indisi o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni.

Giperbola-Fokuslar deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalar ayirmasining absolut qiymati o‘zgarmas son bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni.

Parabola-Berilgan l to‘g‘ri chiziq bilan berilgan F nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni. Bunda l-direktrisa, F-fokus deyiladi.

Sonli to‘plam-Elementlari sonlardan iborat to‘plam.

Natural sonlar to‘plami-$N=\{1,2,3, \ldots, n, \ldots\}$ sonli to‘plam.

Butun sonlar to‘plami-$Z=\{\ldots, -2, -1,0,1,2,\ldots\}$ sonli to‘plam.

Ratsional sonlar to‘plami-$Q=\{m/n, m \in Z, n \in N\}$ ko‘rinishdagi sonlar to‘plami.

Irratsional sonlar to‘plami-Ratsional bo‘lmagan sonlar to‘plami. Masalan, $\sqrt{2}$.

Haqiqiy sonlar to‘plami-Ratsional va irratsional sonlar birlashmasi.

Nuqta atrofi-Berilgan nuqtani oz ichiga olgan ixtiyoriy bir oraliq.

Sonning absolut qiymati-Har qanday x soni uchun bu sondan koordinata boshigacha bo‘lgan masofani ifodalovchi va $|x|$ kabi belgilanuvchi nomanfiy son.

Sonli ketma-ketlik-$a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n,\ldots$ ko‘rinishda yozilgan haqiqiy sonlarning cheksiz qatori.

Sonli ketma-ketlik limiti-$\{a_n\}$ sonli ketma-ketlikning a_n umumiy hadi $n\to\infty$ bo‘lganda cheksiz yaqinlashib boradigan biror A soni. $\{a_n\}$ ketma-ketlik limiti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ kabi yoziladi.

Funksiya-O‘zgaruvchi $x\in$D qiymatiga ikkinchi bir $y\in$E o‘zgaruvchining aniq bir qiymatini mos qo‘yish. Bunda x erkli o‘zgaruvchi yoki argument, y erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi va $y=f(x)$ kabi ifodalanadi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi- x argumentning $y=f(x)$ funksiya ma’noga ega bo‘ladigan qiymatlari to‘plami va D$\{f\}$kabi belgilanadi.

Funksiyaning qiymatlar sohasi- $y=f(x)$ funksiyada $x\in$D$\{f\}$ bo‘lganda y funksiya qabul etadigan qiymatlarining E$\{f\}$ to‘plami.

Monoton funksiyalar-O‘suvchi (kamaymovchi) va kamayuvchi (o‘smovchi) funksiyalar birgalikda monoton funksiyalar bo‘ladi.
Juft (toq) funksiya-$f(-x)=f(x)$ $[f(-x)=-f(x)]$ shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya.
Davriy funksiya-Biror T>0 soni va barcha $x\in D\{f\}$uchun $f(x+T)= f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya.
Murakkab funksiya-$y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalardan hosil qilinadigan $y=f(\varphi(x))$ funksiya. f-tashqi, φ-ichki funksiya deyiladi.
Teskari funksiya-$y=f(x)$ funksiya bo‘yicha x o‘zgaruvchini y o‘zgaruvchi orqali ifodalovchi $x=\varphi(y)$ funksiya. $f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $f^{-1}(x)$ kabi belgilanadi.
Asosiy elementar funksiyalar-Darajali $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R)$, ko‘rsatkichli $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$, logarifmik $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$, trigonometrik $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$ va teskari trigonometrik $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.
Elementar funksiyalar-Chekli sondagi asosiy elementar funksiyalar ustida arifmetik amallar va murakkab hamda teskari funksiya olish orqali hosil qilingan funksiyalar.
Funksiyaning limiti - y=f(x) funksiyada argument x berilgan a soniga cheksiz yaqinlashib borganda (x→a) funksiya biror A soniga cheksiz yaqinlashib borsa (y→A), unda A soni funksiyaning limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ kabi ifodalanadi.
Cheksiz kichik miqdor-Argument $x\to a$ bo‘lganda limiti nolga teng bo‘lgan funksiya.
I ajoyib limit- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
II ajoyib limit- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=2{,}718281...$
Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi-Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ shart bajarilsa,unda funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.
Funksiyaning uzilish nuqtalari-$y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ shart bajarilmaydigan nuqtalar.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Баврин И.И. Курс высшей математики. М.: “Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС”, 2004 г.

2. Jabborov N.M. Oliy matematika (bakalavr ta‘lim yo‗nalishi talabalari uchun darslik) I- va II-jildlar. Toshkent, ―Universitet, 2017 y.

3. Жўраев Т., Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. 1-том., Тошкент “Ўзбекистон”, 1995 йил; 2-том. Тошкент “Ўзбекистон”, 1998 йил.

4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. T.Universitet, 586 b, 2005 y.

5. Xudoyberganov G., Varisov A.K., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan maruzalar 1 va 2 , “Voris”, 2010 y.

6. Jabborov N.M. Oliy matematika va uning tatbiqlariga doir masalalar to‘plami. I- va II-qismlar. Toshkent, ―Universitet, 2017 y.

7. Гусак А.А. Высшая математика. В двух томах, Изд. 2-е испр. Минск, ―ТетраСистемс 2000 г.

8. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных задач по высшей математике, Часть 1 Минск: “Высщая школа», 1990 г. – 271 с. Часть 2 Минск: “Высщая школа”, 1991. – 352 с. Часть 3 Минск: “Высщая школа”, 1991. – 288 с.

9. Садуллаев А., Мансуров Х. Т., Худойберганов Г., Ворисов А. К., Гуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1, 2, 3. қ. Т. ―Ўқитувчи, 1995, 1995, 2000.

10. Shoimqulov B.A., Tuychiyev T.T., Djumaboyev D.X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. T. “O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati”, 2008 y.

11. Jabborov N.M., Aliqulov E.O., Axmedova Q.S. Oliy matemaika. 1, 2-qismlar. Qarshi, 2010 y.

12. Баврин И.И. Высшая математика для химиков, биологов и медиков: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2016. - 329 с.

13. Скатецкий В.Г., Свиридов Д.В., Яшкин В.И. Математические методы в химии. М. “ТетраСистемс” 2006. 368 с.

14. Еремин В. В. Теоретическая и математическая химия. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.

15. T.H.Rasulov, G‘.G‘.Qurbonov, Z.N.Hamdamov. Analitik geometriyadan misol va masalalar. O‘quv qo‘llanma. Durdona nashriyoti, Buxoro, 2021, 284 b.

16. T.H.Rasulov, G‘.G‘.Qurbonov. Chiziqli algebra va analitik geometriyadan misol va masalalar to‘plami. O‘quv qo‘llanma. Durdona nashriyoti, Buxoro, 2022, 244 b.

T.H.RASULOV
G‘.G‘.QURBONOV

OLIY MATEMATIKA

o‘quv qo‘llanma

Muharrir:	*A. Qalandarov*
Texnik muharrir:	*G. Samiyeva*
Musahhih:	*Sh. Qahhorov*
Sahifalovchi:	*M. Bafoyeva*

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 05.05.2023. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog‘ozi. Bosma tobog‘i 18,2. Adadi 100. Buyurtma №210.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko‘chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45