

**T.H.RASULOV
G‘.G‘.QURBONOV**

***CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK
GEOMETRIYADAN MASALALAR
TO‘PLAMI***
o‘quv qo‘llanma

**“Durdona” nashriyoti
Buxoro – 2022**

Ushbu o'quv qo'llanma Oliy ta'lim muassasalarining "Amaliy matematika", "Axborot tizimlari va texnologiyalari(tarmoqlar va sohalar bo'yicha)" va "Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari(yo'nalishlar bo'yicha)" ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallab yozilgan. Qo'llanmada asosan matritsalar va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli va qism fazolar, matritsaning rangi, Evklid fazo va ortogonallashtirish jarayoni, bichiziqli va kvadratik formalar, chiziqli almashtirishlar, vektorlar algebrasi, tekislik va fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari, qutb koordinatalar sistemasi, tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari, ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalari va ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari kabi tushunchalar batafsil yoritilgan. Barcha mavzularda nazariy ma'lumotlar, namunaviy masalalar yechimlari va talabalar mustaqil bajarishlari uchun mo'ljallangan topshiriqlar keltirilgan. Bundan tashqari, qo'llanmada keltirilgan mavzular bo'yicha egallangan bilimlarni mustahkamlash uchun test topshiriqlari ham o'z aksini topgan.

Taqrizchilar:

Boltayev Zafar Ixtiyorovich, Buxoro muhandislik- texnologiya instituti "Oliy matematika" kafedrası dotsenti

Dilmurodov Elyor Baxtiyorovich, Buxoro davlat universiteti "Matematik analiz" kafedrası mudiri

**O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2022-yil 19-iyuldagi 233-sonli buyrug'iga asosan nashr etishga ruxsat berilgan.
Ro'yxatga olish raqami 356/7-001.**

ISBN 978-9943-8487-0-2

Mundarija

So‘z boshi	3
1- mavzu: Matritsalar va determinantlar.....	5
2-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasi	29
3-mavzu: Chiziqli fazo	42
4-mavzu: Matritsaning rangi.....	54
5-mavzu: Evklid fazosi	68
6-mavzu: Bichiziqli va kvadratik formalar.....	76
7-mavzu: Chiziqli operatorlar.....	88
8-mavzu: Vektorlar algebrasi.....	102
9-mavzu: Tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari.	124
10-mavzu: Tekilikda ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari	164
11-mavzu: Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari.	176
12-mavzu: Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalari.	195
13-mavzu: Ikkinchi tartibli sirlarning kanonik tenglamalari.....	218
Sinov testi	243
Sinov testi javoblari	243
Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati.....	244

SO‘Z BOSHI

“Chiziqli algebra va analitik geometriya” fani Oliy matematikaning asosiy bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Mazkur fanning matritsalar va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli va qism fazolar, matritsaning rangi, Evklid fazo va ortogonallashtirish jarayoni, bichiziqli va kvadratik formalar, chiziqli operatorlar, vektorlar algebrasi, tekislik va fazoda to‘g‘ri chiziqli tenglamalari, qutb koordinatalar sistemasi, tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari, ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamalari va ikkinchi tartibli sirlarning kanonik tenglamalarini o‘rganish ko‘zda tutilgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma Chiziqli algebra va analitik geometriya fani dasturida keltirilgan barcha mavzularga doir nazariy ma’lumotlar hamda misol va masalalarini qamrab olgan bir qo‘llanmadir. U Oliy ta’lim muassasalarining “Amaliy matematika”, “Axborot tizimlari va texnologiyalari(tarmoqlar va sohalar bo‘yicha)” va “Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari(yo‘nalishlar bo‘yicha)” ta’lim yo‘nalishlarida tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallab yozilgan.

Mazkur qo‘llanmada yuqorida sanab o‘tilgan mavzularga oid qisqacha nazariy ma’lumotlar bayon qilingan. Ularga doir misol va masalalar dastlab sodda va muayyan tasavvur hosil qilinadigan, so‘ngra murakkabroq masalalarni yechishga alohida e’tibor qaratilgan. Misol va masalalarni sharhlab, ularni yechib ko‘rsatishdan ko‘zlangan maqsad Chiziqli algebra va analitik geometriya kursidan olingan nazariy bilimlardan misol va masalalarni yechishda foydalana olish ko‘nikmasini shakllantirishdir. Talabalar namuna sifatida yechib ko‘rsatilgan masalalarda qo‘llanilgan usullardan foydalanib mustaqil bajarishlari uchun ko‘plab misol va masalalar keltirilgan.

Qo‘llanmani o‘qish jarayonida talabalar o‘zlarining ”Chiziqli algebra va analitik geometriya” fanidan olgan bilimlarini to‘ldiradilar. Undan matematikaning ko‘plab sohalar bo‘yicha ilmiy-tadqiqot ishlari olib borayotgan magistrantlar, tayanch doktorantlar va mustaqil izlanuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

1-MAVZU: MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR

Reja:

1. Matritsalar va ularning turlari.
2. Matritsalar ustida amallar.
3. Determinantlar va ularni hisoblash.
4. Determinantlarning asosiy xossalari.

Tayanch iboralar: matritsa, matritsa tartibi, matritsa elementi, to'rtburchakli matritsa, kvadrat matritsa, ustun matritsa, satr matritsa, teng matritsalar, diagonal element, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsalar yig'indisi, matritsalar ayirmasi, matritsalar ko'paytmasi, matritsaning darajasi, matritsaning transponirlangani, kososimmetrik matritsa, determinant, determinantning elementi, determinantning satri, determinantning ustuni, minor, algebraik to'ldiruvchi, Laplas teoremasi.

1.1. Matritsalar va ularning turlari. Matritsa bir qator matematik va iqtisodiy masalalarni yechishda juda ko'p qo'llaniladigan tushuncha bo'lib, uning yordamida bu masalalar va ularning yechimlarini sodda hamda ixcham ko'rinishda ifodalanadi.

1-Ta'rif: m ta satr va n ta ustundan iborat to'g'ri to'rtburchak shaklidagi $m \times n$ ta sondan tashkil topgan jadval $m \times n$ tartibli **matritsa**, uni tashkil etgan sonlar esa **matritsaning elementlari** deb ataladi.

Matritsalar $A, B, C \dots$ kabi bosh harflar bilan, ularning i - satr va j - ustunida joylashgan elementlari esa odatda a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi.

1 - Misol. Berilgan $A = \begin{pmatrix} 4 & -2,5 & 3 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini va elementlarini ko'rsatib o'ting.

Yechish. Yuqorida berilgan matritsa 2×3 tartibli bo'lib, ya'ni 2 ta satr va 3 ta ustun ko'rinishidagi $2 \times 3 = 6$ ta sondan tashkil topgan. Uning 1- satr elementlari $a_{11} = 4, a_{12} = -2,5, a_{13} = 3$ va 2-satr elementlari $a_{21} = 5, a_{22} = -2, a_{23} = -6$ sonlardan iborat. Bu

matritsaning 1 - ustuni $a_{11} = 4$ va $a_{21} = 5$, 2-ustuni $a_{12} = -2,5$ va $a_{22} = -2$, 3-ustuni esa $a_{13} = 3$ va $a_{23} = -6$ elementlardan tuzilgan.

Agar biror A matritsaning tartibini ko'rsatishga ehtiyoj bo'lsa, u $A_{m \times n}$ ko'rinishda yoziladi va umumiy holda

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yoki qisqacha $A_{m \times n} = (a_{ij})$ ko'rinishda ifodalanadi.

2-Ta'rif: $A_{m \times n}$ matritsada $m = n \neq 1$ bo'lsa, u **kvadrat matritsa**, $m \neq n$ ($m \neq 1, n \neq 1$) bo'lsa **to'g'ri burchakli matritsa**, $m = 1, n \neq 1$ holda **satr matritsa** va $m \neq 1, n = 1$ bo'lganda **ustun matritsa** deb ataladi.

$A_{n \times n}$ kvadrat matritsa qisqacha A_n kabi belgilanadi va n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $m = 1$ va $n = 1$ bo'lganda $A_{1 \times 1}$ matritsa bitta sonni ifodalaydi va shu sababli ma'lum bir ma'noda matritsa son tushunchasini umumlashtiradi.

3-Ta'rif: A va B matritsalar bir xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa, ular **teng matritsalar** deyiladi.

A va B matritsalarining tengligi $A = B$ yoki $(a_{ij}) = (b_{ij})$ ko'rinishda belgilanadi.

2 - Misol. Ixtiyoriy $a \neq 0$ soni uchun

$$A = \begin{pmatrix} a + a & a - a \\ a : a & a \cdot a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

matritsalar o'zaro teng bo'la oladimi?

Yechish. Birilgan matritsalarini tengligini taqqoslash uchun

$$A = \begin{pmatrix} a + a & a - a \\ a : a & a \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

ekanligini ko'rish mumkin. Bundan $A = B$ ekanligi kelib chiqadi.

4-Ta'rif: $A = \{a_{ij}\}$ matritsada $i = j$ bo'lgan a_{ij} elementlar **diagonal elementlar** deb ataladi.

3 - Misol. Yuqorida ko'rilgan 1 – misoldagi $A_{2 \times 3}$ matritsaning diagonal elementlarini toping.

Yechish. Matritsamizning diagonal elementlari $a_{11} = 4$ va $a_{22} = -2$ ekanligini ko'rish mumkin.

5-Ta'rif: Diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lgan ($a_{ij} = 0, i \neq j$) kvadrat matritsa **diagonal matritsa** deyiladi.

Diagonal matritsaning diagonal elementlari nolga ham teng bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$A_{2 \times 2} = A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = B_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsalar bo'ladi.

6-Ta'rif: Barcha diagonal elementlari $a_{ij} = 1$ bo'lgan n – tartibli diagonal matritsa n – tartibli birlik matritsa yoki qisqacha **birlik matritsa** deyiladi.

Odatda n – tartibli birlik matritsa E_n yoki qisqacha E kabi belgilanadi. Masalan,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli birlik matritsalaridir.

7-Ta'rif: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij} = 0$) bo'lgan ixtiyoriy $m \times n$ tartibli matritsa **nol matritsa** deyiladi.

$m \times n$ tartibli nol matritsa $O_{m \times n}$ yoki qisqacha O kabi belgilanadi. Masalan,

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rsatilgan tartibli nol matritsalar bo'ladi.

1.2. Matritsalar ustida amallar.

Endilikda matritsalar ustida algebraik amallar kiritib, matritsalar algebrasini hosil etamiz.

8-Ta'rif: Ixtiyoriy tartibli $A_{m \times n} = (a_{ij})$ matritsaning istalgan λ songa ko'paytmasi deb $C_{m \times n} = \{\lambda \cdot a_{ij}\}$ kabi aniqlanadigan matritsaga aytiladi.

4- Misol. A matritsaning λ songa ko'paytmasi $\lambda \cdot A$ teng bo'lishini isbotlang.

Yechish. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 6A = \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 & 6 \cdot 4 & 6 \cdot (-1) \\ 6 \cdot 0 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$

9-Ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m \times n} = (a_{ij})$ va $B_{m \times n} = (b_{ij})$ matritsalar yig'indisi deb elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ kabi aniqlanadigan $C_{m \times n} = (c_{ij})$ matritsaga aytiladi.

Bunda A va B matritsalarining yig'indisi $A + B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini qo'shish orqali hisoblanadi.

Masalan,

$$A = A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

matritsalar uchun

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarini songa ko'paytirish va o'zaro qo'shish amallari quyidagi qonunlarga bo'ysunishi bevosita ularning ta'riflaridan kelib chiqadi:

I. $A + B = B + A$ (qo'shish uchun kommutativlik qonuni);

II. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (qo'shish uchun assotsiativlik qonuni);

III. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B, (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
(distributivlik qonuni)

Bundan tashqari yuqoridagi ta'riflar orqali bu amallar ushbu xossalarga ham ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas:

$$A + 0 = A, A + A = 2A, 0 \cdot A = 0, \lambda \cdot 0 = 0.$$

10-Ta'rif: Bir xil tartibli $A_{m \times n} = (a_{ij})$ va $B_{m \times n} = (b_{ij})$ **matritsalar ayirmasi** deb $A_{m \times n}$ va $(-1) B_{m \times n}$ matritsalarining yig'indisiga, ya'ni $A_{m \times n} + (-1) \cdot B_{m \times n}$ matritsaga aytiladi.

5 - Misol. A va B matritsalarining ayirmasini toping.

$$A = A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $A - B$ ko'rinishda belgilanadi va ularning mos elementlarini o'zaro ayirish orqali hisoblanadi.

$$A - B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

11-Ta'rif: $A_{m \times p} = (a_{ij})$ va $B_{p \times n} = (b_{ij})$ **matritsalarining ko'paytmasi** deb shunday $C_{m \times n} = (c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, n$$

yig'indilar kabi aniqlanadi.

Shunday qilib, $A_{m \times p} = (a_{ij})$ va $B_{p \times n} = (b_{ij})$ matritsalar uchun $p = q$, ya'ni A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lgandagina ularning ko'paytmasi mavjud bo'ladi va AB kabi belgilanadi. Bunda $AB = C_{m \times n} = (c_{ij})$ matritsaning satrlar soni m birinchi A ko'paytuvchi matritsa, ustunlar soni n esa ikkinchi B ko'paytuvchi matritsa orqali aniqlanadi. Bundan tashqari $AB = C_{m \times n} = (c_{ij})$ ko'paytma matritsaning c_{ij} elementi A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j – ustunidagi mos elementlariga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish orqali hisoblanadi. Bu “satrni ustunga ko'paytirish” qoidasi deb aytiladi.

6- Misol. A va B matritsalarining ko'paytmasini toping.

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalar uchun $m = 3$, $p = q = 2$, $n = 2$ bo'lgani uchun ularning ko'paytirish mumkin va ko'paytma matritsa $AB = C_{3 \times 2}$ quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun $AB \neq BA$, ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $A_{m \times q} \cdot B_{q \times n} = C_{m \times n}$ ko'paytma mavjud, ammo $B_{q \times n} \cdot A_{m \times q}$ ko'paytma har doim ham mavjud emas va mavjud bo'lgan taqdirda, ya'ni $n = m$ holda ham ular teng bo'lishi shart emas.

7 - Misol. AB va BA matritsalarining ko'paytmasi teng matritsalar bo'la oladimi?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalar uchun $AB \neq BA$, chunki

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 8 & 23 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 33 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi va yig'indisi quyidagi qonunlarga bo'ysunadi hamda ushbu xossalarga ega bo'ladi:

I. $A(BC) = (AB)C$, $(\lambda A)B = A(\lambda B)$ - (ko'paytirish uchun assotsiativlik qonuni);

II. $A(B + C) = AB + AC$ - (ko'paytirish va qo'shish amallari)
 $(A + B)C = AC + BC$ - (distributivlik qonunlari);

III. $AE = EA = A$, $0 \cdot A = 0$, $A \cdot 0 = 0$, $0 \cdot A = 0$.

Bunda E va 0 mos ravishda tegishli tartibli birlik va nol matritsalarini ifodalaydi.

Matritsa ko'paytmasi ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday n – tartibli A kvadrat matritsani o'ziga – o'zini ko'paytirish mumkin va natijada yana n – tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi.

12-Ta'rif: A kvadrat matritsani o'zaro m marta (m – birdan katta ixtiyoriy natural son) ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan kvadrat matritsa A **matritsaning m – darajasi** deyiladi.

A matritsaning m – darajasi A^m kabi belgilanadi. Bunda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb olinib, A^m daraja ixtiyoriy nomanfiy butun m soni uchun aniqlanadi. Bu holda A^m daraja ta'rifidan uning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi (m, k – natural sonlar, λ – haqiqiy son):

$$1. A^m \cdot A^k = A^{m+k}; \quad 2. (A^m)^k = A^{mk}; \quad 3. (\lambda A)^m = \lambda^m A^m;$$

$$4. E^m = E; \quad 5. O^m = O.$$

Shunday qilib, har qanday kvadrat matritsa uchun natural darajaga ko'tarish amalini kiritish mumkin ekan.

8 - Misol. Quyida berilgan A matritsani natural darajalarga ko'rsating.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 12 - ta'rifga asosan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 60 \\ 12 & -47 \end{pmatrix}.$$

teng bo'ladi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, 5 - xossaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni $A^m = 0$ tenglikdan har doim ham $A = 0$ ekanligi kelib chiqmaydi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Kelgusida matritsani darajaga ko'tarish amalini ixtiyoriy m butun son uchun umumlashtiramiz.

13-Ta'rif: $B = (b_{ij})$ matritsa $A = (a_{ij})$ matritsaning **transponirlangani** deyiladi, agar i va j indekslarning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarida $a_{ij} = b_{ji}$ shart bajarilsa.

A matritsaning transponirlangani A^T kabi belgilanadi. Agar A matritsa $m \times n$ tartibli bo'lsa, uning transponirlangani A^T $n \times m$ tartibli bo'ladi.

Masalan,

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{3 \times 2}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matritsani transponirlanganini topish **transponirlash amali** deyiladi va u quyidagi xossalarga ega bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ (λ – ixtiyoriy haqiqiy son);
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;
4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

14-Ta'rif: Agar A kvadrat matritsa uchun $A^T = A$ bo'lsa, u **simmetrik matritsa**, $A^T = -A$ bo'lganda esa **kososimmetrik matritsa** deb ataladi.

Ta'rifdan har qanday simmetrik matritsaning elementlari $a_{ij} = a_{ji}$, kososimmetrik matritsaning elementlari esa $a_{ij} = -a_{ji}$ shartni qanoatlantirishi bevosita kelib chiqadi. Bundan kososimmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalaridan A simmetrik, B kososimmetrik bo'ladi.

1.3. Determinantlar va ularni hisoblash. Matritsaning bir qator xususiyatlarini ta'riflash va o'rganish uchun uning determinanti tushunchasi kerak bo'ladi.

15-Ta'rif. n - tartibli A kvadrat matritsaning elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan son **n – tartibli determinant** deyiladi.

A kvadrat matritsaning determinanti $|A|$ yoki $\det A$ kabi belgilanadi. Ayrim o'quv adabiyotlarida determinant atamasi aniqlovchi deb aytiladi. Umumiy holda n -tartibli determinant quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

16-Ta'rif. Berilgan $|A|$ determinantni tashkil etgan $a_{ij}(i, j, \dots, n)$ sonlar **determinantning elementlari**, gorizontalar ko'rinishda joylashgan $a_{ij}(j = 1, 2, \dots, n)$ elementlar **determinantning i – satri** $a_{ij}(i = 1, 2, \dots, n)$, vertikal ko'rinishda joylashgan $a_{ij}(i = 1, 2, \dots, n)$ elementlar esa **determinantning j ustuni** ($j = 1, 2, \dots, n$) deyiladi.

Endi I, II va III- tartibli determinantlarni hisoblash qoidasini formula ko'rinishida aniq ifodalaymiz.

I- tartibli $|A|$ determinant faqat bitta a_{11} sonidan iborat bo'lib, uning qiymati shu sonni o'ziga teng, ya'ni $|A| = |a_{11}| = a_{11}$ deb olinadi.

I-I tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1.2)$$

9 - Misol. Quyida berilgan II- tartibli determinantlarni hisoblang.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Yechish. (1.2) formulaga asosan,

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2,$$

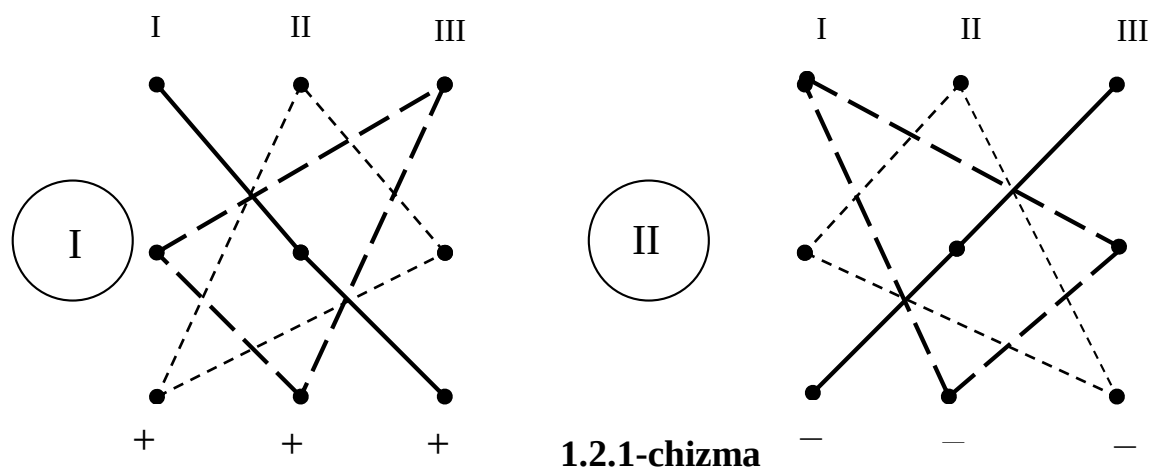
$$\text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58 \text{ ga teng bo'ladi.}$$

III- tartibli determinant esa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \end{aligned} \quad (1.3)$$

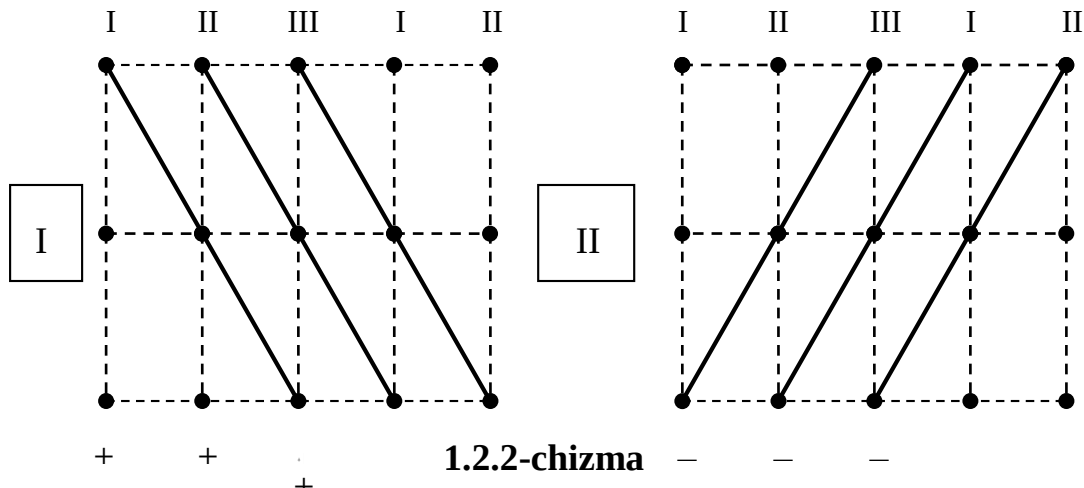
Bu yerda (1.3) formulani eslab qolish oson emas va shu sababli III tartibli determinantlarni quyidagi usullarda hisoblash mumkin.

Uchburchaklar usuli. Bu usulda determinantning elementlari sxematik ko'rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (1.2.1-chizmaga qarang). So'ngra asoslari determinantning diagonallariga parallel bo'lgan uchburchaklar qaraladi. Bu uchburchaklarning uchlarida va diagonallarda joylashgan elementlarning ko'paytmalari hosil qilinadi. I- holda chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko'paytmalari o'z ishorasi, II- holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



Sarrus usuli. Bu usulda determinantning o'ng tomoniga uning I- va II- ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi.

Bu matritsaning elementlari sxematik ko‘rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (1.2.2-chizmaga qarang) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko‘paytmasi I holda o‘z ishorasi, II - holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.



10 - Misol. III- tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Yuqorida berilgan (1.3) formula bilan determinantni hisoblaganda,

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) - \\ &- (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 112. \end{aligned}$$

teng bo‘ladi.

Determinantlar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvalini ifodalaydi. Determinant esa sonlar jadvalidan hosil qilinadigan sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa sonlar jadvalini dumaloq qavslar ichiga olish bilan belgilansa, determinant bu jadvalni vertikal chiziqlar orasiga olish bilan belgilanadi;

3) A matritsa va $|A|$ determinantni tashkil etuvchi sonlar ularning elementlari deyiladi;

4) matritsa va determinant satrlar va ustunlardan iborat;

5) determinantlarda ustun va satrlar soni teng bo'lishi kerak, matritsalarida esa bunday bo'lishi shart emas.

1.4.Determinantlarning asosiy xossalari. Endi ixtiyoriy tartibli determinantlar uchun o'rinli bo'lgan xossalari bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun umumiy holda ifodalangan bu xossalarni uchinchi tartibli determinantlar misolida ko'rsatamiz va isbotlaymiz.

1-xossa. Agar determinantda har bir i –satr ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) i –ustun bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu tenglik bevosita III- tartibli determinantni (1.3) hisoblash formulasidan kelib chiqadi.

Demak determinantning satr va ustunlari teng kuchlidir, ya'ni satr (ustun) uchun o'rinli bo'lgan tasdiq ustun (satr) uchun ham o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari bu xossadan matritsani transponirlashda uning determinanti o'zgarmay qolishi, ya'ni $\det A = \det A^T$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu sababli determinantning keyingi xossalarini faqat satrlar uchun ifodalaymiz.

2-xossa. Determinantda ixtiyoriy ikkita satrlar o'zni o'zaro almashtirilsa, determinantning qiymati faqat ishorasini o'zgartiradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

Bu tasdiq ham bevosita (3) formuladan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar determinantda ikkita satr elementlari bir xil bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Isbot: Berilgan determinantning qiymatini Δ , uning bir xil elementli satrlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan determinantning qiymatini esa Δ' deb belgilaymiz. Unda, 2-xossaga asosan, $\Delta' = -\Delta$ bo'ladi. Ammo determinantda bir xil elementli satrlarning o'rinlari almashtirilganligi uchun uning ko'rinishi o'zgarmay qoladi va shu sababli $\Delta' = \Delta$ bo'ladi. Bu tengliklardan $\Delta = -\Delta$ natijani olamiz va undan $\Delta = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, hozircha biz IV- tartibli determinantni hisoblash formulasini bilmasakda, 3-xossaga asosan, birinchi va uchinchi satrlari bir xil bo'lgan ushbu determinantning qiymatini yozishimiz mumkin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Determinantda biror satr elementlari umumiy λ ko'paytuvchiga ega bo'lsa, uni determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot: III- tartibli determinantni (3) hisoblash formulasidagi yig'indining har bir qo'shiluvchisida λ umumiy ko'paytuvchi qatnashadi. Bu λ umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, 4-xossadagi tasdiqning o'rinli ekanligiga ishonch hosil etamiz.

5-xossa. Agar determinantda biror satr faqat nollardan iborat bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi. Bu xossaning isboti oldingi xossadan $\lambda = 0$ bo'lgan holda kelib chiqadi.

11 - Misol. Quyida berilgan III- tartibli determinantning qiymatini toping.

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Yechish. Bizga berilgan III- tartibli determinantning qiymatini (3) formula bilan hisoblab o'tirmay, 4-xossaga asosan to'g'ridan-to'g'ri

$$\begin{vmatrix} 11 & 20 & 401 \\ -8 & 37 & 139 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

deb ta'kidlay olamiz.

6-xossa. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Isbot: 4-xossaga asosan λ proporsionallik koeffitsiyentini determinant belgisi oldiga umumiy ko'paytuvchi sifatida chiqarish mumkin. Bu holda ikkita satri bir xil bo'lgan determinant hosil bo'ladi va uning qiymati, 3-xossaga asosan, nolga teng. Bundan berilgan determinantning ham qiymati nol ekanligi kelib chiqadi.

12 - Misol. Quyida berilgan III- tartibli determinantning qiymatini toping.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Bu determinantda 1- va 3- satrlar proporsional va proporsionallik koeffitsiyenti $\lambda = 1,5$ ga teng ekanligidan uning qiymati

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7.5 & -4.5 \end{vmatrix} = 0,$$

ga teng bo'ladi.

7-xossa. Agar determinantning biror i – satri ikkita qo'shiluvchi yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ij} + b_{ij}$ ko'rinishda bo'lsa, bu determinantni ikkita determinantlar yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin. Bunda bu determinantlarning i – satri mos ravishda a_{ij} va b_{ij} elementlardan iborat bo'lib, qolgan satrlari berilgan determinantniki singari bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu xossaning o'rinli ekanligiga bevosita (3) formula orqali ishonch hosil qilish mumkin.

8-xossa. Agar $|A|$ determinantning a_{ij} diagonal elementlaridan yuqorida yoki pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng bo'lsa, uning qiymati diagonal elementlar ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Isbot: Bu determinantlar uchun ularni (3) hisoblash formulasidagi $a_{11}a_{22}a_{33}$ qo'shiluvchidan boshqa hamma qo'shiluvchilari nolga teng bo'ladi va shuning uchun ularning yig'indisi, ya'ni determinantning qiymati shu ko'paytmaga teng bo'ladi.

13 - Misol. IV- tartibli determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Yechish. 8- xossaga asosan ushbu determinantimizning qiymati quyidagicha hisoblanadi.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 \cdot 2 \cdot (-1) = 30.$$

9-xossa. Diagonal matritsaning determinanti uning diagonal elementlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Bu xossa isboti bevosita oldingi xossadan kelib chiqadi. Jumladan har qanday birlik matritsaning determinanti birga tengdir.

Navbatdagi xossani ifodalash uchun ikkita yangi tushuncha kiritamiz.

17-Ta'rif. Ixtiyoriy n – tartibli determinantning $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ elementining **minori** deb bu determinantdan shu element joylashgan i – satr va j – ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan $(n - 1)$ – tartibli determinant qiymatiga aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} deb belgilanadi va ularning soni n^2 ta bo'ladi.

Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

determinantning II- satr elementlarining minorlarini yozamiz va hisoblaymiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Bunda III tartibli determinantning minorlari II tartibli determinantlar ekanligini yana bir marta ta'kidlab o'tamiz.

18-Ta'rif. Ixtiyoriy n – tartibli determinantning $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ elementining **algebraik to'ldiruvchisi** deb $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning $a_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, n)$ elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} kabi belgilanadi va, ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i + j - \text{juft bo'lsa;} \\ -M_{ij}, & i + j - \text{toq bo'lsa.} \end{cases}$$

formula bilan hisoblanadi. Masalan, (5) determinantning II satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$A_{21} = -M_{21} = -1, \quad A_{22} = M_{22} = 1, \quad A_{23} = -M_{23} = 2. \quad (5)$$

10-xossa (Laplas teoremasi). Determinantning ixtiyoriy bir i – satrida joylashgan $a_{ij}(j = 1, 2, \dots, n)$ elementlarini ularning $A_{ij}(j = 1, 2, \dots, n)$ algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.

Isbot: Bu xossa III tartibli $|A|$ determinantning birinchi satri uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A| \quad (6)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun algebraik to'ldiruvchi ta'rifidan va determinantlarni hisoblashning (2), (3) formulalaridan quyidagicha foydalanamiz:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = |A|. \end{aligned}$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| \quad (7)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi isbotlanadi

19-Ta'rif. Yuqoridagi (6) va (7) tengliklar determinantning *satrlar bo'yicha yoyilmasi* deb ataladi.

Shunga o'xshash determinantning *ustunlar bo'yicha yoyilmasini* ham quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} &= |A|, & a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} &= |A|, \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} &= |A|. \end{aligned} \quad (8)$$

Masalan, yuqorida keltirilgan (4) determinant qiymatini uning II satrining (5) algebraik to'ldiruvchilari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta = 2A_{21} + (-3)A_{22} + 7A_{23} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 13.$$

Laplas teoremasidan foydalanib yuqori tartibli determinantlarni hisoblash mumkin. Bunda n – tartibli determinantni hisoblash n ta $(n - 1)$ – tartibli determinantni (A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni) hisoblash va uning ixtiyoriy satr yoki ustuni bo'yicha yoyilmasidan foydalanishga keltiriladi. Jumladan, I tartibli determinant qiymati $|A| = |a_{11}| = a_{11}$ ekanligidan foydalanib, (2) va (3) formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Determinant qiymatini Laplas teoremasi yordamida hisoblash uchun uning ixtiyoriy satr yoki ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanish mumkin. Ammo, amaliy nuqtai nazardan, ko'proq elementlari nolga teng bo'lgan satr yoki ustunni tanlash (agar shundaylar mavjud bo'lsa) maqsadga muvofiqdir. Bu holda nolga teng elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini topishga hojat bo'lmaydi va hisoblashlar hajmi ancha kamayadi.

14- Misol. Ushbu IV tartibli determinantni hisoblang:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 6 & 7 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Bu determinantni II- ustun bo'yicha yoyilmasidan foydalanib hisoblash qulaydir. Bunga sabab shuki, bu ustunda nol elementlar boshqa satr va ustunlarga qaraganda ko'proq hamda $a_{22} = 0$, $a_{42} = 0$ elementlarning A_{22} , A_{42} algebraik to'ldiruvchilarini hisoblash shart emas.

Dastlab A_{12} va A_{32} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblab, $A_{12} = -389$ va $A_{32} = 45$ ekanligini aniqlaymiz. Endi determinant qiymatini II ustunga Laplas teoremasini tatbiq etib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42} = \\ &= (-3) \cdot (-389) + 0 \cdot A_{22} + 7 \cdot 45 + 0 \cdot A_{42} = 1482. \end{aligned}$$

11-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i – satrining algebraik to'ldiruvchilari $A_{ij} (j = 1, 2, \dots, n)$ va $b_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ixtiyoriy sonlar bo'lsa, unda

$$b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + b_3A_{i3} + \dots + b_nA_{in} = |B|$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda $|B|$ determinant $|A|$ determinantdan faqat i – satri bilan farq qilib, uning i – satri $b_j (j = 1, 2, \dots, n)$ sonlardan tashkil topgan bo'ladi.

Isbot: Bu xossa isbotini III tartibli $|A|$ determinantning, masalan, birinchi satri uchun keltiramiz. Bu holda

$$b_1A_{11} + b_2A_{12} + b_3A_{13} = |B|$$

yig'indining qo'shiluvchilari $|A|$ determinantning birinchi satr bo'yicha yoyilmasini ifodalovchi

$$a_1A_{11} + a_2A_{12} + a_3A_{13} = |A|$$

yig'indi qo'shiluvchilaridan faqat birinchi ko'paytuvchilari, ya'ni birinchi satr elementlari bilan farq qiladi. Shu sababli $|A|$, $|B|$ determinantlar bir-biridan faqat birinchi satri bilan farq qiladi va $|B|$ determinantning birinchi satri b_1 , b_2 va b_3 sonlardan iborat bo'ladi.

Masalan, A_{11} , A_{12} va A_{13}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}$$

determinantni birinchi satri elementlarining algebraik to'ldiruvchilari bo'lsa, unda

$$11A_{11} + 12A_{12} + 13A_{13} = |B| = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 7 & 3 \\ 9 & 12 & -4 \end{vmatrix}.$$

12-xossa. Agar $|A|$ determinantni biror i – satrining $a_{ij} (j = 1, 2, \dots, n)$ elementlari boshqa bir k – satr ($i \neq k$) mos elementlarining $A_{kj} (j = 1, 2, \dots, n)$ algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirilgan bo‘lsa, bu ko‘paytmalar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi.

Isbot: Oldingi xossada $b_j = a_{ij} (j = 1, 2, \dots, n)$ deb olsak, unda $b_1 A_{k1} + b_2 A_{k2} + b_3 A_{k3} + \dots + b_n A_{kn} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} + \dots + a_{in} A_{kn} = |B|$. Bu yerda $|B|$ determinant berilgan $|A|$ determinantning k -satriga i - satrining a_{ij} elementlarini qo‘yish bilan hosil qilinadi. Shu sababli $|B|$ determinantning i - satri va k - satri bir xil bo‘lib, 3 - xossaga asosan uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + a_{i3} A_{k3} + \dots + a_{in} A_{kn} = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k. \quad (9)$$

13-xossa. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa ularning ko‘paytmasining determinanti har birining determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o‘rinlidir.

Ko‘rib o‘tilgan bu xossalar determinantlarni hisoblash va ularning turli tatbiqlarida qo‘llaniladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1.1. Matritsalar, ularning turlari va ular ustida amallarga doir misollar.

Berilgan A va B matritsalar uchun C matritsani toping.

$$1.1.1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = 2A - B^T.$$

$$1.1.2. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A^T - B^T.$$

$$1.1.3. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = A + B^T.$$

$$1.1.4. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = (3A)^T - B.$$

$$\mathbf{1.1.5.} \ A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}, \ C = B - 2A^T.$$

$$\mathbf{1.1.6.} \ A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ C = A^T + B^T.$$

$$\mathbf{1.1.7.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = 2A + 3B.$$

$$\mathbf{1.1.8.} \ A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \ C = 3B - 2A.$$

$$\mathbf{1.1.9.} \ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \ C = A - B^T.$$

$$\mathbf{1.1.10.} \ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \ C = (2B)^T + A.$$

$$\mathbf{1.1.11.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = 3A^T - 2B^T$$

A va B matritsani ko'paytmasini hisoblang.

$$\mathbf{1.1.12.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.13.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.14.} \ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.15.} \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.16.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.17.} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.18.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (3 \quad 2 \quad 1).$$

$$\mathbf{1.1.19.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.20..} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.21.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.22.} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.23.} \quad A = (5 \quad 1 \quad 0 \quad -3), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.24.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.25.} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.26. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.27. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.28. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.29. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.1.30. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Determinantlar va ularni hisoblash. Determinantlarning asosiy xossalriga doir misollar yechish.

Quyidagi ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang:

$$1.2.1. \quad \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

$$1.2.2. \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$1.2.3. \quad \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

$$1.2.4. \quad \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}.$$

$$1.2.5. \quad \begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$$

$$1.2.6. \quad \begin{vmatrix} a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{1}{2}} \\ -a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix}.$$

Quyidagi uchunchi tartibli determinantlarni hisoblang:

$$1.2.7. \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.8. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.9. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.10. \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.11. \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.12. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

Tenglamalarni yeching:

$$1.2.13. \begin{vmatrix} x^2 - 4 & -1 \\ x - 2 & x + 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.14. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x + 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.15. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 - x & 3 \\ 1 & 2 & 5 + x \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.16. \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{vmatrix} = 0$$

$$1.2.17. \begin{vmatrix} 3 - x & 2 \\ 2 & 4 - x \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.2.18. \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Tengsizlikni hisoblang:

$$1.2.19. \begin{vmatrix} x & 3x - 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} < 0.$$

$$1.2.20. \begin{vmatrix} 3 - x & 4 \\ 2 & 4 - x \end{vmatrix} < 0.$$

$$1.2.21. \begin{vmatrix} x - 1 & 3 \\ 2x - 3 & -2 \end{vmatrix} < 0.$$

$$1.2.22. \begin{vmatrix} 2x - 3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix} > 0.$$

Quyida berilgan to'rtinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

$$1.2.23. \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.24. \begin{vmatrix} 5 & 62 & -79 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 183 & 201 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.25. \begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.2.26. \begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \\ -9 & -7 & 9 & 7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.27. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.28. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.2.29.

1.2.30.

koeffitsiyentlari, b_j esa ozod hadlari deyiladi. Bu sistemada $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ noma'lumlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi.

Yig'indi belgisi yordamida (2.1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Endi (2.1) yoki (2.2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan to'rtburchakli A matritsani, x_j noma'lumlar va b_i ozod hadlardan hosil qilingan X va B ustun matritsalarini kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Unda, matritsalarini ko'paytirish amalidan foydalanib, (2.1) sistemani ixcham va qulay bo'lgan quyidagi matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX = B \quad (2.4)$$

2-Ta'rif: (2.1) yoki (2.2) chiziqli tenglamalar sistemaning **yechimi** deb shunday $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo'yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni to'g'ri tenglikka aylanadi.

Sistemaning yechimlari

$$X = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k \ \dots \ \alpha_n)^T$$

ustun matritsa ko'rinishda yozilsa, u (2.4) matritsaviy tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradi. Bunda n - ta sondan tuzilgan X ustun matritsa sistemaning bitta yechimi bo'lib hisoblanadi.

1 – Misol. 3 noma'lumli 2 ta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases} \quad (2.5)$$

Yechish. Yuqorida berilgan $n = 3$ noma'lumli $m = 2$ ta tenglamalar sistemasi uchun $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ va $x_3 = 5$ yoki

$$X = (1 \quad -2 \quad 5)^T$$

ustun matritsani tashkil etgan sonlar yechim bo'ladi. Haqiqatan ham bu sonlarni berilgan (2.5) sistema tenglamalariga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 5 \equiv -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \equiv 32 \end{cases}$$

to'g'ri tengliklarga ega bo'lamiz.

Sistemaning yechimini mavjudligini tekshirish va, yechim mavjud bo'lgan taqdirda, uni topish **sistemani yechish** deb ataladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda uch hol bo'lishi mumkin.

1-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim yagona. Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -14 \\ 2x_1 - 3x_2 = 19 \end{cases}$$

sistema uchun $x_1 = 2$ va $x_2 = -5$ yagona yechim bo'ladi.

2-hol. Sistema yechimga ega va bu yechim bittadan ortiq. Masalan, yuqoridagi (2.5) sistema uchun ko'rsatilgan yechimdan tashqari $x_1 = -5$, $x_2 = 26$ va $x_3 = 43$ ham yechim bo'lishini bevosita tekshirish mumkin.

3-hol. Sistema yechimga ega emas. Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

sistema yechimga ega emas, chunki yig'indisi bir paytning o'zida ham 1, ham 0 bo'ladigan sonlar mavjud emas.

3-Ta'rif: Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo'lmaganda bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bu sistema **birgalikda** deyiladi; agar yechimga ega bo'lmasa sistema **birgalikda emas** deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lsa, u **aniq** deyiladi; bittadan ortiq yechimga ega bo'lsa, u **aniqmas** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan (2.1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlash uchun uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan (2.3) $m \times n$ tartibli A matritsaga B ozod hadlar ustunini birlashtirishdan hosil bo'lgan $m \times (n + 1)$ tartibli

$$A^b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

matritsani qaraymiz .

4-Ta'rif: A^b matritsa A matritsaning **kengaytirilgani** deb ataladi.

4.2. Matritsalar usuli. Bu usulda sistemaning matritsaviy ko'rinishda yozilgan (2.4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda $r(A) = n$ shartdan sistemaning $n -$ tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta'rifiga asosan $\Delta = |A| \neq 0$ bo'ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (2.4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko'paytirish mumkin. Natijada, teskari matritsa ta'rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B. \quad (2.7)$$

(2.4) matritsaviy ko'rinishdagi n noma'lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (2.7) formula bir noma'lumli $ax = b$ ($a \neq 0$) chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x = \frac{b}{a} = a^{-1}b$ formulaga o'xshash ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

2-Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0.$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Endi (2.7) formula bo'yicha noma'lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma'lumli n ta tenglamali aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko'rinishdagi (2.7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbig'i murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi.

4.3. Kramer usuli. Matritsaviy ko'rinishda (2.7) formula bilan ifodalanuvchi (2.1) sistema ($m = n$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib quyidagicha yozamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{ik} & \cdots & A_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

[illegible]

Bu yerdan sistemaning $x_k(k = 1, 2, \dots, n)$ yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}) = \frac{1}{\Delta} \Delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, $k = 1, 2, \dots, n$ uchun ushbu

$$b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \Delta_k$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishidan foydalandik. (2.8) formulalarda (2.1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

determinant sistemaning **asosiy determinanti**, uning k - ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan $\Delta_k (k = 1, 2, \dots, n)$ determinantlar esa **yordamchi determinantlar** deyiladi.

5-Ta'rif: (2.1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (2.8) tengliklar **Kramer formulalari** deb ataladi.

Kramer usulining afzalligi shundan iboratki, u orqali sistemaning ma'lum bir noma'lumlarini ham (masalan, faqat x_1 va x_2

noma'lumlarni) topish mumkin. Ammo bu usul ham n katta bo'lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni taqozo etadi va shu sababli uni amalda qo'llash katta qiyinchiliklar bilan bog'liq.

Kramer formulalarini $n = 2$ hol uchun yozamiz. Bunda (2.1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunga o'xshash $n = 3$ bo'lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

ko'rinishda bo'ladi.

3- Misol. Ushbu uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7.$$

Kramer formulalariga asosan sistema yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{18}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{18}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{18}.$$

Shuni yana bir marta ta'kidlab o'tamizki, (2.1) sistema $n = m$ holda yagona yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniq bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lishi kerak va bunda yechim matritsalar usulida (2.7), Kramer usulida esa (2.8) formulalar bilan topiladi.

Ko'rsatish mumkinki, agar $n = m$ holda (2.1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsa, unda quyidagi ikki hol bo'ladi:

1) Barcha yordamchi determinantlar $\Delta_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ bo'lsa, unda (2.1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni birgalikda va aniqmas bo'ladi.

2) Agar yordamchi $\Delta_k = 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, unda (2.1) sistema yechimga ega emas, ya'ni birgalikda bo'lmaydi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 6x_1 - 10x_2 = 12 \end{cases}$$

sistemalarning birinchisi uchun $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ va u $x_1 = c, x_2 = \frac{3c-4}{5}$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p yechimga ega. Ikkinchi sistema uchun esa

$\Delta = 0$, ammo $\Delta_1 = 20 \neq 0$ bo'lgani uchun u yechimga ega emas. Haqiqatan ham sistemaning II tenglamasidan $3x_1 - 5x_2 = 6$ ekanligi kelib chiqadi va u sistemaning I tenglamasiga ziddir.

4.4. Gauss usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yoki Kramer usulida yechishda bevosita berilgan (2.1) sistemaning o'zi bilan ish ko'riladi. Endi qaralayotgan Gauss usulida esa berilgan (2.1) sistema boshqa bir sistemaga keltiriladi shu sababli bizga quyidagi tushuncha kerak bo'ladi.

6-Ta'rif: Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami o'zaro teng bo'lsa, ular **ekvivalent (teng kuchli) sistemalar** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -23 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

sistemalar ekvivalent, chunki ular bir xil $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ yechimga ega.

1-Teorema: Agar (2.1) sistemaning ikkita tenglamalari o'zni o'zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko'paytirilib boshqa bir tenglamasiga qo'shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o'rnini almashtirish va hosil bo'lgan sistemaning birinchi tenglamasini $\lambda = -2$ songa ko'paytirib, uchinchi tenglamasiga qo'shish natijasida hosil bo'lgan quyidagi sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -11x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Haqiqatan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida

yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1 = -\frac{11}{63}, \quad x_2 = \frac{25}{63}, \quad x_3 = -\frac{10}{63}$$

yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo'lgan quyidagi n noma'lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o'tamiz:

[illegible]

1-qadam. (2.9) sistemada $a_{11} \neq 0$ deb olish mumkin, chunki bu shart bajarilmagan bo'lsa, (2.9) sistemadagi tenglamalar o'rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/a_{11}$ songa ko'paytirib, uning k -tenglamasiga ($k = 1, 2, \dots, n$) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent sistemaning k -tenglamasida noma'lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

[illegible]

2- qadam. Hosil bo'lgan (2.10) sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2 - tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko'paytirib, uning k - tenglamasiga ($k = 3, 4, \dots, n$) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent sistemaning k - tenglamasida noma'lum x_2 qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a^{(1)}_{22}x_2 + a^{(1)}_{23}x_3 + \cdots a^{(1)}_{2n}x_n = b^{(1)}_2 \\ a^{(2)}_{33}x_3 + \cdots a^{(2)}_{3n}x_n = b^{(2)}_3 \\ a^{(2)}_{43}x_3 + \cdots a^{(2)}_{4n}x_n = b^{(2)}_4 \\ \\ a^{(2)}_{n3}x_3 + \cdots a^{(2)}_{nn}x_n = b^{(2)}_n \end{array} \right. \quad (2.11)$$

n -qadam. Yuqoridagi jarayonni ketma-ket $n - 1$ marta takrorlab, quyidagi ko‘rinishdagi ekvivalent sistemaga kelimiz:

[illegible]

Bu *Gauss usulining to'g'ri yo'li* , uning natijasida hosil bo'lgan (2.12) sistema *uchburchakli* deyiladi.

Endi (2.12) sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma'lumning qiymati topamiz. So'ngra x_n qiymati (2.12) sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo'yib, undan x_{n-1} noma'lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayon ***Gauss usulining teskari yo'li*** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

- Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;
- Bu usulni deyarli yuqorida ko'rsatilgan ko'rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin;

- Bu usul sodda hisoblash algoritmiga ega bo'lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

4- Misol. Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma'lumlarni birin-ketin yo'qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Kasr sonlarga kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1 - tenglamani ikkala tomonini -3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko'paytirib, ularni o'zaro qo'shamiz. So'ngra 1 - tenglamani ikkala tomonini -2 soniga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamani 3 - tenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2 -tenglamasini -8 soniga, 3 - tenglamasini 17 soniga ko'paytirib o'zaro qo'shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemaning 3 - tenglamasidan $x_3 = 3$ ekanligini topamiz.

So'ngra bu natijani sistemaning 2 - tenglamasiga qo'yib, undan $x_2 = -2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2 = -2$ va $x_3 = 3$ natijalarni sistemaning 1- tenglamasiga qo'yib, undan $x_1 = 1$ ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, va $x_3 = 3$ ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi berilgan chiziqli tenglamalar sistemasini matritsaviy usul,

Kramer usuli va Gauss usullari yordamida yeching.

$$2.1.1. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}.$$

$$2.1.2. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \end{cases}.$$

$$2.1.3. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}.$$

$$2.1.4. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = -7 \end{cases}.$$

$$2.1.5. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases}.$$

$$2.1.6. \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}.$$

$$2.1.7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$2.1.8. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$2.1.9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases}.$$

$$2.1.10. \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 = -12 \end{cases}.$$

$$2.1.11. \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = -5 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}.$$

$$2.1.12. \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + \quad \quad + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

$$2.1.13. \begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11 \end{cases}$$

$$2.1.14. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$$2.1.15. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}.$$

$$2.1.16. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}.$$

$$2.1.17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

$$2.1.18. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}.$$

$$2.1.19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

$$2.1.20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}.$$

$$2.1.21. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}.$$

$$2.1.22. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}.$$

$$2.1.23. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}.$$

$$2.1.24. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}.$$

$$2.1.25. \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + 3z - 7 = 0 \end{cases} .$$

$$2.1.26. \begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases} .$$

$$2.1.27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 31 \end{cases} .$$

$$2.1.28. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} .$$

$$2.1.29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} .$$

$$2.1.30. \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases} .$$

3-MAVZU: CHIZIQLI FAZO

Reja:

1. Ta'rif va tushunchalar.
2. Chiziqli fazoning ta'rifi va o'lchovi.
3. Chiziqli fazoning qism fazolari.

Tayanch iboralar: nol vektor, kollinear, birlik vektor, teng vektor, vektorning yig'indisi, vektorlarning ayirmasi, chiziqli fazo, erkli vektorlar, cheksiz o'lchovli fazo, qism fazo, chiziqli qobig'i.

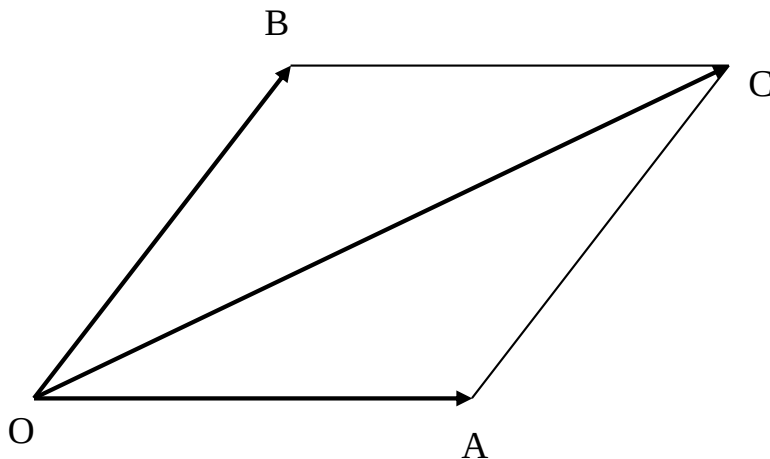
3.1. Ta'rif va tushunchalar.

Yo'naltirilgan kesmaga vektor deyiladi. Ma'lumki kesma ikki nuqtani tutashtirishdan hosil bo'ladi. Birinchi nuqta vektorning – **boshi**, ikkinchisi – **oxiri** deyiladi. Boshi bilan oxiri ustma-ust tushgan vektor **nol** vektor deyiladi. Nol vektordan farqli har qanday vektor yo'nalgan kesma bilan tasvirlanadi.

Vektorlar **AB**, **CD**, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ yoki $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ kabi belgilanadi.

1-Ta'rif: *AB, CD to'g'ri chiziqlar parallel yoki ustma-ust tushsa, ikkita nol bo'lmagan $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorlar **kollinear** deyiladi. Nol vektor har qanday vektorga kollinear hisoblanadi.*

Noldan farqli $\overrightarrow{AB}$, vektorning uzunligi deb, **AB** kesmaning uzunligiga aytiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ kabi belgilanadi. Ta'rif bo'yicha nol vektorning uzunligi (moduli) nolga teng. Uzunligi birga teng bo'lgan vektor **birlik vektor** deyiladi.



3.1.1-chizma

Nol bo'lmagan ikkita $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ vektorlarning uzunliklari teng va bir xil yo'nalgan bo'lsa, bunday vektorlar **teng vektorlar** deyiladi.

Noldan farqli $\vec{a}$ vektor uchun $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^0$ dan iborat vektor $\vec{a}$

bilan bir xil yo'nalgan birlik vektor bo'ladi, bu yerda: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$.

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmasini yasash uchun quyidagicha ish ko'riladi: $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bitta nuqtadan qo'yiladi $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. U hol $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ da $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{a} \neq 0$ vektorga qarama - qarshi vektor deb $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli shu vektor moduliga teng, yo'nalishi esa $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama - qarshi bo'lgan vektorga aytiladi. Ravshanki, qo'shish amalining xossalari quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{assotsiativlik})$$

$$\vec{a} + 0 = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{kommutativlik}) \quad (3.1)$$

λ son bilan $\vec{a} \neq 0$ vektorning ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli $|\lambda| |\vec{a}|$ bo'lgan $\vec{a}$ vektor bilan bir xil, $\lambda < 0$ holda unga qarama - qarshi yo'nalgan $\lambda \vec{a}$ vektorga aytiladi. Agar $\lambda = 0$ yoki $\vec{a} = 0$ bo'lsa $\lambda \vec{a} = 0$ bo'ladi. Vektorni songa ko'paytirish amalining xossalari:

$$\begin{aligned}
1 \cdot \vec{a} &= \vec{a} \\
\lambda(\mu \vec{a}) &= (\lambda\mu) \cdot \vec{a} \\
\lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\
(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear va $\vec{b} \neq 0$ bo'lsa, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ nisbat deb shunday λ songa aytiladiki, unda $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ bo'ladi.

Vektorlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallari aniqlangan barcha haqiqiy komponentli n o'lchovli vektorlar to'plami n o'lchovli vektor fazo deyiladi. Biz n o'lchovli vektor fazoni R^n ko'rinishida belgilaymiz. n o'lchovli vektor fazoning, ya'ni R^n ning elementlari n o'lchovli vektorlardan iborat.

1-misol. $A(3; -1; 2)$ nuqta $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $B(-1; 2; 1)$ nuqta esa oxiri bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini topish uchun mos ravishda B nuqtaning koordinatalaridan A nuqtaning koordinatalarini ayiramiz.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (-1 - 3; 2 - (-1); 1 - 2) \\
\overrightarrow{AB} &= (-4; 3; -1).
\end{aligned}$$

2-Misol. $\vec{a}(3; -6; -2)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

Yechish: Birlik vektorni quyidagicha yozish mumkin.

$$\vec{a}^0 = \vec{i} \vec{a}_x^0 + \vec{j} \vec{a}_y^0 + \vec{k} \vec{a}_z^0$$

endi $\vec{a}_x^0, \vec{a}_y^0, \vec{a}_z^0$ larni topamiz.

$$\vec{a}_x^0 = \frac{\vec{a}_x}{|a|}; \quad \vec{a}_y^0 = \frac{\vec{a}_y}{|a|}; \quad \vec{a}_z^0 = \frac{\vec{a}_z}{|a|}$$

$|a| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$ bo'lgani uchun. Bundan $\vec{a}_x^0 = \frac{3}{7}; \quad \vec{a}_y^0 = -\frac{6}{7}; \quad \vec{a}_z^0 = -\frac{2}{7}$ ga ega bo'lamiz. Demak, berilgan vektorga yo'nalishdosh birlik vektor quyidagicha $\vec{a}^0 = \left(\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ bo'ladi.

3.2. Chiziqli fazoning ta'rifi va o'lchovi.

2-Ta'rif: R^n to'plam berilgan bo'lib, $a, b, c, \dots$ sonlar uning elementlari bo'lsin. R^n to'plamda undagi $a, b \in R^n$ elementlarning har qanday juftligi R^n dan olingan, bir qiymatli aniqlangan $(a + b) \in R^n$ elementni mos qo'yuvchi va a, b larning yig'indisi deb atalgan qo'shish amali hamda haqiqiy songa ko'paytirish, ya'ni $a \in R^n$ element va har qanday haqiqiy λ sob uchun $\lambda a \in R^n$ ko'paytma har bir qiymatli aniqlangan bo'lib, yuqorida keltirilgan (3.1) va (3.2) xossalarni qanoatlantirsa, R^n to'plam elementlari vektor deb, R^n ning o'zi esa chiziqli fazo deyiladi.

Yuqorida keltirilgan (3.1) va (3.2) xossalardan kelib chiqadigan ba'zi sodda tasdiqlarni eslatib o'tamiz:

1).har qanday R^n chiziqli fazoda faqat bitta $\vec{0} \in R^n$ element mavjud;

2) R^n chiziqli fazoning har qanday elementi uchun shu fazoda unga qarama – qarshi bo'lgan yagona element mavjud. $(-1)\vec{a}$ element $\vec{a}$ element uchun qarama – qarshi bo'lgan element bo'ladi;

3) har qanday $\vec{a} \in R^n$ element uchun $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ munosabat hamma vaqt bajariladi;

4) har qanday λ haqiqiy son va $\vec{0} \in R^n$ element uchun $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ munosabat hamma vaqt bajariladi;

5) $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ tenglikdan $\lambda = 0$ yoki $\vec{a} = \vec{0}$ ekenligi kelib chiqadi.

3-Ta'rif: Agar R^n chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli vektor mavjud bo'lib, chiziqli erkli vektorlar soni bundan ortiq bo'lmasa, R^n fazo n o'lchovli fazo deyiladi. Agar R^n fazoda cheksiz ko'p chiziqli erkli vektorlar topish mumkin bo'lsa, u holda R^n fazo cheksiz o'lchovli fazo deyiladi.

Cheksiz o'lchovli vektorlar matematikaning maxsus bo'limlarida tekshiriladi. Biz bu yerda chekli o'lchovli fazolar bilan shug'ullanamiz.

3-Misol. Tekislikda vektorlar to'plami berilgan bo'lsin. Bu to'plam haqiqiy sonlar maydoni ustidagi chiziqli fazoni ifodalashini ko'rsating.

Yechish. Bizga berilgan R^n chiziqli fazoning kollinear bo'lmagan ikki $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ va $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ vektori chiziqli erklidir. Agar bularni chiziqli bog'liq bo'lsin deb faraz qilsak, $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$ tenglikdan $\lambda_1 \neq 0$ bo'lganda

$$\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1, \quad \lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Geometriyadan ma'lumki, oxirgi tenglik $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlarning kollinearligini bildiradi. Shunday qilib, $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar o'zaro chiziqli erkli, lekin R^n ning istalgan $\vec{a}$ vektori $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ orqali chiziqli ifodalanadi. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}$ vektorlarning boshlarini bitta nuqtaga ko'chirsak,

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra bu fazo ikki o'lchovlidir.

4-Misol. P haqiqiy sonlar maydoni ustida R^n chiziqli fazoni ko'rib chiqing.

Yechish. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining Ox , Oy va Oz o'qlarida yotgan va uzunliklari 1 ga teng bo'lgan $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektorlarni olaylik. Bu uch vektor chiziqli erkli, chunki ular bitta tekislikda yotmaydi. R^n ning istalgan $\vec{a}$ vektori parallelepiped qoidasi bo'yicha $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ orqali chiziqli ifodalanadi:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

bundan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – haqiqiy sonlar va $\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_2 \vec{e}_2, \lambda_3 \vec{e}_3$ mos ravishda Ox , Oy , Oz o'qlarda yotadi. Demak, R^n chiziqli fazo uch o'lchovlidir.

3.3. Chiziqli fazoning qism fazolari.

4-Ta'rif. Agar R^n chiziqli fazoning P qism to'plami ushbu xossalarga ega bo'lsa, u shu fazoning qism fazosi deyiladi.

1. Har qanday $\vec{a}, \vec{b} \in P$ vektorlar uchun $\vec{a} + \vec{b}$ yig'ndi ham P ga tegishli.

2. Har qanday $\vec{a} \in P$ nvektor va har qanday λ haqiqiy son uchun $\lambda \vec{a}$ vektor ham P ga tegishli.

Haqiqitdan ham, 2 – shartga ko'ra P to'plam nol vektorga ega bo'ladi: agar $\vec{a} \in P$ bo'lsa, u holda $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ vektor ham P qism fazoga

tegishli bo'ladi. So'ngra P o'zining istalgan $\vec{a} \in P$ vektori bilan birga, 2 – xossaga ko'ra, unga qarama – qarshi bo'lgan $-\vec{a} = (-\vec{a})$ vektorga ham ega bo'ladi, shuning uchun 1 – xossaga ko'ra P dagi istalgan ikkita vektorning ayirmasi ham P ning o'ziga tegishli bo'ladi. Chiziqli fazoning ta'rifiga kiruvchi qolgan barcha talablar esa R^n da bajarilgan taqdirda P da ham bajariladi.

R^n fazoning chiziqli qism fazolariga misol bo'lib, R^n fazoning o'zi, shunigdek, bittagina nol vektordan iborat – *nol qism fazo* deb ataluvchi to'plam xizmat qiladi.

5-Misol. R^n fazoda vektorlarning istalgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ chekli sistemasini ko'rib chiqing.

Yechish. Bu vektorlarning chiziqli kombinatsiyalardan iborat bo'lgan barcha vektorlar to'plami P orqali belgilaymiz. P chiziqli qism fazo bo'lishini isbot qilamiz. Haqiqatdan ham, agar

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \\ \vec{c} &= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n\end{aligned}$$

bo'lsa, u holda

$$\vec{b} + \vec{c} = (\lambda_1 + \alpha_1) \vec{a}_1 + (\lambda_2 + \alpha_2) \vec{a}_2 + \dots + (\lambda_n + \alpha_n) \vec{a}_n,$$

ya'ni $\vec{b} + \vec{c}$ vektor P ga tegishli; β har qanday bo'lganda ham

$$\beta \vec{b} = (\beta \lambda_1) \vec{a}_1 + (\beta \lambda_2) \vec{a}_2 + \dots + (\beta \lambda_n) \vec{a}_n$$

vektor P ga tegishli bo'ladi. P ga, xususan, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorning o'zlari ham tegishlidir.

Demak, yuqoridagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar to'plami qism fazo tashkil qiladi.

Barcha uzluksiz funksiyalar fazosida darajasi n dan katta bo'lmagan ko'phadlar to'plami qism fazodir. Biror R^n fazoning har qanday P qism fazoda R^n fazoning nol elementi bo'lishi o'z – o'zidan ravshandir.

Har qanday qism fazo chiziqli fazo bo'lgani uchun yuqorida biz kiritgan fazo o'lchovi tushunchasi, bazis va boshqa tushunchalarning hammasi qism fazoga ham tadbiq etiladi. Qism fazodagi chiziqli erkli vektorlar butun fazodagi chiziqli erkli vektorlardan ko'p bo'lmaydi,

shuning uchun har qanday qism fazoning o'lchovi butun fazo o'lchovidan katta emas.

Agar R^n chiziqli fazoning o'lchovi uning P qism fazosining o'lchoviga teng bo'lsa, u holda R^n chiziqli fazo bilan P qism fazo ustma – ust tushadi.

Har qanday R^n chiziqli fazoda quyidagi umumiy usul bilan qism fazo hosil qilish mumkin: R^n chiziqli fazoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlar to'plamini olamiz: u holda olingan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning hamma chiziqli kombinatsiyalaridan tuzilgan P to'plam R^n fazoning qism fazosidir. Bu berilgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarni o'z ichiga olgan kichik chiziqli qism fazodir. U $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarning *chiziqli qobig'i* deyiladi. Demak, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlardan hosil bo'lgan P qism fazoning o'lchovi bular orasidagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soniga teng ekanini ko'rsatish qiyin emas.

Agar diqqatga sazovor bo'lmagan nol qism fazoni e'tiborga olmasak, u holda eng sodda qism fazo bir o'lchovli qism fazodan iborat bo'ladi. Bunday qism fazolarning har birining bazasi bitta $\vec{e}_1$ vektordan iborat. Shunday qilib, bir o'lchovli qism fazo $\lambda \vec{e}_1$ ko'rinishdagi vektorlardan iborat, bunda λ – ixtiyoriy son, $\lambda_1 \vec{e}_1$ vektorga berilgan $\vec{e}_0$ vektorni qo'shamiz. Natijada ushbu

$$\vec{a} = \vec{e}_0 + \lambda \vec{e}_1$$

ko'rinishdagi vektorlar to'plamini hosil qilamiz. Bu vektorlar to'plamini, uch o'lchovli fazodagiga o'xshash, R^n chiziqli fazodagi to'g'ri chiziq deb atash tabiiydir.

Shuningdek, $\alpha_1 \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$ ko'rinishdagi vektorlar ($\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ – chiziqli erkli vektorlar, α va β – ixtiyoriy sonlar) ikki o'lchovli qism fazoni tashkil qiladi. Quyidagi

$$\vec{a} = \vec{e}_0 + \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$$

vektorlar to'plamini biz R^n da *tekislik* deb ataymiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

3.1. Ta'rif va tushunchalarga doir misollar

3.1.1. $A(5; 7)$ nuqta $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $B(-2; 4)$ nuqta esa oxiri bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

3.1.2. $C(-3; 4; -2)$ nuqta $\overrightarrow{CD}$ vektorning boshi $D(5; -6; 3)$ nuqta esa oxiri bo'lsa, $\overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar koordinatalarini toping.

3.1.3. $A(8; -7; -3)$ nuqta $\overrightarrow{AB}$ vektorning boshi $B(-4; -9; 4)$ nuqta esa oxiri bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlar koordinatalarini toping.

3.1.4. $\overrightarrow{AB}(6; -8)$ vektorning boshi $A(8; -7)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning oxiri $B(x; y)$ nuqtani toping.

3.1.5. $\overrightarrow{AB}(-2; 3; -7)$ vektorning boshi $A(-3; 5; 6)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning oxiri $B(x; y; z)$ nuqtani toping.

3.1.6. $\overrightarrow{AB}(5; 4; -2)$ vektorning boshi $A(2; -5; 6)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning oxiri $B(x; y; z)$ nuqtani toping.

3.1.7. $\overrightarrow{AB}(-5; 7)$ vektorning oxiri $B(4; -1)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning boshi $A(x; y)$ nuqtani toping.

3.1.8. $\overrightarrow{AB}(-2; -1; 4)$ vektorning oxiri $B(-6; 7; -3)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning boshi $A(x; y; z)$ nuqtani toping.

3.1.9. $\overrightarrow{AB}(1; 7; -9)$ vektorning oxiri $B(1; -3; -2)$ ekanligi ma'lum bo'lsa, vektorning boshi $A(x; y; z)$ nuqtani toping.

3.1.10. $\vec{a}(-4; 3)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

3.1.11. $\vec{b}(-8; -6)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

3.1.12. $\vec{c}(9; -12)$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan birlik vektorni toping.

3.1.13. $\vec{d}(6; -2; -3)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

3.1.14. $\vec{a}(-4; 3; 12)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

3.1.15. $\vec{b}(2; -6; -9)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorni toping.

3.1.16. $\vec{c}(3; 4; -12)$ vektorga qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektorni toping.

3.1.17. $\vec{d}(-1; 12; -12)$ vektorga qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektorni toping.

3.1.18. $\vec{b}(2; -10; 11)$ vektorga qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektorni toping.

3.1.19. $\vec{a}(6; -8)$ vektor berilgan. $\vec{a}$ ga kollinear va; 1) $\vec{a}$ bilan bir xil yoʻnalgan;

2) $\vec{a}$ bilan qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.20. $\vec{b}(-0,9; 0,1)$ vektor berilgan. $\vec{b}$ ga kollinear va; 1) $\vec{b}$ bilan bir xil yoʻnalgan; 2) $\vec{b}$ bilan qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.21. $\vec{c}(11; -7; 3)$ vektor berilgan. $\vec{c}$ ga kollinear va; 1) $\vec{c}$ bilan bir xil yoʻnalgan; 2) $\vec{c}$ bilan qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.22. $\vec{d}(-8; 4; 1)$ vektor berilgan. $\vec{d}$ vektor bilan bir xil yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.23. $\vec{a}(9; -2; 6)$ vektor berilgan. $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.24. $\vec{b}(10; 2; -11)$ vektor berilgan. $\vec{b}$ vektor bilan qarama-qarshi yoʻnalgan birlik vektor topilsin.

3.1.25. $\vec{a}(3; -5)$ vektorga yoʻnalishdosh, uzunligi 3 ga teng boʻlgan vektorni toping.

3.1.26. $\vec{b}(-2; 4; -3)$ vektorga yoʻnalishdosh, uzunligi 5 ga teng boʻlgan vektorni toping.

3.1.27. $\vec{c}(-6; 1)$ vektorga qarama-qarshi, uzunligi 4 ga teng boʻlgan vektorni toping.

3.1.28. $\vec{d}(-6; 1; -3)$ vektorga qarama-qarshi, uzunligi 6 ga teng boʻlgan vektorni toping.

3.1.29*. Bitta nuqtadan $\vec{a}(-12; 16)$, $\vec{b}(12; 5)$ vektorlar oʻtkazilgan. $\vec{a}$ bilan $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni teng ikkiga boʻladigan va shu nuqtadan chiqqan birlik vektorning koordinatalari topilsin.

3.1.30*. Bitta nuqtadan $\vec{a}(-3; 0; 4)$, $\vec{b}(5; -2; -14)$ vektorlar o'tkazilgan. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni teng ikkiga bo'ladigan birlik vektor topilsin.

3.2. Chiziqli fazoning ta'rifi va o'lchovi, chiziqli fazoning qism fazolariga doir misollar.

3.2.1. Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{u}, \vec{v}$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlarning chiziqli bog'li bo'lishini isbotlang.

3.2.2. $\vec{a}(2; 3; 1)$, $\vec{b}(1; 0; 4)$, $\vec{c}(2; 4; 1)$, $\vec{d}(0; 3; 2)$ vektorlarning chiziqli bog'liq ekanini isbotlang.

3.2.3. $\vec{a}(1; -2; 3)$, $\vec{b}(2; -2; 1)$, $\vec{c}(-1; -1; -1)$ vektorlar berilgan. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini toping.

3.2.4. $\vec{a}(4; 5)$ vektorni $\vec{b}(1; 3)$, $\vec{c}(2; 2)$ vektorlar orqali chiziqli ifodalang.

3.2.5. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{c} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

3.2.6. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{p} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

3.2.7. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{c}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{q} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

3.2.8. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{c}$ bazis bo'yicha $\vec{r} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{c}$ vektorning yoyilmasini toping.

3.2.9. $\vec{p}(1; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 5; 3)$, $\vec{r}(7; 1; -1)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{c}(12; -9; 6)$ vektorning yoyilmasini toping.

3.2.10. $\vec{a}(3; -1)$, $\vec{b}(1; -2)$, $\vec{c}(-1; 7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}, \vec{b}$ bazis bo'yicha $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning yoyilmasini aniqlang.

3.2.11. $\vec{a}(2; 1; 0)$, $\vec{b}(1; -1; 2)$, $\vec{c}(2; 2; -1)$ va $\vec{d}(3; 7; -7)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Har bir vektorning yoyilmasini qolgan uchta vektorni bazis sifatida qabul qilib aniqlang.

3.2.12. Quyidagi hollarning har birida $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{4; -2\}$, $\vec{b} = \{3; 5\}$, $\vec{c} = \{1; -7\}$;

b) $\vec{a} = \{5; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 0\}$, $\vec{c} = \{19; 8\}$;

c) $\vec{a} = \{-6; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 7\}$, $\vec{c} = \{9; -3\}$.

3.2.13. Quyidagi hollarning har birida $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-8; 7\}$, $\vec{b} = \{-2; 3\}$, $\vec{c} = \{-4; 1\}$;

b) $\vec{a} = \{14; -16\}$, $\vec{b} = \{2; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 5\}$;

c) $\vec{a} = \{-1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4\}$, $\vec{c} = \{-1; 3\}$.

3.2.14. Quyidagi hollarning har birida $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -4\}$, $\vec{c} = \{2; -3\}$;

b) $\vec{a} = \{3; -4\}$, $\vec{b} = \{-13; 13\}$, $\vec{c} = \{-4; 1\}$;

c) $\vec{a} = \{6; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; 1\}$, $\vec{c} = \{9; -3\}$.

3.2.15. Quyidagi hollarning har birida $\vec{d}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 7; 0\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 4\}$, $\vec{d} = \{4; 12; -3\}$;

b) $\vec{a} = \{5; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$, $\vec{c} = \{-6; 0; 1\}$,
 $\vec{d} = \{25; -22; 16\}$;

c) $\vec{a} = \{3; 5; 6\}$, $\vec{b} = \{2; -7; 1\}$, $\vec{c} = \{12; 0; 6\}$, $\vec{d} = \{0; 20; 18\}$.

3.2.16. Agar R^n fazoning R'_1 va R'_2 dan iborat ikki qism fazosi uchun umumiy element faqat nol vektor bo'lsa, ular o'lchovlarining yig'indisi R^n ning o'lchovidan katta emasligini ko'rsating.

3.2.17. R^n dagi ikkita qism fazoning birlashmasi va kesishmasi yana R^n da qism fazo ekanini isbotlang.

3.2.18. Ikkita qism fazo o'lchamlarining yig'indisi yig'indining o'lchamiga bu qism fazolar kesishmasi o'lchamining qo'shilganiga teng bo'lishini isbotlang.

3.2.19. R^n fazoda $\vec{a}(3; 0; 1; 0)$, $\vec{b}(3; 2; 1; 1)$, $\vec{c}(4; -2; -1; 1)$ vektorlar berilgan. Quyidagi skalyar ko'paytmalarni aniqlang:

a) $\vec{a}^2$; $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$;

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$; $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{b}$;

c) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$; $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

3.2.20. R^n fazoda $\vec{a}(2; 0; 6; 0; 3)$, $\vec{b}(1; -3; 0; 10; \sqrt{11})$, $\vec{c}(-1; -2; 0; 2; 4)$, $\vec{d}(4; -3; -1; 2; 2)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning uzunliklarini aniqlang.

3.2.21. R^5 fazoda quyidagi vektorlar berilgan:

a) $\vec{a}(1; -3; 2; 1)$ va $\vec{b}(0; -2; 1; 3)$;

b) $\vec{c}(-2; 0; 0; -1)$ va $\vec{d}(4; 6; 7; -8)$;

c) $\vec{m}(4; -3; 0; -5)$ va $\vec{n}(0; 10; 7; -6)$.

Bu vektorlarning qaysi biri o'zaro ortogonal bo'lishini ko'rsating.

3.2.22. R^5 fazoda quyidagi vektorlar orasidagi burchakni aniqlang.

a) $\vec{a}(-3; 4; 3; -1; 1)$ va $\vec{b}(6; 2; -2; -2; 1)$;

b) $\vec{c}(2; 1; 0; -2; -4)$ va $\vec{d}(1; 3; -4; 2; \sqrt{6})$;

c) $\vec{m}(3; -1; 8; 8; -4)$ va $\vec{n}(2; 6; -1; 5; 8)$.

3.2.23. Chiziqli fazoda mos ravishda $\vec{a}_1(1; 1; 0; 0)$, $\vec{a}_2(0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_3(0; 0; 1; 1)$ va $\vec{b}_1(1; 0; 1; 0)$, $\vec{b}_2(0; 2; 1; 1)$, $\vec{b}_3(1; 2; 1; 2)$ bazislarga ega V_1 va V_2 qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.

3.2.24. Chiziqli fazoda mos ravishda $\vec{a}_1(1; 2; 0; 1)$, $\vec{a}_2(1; 1; 1; 0)$ va $\vec{b}_1(1; 0; 1; 0)$, $\vec{b}_2(1; 3; 0; 1)$ bazislarga ega V_1 va V_2 qism fazolar yig'indisi va kesishmasining bazisini toping.

3.2.25. Ortonormal bazisga nisbatan uchta $\vec{a}(1; 2; 2; 1)$, $\vec{b}(1; 1; -5; 3)$, $\vec{c}(3; 2; 8; -7)$ vektorlar berilgan. Berilgan vektorlarga tortilgan qism fazoning bazisini toping va uni fazoning bazisigacha to'ldiring.

3.2.26. Besh o'lchamli fazoda ortonormal bazisga nisbatan $x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$ gipertekislik berilgan. Birinchi to'rttasi berilgan gipertekislikda yotuvchi yangi bazisni toping.

3.2.27. Gipertekislik $2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ va $\vec{x}(2; 0; 4; 6)$ vektor berilgan. $\vec{x}$ vektorni berilgan gipertekislikka tegishli $\vec{y}$ vektor va shu gipertekislikka orthogonal $\vec{z}$ vektorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

3.2.28. Yevklid fazosi V da $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ vektorlar, V ning qism fazosi V' da $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ vektorlar va V' ga orthogonal bo'lgan $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ vektorlar berilgan. Agar, $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ V' fazoga tegishli bo'lsa, $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ munosabat o'rinli bo'lishini isbotlang.

3.2.29. O'zining $M(x_0, y_0)$ bazislari bilan berilgan qism fazoga $\vec{a}(4; -1; 3; 4)$ vektorning ortogonal proeksiyasini toping.

3.2.30. Tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

bilan berilgan qism fazoga $\vec{a}(7; -4; -1; 2)$ vektorning ortogonal proyeksiyasini toping.

4-MAVZU: MATRITSANING RANGI

Reja:

1. Teskari matritsa .

2. Matritsaning rangi.

3. Kroneker-kapelli teoremasi.

4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Tayanch iboralar. teskari matritsa, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, birkirilgan matritsa, matritsaning k - tartibli minori, matritsa rangi, bazis minor.

4.1. Teskari matritsa. Biz matritsalar ustida qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallarini ko'rib o'tgan edik. Matritsalar son

tushunchasini umumlashtirishdan hosil qilinganligi haqida ham aytilgan edi. Sonlar uchun qo‘shish, ayirish va ko‘paytirish amallaridan tashqari bo‘lish amali ham mavjud. Bunda ikkita b va a ($a \neq 0$) sonlar bo‘linmasini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a}b = a^{-1}b.$$

Bundan ko‘rinadiki, bo‘lish amalini $a \neq 0$ songa teskari bo‘lgan a^{-1} son yordamida ko‘paytirish amali orqali ifodalash mumkin. Bunda ixtiyoriy $a \neq 0$ va unga teskari a^{-1} sonlar orasida $a a^{-1} = a^{-1}a = 1$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglik faqat o‘zaro teskari sonlar uchun o‘rinlidir va shu sababli teskari sonni ta’rifi sifatida qabul qilinishi mumkin. Shu sababli bu tenglikdan berilgan A matritsaga teskari matritsa tushunchasini kiritish uchun foydalaniladi.

1-Ta’rif: Berilgan n - tartibli A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb $AB = BA = E$ (E — n — tartibli birlik matritsa) shartni qanoatlantiruvchi n — tartibli B kvadrat matritsaga aytiladi.

Berilgan A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, ular uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Ma’lumki, ixtiyoriy $a \neq 0$ soni uchun a^{-1} teskari son mavjud va yagonadir. $a = 0$ sonining esa teskarisi mavjud emas. Shu sababli matritsalar uchun quyidagi savollar paydo bo‘ladi:

1. Qanday matritsalar uchun ularning teskarisi mavjud?
2. Teskari matritsa yagonami va uni qanday topish mumkin?
3. Qanday matritsalarining teskarisi mavjud emas?

2-Ta’rif: Agar A matritsaning determinanti $|A| = 0$ bo‘lsa u **maxsus matritsa**, aks holda, ya’ni $|A| \neq 0$ bo‘lsa **maxsusmas matritsa** deb ataladi.

1- Misol. A va B matritsalaridan qaysi biri maxsus yoki maxsusmas ekanligini ko‘rsating.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Yechish. Matritsalaridan A maxsus (chunki $|A| = 0$), B esa maxsusmas (chunki $|B| = 19 \neq 0$) matritsa bo'ladi.

1-Teorema: Maxsus A matritsa uchun teskari A^{-1} matritsa mavjud emas.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teskari A^{-1} matritsa mavjud deymiz. Ta'rifga asosan $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ va, teorema sharti bo'yicha, $|A| = 0$ tengliklar o'rinlidir. Bu holda, determinantning oldin ko'rib o'tilgan 13-xossasiga asosan,

$$|E| = |A^{-1}A| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 0 \cdot |A^{-1}| = 0$$

natijani olamiz. Ammo E birlik matritsaning determinanti $|E| = 1$ bo'ladi. Hosil bo'lgan bu ziddiyat bizning farazimiz noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi va maxsus matritsa uchun uning teskarisi mavjud emasligini ifodalaydi.

Berilgan n – tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsa determinantinig A_{ij} algebraik to'ldiruvchilaridan tuzilgan ushbu

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsani kiritamiz.

3-Ta'rif: $\bar{A}$ berilgan A matritsaga **birkirilgan matritsa** deb ataladi.

2- Misol. A matritsaga birkirilgan matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Yechish. Birinchi navbatda matritsa determinantning algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{11} = 5, A_{12} = -12, A_{13} = -20, A_{21} = 3, A_{22} - 2 = 5,$$

$$A_{23} = -12, A_{31} = 4, A_{32} = 6, A_{33} = 10$$

bo'lgani uchun unga birkirilgan matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

2-Teorema: Agar A maxsusmas matritsa bo'lsa unga teskari A^{-1} matritsa mavjud va u

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

formula bilan topiladi.

Isbot: Dastlab

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ko'paytmani topamiz. Determinantlarning 10 va 12-xossalariga asosan

$$a_{i1}A_{1k} + a_{i2}A_{2k} + a_{i3}A_{3k} + \cdots + a_{in}A_{nk} = \begin{cases} |A|, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan, matritsalar ko'paytmasining ta'rifiga asosan,

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$$

tenglikni hosil etamiz. Unda, matritsalarini songa ko'paytirish amalining ta'rifi va xossalariga asosan,

$$A \frac{1}{|A|} \bar{A} = \frac{1}{|A|} A\bar{A} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

natijaga kelamiz. Shu tarzda

$$\frac{1}{|A|} \bar{A}A = E$$

tenglik ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu yerdan, teskari matritsa ta'rifiga asosan, (4.3) tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

3- Misol. Yuqorida ko'rilgan (4.1) matritsa uchun $|A| = 26 \neq 0$ ekanligidan va unga birkirilgan (4.2) matritsadan foydalanib, A^{-1} teskari matritsani toping.

Yechish.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \bar{A} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & -2 & 6 \\ -20 & -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{26} & \frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ -\frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{10}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

3-Teorema: Maxsusmas A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa yagona ravishda aniqlanadi.

Isbot: Teskarisini faraz qilamiz. C va B matritsalar A matritsaga teskari va $C \neq B$ bo'lsin. Unda, teskari matritsa ta'rifiga asosan,

$$AC = CA = E, \quad AB = BA = E$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu tengliklar va birlik matritsa xossasidan foydalanib, quyidagi natijalarni olamiz:

$$C = CE = CAB, \quad B = BE = EB = CAB.$$

Bu ikkala tenglikning o‘ng tomonlarini taqqoslab, $C = B$ natijaga kelamiz. Hosil bo‘lgan bu ziddiyat farazimiz noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi va teskari matritsa yagona bo‘ladi.

Shunday qilib, A maxsusmas matritsa uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud va u yagonadir. Teskari matritsa tushunchasidan foydalanib bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalarining bo‘linmasini $A^{-1}B$ ($|A| \neq 0$) ko‘rinishda kiritish mumkin. Shuningdek A^{-1} teskari matritsani m marta o‘zaro ko‘paytirib, hosil bo‘lgan matritsani A maxsusmas matritsaning m – darajasi deb olishimiz va A^{-m} (m – ixtiyoriy natural son) kabi belgilashimiz mumkin. Bundan A^k daraja (A – maxsusmas matritsa) ixtiyoriy k butun son uchun aniqlangan bo‘ladi.

Teskari matritsalar quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $E^{-1} = E$.

Isbot: Bu xossa (4.3) teskari matritsani topish formulasidan bevosita kelib chiqadi.

2-xossa. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Isbot: Bu xossa bevosita teskari matritsaning ta’rifidan, ya’ni $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Isbot: Teskari matritsa ta’rifi va matritsalar ko‘paytmasining assosiativlik xossasiga asosan quyidagi tengliklarni olamiz:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Bu tengliklardan AB va $B^{-1}A^{-1}$ o‘zaro teskari matritsalar ekanligi ko‘rinadi.

4-xossa. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Isbot: Matritsalarini transponirlash amalining $(AB)^T = B^T A^T$ va $E^T = E$ xossalariidan foydalanib ushbu tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E.$$

Bu tengliklardan, teskari matritsa ta'rifiga asosan, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

5-xossa. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$

Isbot: Matritsalar ko'paytmasining determinanti uchun $|AB| = |A||B|$ formula va $|E| = 1$ tenglik hamda teskari son ta'rifidan foydalanib, ushbu natijaga kelamiz:

$$|A^{-1}| \cdot |A| = |A^{-1}A| = |E| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

4.2. Matritsaning rangi. Endi kelgusida kerak bo'ladigan matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. Dastlab oldin kvadrat matritsalar uchun aniqlangan minor tushunchasini ixtiyoriy to'rtburchakli matritsa uchun umumlashtiramiz.

4-Ta'rif. Har qanday $A_{m \times n}$ matritsaning ixtiyoriy ravishda tanlangan k ta ($k \leq \min(m, n)$) satr va ustunlarining kesishmasida joylashgan elementlaridan tuzilgan $k -$ tartibli determinant bu matritsaning **$k -$ tartibli minori** deyiladi.

Masalan,

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaning har bir elementi uning I tartibli ,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

kabi determinantlar II tartibli,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

determinantlar esa berilgan matritsaning III tartibli minorlariga misol bo'ladi.

5-Ta'rif: Berilgan A **matritsaning rangi** deb uning noldan farqli minorining eng katta tartibiga aytiladi.

Matritsaning rangi $r(A)$ kabi belgilanadi va uni quyidagicha topish mumkin. Agar matritsaning barcha elementlari nolga teng, ya'ni u nol matritsa bo'lsa, uning rangi $r(A) = 0$ bo'ladi. Matritsaning noldan farqli elementi mavjud bo'lsa, uning rangi $r(A) \geq 1$ bo'ladi. Bu noldan farqli elementni o'z ichiga olgan barcha II tartibli minorlarni hisoblaymiz. Agar barcha II tartibli minorlar nolga teng bo'lsa, unda $r(A) = 1$ bo'ladi. Aks holda $r(A) \geq 2$ bo'ladi va noldan farqli biror II tartibli minorni o'z ichiga olgan barcha III tartibli minorlarni qaraymiz. Ularning hammasi nolga teng bo'lsa $r(A) = 2$, aks holda $r(A) > 2$ bo'ladi. Bu jarayonni shunday tarzda davom ettiramiz. Natijada, biror qadamda noldan farqli k – tartibli minorni o'z ichiga oluvchi barcha $(k + 1)$ – tartibli minorlar nolga teng bo'lgan holga kelamiz va bundan matritsaning rangi $r(A) = k$ ekanligini topamiz.

4- Misol. Matritsaning

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini aniqlang.

Yechish. Bu matritsaning noldan farqli elementi mavjud va shu sababli $r(A) \geq 1$. Endi noldan farqli ixtiyoriy bir, masalan $a_{11} = -2$ elementni, o'z ichiga olgan va noldan farqli bo'lgan II tartibli minor mavjud yoki yo'qligini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11 \neq 0.$$

Demak, $r(A) \geq 2$ bo'ladi. Bu noldan farqli II tartibli minorni o'z ichiga olgan ikkita III tartibli minorlarni qaraymiz:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu yerdan ko‘rilayotgan matritsaning rangi $r(A) = 2$ ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, n – tartibli maxsusmas A matritsaning rangi $r(A) = n$ bo'ladi.

6-Ta'rif: Agar A matritsaning rangi $r(A) = k$ bo'lsa, uning noldan farqli ixtiyoriy bir k – tartibli minori **bazis minor** deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi rangi $r(A) = 2$ bo'lgan A_{43} matritsa uchun bazis minor sifatida ushbu II tartibli minorni olish mumkin:

4.3. Kroneker-kapelli teoremasi:

(4.4) *chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning matritsasi A va kengaytirilgan matritsa A^b ranglari o'zaro teng, ya'ni $r(A) = r(A^b) = r$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.*

[illegible]

Birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi (4.4) sistema matritsasining rangi $r(A)$ va unga kiruvchi noma'lumlar soni n o'zaro teng, ya'ni $r(A) = n$ bo'lsa, unda bu sistema yagona yechimga ega, ya'ni aniq bo'ladi.

2. Agar birgalikdagi (4.4) sistema matritsasining rangi $r(A) < n$ bo'lsa, bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni aniqmas bo'ladi.

Kroniker-Kapelli teoremasi va yuqorida keltirilgan tasdiqlar (4.1) sistema yechimini mavjud yoki mavjud emasligi, ularning soni haqida xulosa chiqarishga imkon beradi, ammo sistemaning yechimini topish yo‘lini ko‘rsatmaydi. Shu sababli endi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga o‘tamiz.

Dastlab (4.4) sistemada $m = n$, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni o'zaro teng hamda $r(A) = n$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu shartlarda ko'rilayotgan sistema yagona yechimga ega bo'lib, uni yechishning turli usullari mavjud.

4.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. Endi (4.4) n noma'lumli m ta tenglamalar sistemasining maxsus bir holini alohida ko'rib o'tamiz.

7-Ta'rif: Agar (4.4) chiziqli tenglamalar sistemaning o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng bo'lsa, u holda bu sistema **bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi** deyiladi.

Demak, n noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi hamma vaqt birgalikdadir, chunki u hech bo'lmaganda bitta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ yechimga ega.

8-Ta'rif: (4.5) bir jinsli sistemaning yechimi faqat nollardan iborat bo'lsa, u **trivial yechim**, aks holda, ya'ni sistemaning yechimi ichida kamida bitta noldan farqli son mavjud bo'lsa, u **notrivial yechim** deb ataladi.

Kroniker-Kapelli teoremasidan quyidagi tasdiq bevosita kelib chiqadi.

4-Teorema: Agar (4.5) bir jinsli sistema determinantining rangi $r(A) = n$ bo'lsa, bu sistema faqat trivial yechimga ega bo'ladi. Bu sistema notrivial yechimga ega bo'lishi uchun $r(A) = r < \min(m, n)$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

5- Misol. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 10x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish. Bir jinsli sistemalardan birinchisi faqat trivial yechimga ega (chunki $r(A) = 2 = n$), ikkinchisi uchun esa notrivial yechimlar ham mavjud (chunki $r(A) = 2 < n = 3$).

2-teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija: Bir jinsli (4.5) sistema $m = n$ holda notrivial yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar (4.5) bir jinsli sistemaning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, u yuqorida ko'rsatilgan asosiy va erkli o'zgaruvchilarni tanlab olish orqali topiladi.

6-misol. Ushbu bir jinsli sistemani tekshiring va uning notrivial yechimi mavjud bo'lsa, bu yechimni toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistema matritsasining rangi $r(A) = 2 < n = 4$. Demak uning notrivial yechimi mavjud. Asosiy o'zgaruvchilar sifatida x_1 va x_2 , erkli o'zgaruvchilar sifatida x_3 va x_4 noma'lumlarni tanlashimiz hamda sistemaning uchinchi tenglamasini o'chirib tashlashimiz mumkin va natijada berilgan sistemaga ekvivalent bo'lgan ushbu sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}.$$

Bu sistemada erkli o'zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3 = C_1$ va $x_4 = C_2$ qiymatlar berib, x_1 va x_2 asosiy o'zgaruvchilarni Kramer usulida topamiz:

$$x_1 = -\frac{1}{5}C_2, \quad x_2 = -\frac{1}{5}(5C_1 - 7C_2).$$

Demak, berilgan bir jinsli sistema cheksiz ko'p notrivial yechimga ega

va ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1 = -\frac{1}{5}C_2, \quad x_2 = -\frac{1}{5}(5C_1 - 7C_2), \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Bu yerda $C_1 = C_2 = 0$ desak, trivial yechimga, qolgan hollarda esa notrivial yechimlarga ega bo‘lamiz. Masalan, $C_1 = 5$, $C_2 = -10$ bo‘lganda sistemaning ushbu notrivial yechimi kelib chiqadi:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 19, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = -10.$$

Bir jinsli (4.5) sistemaning $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ yechimini $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ satr matritsa ko‘rinishda belgilaymiz. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega bo‘lishini tekshirib ko‘rish mumkin:

Agar $X = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ bir jinsli (4.5) sistemasining yechimi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda X = \lambda(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = (\lambda k_1, \lambda k_2, \lambda k_3, \dots, \lambda k_n)$$

ham shu sistemaning yechimi bo‘ladi.

Agar $X_1 = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ va $X_2 = (l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$ bir jinsli (4.5) sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 sonlar uchun

$X = C_1X_1 + C_2X_2 = (C_1k_1 + C_2l_1, C_1k_2 + C_2l_2, \dots, C_1k_n + C_2l_n)$ ham (4.5) sistemaning yechimi bo‘ladi. Bunda $C_1X_1 + C_2X_2$ algebraik yig‘indi X_1 va X_2 yechimlarning **chiziqli kombinatsiyasi** deyiladi.

9-Ta’rif: (4.5) sistemaning qandaydir $X_1, X_2, \dots, X_k$ yechimlari **chiziqli bog‘liqmas** deyiladi, agarda

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_kX_k = 0$$

tenglik faqat va faqat $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$ bo‘lganda bajarilsa. Aks holda bu yechimlar **chiziqli bog‘liq** deyiladi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning yechimi bo‘lishi yuqoridagi xossalardan kelib chiqadi. Shuning uchun shunday chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarni topish kerakki, ular orqali sistemaning barcha qolgan yechimlari chiziqli ifodalansin.

10-Ta’rif: Agar (4.5) bir jinsli tenglamalar sistemaning har

qanday X yechimini qandaydir chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $X_1, X_2, \dots, X_k$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalab bo‘lsa, unda $X_1, X_2, \dots, X_k$ **fundamental yechimlar sistemasi** deyiladi.

5-Teorema: Agar (4.5) chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining matritsaning rangi $r(A) < n$ bo‘lsa, bu sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n - r$ ta $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$ yechimdan iborat bo‘ladi va umumiy yechim X ularning

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_{n-r} X_{n-r}$$

chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida bo‘ladi. Bu yerda $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ — ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardan iboratdir.

Endi n noma’lumli m ta chiziqli tenglamadan iborat bir jinsli bo‘lmagan (4.1) va unga mos keluvchi bir jinsli (4.5) sistemalarning yechimlari orasidagi bog‘lanishlarni ko‘rib chiqamiz. Buning uchun ularning $AX = B$ va $AX = 0$ matritsaviy yozuvlaridan foydalanamiz.

6-Teorema: Agar X_1 va X_2 bir jinsli bo‘lmagan sistemaning ixtiyoriy ikkita yechimi bo‘lsa, unda $X = X_1 - X_2$ bir jinsli sistemaning yechimi bo‘ladi.

Isbot: Matritsalarining xossalari va $AX_1 = B, AX_2 = B$ tengliklarga asosan

$$X = A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0.$$

7-Teorema: Agar X_1 va X_0 mos ravishda bir jinsli bo‘lmagan (4.1) va bir jinsli (4.5) sistemalarning yechimlari bo‘lsa, unda $X = X_1 \pm X_0$ bir jinsli bo‘lmagan (4.1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

Isbot: Matritsalarining xossalari va $AX_1 = B, AX_0 = 0$ tengliklarga asosan

$$AX = A(X_1 \pm X_0) = AX_1 \pm AX_0 = B - 0 = B.$$

Bu teoremlardan ko‘rinadiki, bir jinsli bo‘lmagan (4.1) sistemaning umumiy X yechimini topish uchun uning birorta xususiy X_1 yechimi bilan tegishli bir jinsli sistemaning umumiy X_0 yechimini bilish kifoya. Bu holda $X = X_1 + X_0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Keyinchalik bu tasdiq boshqa tur tenglamalar uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘ramiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi matrisalarga teskari bo'lgan matritsalarini toping.

$$4.1.1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.3. A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$4.1.4. A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$4.1.5. A = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.6. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.7. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.8. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4.1.9. A = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.10. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1-7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.11. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.12. A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4.1.13. A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.14. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quyida berilgan matritsalarining rangini toping.

$$4.1.15. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.1.16. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quyida berilgan bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

$$4.1.17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.18. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.20. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 7x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.21. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.22. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.23. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.25. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.27. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.29. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$4.1.24. \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.26. \begin{cases} ax_1 + bx_2 + (a+b)x_3 = 0 \\ bx_1 + ax_2 + (a+b)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.28. \begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0 \\ 26x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases}$$

$$4.1.30. \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

5- MAVZU: EVKLID FAZO

Reja:

1. Metrik tushunchalar.

2. Evklid fazoning ta'rifi.

3. E_R^n da ortonormalangan bazis.

Tayanch iboralar: vektorlar orasidagi burchak, ortogonal, Evklid fazo, ortogonal vektor, ortonormalangan, normalangan, ortonormalangan bazis.

5.1. Metrik tushunchalar.

$\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ixtiyoriy vektor bo'lsin. U holda quyidagi yoyilmani yozish mumkin:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \{a_1, 0, \dots, 0\} + \{0, a_2, 0, \dots, 0\} + \dots + \{0, 0, \dots, 0, a_n\} = \\ &= \{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

(5.1) yoyilma vektorlarni uch o'lchovli fazoda biror bazis bo'yicha yoyilmasining tabiiy umumlashmasidir. Shuning uchun $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasini R^n da bazis deb, $a_1, a_2, \dots, a_n$

sonlarni esa $\vec{a}$ vektorning bu bazisga nisbatan *komponent (koordinata)*lari deb qarash tabiiydir. Bu yerda biz $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisni R^n da qarash bilan chegaralanamiz. R^n da metrik tushunchalar vektorlarni skalyar ko'paytirish yordami bilan eng oson kiritiladi. Tartiblangan

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \quad (5.2)$$

vektorlar juftining skalyar ko'paytmasi deb,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

songa aytamiz. R^n da skalyar ko'paytmaning bu ta'rifi tabiiy ravishda uch o'lchovli fazoda skalyar ko'paytma uchun vektorlarning Dekart koordinatalar sistemasidagi koordinatalari orqali ifodalovchi formulalarni umumlashtiradi. (5.2) dan skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalari bevosita kelib chiqadi:

1) har qanday $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ uchun

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad (5.3)$$

2) har qanday $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^n$ uchun

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \quad (5.4)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad (5.5)$$

3) har qanday $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad (5.6)$$

4) har qanday $\vec{a} \in R^n$ uchun

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \geq 0, \quad (5.7)$$

shu bilan birga, agar $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ bo'lsa, u holda $\vec{a} = \vec{0}$ bo'ladi. Bu xossa

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

formuladan kelib chiqadi.

$\vec{a}$ vektorning uzunligi deb,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (5.8)$$

sonni aytamiz. U holda har qanday $\vec{a} \neq \vec{0}$ uchun $|\vec{a}| > 0$; $\vec{a} = \vec{0}$ uchun $|\vec{a}| = 0$.

Endi biz nol bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchakni

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (5.9)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu ta'rif ma'noga ega bo'lishi uchun ixtiyoriy nolmas $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ vektorlar uchun

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1 \quad (5.10)$$

tengsizlikning to'g'ri ekanini ko'rsatish kerak bo'ladi. Bu tengsizlik

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$$

tengsizlikka ekvivalent. Ixtiyoriy $\vec{a} \neq \vec{0}$ va $\vec{b} \neq \vec{0}$ uchun (5.7) ga ko'ra

$$(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \geq 0 \quad (5.11)$$

tengsizlikni yozish mumkin. Skalyar ko'paytmaning (5.2) – (5.6) xossalardan foydalansak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2(\vec{b} \cdot \vec{b}) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2(\vec{b} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2|\vec{b}|^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Endi $c = |\vec{a}|^2$, $d = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $k = |\vec{b}|^2$ deb olamiz, u holda (5.11) va (5.12) dan barcha λ lar uchun

$$k\lambda^2 - 2\lambda d + c \geq 0$$

tengsizlik o'rinli ekani kelib chiqadi, bunda $c \geq 0$, $k \geq 0$. Bu tengsizlikning chap tomoni λ ga nisbatan kvadrat uchhad bo'lib, tegishli tengsizlik bajarilishi uchun uning diskriminanti musbat bo'lmasligi etarli, ya'ni

$$d^2 - ck \leq 0$$

tengsizlik bajarilishi etarli. Ammo oxirgi tengsizlikni quyidagicha

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = d^2 \leq c \cdot k = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$$

yozsa bo'ladi. Bu (5.10) tengsizlikning o'rinli ekanini isbotlaydi.

Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar *ortogonal vektorlar* deyiladi. $\vec{0}$ vektor har qanday $\vec{a} \in R^n$ vektorga ortogonal deb qaralishi mumkin. Barcha $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ birlik vektorlar o'zaro ortogonal bo'lgani sababli ular uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i \neq k \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bu munosabatlarda $\vec{e}_i$ larni ushbu $\vec{e}_i = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}$ ko'rinishga ega deb qaraladi.

1-Misol. Koordinatalari bilan berilgan quyidagi $\vec{a}(4; 3)$ va $\vec{b}(1; 7)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning orasidagi φ burchakni topish formulasidan,

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{1 + 49}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kelib chiqadi, hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ni tashkil qiladi.

5.2. Evklid fazoning ta'rifi.

1-Ta'rif. Agar n o'lchovli R^n chiziqli fazoda skalyar ko'paytirish aniqlangan bo'lsa, u holda bunday fazo n o'lchovli Evklid fazosi deb ataladi va E_R^n ko'rinishda belgilanadi.

Har qanday n o'lchovli chiziqli R^n fazoda skalyar ko'paytirishni aniqlash mumkin, ya'ni bu fazoni Evklid fazosiga aylantirish mumkin.

Haqiqatan ham, R^n fazoda istalgan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisni olaylik. Agar

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_i$$

bo'lsa, u holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

bo'ladi. Bu tenglik R^n fazoda skalyar ko'paytirishni aniqlaydi.

E_R^n ga tegishli ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor orasidagi burchak deb,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

songa aytiladi. Bu ta'rifda har doim

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

munosabatlarning bajarilishi ko'zda tutiladi. φ burchakning ta'rifi to'g'ri bo'lishi uchun har qanday ikki $\vec{a}, \vec{b} \in E_R^n$ vektor uchun

$$-1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$$

tengsizlik o'rinli, yoki

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \quad (5.13)$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi yetarli. (5.13) tengsizlik *Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi* deyiladi.

Bu tengsizlikdan E_R^n ga tegishli $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar uchun

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (5.14)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Agar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsa, u holda E_R^n fazodan olingan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar *ortogonal vektorlar* deyiladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal vektorlar bo'lsa, u holda $\vec{a} + \vec{b}$ ni tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning diagonali deb hisoblash tabiiydir. $\vec{a} + \vec{b}$ uzunligini topamiz. Ushbuga egamiz.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{b}.$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal bo'lgani uchun

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Demak,

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$

Bu formula E_R^n fazo uchun Pifagor teoremasining analogidir.

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + \dots + |\vec{a}_n|^2.$$

Bu formula Pifogorning ko'p o'lchovli teoremasining mazmunini tashkil qiladi. Bunda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarni n o'lchovli to'g'ri burchakli parallelepipedning biror uchidan chiquvchi qirralar deb tasvirlash mumkin. Oxirgi formulaning isboti ham avvalgiga o'xshash bo'lgani uchun unga to'xtalmaymiz.

5.3. E_R^n da ortonormalangan bazis.

Ushbu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar E_R^n da har bir ikkitasi o'zaro ortogonal vektor bo'lsin. Agar bu vektorlarning hammasi bir vaqtda $\vec{0}$ dan farqli bo'lsa, ular chiziqli erkli bo'ladi. Ushbu tenglik bajarilgan bo'lsin:

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}. \quad (5.15)$$

Agar bu tenglik $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lgandagina o'rinli ekanini ko'rsatsak, yuqoridagi tasdiq isbotlangan bo'ladi.

(5.15) ning ikkala tomonini $\vec{e}_1$ ga skalyar ko'paytiramiz.

$$\lambda_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + \lambda_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + \lambda_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) + \dots + \lambda_n (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_1) = 0.$$

Shartga ko'ra $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \neq 0$. Shuning uchun $\lambda_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 0$ dan $\lambda_1 = 0$ ekani kelib chiqadi.

$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ ekani ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Agar bittasi ham nolga teng bo'lmagan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar sistemasining har bir ikkita vektori o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda bu *sistema ortogonal bazis tashkil qiladi* deyiladi. Agar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar birlik vektor bo'lib ortogonal bazis tashkil qilsa, u holda bazis *ortogonal va normalangan* yoki to'g'ridan – to'g'ri *ortonormalangan bazis* deyiladi.

Ortonormalangan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis uchun ushbuga egamiz:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = k \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i \neq k \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Har ikkitasi ortogonal bo'lgan nolmas vektorlar chiziqli erkli ekanligi yuqorida isbotlangan edi, shu sababli ortogonal yoki ortonormalangan bazis tashkil qiluvchi vektorlar E_R^n da oddiy bazis ham tashkil qiladi.

1-Teorema. Har qanday n o'lchovli haqiqiy Evklid fazoda ortonormalangan bazis mavjud.

Bu teoremani isbot etish uchun bevosita ortonormalangan bazisni quramiz. E_R^n fazoda n o'lchovli haqiqiy Evklid fazosi ta'rifiga ko'ra biror $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis mavjud. Oldin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdan ortogonal bazis tuzamiz. Avvalo $\vec{q}_1 = \vec{e}_1$ deb olamiz. So'ngra $\vec{q}_2$ vektorni $\vec{q}_2 = \vec{e}_2 + \lambda \vec{q}_1$ ko'rinishda izlaymiz, bunda λ sonni $(\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_1)^2 = 0$, ya'ni $(\vec{e}_2 + \lambda \vec{q}_1) \cdot \vec{q}_1 = 0$ tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bundan

$$\lambda = -\frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1}$$

kelib chiqadi. Isbotning induksiya metodi bilan davom ettirishni mustaqil ravishda o'rganamiz.

2-Teorema. Agar E_R^n fazoda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar ortonormalangan bazis tashkil qilsa, u holda bu bazisga nisbatan skalyar ko'paytma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda ushbu

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n,$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + \dots + b_n \vec{e}_n,$$

vektorlar E_R^n ga tegishli ixtiyoriy vektorlar.

Skalyar ko'paytmaning xossasiga ko'ra yozadiga bo'lsak:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \dots + a_1 b_n (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n) + \\ &+ a_2 b_1 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + a_2 b_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + \dots + a_2 b_n (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n) + \\ &+ a_n b_1 (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_1) + a_n b_2 (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_2) + \dots + a_n b_n (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n). \end{aligned}$$

Bunda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ortonormalangan bazis bo'lgani uchun

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

tenglikka ega bo'lamiz.

3-Teorema. E_R^n ga tegishli $\vec{a}$ vektorning biror komponenti ortonormalangan bazisga nisbatan shu $\vec{a}$ vektorni bazisning tegishli vektori bilan skalyar ko'paytmaga teng, ya'ni

$$\vec{a}_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$\vec{a}$ vektor E_R^n fazoning ixtiyoriy vektori va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ istalgan ortonormalangan bazis bo'lsin, ya'ni

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n.$$

Bu tenglikning ikkala qismini $\vec{e}_j$ vektorga skalyar ko'paytirib topamiz:

$$\vec{a}_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

5.1.1 – 5.1.9 - misollarda keltirilgan vektorlarning chiziqli erkliligini tekshiring va ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal sistema hosil qiling.

5.1.1. $E = R^2$, $\vec{x}(0; 1)$, $\vec{y}(1; 0)$.

5.1.2. $E = R^2$, $\vec{x}(1; 0)$, $\vec{y}(0; 1)$.

5.1.3. $E = R^3$, $\vec{x}(0; 0; 1)$, $\vec{y}(0; 1; 1)$, $\vec{z}(1; 1; 1)$.

5.1.4. $E = R^3$, $\vec{x}(1; 1; 1)$, $\vec{y}(0; 1; 1)$, $\vec{z}(0; 0; 1)$.

5.1.5. $E = R^3$, $\vec{x}(1; 1; 0)$, $\vec{y}(2; 0; -1)$, $\vec{z}(0; -1; 1)$.

5.1.6. $E = R^3$, $\vec{x}(0; 2; -1)$, $\vec{y}(1; -1; 1)$, $\vec{z}(1; 0; 0)$.

5.1.7. $E = R^3$, $\vec{x}(-1; 0; 0)$, $\vec{y}(0; -1; 1)$, $\vec{z}(2; 0; -1)$.

5.1.8. $E = R^4$, $\vec{x}(0; 1; -1; 1)$, $\vec{y}(1; -1; 1; 0)$, $\vec{z}(1; 0; 0; 1)$.

5.1.9. $E = R^4$, $\vec{x}(-1; 0; 0; 1)$, $\vec{y}(0; -1; 1; 0)$, $\vec{z}(2; 0; -1; 1)$.

5.1.10. To'rt o'lchamli yevklid fazosida $\vec{a}(1; 1; 1; 1)$, $\vec{b}(1; -1; 1; -1)$ vektorlarga hamda $\vec{c}(2; 2; 1; 0)$, $\vec{d}(1; -2; 2; 0)$ vektorlarga qurilgan qism fazolar orasidagi burchak topilsin.

5.1.11. R^4 fazoda $\vec{a}(1; 1; 1; 1)$, $\vec{b}(1; -1; -1; 1)$ va $\vec{c}(2; 1; 1; 3)$ vektorlarga ortogonal bo'lib, uzunligi birga teng bo'lgan vektorni toping.

5.1.12. R^n da to'g'ri burchakli n o'lchovli parallelepiped diagonalining kvadrati uning bir uchidan chiquvchi qirralari kvadratlarining yig'indisiga teng bo'lishini isbotlang.

5.1.13. Qirrasi a ga teng bo'lgan n o'lchovli kubning diagonali uzunligini toping va bu uzunlikning $n \rightarrow \infty$ dagi limitini aniqlang.

5.1.14. E_R^5 Evklid fazosida uchlari $A(4; 3; 3; 4; 5)$, $B(-2; -2; 2; 5; 4)$ va $C(-1; 2; 2; 1; 5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Bu uchburchakda medianalarning uzunligini toping.

5.1.15. E_R^5 Evklid fazosida uchlari $A(1; 4; 2; -1; 3)$, $B(1; 2; -2; 3; 3)$ va $C(-2; -1; 1; -2; 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Bu uchburchakning teng yonli ekanini isbotlang.

5.1.16. Ushbu ortogonal vektorlar sistemasi berilgan: $\vec{a}(2; 1; -2; -1)$, $\vec{b}(1; -2; 1; -2)$ va $\vec{c}(-2; 1; -2; 1)$. Bu sistemani orthogonal bazisgacha to'ldiring.

5.1.17. Vektorlarning quyidagi sistemalarini E_R^4 da ortonormalangan bazisgacha to'ldiring:

a) $\vec{a}\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; \frac{\sqrt{22}}{7}; \frac{5}{7}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{\sqrt{22}}{7}; \frac{5}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$;

b) $\vec{c}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{d}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

5.1.18. Ortogonallashtirish protsessini qo'llanib, qism fazolarning quyidagi vektorlar sistemasi vujudga keltiradigan ortonormalangan bazislarini toping.

a) $\vec{a}_1(1; -2; 1; 2)$, $\vec{a}_2(1; 0; -2; -1)$, $\vec{a}_3(2; 1; 0; 0)$;

b) $\vec{c}_1(1; 1; -1; -2; 0)$, $\vec{a}_2(0; 2; 5; 0; 8)$; $\vec{a}_3(1; 1; 3; 0; 1)$.

5.1.19. E_R^4 da $\vec{a}_1(1; 0; 2; 1)$, $\vec{a}_2(0; 1; -2; 1)$ vektorlar berilgan. Bazisini toping.

5.1.20. E_R^5 da ushbu vektorlar berilgan: $\vec{a}_1(1; 1; 0; 0; 0)$, $\vec{a}_2(0; 1; 1; 0; 0)$, $\vec{a}_3(0; 0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_4(0; 0; 0; 1; 1)$. Qism fazoning orthogonal to'ldiruvchisining bazisini toping.

6-MAVZU: BICHIZIQLI VA KVADRATIK FORMALAR

Reja:

1. Chiziqli va bichiziqli formalar.

2. Kvadratik formalar. Bichiziqli va kvadratik formalar orasidagi moslik.

3. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish.

Tayanch iboralar: chiziqli akslantirish, chiziqli forma, bichiziqli funksiya, vektorlar funksiyasi, simmetrik bichiziqli forma, bichiziqli forma matritsasi, kvadratik forma, ikkinchi tartibli gipersirt, kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi.

6.1. Chiziqli formalalar.

1-Ta’rif: R^n ni R^1 ga chiziqli akslantirishni **chiziqli forma** deyiladi.

Agar $F: R^n \rightarrow R^1$ chiziqli forma bo‘lsa, u holda F akslantirishning matritsasi ushbu ko‘rinishga ega:

$$A_F = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \quad (6.1)$$

ya’ni A_F matritsa $1 \times n$ o‘lchovli matritsadan iborat bo‘lib, uni R^n dagi vektor sifatida qarash mumkin.

Har qanday $\vec{x} \in R^n$ uchun

$$F(\vec{x}) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = (A_F, \vec{x}) \quad (6.2)$$

bo‘lgani sababli R^n dagi har qanday F chiziqli forma skalyar ko‘paytmasidan iborat bo‘lib, bunda vektorlardan biri A_F tayinlangan, ikkinchisi $\vec{x}$ esa o‘zgaruvchidir. Bunda $a_{1k} = F(\vec{e}_k)$, $k = \overline{1, n}$ va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – bazis.

Chiziqli formalarni $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisga nisbatan komponentlari orqali tasvirlashga doir quyidagi asosiy teoremani keltiramiz.

1-Teorema. Har qanday $F: R^n \rightarrow R^1$ chiziqli forma fazoning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisda berilgan vektorlari orqali bir qiymatli aniqlanadi. Agar $a_1 = F(\vec{e}_1), a_2 = F(\vec{e}_2), \dots, a_n = F(\vec{e}_n)$ sonlar oldindan berilgan bo‘lsa, u holda har qanday

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

uchun F chiziqli formaning qiymati

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \quad (6.3)$$

formula bo‘yicha aniqlanadi.

(6.3) munosabat F formaning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi tasviri deyiladi.

Aksincha $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ va $a_1, a_2, \dots, a_n$ haqiqiy sonlar sistemasi berilgan bo'lsa, (6.3) formula shunday $F: R^n \rightarrow R^1$ chiziqli formani aniqlaydiki, (6.3) bu formaning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi tasviri bo'ladi.

Bichiziqli formalar.

2-Ta'rif. Agar $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning $F(\vec{x}, \vec{y})$ funksiyasi ushbu shartlarga bo'ysunsa, ya'ni

1) $\vec{y}$ ning tayinlangan qiymatida $F(\vec{x}, \vec{y})$ funksiya $\vec{x}$ ning chiziqli funksiyasi bo'lsa,

2) $\vec{x}$ ning tayinlangan qiymatida $F(\vec{x}, \vec{y})$ funksiya $\vec{y}$ ning chiziqli funksiyasi bo'lsa, u holda $F(\vec{x}, \vec{y})$ ni $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning bichiziqli funksiyasi (yoki bichiziqli formasi) deyiladi. Boshqacha aytganda, ixtiyoriy $\vec{x}, \vec{y}$ va $\vec{z}$ vektorlar va istalgan λ uchun quyidagi

$$a) F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = F(\vec{x}, \vec{z}) + F(\vec{y}, \vec{z});$$

$$b) F(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y});$$

$$d) F(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{x}, \vec{z});$$

$$e) F(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y})$$

shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar funksiyasi $F(\vec{x}, \vec{y})$ bichiziqli funksiya deyiladi.

n o'lchovli fazoda bichiziqli formani yozamiz:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + \dots + a_{1n}\alpha_1\beta_n + a_{21}\alpha_2\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 + \dots + a_{2n}\alpha_2\beta_n + \dots + a_{n1}\alpha_n\beta_1 + a_{n2}\alpha_n\beta_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n\beta_n.$$

Bunda $\vec{x} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$; $\vec{y} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.

3-Ta'rif. Agar har qanday $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar uchun $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{y}, \vec{x})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bichiziqli formani simmetrik bichiziqli forma deyiladi.

Masalan, E_R^n Evklid fazoda $(\vec{x}, \vec{y})$ skalyar ko'paytma simmetrik bichiziqli formaga misol bo'la oladi. Ushbu

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\alpha_i\beta_k \quad (6.4)$$

bichiziqli formadagi a_{ik} elementlardan (koeffitsientlardan) $A = [a_{ik}]$ matritsani tuzish mumkin. Bu matritsa (6.4) bichiziqli formani to'la aniqlaydi. Quyidagi teoremani keltiramiz.

2-Teorema. Har qanday (6.4) bichiziqli forma o'zining $A = (a_{ik})$ matritsasi bilan to'la aniqlanadi, bunda $a_{ik} = F(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) va shu bichiziqli forma $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi vektorlarning komponentlari orqali ushbu formula bilan ifodalanadi:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \alpha_i \beta_k.$$

Aksincha, agar $A = (a_{ik})$ ixtiyoriy n – tartibli matritsa bo'lsa, (6.4) ko'rinishdagi funksiya bichiziqli formani aniqlaydi.

1-Misol. Uch o'lchovli R^3 fazoda $F(\vec{x}, \vec{y})$ bichiziqli forma ushbu

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + 3\alpha_3 \beta_3$$

ko'rinishda yozilsin.

Yechish: Endi R^3 da bazis sifatida uchta vektor olamiz:

$$\vec{e}_1 = \{1, 1, 1\}, \vec{e}_2 = \{1, 1, -1\}, \vec{e}_3 = \{1, -1, -1\}.$$

$F(\vec{x}, \vec{y})$ chiziqli formaning bu bazisdagi (a_{ik}) matritsani topamiz.

Ushbu $a_{ik} = F(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ ($i, k = 1, 2, 3$) tengliklarga asosan:

$$a_{11} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 6,$$

$$a_{12} = a_{21} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 0,$$

$$a_{22} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6,$$

$$a_{13} = a_{31} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 1 = -4,$$

$$a_{23} = a_{32} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2,$$

$$a_{33} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6$$

Demak,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, agar $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ va $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ orqali $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi koordinatalarini belgilasak, u holda

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = 6\alpha'_1 \beta'_1 - 4\alpha'_1 \beta'_3 + 6\alpha'_2 \beta'_2 + 2\alpha'_2 \beta'_3 - 4\alpha'_3 \beta'_1 + 2\alpha'_3 \beta'_2 + 6\alpha'_3 \beta'_3$$

bichiziqli forma bo'ladi.

6.2. Kvadratik formalar.

4-Ta'rif. $F: R^n \times R^n \rightarrow R^1$ simmetrik bichiziqli forma bo'lsin. $\vec{y} = \vec{x}$ deb faraz qilinganda $F(\vec{x}, \vec{y})$ yoki $\varphi: R^n \rightarrow R^1$ funksiya kvadratik forma deyiladi.

n o'lchovli fazoda kvadratik formani umumiy ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \alpha_i \alpha_k \quad (6.5)$$

bunda $a_{ik} = a_{ki}$ va $A = (a_{ik})$ – n – tartibli simmetrik matritsadir.

Uch o'lchovli fazoda ikkinchi tartibli sirtlar ushbu ko'rinishdagi tenglamalar bilan beriladi:

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x_i x_k + \sum_{k=1}^3 b_k x_k + D = 0 \quad (6.6)$$

Bu tenglamada birinchi yig'indi ishorasi bilan yozilgan ifoda kvadratik formadir. Ikkinchi yig'indi ishorasi bilan chiziqli forma yozilgan, nihoyat D – ozod had. Bu tushunchalardan foydalanib n o'lchovli R^n fazoda sirt tenglamasiga ta'rif berishimiz mumkin.

R^n fazoda koordinatalari

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \alpha_i \alpha_k + \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k + D = 0 \quad (6.7)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami *ikkinchi tartibli gipersirt* deyiladi.

2-Misol. Ikki o'zgaruvchining kvadratik formasi

$$F = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$$

ning matritsasini tuzing.

Yechish. Berilganlardan $a_{11} = 17$, $a_{22} = 8$ va $a_{12} = 6$ ga teng ekanligi bizga ma'lum. F kvadratik formaning matritsasi bunday yoziladi:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

va u simmetrik matritsadir.

3-Misol. Uch o'zgaruvchining kvadratik formasi

$$F = -3x_1^2 + x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

ning matritsasini tuzing.

Yechish. Berilganlardan $a_{11} = -3$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -8$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -5$ va $a_{23} = 1$ foydalanib, kvadratik forma matritsasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning ham simmetrik ekanligi ko'rinib qoldi.

Bichiziqli va kvadratik formalar orasidagi moslik.

Ushbu

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \alpha_i \beta_k$$

bichiziqli forma berilgan bo'lsin va uning o'ng tomonida o'xshash hadlar bo'lmasin. Bichiziqli formadan kvadratik formaga o'tishda o'xshash hadlar mavjud. Masalan, chiziqli formada ushbu $a_{ik} \alpha_i \beta_k + a_{ki} \alpha_k \beta_i$ ko'rinishdagi yig'indi bor. Bunda $\alpha = \beta$ deyilsa, bu yig'indiga ushbu

$$a_{ik} \alpha_i \alpha_k + a_{ki} \alpha_k \alpha_i = (a_{ik} + a_{ki}) \alpha_i \alpha_k$$

yig'indi mos keladi.

Agar $F(\vec{x}, \vec{y})$ simmetrik bichiziqli forma bo'lsa, u holda shu forma uchun

$$\begin{aligned} F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) &= F(\vec{x}, \vec{x}) + F(\vec{x}, \vec{y}) + \\ &+ F(\vec{y}, \vec{x}) + F(\vec{y}, \vec{y}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

munosabat o'rinli va $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{y}, \vec{x})$ yoki

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - F(\vec{x}, \vec{x}) - F(\vec{y}, \vec{y})].$$

Bu tenglikning o'ng tomonida kvadratik formaning $\vec{x} + \vec{y}, \vec{x}, \vec{y}$ vektorlardagi qiymatlari turibdi. Shunday qilib, $F(\vec{x}, \vec{y})$ bichiziqli formaning qiymati ixtiyoriy juft $(\vec{x}, \vec{y})$ vektorlar uchun unga mos

bo'lgan kvadratik formaning $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ vektorlardagi qiymatlari orqali bir qiymatli aniqlanadi. Ikkinchi tomondan, agar $F(\vec{x}, \vec{y})$ ixtiyoriy bichiziqli forma bo'lsa, u holda

$$F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x})]$$

forma simmetrik bichiziqli forma bo'ladi va $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ bichiziqli formaga $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ kvadratik forma mos keladi.

Bu esa kvadratik formalarni o'rganishda faqat simmetrik bichiziqli formalardan foydalanish bilan chegaralanish yetarli ekanini bildiradi.

4-Misol. Berilgan chiziqli

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta - 3\alpha_1\beta_2 - 5\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

Forma uchun $F(\vec{x}, \vec{x})$ kvadratik formaga mos keluvchi simmetrik bichiziqli formani toping.

Yechish. Berilganlardan foydalanib, $F(\vec{x}, \vec{y})$ va $F(\vec{y}, \vec{x})$ ifodalarni aniqlaymiz:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta - 3\alpha_1\beta_2 - 5\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$

$$F(\vec{y}, \vec{x}) = \beta_1\alpha_1 - 3\beta_1\alpha_2 - 5\beta_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2.$$

Bu ifodaning yarim yig'indisi:

$$F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} [F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x})] = \alpha_1\beta - 4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

Berilgan $F(\vec{x}, \vec{y})$ va topilgan $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ formalar bitta kvadratik formaga mos keladi. Bu simmetrik bichiziqli forma matritsasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa $F_1(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})$ kvadratik formaning ham matritsasidir.

6.3. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish.

5-Ta'rif. Agar shunday $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, har qanday

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{e}_i$$

kvadratik forma shu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisda ushbu

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2 \quad (6.9)$$

ko‘rinishga ega bo‘lsa, R^n da kvadratik forma kanonik ko‘rinishga keltirilgan deyiladi.

Kvadratik formani Evklid fazosida kanonik ko‘rinishga keltirish haqidagi ba’zi – bir mulohazalarni eslatib o‘taylik. Avval Evklid fazosi tushunchasini keltiramiz: biror skalyar ko‘paytma aniqlangan n o‘lchovli chiziqli haqiqiy fazo n o‘lchovli haqiqiy Evklid fazosi deyiladi va E_R^n bilan belgilanadi.

$F(\vec{x}, \vec{x})$ forma n o‘lchovli E_R^n Evklid haqiqiy fazosidagi kvadratik forma bo‘lsin. U holda bu kvadratik forma kanonik ko‘rinishga keltiradigan ortonormallangan bazis mavjud bo‘ladi.

Bundan quyidagi xulosaga kelishimiz mumkin: R^n haqiqiy chiziqli n o‘lchovli fazo bo‘lsin, bundan E_R^n fazo biror skalyar ko‘paytmani tayinlash bilan hosil qilingan bo‘lsin. U vaqtda E_R^n ning istagan bazisi avtomatik ravishda R^n ning ham bazisi bo‘ladi, bichiziqli va kvadratik forma tushunchalari esa R^n va E_R^n uchun bir xildir. Shu sababli yuqoridagi aytilgan fikrga asosan E_R^n ni R^n bilan almashtirish mumkin. E_R^n dagi ortonormallangan bazisni esa R^n dagi oddiy bazis bilan almashtirish mumkin.

Agar $F(\vec{x}, \vec{y})$ kvadratik forma ixtiyoriy $\vec{x}$ vektor uchun musbat bo‘lsa, u *musbat aniqlangan kvadratik forma* deyiladi.

Kvadratik formaning mohiyatini ochib beradigan quyidagi teoremani keltiramiz.

3-Teorema. *n o‘lchovli chiziqli R^n fazoda ikkita F_1 va F_2 kvadratik forma berilgan bo‘lsin, shu bilan birga F_2 forma musbat aniqlangan bo‘lsin. U holda R^n da ikkala kvadratik forma ham kanonik ko‘rinishga ega bo‘ladigan bazis mavjud.*

Isbot. $F_2: R^n \times R^n \rightarrow R^1$ forma R^n da F_2 kvadratik formani tashkil qiluvchi bichiziqli simmetrik forma bo‘lsin. R^n da skalyar ko‘paytmani

$$(\vec{x}, \vec{y}) = F_2(\vec{x}, \vec{y})$$

formula bilan tayinlaymiz va shu yo‘l bilan n o‘lchovli Evklid haqiqiy azosi E_R^n ga ega bo‘lamiz. E_R^n da ortonormallangan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis mavzud, ba bazisda F_1 formula kanonik ko‘rinishga keltirilgan:

$$F_1(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2.$$

Ortonormallangan bazisda bazisda skalyar ko‘paytma quyidagi

$$F_2(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

ko‘rinishga ega bo‘lganligi uchun shu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisning o‘zida ikkinchi forma kanonik ko‘rinishga ega bo‘ladi. Agar F_1 va F_2 kvadratik formalarni R^n dagi formalar deb, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisni esa R^n dagi bazis deb qaralsa, isbotlangan tasdiqdan teoremaning o‘rinli ekani kelib chiqadi.

5-Misol. R^3 da $F: R^3 \times R^3 \rightarrow R^1$ bichiziqli simmetrik forma $\vec{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ bazisda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan bo‘lsin. F bichiziqli forma vujudga keltiradigan F_φ kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish talab qilinadi.

Yechish. Avvalo shuni qayd qilamizki, agar $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ va $\vec{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ vektorlar R^3 dagi ikkita ixtiyoriy vektor bo‘lsa, u holda F va F_φ formalar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisga nisbatan ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{4}{\sqrt{3}} x_1 y_2 - x_1 y_1 + \frac{4}{\sqrt{3}} x_2 y_1 + 2x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_2;$$

$$F_\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{8}{\sqrt{3}} x_1 x_2 - 2x_1 x_2 + 4x_2 x_3.$$

Biz $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ da ushbu $F(\vec{x}, \vec{y}) - (F_\varphi(\vec{x}), \vec{y})$ tenglikni qanoatlantiruvchi $F_\psi: R^3 \rightarrow R^3$ chiziqli operatorlarga egamiz $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda F_ψ bunday tasvirlanadi:

$$F_\psi: \begin{cases} x'_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}x_2 - x_3 \\ x'_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}x_1 + 2x_3 \\ x'_3 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

Shuning uchun F_ψ operatorning xarakteristik polinomi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\det|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Bundan F_ψ ning xarakteristik sonlari

$$3\lambda^3 - 25\lambda^2 + 16\sqrt{3} = 0$$

tenglamaning ildizlari ekani kelib chiqadi. Xarakteristik sonlarnintopish uchun bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$3\lambda^3 - 25\lambda^2 + 16\sqrt{3} = (\lambda - \sqrt{3})(3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{3} - 16) = 0.$$

Bu tenglamadan noma'lumlarni topamiz:

$$\lambda_1 = \sqrt{3}; \quad \lambda_2 = \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}; \quad \lambda_3 = \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}.$$

Endi $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ xos vektorlarni quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\begin{cases} -\lambda_i x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}}x_1 - \lambda_i x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - \lambda_i x_3 = 0 \end{cases}$$

bundan $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, i = 1, 2, 3.$

Biz $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ komponentlarning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi son qiymatlarini topishni o'quvchilarga havola qilamiz.

Endi $\vec{x}, \vec{y}$ lar R^3 ga tegishli ixtiyoriy vektorlar va

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{q}_1 + \alpha_2 \vec{q}_2 + \alpha_3 \vec{q}_3, \quad \vec{y} = \beta_1 \vec{q}_1 + \beta_2 \vec{q}_2 + \beta_3 \vec{q}_3$$

ularning $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ bazis bo'yicha yoyilmalari bo'lsin. U holda berilgan ta'rifga va teorema asosan:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{3}\alpha_1\beta_1 + \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}\alpha_2\beta_2 + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}\alpha_3\beta_3,$$

$$F_\psi(\vec{x}, \vec{x}) = \sqrt{3}\alpha_i^2 + \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}\alpha_i^2 + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}\alpha_3^2.$$

ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

6.1.1. R^3 da $F(\vec{x}, \vec{x}) = x^2 - 3z^2 + 4xy - xz$ kvadratik formaning matritsasini yozing.

6.1.2. R^3 da $F(\vec{x}, \vec{x}) = y^2 + 4z^2 - 2xy + 3xz$ kvadratik formaning matritsasini yozing.

Quyida berilgan 6.1.3 va 6.1.4 - misollarda R^4 fazoda matritsasi berilgan kvadratik formani yozing.

6.1.3. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

6.1.4. $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Quyida berilgan 6.1.5 va 6.1.7 - misollarda R^5 fazoda matritsasi berilgan kvadratik formani yozing.

6.1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

$$6.1.6. B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6.1.7. C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{hv}$$

Quyida berilgan 6.1.8 va 6.1.12 – misollarda ortonormallangan bazisda quyidagi kvadratik formalarni kanonik ko‘rinishga keltiring.

$$6.1.8. 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz.$$

$$6.1.9. 4x^2 - 3y^2 + 2xz - 6yz.$$

$$6.1.10. 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz.$$

$$6.1.11. 2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 2xy + 6yz.$$

$$6.1.12. 5x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 8xy - 2yz.$$

Ushbu 6.1.13 dan 6.1.16 - musollarda

$$6.1.13. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6.1.14. B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6.1.15. C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6.1.16. D = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quyida berilgan 6.1.17 dan 6.1.20 – misollarda kvadratik formalarni kanonik ko‘rinishga keltiring.

$$6.1.17. F(\vec{x}, \vec{x}) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz.$$

$$6.1.18. F(\vec{x}, \vec{x}) = 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 6xy + 2yz.$$

$$6.1.19. F(\vec{x}, \vec{x}) = 4x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 2xy - 6yz.$$

6.1.20. $F(\vec{x}, \vec{x}) = 5x^2 - 4y^2 - z^2 - xy - 4yz.$

matritsalar berilgan bo'lib, $A = C^{-1}BC$, $A_1 = C^{-1}BC$ munosabatlardan C va B matritsalarini toping (bu yerda C -ortogonal, B -diagonal matritsa).

7-MAVZU: CHIZIQLI OPERATORLAR

Reja:

1. Chiziqli akslantirish. Chiziqli akslantirishlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish.
2. Chiziqli operator tushunchasi.

Tayanch iboralar: akslantirish, chiziqli akslantirish, akslantirishning yig'indisi, chiziqli operator, birlik operator, teskari operator, biyektiv akslantirish, chiziqli maxsusmas operator, invariant qism fazo, xos vektorlar.

7.1. Chiziqli akslantirish. Chiziqli akslantirishlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish.

1-Ta'rif. R^n va R^m mos ravishda n o'lchovli ikkita haqiqiy chiziqli fazo bo'lsin. R^n fazoning har bir vektoriga R^m fazoning bitta vektorini mos qo'yadigan qonun R^n fazoni R^m fazoga akslantirish deyiladi va $f: R^n \rightarrow R^m$ deb belgilanadi.

Agar har qanday $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ da istalgan λ_1, λ_2 haqiqiy sonlar uchun

$$f(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) = \lambda_1 f(\vec{a}) + \lambda_2 f(\vec{b}) \quad (7.1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda ushbu

$$f: R^n \rightarrow R^m$$

akslantirish *chiziqli akslantirish* deyiladi.

Chiziqli akslantirishning bizga ma'lum bo'lgan bazis va matritsalar yordamida ifodasini ko'rib o'tamiz. Ushbu

$$(7.2)$$

vektorlar R^n dagi,

$$(7.3)$$

vektorlar esa R^m dagi bazis bo'lsin. U holda, ravshanki,

$$(7.4)$$

Bundan $f(\vec{a})$ vektorining koordinatalari uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqaramiz:

$$(7.5)$$

Bu formuladan quyidagi teorema o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-Teorema. $f: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli akslantirish berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a}' = f(\vec{a})$ vektorning $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_m'$ bazisga nisbatan koordinatalari $\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisga nisbatan komponentlari orqali (7.5) formulalar bo'yicha ifodalanadi. Bunda f chiziqli akslantirishning

$$(7.6)$$

matritsaning ustunlari ushbu $f(\vec{e}_i)$ $i = \overline{1, n}$ vektorlardan iborat. Aksincha, (7.4) formulalar bilan beriladigan $f: R^n \rightarrow R^m$ akslantirish chiziqli akslantirishdir va bu akslantirishni aniqlovchi matritsa f chiziqli akslantirishning A_i matritsasidir.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shunday qilib, $f: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli akslantirish (7.4) formula bilan to'la aniqlanadi.

Agar R^n va R^m fazolar ustma – ust tushsa ($n = m$ bo'lsa), chiziqli akslantirish *ayniy almashtirish* deyiladi. Bunda A_i matritsa $n -$ tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

Chiziqli akslantirishlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish. $H(R^n, R^m)$ orqali barcha $f: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli akslantirishlar to'plamini belgilaymiz, bunda $m, n -$ tayinlangan natural sonlar. R^n va R^m ga chiziqli akslantirish uchun qo'shish amali va haqiqiy songa ko'paytirish amali kiritiladi. Chunonchi, agar, $f, g \in H(R^n, R^m)$ bo'lib, λ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsa, u holda f va g akslantirishlarning yig'indisi deb shunday

$$h: R^n \rightarrow R^m$$

akslantirishga aytiladiki, bunda har qanday $\vec{x} \in R^n$ uchun

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (7.7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

f akslantirishni λ songa ko'paytirish shunday $l: R^n \rightarrow R^m$ chiziqli akslantirishdan iboratki, bunda har qanday $\vec{x} \in R^n$ uchun

$$l(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad (7.8)$$

tenglik bajariladi. h va l akslantirishlar chiziqli akslantirishlar ekanini ko'rish oson. Odatda ularqisqacha bunday belgilanadi:

$$h = f + g, \quad l = \lambda f. \quad (7.9)$$

Yuqorida keltirilgan chiziqli akslantirishlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} f + g &= g + f; \quad (f + g) + h = f + (g + h); \\ (\lambda\mu)f &= \lambda(\mu f) = \mu(\lambda f); \\ (\lambda + \mu)f &= \lambda f + \mu f; \\ \lambda(f + g) &= \lambda f + \lambda g, \end{aligned} \quad (7.10)$$

bunda f, g, h lar $H(R^n, R^m)$ ga tegishli istalgan akslantirishlar, λ va $\mu -$ istalgan haqiqiy sonlar, chunki bu munosabatlar $M^{m,n}$ ga tegishli matritsalar uchun o'rinli.

R^n , R^m va R^1 fazolar berilgan bo'lsin va $f \in H(R^n, R^m)$; $g \in H(R^n, R^m)$ bo'lsin. Yuqorida aniqlaganimizdek, f va g akslantirishlarning ko'paytmasi shunday $h: R^n \rightarrow R^1$ akslantirishki, bunda har qanday $\vec{x} \in R^n$ da

$$f(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \quad (7.11)$$

tenglik bajariladi.

Chiziqli akslantirishlar ko'paytmasining matritsasini tuzishning yuqorida bayon qilingan usuli matritsalarini ko'paytirishni aniqlashga asos qilib olinadi. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsin, bularning o'lchamlari xos ravishda $l \times m$ va $m \times n$ bo'lsin. U holda A matritsaning B matritsaga ko'paytmasi deb o'lchami $l \times m$ ga teng bo'lgan shunday C matritsaga aytiladiki, buning c_{ij} elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.12)$$

formulalar bo'yicha topiladi.

1-Misol. $f: R^2 \rightarrow R^4$ akslantirish R^2 fazoning $\vec{e}_1 = \{1; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0; 1\}$ bazasini mos ravishda $\vec{u}_1 = \{1; -1; 0; 2\}$ va $\vec{u}_2 = \{0; 1; -2; 3\}$ vektorlarga, $g: R^4 \rightarrow R^3$ akslantirish esa R^4 fazoning $\vec{e}'_1 = \{1; 0; 0; 0\}$, $\vec{e}'_2 = \{0; 1; 0; 0\}$, $\vec{e}'_3 = \{0; 0; 1; 0\}$, $\vec{e}'_4 = \{0; 0; 0; 1\}$ bazisini mos ravishda $\vec{v}_1 = \{2; -1; 0\}$, $\vec{v}_2 = \{1; 1; 1\}$, $\vec{v}_3 = \{0; 0; 5\}$, $\vec{v}_4 = \{-2; -1; 3\}$ vektorlarga o'tkazuvchi chiziqli akslantirish bo'lsin. f , g va $g \circ f: R^2 \rightarrow R^3$ chiziqli akslantirish mos keluvchi A_f , A_g va $A_{g \circ f}$ matritsalarini toping.

Yechish. 1-teoremaga asosan A_f matritsaning ustunlari $\vec{u}_1$ va $\vec{u}_2$ vektorlardan, A_g matritsaning ustunlari esa $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ va $\vec{v}_4$ vektorlardan iborat ekani kelib chiqadi. Shuning uchun

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

nihoyat,

$$A_{gof} = A_g \circ A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

7.2. Chiziqli operator tushunchasi.

2-Ta'rif. $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ operator quyidagi ikki aksiomaga bo'ysinsa, uni chiziqli operator deyiladi:

$$1) \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R^n \Rightarrow \varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2) \quad (7.13)$$

(operatorning additivlik xossalari);

$$2) \forall \lambda \in P, \forall \vec{x} \in R^n \Rightarrow \varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda \varphi(\vec{x}) \quad (7.14)$$

(operatorning bir jinslilik xossasi)

O simvol bilan belgilanuvchi va R^n fazoning hamma elementlarini shu R^n fazoning nol elementiga akslantiruvchi operator quyidagi qoida bo'yicha qo'llaniladi:

$$O \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Har bir φ operator uchun unga qarama – qarshi bo'lgan operatorni quyidagicha belgilanadi:

$$-\varphi = (-1)\varphi.$$

Yuqoridagi munosabatlardan quyidagi tasdiqning to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Barcha $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ chiziqli operatorlar to'plami chiziqli fazoni tashkil qiladi va uni $H(R^n, R^n)$ ko'rinishda belgilanadi.

1. Chiziqli operatorlar to'plami. $H(R^n, R^n)$ ning xossalari.

a) $H(R^n, R^n)$ to'plamda birlik operatorni aniqlaymiz. Quyidagi $E\vec{x} = \vec{x}$ qoida bo'yicha qo'llanuvchi chiziqli operatorni *birlik operator* deb ataymiz, bu yerda $\vec{x} \in H(R^n, R^n)$;

b) $\varphi, \psi \in H(R^n, R^n)$ berilgan bo'lsin. φ va ψ operatorlar ko'paytmasi deb quyidagi $\varphi \circ \psi(\vec{x}) = \varphi(\psi(\vec{x}))$ qoida bo'yicha ta'rif etiladigan $\varphi \circ \psi$ operatorga aytiladi. Umumiy holda $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ tengsizlik o'rinli.

c) Agar $\varphi, \psi \in H(R^n, R^n)$ bo'lsa, quyidagi munosabatlar o'rinli:

1. $\lambda(\varphi \circ \psi) = (\lambda\varphi) \circ \psi,$
2. $(\varphi + \psi) \circ \omega = \varphi \circ \omega + \psi \circ \omega,$
3. $\varphi \circ (\psi + \omega) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \omega,$
4. $(\varphi \circ \psi) \circ \omega = \varphi \circ (\psi \circ \omega).$

3- Ta'rif. Agar $\varphi, \psi \in H(R^n, R^n)$ operatorlar uchun

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = E$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda ψ operatorni φ ga teskari operator deyiladi va φ^{-1} ko'rinishida belgilanadi.

Bu ta'rifdan $\vec{x} \in R^n \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Shunday qilib, agar $\varphi^{-1} \circ \varphi(\vec{x}) = 0$ bo'lsa, $\vec{x} = 0$, ya'ni operator uchun teskari operator mavjud bo'lsa, $\varphi(\vec{x}) = 0$ shartdan $\vec{x} = 0$ kelib chiqadi.

2. Chiziqli operatorlarning turli bazislardagi matritsalarini orasidagi bog'lanish. φ chiziqli operator R^n ni o'z - o'ziga akslantirishni ifodalaydi. Demak, bu operator bazisning tanlanishiga bog'liq emas. Shunga qaramay, uning tasvirining matritsasi esa bazisning tanlanishiga bog'liq. Bunda quyidagi teorema o'rinli.

2-Teorema. $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ chiziqli operatorlar va R^n da ikkita ixtiyoriy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ va $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ bazislar berilgan bo'lsin. φ operatorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi matritsasini A bilan $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ bazisdagi matritsani esa B bilan va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdan $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ bazisga o'tish matritsani C bilan belgilaymiz. U holda ushbu munosabat o'rinli bo'ladi:

$$B = C^{-1}AC. \quad (7.15)$$

2-Misol. R^4 da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis tayinlangan va $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 +$

$+\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\varphi(\vec{e}_4) = \vec{e}_4$ shartlarini qanoatlantiruvchi $\varphi: R^4 \rightarrow R^4$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= \varphi(\vec{e}_1) - \varphi(\vec{e}_2), & \vec{q}_2 &= \varphi(\vec{e}_2) - \varphi(\vec{e}_3), \\ \vec{q}_3 &= \varphi(\vec{e}_1) + \varphi(\vec{e}_3), & \vec{q}_4 &= \varphi(\vec{e}_4)\end{aligned}$$

vektorlar bazis tashkil qilishini isbotlab, φ operatorning shu bazisdagimatritsasini toping.

Yechish. Bizga berilgan masalalardan quyidagiga egamiz.

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= \varphi(\vec{e}_1) - \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4, \\ \vec{q}_2 &= \varphi(\vec{e}_2) - \varphi(\vec{e}_3) = 0 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 - \vec{e}_4 \\ \vec{q}_3 &= \varphi(\vec{e}_1) + \varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \\ \vec{q}_4 &= \varphi(\vec{e}_4) = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4.\end{aligned}$$

Demak, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ bazisdan $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4$ vektorlarga o'tish matritsasi C ushbu ko'rinishga ega:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsaning determinantini hisoblaymiz.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Shu sababli $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4$ vektorlar R^n da bazis tashkil qiladi. Masala shartlaridan ushbularga egamiz:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4, \\ \varphi(\vec{e}_2) &= 0 \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4, \\ \varphi(\vec{e}_3) &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ \varphi(\vec{e}_4) &= \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 + 0 \cdot \vec{e}_4.\end{aligned}$$

Bularga asosan φ operatorning matritsasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisga nisbatan ushbu ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tegishli formulalarga ko'ra (teskari matritsa uchun) C^{-1} ni ham hisoblab qo'yamiz:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Bundan

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

kelib chiqadi.

3. Chiziqli operatorning xos vektorlari va xos sonlari.

Keyinchalik kerak bo'ladigan invariant qism fazosi tushunchasini kiritamiz.

4 – Ta'rif. φ akslantirish R^n fazodagi chiziqli operator bo'lsin. Agar $\varphi(P) = P$ bo'lsa, $P \subseteq R^n$ qism fazo invariant qism fazo deyiladi.

5 – Ta'rif. $\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\vec{x} \neq \vec{0}$ vektor operatorning xos vektori, mos λ son esa xos qiymati yoki φ chiziqli operatorning xarakteristik soni deyiladi.

Agar $\vec{x}$ xos vektor bo'lsa, u holda $\lambda\vec{x}$ ko'rinishdagi vektorlar bir o'lchovli invariant qism fazo hosil qoladi.

3 – Teorema. φ operator R^n dagi chiziqli operator va λ_0 son operatorning xos qiymati, $\vec{x}$ esa λ_0 songa mos keladigan xos vektori

bo'lsin. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, R^n$ da ixtiyoriy bazis, $A = (a_{ij})$ ($i, j = \overline{1, n}$) matritsa esa φ operatorning shu bazisdagi matritsasi bo'lsin. U holda λ_0 son ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7.16)$$

tenglamaning ildizi bo'ldi.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \dots + \alpha_n \vec{e_n} \quad (7.17)$$

xos vektorlarning koordinatalari esa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisda bir jinsli

[illegible]

sistemaning yechimlari bo'ldi.

4. Xos vektorlari bazis tashkil qiladigan chiziqli operatorlar.

R^n fazodagi eng sodda chiziqli operatorlar shunday operatorlarki, ular n ta chiziqli erkli vektorga ega.

Haqiqatan, $\varphi: \in R^n \rightarrow R^n$ operator chizqli erkli $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlarga ega bo'lgan operator bo'lsin. Shu vektorlarni bazis uchun qabul qilamiz. U holda

[illegible]

bunda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar φ operatorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ xos vektorlariga mos kelgan xos qiymatlari.

Bundan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ xos vektorlar tashkil qilgan bazisda φ operatorning matritsasi ushbu eng sodda, diagonal ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Aksincha, agar biror $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisda φ operatorga (7.19) matritsa mos kelsa, u holda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlar φ ning xos vektorlari, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ esa operatorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ vektorlariga mos keladigan xos qiymatlaridir.

Haqiqatan, A matritsaning xossasidan uning ustunlari $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ vektorlarning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazisdagi koordinatalaridan iboratligi kelib chiqadi. Shu sababli

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \dots, \varphi(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n.$$

Shuning o'zi aytilgan tasdiqni isborlaydi.

4- Teorema. Agar R^n da φ chiziqli operatorning xos qiymatlari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ($s \leq n$) P maydonga tegishli juft – jufti bilan har xil sonlar bo'lsa, bu xos vektorlar chiziqli erkli bo'ladi. Xususan, agar $s = n$ bo'lsa, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ xos vektorlar R^n da bazis tashkil qiladi.

3- Misol. Shunday $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ chiziqli operator berilgan tayin $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ bazis uchun φ ning matritsasi ushbu ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

φ operatorning xos sonlari, xos vektorlarini va φ operatorning matritsasi diagonal ko'rinishni oladigan bazisni topish kerak.

Yechish. φ operatorning xarakteristik ko'phadi ushbu ko'rinishga ega:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5 - \lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Bundan φ operatorning xarakteristik sonlari $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ bo'ladi. $\lambda_1 = 1$ songa to'g'ri keladigan $\vec{q}_1 = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ xos vektor ushbu sistemaning yechimi sifatida topiladi:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = x_1 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = x_3 \end{cases}$$

$\vec{q}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ vektor $\lambda_1 = 1$ songa to'g'ri keladigan xos vektor ekanini tekshirish oson. $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ xarakteristik sonlarga to'g'ri

keladigan $\vec{q}_2$ va $\vec{q}_3$ xos vektorlarni topish sistemasi ushbu ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2x_1 \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 2x_2 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

Bevosita tekshirish yo'li bilan $\vec{q}_2 = \vec{e}_1$, $\vec{q}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ vektorlar φ operatorning $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sonlarga mos xos vektorlari ekaniga ishonch hosil qilamiz. $\vec{q}_3$ vektorlar chiziqli erkli ekanini ko'rish oson:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Shu sababli $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ vektorlar bazis tashkil qiladi. $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ lar φ operatorning xos vektorlari bo'lgani uchun

$$\begin{cases} \varphi(\vec{q}_1) = \vec{q}_1 + 0 \cdot \vec{q}_2 + 0 \cdot \vec{q}_3 \\ \varphi(\vec{q}_2) = 0 \cdot \vec{q}_1 + 2 \cdot \vec{q}_2 + 0 \cdot \vec{q}_3 \\ \varphi(\vec{q}_3) = 0 \cdot \vec{q}_1 + 0 \cdot \vec{q}_2 + 2 \cdot \vec{q}_3 \end{cases}$$

Shu sababdan φ operatorning $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ bazisdagi matritsasi bunday:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4- Misol. $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operator $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis vektorlarini $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 - i\vec{e}_1$ vektorga o'tkazuvchi operator bo'lsin. φ operatorning matritsasi diagonal ko'rinishida bo'ladigan bazisni toping.

Yechish. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazisda φ ning matritsasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun A operatorning xarakteristik polinomi bunday:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & i \\ i & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - i^2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Ushbu $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$ sonlar φ operatorning xarakteristik sonlari bo'ladi. λ_1 va λ_2 mos sonlarga to'g'ri keladigan mos

$\vec{q}_1 = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$, $\vec{q}_2 = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$ xos vektorlar quyidagi tenglamalar sistemasidan topiladi:

$$x_1 + ix_2 = (1 - i)x_1 \text{ va } x_1 + ix_2 = (1 + i)x_1,$$

$$ix_1 + x_2 = (1 - i)x_2 \text{ va } ix_1 + x_2 = (1 + i)x_2.$$

Bundan $\vec{q}_1$ va $\vec{q}_2$ vektorlar sifatida $\vec{q}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ va $\vec{q}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ chiziqli erkli vektorlarni olish mumkinligi kelib chiqadi, $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ bazisda φ vektorning matritsasi ushbu ko'rinishga ega:

$$B = \begin{pmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix}$$

chunki

$$\varphi(\vec{q}_1) = (1 - i)\vec{q}_1, \quad \varphi(\vec{q}_2) = (1 + i)\vec{q}_2.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

7.1.1. R^4 fazoda quyidagi vektorlar bazis tashkil qilishini isbotlang.

a) $\vec{e}_1 = \{1; 1; 1; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{1; 2; 1; 1\}$,

$\vec{e}_3 = \{1; 1; 2; 1\}$, $\vec{e}_4 = \{1; 3; 2; 5\}$.

b) $\vec{e}_1 = \{2; 3; 4; -3\}$, $\vec{e}_2 = \{5; 4; 9; -2\}$,

$\vec{e}_3 = \{1; 0; 0; 0\}$, $\vec{e}_4 = \{3; 5; 5; 3\}$.

7.1.2. $f: R^4 \rightarrow R^5$ akslantirish $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ vektorlarni

$$f(\vec{e}_1) = \{1; 1; 0; 0; 0\},$$

$$f(\vec{e}_2) = \{0; 1; 1; 0; 0\},$$

$$f(\vec{e}_3) = \{0; 0; 1; 1; 0\},$$

$$f(\vec{e}_4) = \{0; 0; 0; 1; 1\}$$

vektorlarga o'tkazuvchi chiziqli akslantirish bo'lsin. Shu akslantirishning matritsasini va uning koordinatalar bo'yicha tasvirini toping.

7.1.3. $f: R^4 \rightarrow R^4$ almashtirish $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ vektorlarni

$$f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \{0; 0; 1; -1\},$$

$$f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \{0; 0; 1; 2\},$$

$$f(\vec{e}_3) = \{1; 2; 0; 0\},$$

$$f(\vec{e}_4) = \{0; -3; 2; 0\},$$

vektorlarga o'tkazuvchi chiziqli akslantirish bo'lsin. Shu akslantirishning matritsasi va uning koordinatalar orqali tasvirlang.

7.1.4. $f: R^5 \rightarrow R^3$ akslantirish quyidagi

$$\alpha_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5,$$

$$\alpha_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5,$$

$$\alpha_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5$$

koordinatalar orqali tasvirlangan chiziqli akslantirish bo'lsin.

$f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3), f(\vec{e}_1 + \vec{e}_4 - 2\vec{e}_5)$ vektorlarni toping.

7.1.5 va 7.1.6 – misollarda $f: R^1 \rightarrow R^4$ chiziqli akslantirishning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ bazisdagi matritsasi ushbu ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$f: R^4 \rightarrow R^4$ ning quyidagi bazislardagi matritsalarini toping:

7.1.5. $\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, 3\vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4$;

7.1.6. $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

7.1.7. Ushbu $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ operator $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bazis vektorlarni

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + i\vec{e}_1$$

Vektorlarga o'tkazuvchi operator bo'lsin. $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ operatorning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'ladigan bazisini toping.

7.1.8. $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ operator $\vec{q}_1 = \{1; 2\}, \vec{q}_2 = \{2; 3\}$ bazisdagi chiziqli operator bo'lib, uning matritsasi

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dan iborat bo'lsin, $\vec{e}_1 = \{3; 1\}, \vec{e}_2 = \{4; 2\}$ bazisdagi $\varphi_1: R^2 \rightarrow R^2$ chiziqli operator esa

$$B_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan beriladi. $A_{\varphi+\varphi_1}, A_{\varphi-\varphi_1}, A_{\varphi \cdot \varphi_1}$ matritsalarini aniqlang.

7.1.9 dan 7.1.13 - misollarda tayinlangan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda quyidagi matritsalar yordamida berilgan chiziqli operatorning xos vektorlarini toping:

$$\mathbf{7.1.9.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$7.1.10. B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$7.1.11. C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix},$$

$$7.1.12. D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$7.1.13. E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

7.1.14 dan 7.1.17 - misollarda agar tayinlangan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda chiziqli operatorlar

$$7.1.14. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$7.1.15. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7.1.16. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$7.1.17. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar bilan berilgan bo'lsa, shu chiziqli operatorlar R^2 R^1 da diagonal ko'rinishda bo'ladigan bazislarini toping.

7.1.18. n – tartibli

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun shunday maxsusmas n – tartibli B matritsa topish kerakki,

$$C = B^{-1}AB$$

matritsa diagonal matritsa bo'lsin.

7.1.19. Tyinlangan bazisda

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ chiziqli operatorning barcha invariant qism fazolarini toping.

7.1.20. R^3 dagi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisda

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar bilan berilgan ikki chiziqli operatorning umumiy invariant qism fazolarini toping.

8- MAVZU: VEKTORLAR ALGEBRASI

Reja:

- 1. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish.**
- 2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo'yicha yoyish.**
- 3. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.**
- 4. Vektorning vektor va aralash ko'paytmasi.**

Tayanch iboralar: nol vektor, kollinear, birlik vektor, teng vektor, vektorning yig'indisi, vektorlarning ayirmasi, chiziqli bog'liq, komplanar, yoyilgan, bazis, skalyar ko'paytma, vektor va aralash ko'paytma.

8.1. Vektorlar ustida amallar. Vektorni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish.

Ikki vektorni qo'shish deb, birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektorning boshi keltirib qo'yilganda birinchi vektorning boshidan chiqib ikkinchi vektorning oxiriga tomon yo'nalgan vektorga aytiladi.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{k}$ vektorlarning yig'indisi deb, quyidagicha yasaladigan $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots + \vec{k}$ vektorga aytiladi.

Ixtiyoriy O nuqtaga $\vec{a}$ vektor qo'yiladi, uning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshi qo'yiladi va hokazo. Olingan O nuqta $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots + \vec{k}$ vektorning boshi, eng so'ngi vektorning oxiri esa, yig'indining oxiri deyiladi.

Vektorlarning yig'indisi O nuqtani tanlab olishga bog'liq emas.

Kollinear bo'lmagan ikkita $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning yig'indisi quyidagicha ham yasalishi mumkin (parallelogramm qoidasi): ikkala $\vec{a}, \vec{b}$ vektorni bitta O nuqtadan boshlab $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ vektorlar qo'yiladi; tomonlari OA, OB bo'lgan $OBCA$ parallelogramm yasaladi, u holda $\vec{OC} = \vec{AB} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ hosil bo'ladi.

$$\vec{x} + \vec{b} = \vec{a} \quad (8.1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorga $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deyiladi.

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning $\vec{a} - \vec{b}$ ayirmasini yasash uchun quyidagicha ish ko'riladi: $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bitta nuqtadan qo'yiladi $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. U hol $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ da $\vec{BA} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

$\vec{a} \neq 0$ vektorga qarama - qarshi vektor deb $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli shu vektor moduliga teng, yo'nalishi esa $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama - qarshi bo'lgan vektorga aytiladi. Ravshanki, qo'shish amalining xossalari quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{assotsiativlik}) \\ \vec{a} + 0 &= \vec{a} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= 0 \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{kommutativlik}) \end{aligned} \quad (8.2)$$

λ son bilan $\vec{a} \neq 0$ vektorning ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, moduli $|\lambda| |\vec{a}|$ bo'lgan $\vec{a}$ vektor bilan bir xil, $\lambda < 0$ holda unga qarama - qarshi yo'nalgan $\lambda \vec{a}$ vektorga aytiladi. Agar $\lambda = 0$ yoki

$\vec{a} = 0$ bo'lsa $\lambda \vec{a} = 0$ bo'ladi. Vektorni songa ko'paytirish amalining xossalari:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{a} &= \vec{a} \\ \lambda(\mu \vec{a}) &= (\lambda\mu) \cdot \vec{a} \\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) &= \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear va $\vec{b} \neq 0$ bo'lsa, $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ nisbat deb shunday λ songa aytiladiki, unda $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ bo'ladi.

1-Misol. $\vec{a}(-2; 3; 1)$ va $\vec{b}(8; -4; -6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang.

Yechish: Endi $3\vec{a}$ va $\frac{1}{2}\vec{b}$ vektorlarni aniqlaymiz. $3\vec{a} = \{-6; 9; 3\}$,

$$\frac{1}{2}\vec{b} = \{4; -2; -3\}. \text{ Demak,}$$

$$3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \{-6 - 4; 9 - (-2); 3 - (-3)\}$$

$$3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \{-10; 11; 6\}.$$

2-Misol. $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ vektorlar berilgan $2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorlar yig'indisini toping.

Yechish: $\vec{a}$ vektorni koordinatalari, $\vec{a}(1; 3; -2)$ xuddi shuningdek $\vec{b}(2; 1; 4)$. Endi $2\vec{a}$ va $3\vec{b}$ vektorlarni aniqlaymiz. $2\vec{a} = \{2; 6; -4\}$, $3\vec{b} = \{6; 3; 12\}$. Demak,

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = \{2 + 6; 6 + 3; -4 + 12\}$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = \{8; 9; 8\}.$$

8.2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo'yicha yoyish.

Vektorlar uchun bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmagan $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x$ sonlar mavjud bo'lib, $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{k} = 0$ tenglik bajarilsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{k}$ vektorlar **chiziqli bog'liq** deb ataladi.

Ikki vektorning kollinear bo'lishi uchun ular chiziqli bog'liq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorni bitta nuqtaga keltirgandan keyin ular bitta tekislikda yotsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar **komplanar** deyiladi. Uchta vektorning komplanar bo'lishi uchun ular chiziqli bog'liqli bo'lishi zarur va yetarli.

Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa va $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar esa komplanar bo'lmasa, u holda $\vec{c}$ vektor yagona usulda $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanishi mumkin:

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \quad (8.4)$$

Bu holda $\vec{c}$ vektor $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orqali **yoyilgan** deyiladi.

Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, u holda ixtiyoriy $\vec{d}$ vektorni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning kombinatsiyasi ko'rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin:

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} \quad (8.5)$$

Bu holda ham $\vec{d}$ vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar yo'nalishilari bo'yicha **yoyilgan** deyiladi. M nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ deb $\overrightarrow{OM}$ vektorga aytiladi, bu yerda O — tayin bir nuqta.

Agar M nuqta M_1, M_2 kesmani λ nisbatda bo'lsa, u holda M nuqtaning $\vec{r}$ radius-vektori, M_1, M_2 nuqtalarning $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ radius-vektorlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}$$

Xususan, M nuqta M_1, M_2 kesmaning o'rtasi bo'lsa, $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ tartiblangan nokomplanar uchta $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektor fazo **bazisi** deb ataladi, agar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar birlik va jufti-jufti bilan ortogonal bo'lsa, u holda bazis **ortonormallangan** deyiladi. Ortonormallangan bazis vektorlari ko'pincha $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bilan belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi koordinatalari deb shunday x, y, z sonlarga aytiladiki, bunda

$$\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \quad (8.6)$$

koordinatalari x, y, z dan iborat $\vec{a}$ vektor $\vec{a} = \{x, y, z\}$ ko‘rinishda yoziladi. Mos koordinatalariga teng bo‘lgan ikki vektor o‘zaro teng bo‘ladi:

$$x = x'; \quad y = y'; \quad z = z' \Rightarrow \vec{a}(x, y, z) = \vec{b}(x', y', z').$$

Ikki $\vec{a}(x, y, z) \neq 0, \vec{b}(x', y', z') \neq 0$ vektorning kollinear bo‘lishligining zaruriy va yetarli sharti ularning mos koordinatalarining proportsionalligidan iborat:

$$x' = \lambda \cdot x; \quad y' = \lambda \cdot y; \quad z' = \lambda \cdot z \quad (8.7)$$

bunda λ son $\vec{b}$ vektorning $\vec{a}$ vektorga nisbatini bildiradi.

$\vec{a} = \{x, y, z\}, \vec{b} = \{x', y', z'\}$ vektorlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli: $\vec{a} + \vec{b} = \{x + x', y + y', z + z'\}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x - x', y - y', z - z'\}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z\}$$

Uchta $\vec{a} = \{x, y, z\}, \vec{b} = \{x', y', z'\}, \vec{c} = \{x'', y'', z''\}$ vektorlar komplanar bo‘lishining zarur va yetarli sharti ushbu

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

tenglikning bajarilishidan iborat.

3-Misol. Tekislikda ikkita vektorlar $\vec{b}(-1; 4), \vec{c}(3; -2)$ berilgan. $\vec{a}(-11; 14)$ vektorning $\vec{b}, \vec{c}$ bazisi bo‘yicha yoyilmasini toping.

Yechish. $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bo‘yicha yoyish, $\vec{a}$ vektorni chiziqli kombinatsiya ko‘rinishida ifodalash demakdir. $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$, bu yerda λ va μ topilishi kerak bo‘lgan sonlar.

Koordinata ko‘rinishida bu quyidagicha bo‘ladi.

$$-11\vec{i} + 14\vec{j} = (-\lambda + 3\mu)\vec{i} + (4\lambda - 2\mu)\vec{j}$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu = -11 \\ 4\lambda - 2\mu = 14 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $\lambda = 2; \mu = -3$ ekanligini topamiz.

Demak, $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

4-Misol. $\vec{a}(4; 2; 0)$ vektorni $\vec{p}(1; -1; 2)$, $\vec{q}(2; 2; -1)$ va $\vec{r}(3; 7; -7)$ vektorlar bo'yicha yoying.

Yechish. $\vec{a}$ vektorni $\vec{p}$, $\vec{q}$ va $\vec{r}$ vektorlar bo'yicha yoyish, $\vec{a}$ vektorni chiziqli kombinatsiya ko'rinishida ifodalash demakdir.

$\vec{a} = c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r}$, bu yerda c_1, c_2 va c_3 - topilishi kerak bo'lgan sonlar.

Koordinata ko'rinishida bu quyidagicha bo'ladi.

$$4\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (c_1 + 2c_2 + 3c_3)\vec{i} + (-c_1 + 2c_2 + 7c_3)\vec{j} + (2c_1 - c_2 - 7c_3)\vec{k}$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4 \\ -c_1 + 2c_2 + 7c_3 = 2 \\ 2c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $c_1 = 3$; $c_2 = -1$; $c_3 = 1$ ekanligini topamiz. Demak,

$$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}.$$

8.3. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Berilgan ikki vektorning uzunligi va ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga shu ikki vektorning *skalyar ko'paytmasi* deyiladi.

Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \quad (8.8)$$

ko'rinishida bo'ladi. Bu yerda φ burchak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakdir.

$\vec{a} = 0$ yoki $\vec{b} = 0$ holda ta'rifga ko'ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. $\vec{a} \perp \vec{b}$ yoki $\vec{a} = 0$, yoki $\vec{b} = 0$ holdagina $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *skalyar ko'paytma* nolga teng.

Skalyar ko'paytirish amalining xossalari:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (\text{kommutativlik}) \quad (8.9)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \geq 0 \quad (\text{distributivlik}) \quad (8.10)$$

ammo faqat $\vec{a} = 0$ holdagina $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ bo'ladi.

Fazodagi Dekart koordinatalar sistemasida

$$\vec{a}(x; y; z), \quad \vec{b}(x'; y'; z')$$

berilgan bo'lsa, skalyar ko'paytmaning xossalaridan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}\vec{j} + xz'\vec{i}\vec{k} + \\ &\quad + x'y\vec{i}\vec{j} + yy'\vec{j}^2 + yz'\vec{j}\vec{k} + x'z\vec{i}\vec{k} + y'z\vec{j}\vec{k} + zz'\vec{k}^2 = \\ &= xx' \cdot 1 + xy' \cdot 0 + xz' \cdot 0 + x'y \cdot 0 + yy' \cdot 1 + yz' \cdot 0 + x'z \cdot 0 + \\ &\quad + y'z \cdot 0 + zz' \cdot 1 = xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

Skalyar ko'paytmaning xossalaridan, ortlar uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'ramiz:

$$\vec{i}^2 = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1, \quad \vec{j}^2 = 1, \quad \vec{k}^2 = 1.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Demak,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz', \quad (8.11)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

$|\vec{a}| = 0$, $|\vec{b}| = 0$ shartlarida $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusi quyidagi formula bo'yicha topiladi.

(8.8) va (8.11) formulalardan,

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ \cos\varphi &= \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

kelib chiqadi. $\vec{a}(x; y; z)$, $\vec{b}(x'; y'; z')$ vektorlar ortogonal (perpendikulyar) bo'lishligining zarur va yetarli sharti ushbu tenglikdan iborat (fazoda):

$$xx' + yy' + zz' = 0. \quad (8.13)$$

5-Misol. $\vec{a}(3; 6)$ va $\vec{b}(5; -2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Yechish: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga tengligidan,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' = 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) = 3$$

kelib chiqadi. Demak, berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi 3 ga teng bo'ladi.

8.4. Vektorning vektor va aralash ko'paytmasi.

Ikki vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ning **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi xossalarga ega bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi \quad (\varphi = \vec{a} \wedge \vec{b}) \quad (8.14)$$

2. $\vec{c}$ vektor shu parallelogramm tekisligiga perpendikulyar, ya'ni u ham $\vec{a}$ vektorga, ham $\vec{b}$ vektorga perpendikulyardir:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{va} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad (8.15)$$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar ko'rsatilgan tartibda olinganda vektorlarning o'ng uchligini tashkil etadi.

Fazoda berilgan

$$\vec{a}(x; y; z), \quad \vec{b}(x'; y'; z')$$

vektorlar uchun

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right\} \quad (8.16)$$

yoki

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \quad (8.17)$$

tenglik o'rinli.

Fazoda uch vektorning **aralash ko'paytmasi** deb, birinchi ikki vektorning vektor ko'paytmasiga uchinchi vektorni skalyar ko'paytirishga aytiladi.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} \quad (8.18)$$

Fazoda $\vec{a}(x; y; z)$, $\vec{b}(x'; y'; z')$ va $\vec{c}(x''; y''; z'')$ vektorlar koordinatalar bilan berilgan bo'lsin. Ularning aralash ko'paytmasi formulasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni vektor ko'paytiramiz.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

bu vektor ko'paytmani esa $\vec{c}(x''; y''; z'')$ vektorga skalyar ko'paytiramiz va

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \cdot (x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k} \right) (x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} x'' - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} y'' + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} z'' \right) = \begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad (8.19) \end{aligned}$$

hosil bo'ladi.

6-Misol. $\vec{a}(1; -3; 4)$ va $\vec{b}(3; -4; 2)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (4.10) formuladan foydalanib,

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} \right) = \\ &= 10\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned}$$

$\vec{c}(10; 10; 5)$ vektorning koordinatasini topdik.

7-Misol. $\vec{a}(3; -4; 2)$, $\vec{b}(-1; 2; 5)$ va $\vec{c}(2; 3; -4)$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (4.12) formuladan foydalanib,

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -24 - 6 - 40 - 8 - 45 + 16 = -107$$

ya'ni, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi -107 ga teng ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

8.2. Vektorlar ustida amallar. Vektorni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirishga doir misollar

8.1.1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan vektorlardan foydalanib, quyidagi vektorlarni har birini bo'yicha har bir vektorlarni yasang:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

8.1.2. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bo'yicha quyidagi har bir vektorlarni yasang:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

8.1.3. $\vec{a}(12; -3)$ va $\vec{b}(-3; 6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $4\vec{a} + 3\vec{b}$;
6) $\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$.

8.1.4. $\vec{a}(-4; 1)$ va $\vec{b}(6; -8)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$.

8.1.5. $\vec{a}(8; -4)$ va $\vec{b}(-9; -3)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{a} + 2\vec{b}$; 3) $-2\vec{a}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $-3\vec{a} + 2\vec{b}$;
6) $\frac{1}{4}\vec{a} - 2\vec{b}$.

8.1.6. $\vec{a}(-2; 3; -4)$ va $\vec{b}(0; -2; 6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $-\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{a} - 3\vec{b}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $-\frac{2}{3}\vec{b}$; 5) $4\vec{a} + \vec{b}$;

6) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

8.1.7. $\vec{a}(-1; 5; -6)$ va $\vec{b}(4; -9; -3)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\vec{a} + 2\vec{b}$; 3) $-2\vec{a}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $-3\vec{a} + 2\vec{b}$

6) $\frac{1}{4}\vec{a} - 2\vec{b}$.

8.1.8. $\vec{a}(3; -1; 5)$ va $\vec{b}(-2; 4; -6)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $3\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 3) $-4\vec{a}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $3\vec{a} + 4\vec{b}$;

6) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$.

8.1.9. $\vec{a}(3; -2; 6)$ va $\vec{b}(-2; 1; 0)$ vektorlar berilgan. Quyidagi vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlang:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

8.1.10. Uchta $\vec{a} = \{2; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 1\}$, $\vec{c} = \{5; -2\}$ vektor berilgan.

1) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$; 2) $\vec{a} - 14\vec{b} + 14\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.2.11. Uchta $\vec{a} = \{7; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -3\}$, $\vec{c} = \{4; -1\}$ vektor berilgan.

1) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; 2) $5\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.1.12. Uchta $\vec{a} = \{-3; 1\}$, $\vec{b} = \{6; -2\}$, $\vec{c} = \{-4; -7\}$ vektor berilgan.

1) $2\vec{a} - 4\vec{b} + 7\vec{c}$; 2) $5\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.1.13. Uchta $\vec{a} = \{5; 7; 2\}$, $\vec{b} = \{3; 0; 4\}$, $\vec{c} = \{-6; 1; -1\}$ vektor berilgan.

1) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; 2) $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.1.14. Uchta $\vec{a} = \{-4; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 5\}$ vektor berilgan.

1) $2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$; 2) $5\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.1.15. Uchta $\vec{a} = \{6; -3; -2\}$, $\vec{b} = \{-1; 4; -3\}$, $\vec{c} = \{-4; 3; -6\}$ vektor berilgan.

1) $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$; 2) $\vec{a} + 9\vec{b} - 7\vec{c}$ vektorlar topilsin.

8.1.16. $\vec{a}(2; 4)$ va $\vec{b}(2; -1)$ vektorlar yig'indisi va ayirmasi toping.

8.1.17. $\vec{a}(-2; 3)$ va $\vec{b}(-4; 5)$ vektorlar yig'indisi va ayirmasi toping.

8.1.18. $\vec{a}(8; 6)$ va $\vec{b}(4; 3)$ vektorlar yig'indisi va ayirmasi toping.

8.1.19. $\vec{a}(3; -5; 8)$ va $\vec{b}(-1; 1; -4)$ vektorlar yig'indisi va ayirmasi toping.

8.1.20. $\vec{a}(-3; -1; 4)$ va $\vec{b}(1; 7; 5)$ vektorlar yig'indisi va ayirmasi toping.

8.1.21. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $2\vec{a} - 5\vec{b}$ vektorlar ayirmasini toping.

8.1.22. $\overrightarrow{AB} = \{2; 6; -4\}$ va $\overrightarrow{AC} = \{4; 2; -2\}$ vektorlar ABC uchburchakning yon tomonlariga mos keladi. Uchburchakning medianalariga to'g'ri keluvchi $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

8.1.23. ABC uchburchakda AD mediana o'tkazilgan. $\overrightarrow{AD}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orqali ifodalang.

8.1.24. ABC uchburchakda AD , BE , CF medianalar o'tkazilgan. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ vektorlar yig'indisi topilsin.

8.1.25. $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$ vektorlar muntazam $ABCDEF$ oltiburchakning ikkita qo'shni tomonlari. Bu oltiburchakning tomonlari bo'ylab qo'yilgan $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ vektorlarni $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorlar orqali ifodalang.

8.1.26. Uchburchak tekisligida shunday nuqta topilsinki, shu nuqtadan uchburchak uchlariga yo'nalgan vektorlar yig'indisi nolga teng bo'lsin.

8.1.27. $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ va $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$ vektorlardan tashkil topgan ABC uchburchakda quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$, 2) $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$, 3) $\frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}$, 4) $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$

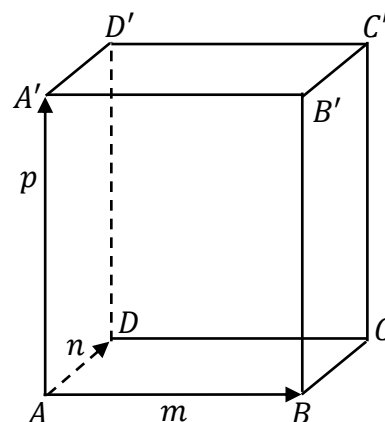
8.1.28. O nuqta ABC uchburchakning og'irlik markazi hisoblanadi. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$ ekanligini isbotlang.

8.1.29. $ABCDE$ to'g'ri burchakli beshburchakda uning tomonlariga to'g'ri keladigan vektorlar berilgan: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Quyidagi vektorlarni yasang:

- 1) $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$; 2) $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}$;
- 3) $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{m} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

8.1.30. $ABCD A'B'C'D'$ parallelopipedning qirralariga mos vektorlar berilgan: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, va $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$ (2.2.1-chizma). Quyidagi har bir vektorni yasang:

- 1) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$; 2) $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$;
- 3) $\frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$; 4) $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$
- 5) $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.



8.1.1-chizma

8.2. Berilgan vektorni bazis vektorlar bo'yicha yoyishga doir misollar

8.2.1. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazis bo'yicha vektorlar yoyilmasi berilgan: $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Shu bazis bo'yicha $\vec{c}$ vektorga parallel va qarama-qarshi $\vec{d}$ vektorning yoyilmasini aniqlang, bunda $|\vec{d}| = 75$ ga teng.

8.2.2. Tekislikda $\vec{p}(2; -3)$, $\vec{q}(1; 2)$ vektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{a}(9; 4)$ vektorni $\vec{p}, \vec{q}$ bazis bo'yicha yoyilmasini toping.

8.2.3. Tekislikda $\vec{p}(-4; 1)$, $\vec{q}(3; -5)$ vektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{a}(11; -7)$ vektorni $\vec{p}, \vec{q}$ bazis bo'yicha yoyilmasini toping.

8.2.4. Tekislikda $\vec{p}(3; -2)$, $\vec{q}(-4; 1)$ vektorlar berilgan bo'lsin. $\vec{a}(17; -8)$ vektorni $\vec{p}, \vec{q}$ bazis bo'yicha yoyilmasini toping.

8.2.5. Tekislikda $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-2; 1)$ va $\vec{c}(7; -4)$ vektorlar berilgan. Har bir vektorni, qolgan ikki vektorni bazis sifatida qabul qilib, yoyilmasini aniqlang.

8.2.6. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{c} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

8.2.7. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{c}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{p} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

8.2.8. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{c}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{q} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{r}$ vektorning yoyilmasini toping.

8.2.9. $\vec{p}(3; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 1; -2)$, $\vec{r}(2; 1; -3)$ va $\vec{c}(11; -6; 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{c}$ bazis bo'yicha $\vec{r} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{c}$ vektorning yoyilmasini toping.

8.2.10. $\vec{p}(1; -2; 1)$, $\vec{q}(-1; 5; 3)$, $\vec{r}(7; 1; -1)$ vektorlar berilgan. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ bazis bo'yicha $\vec{c}(12; -9; 6)$ vektorning yoyilmasini toping.

8.2.11. $\vec{a}(3; -1)$, $\vec{b}(1; -2)$, $\vec{c}(-1; 7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}, \vec{b}$ bazis bo'yicha $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning yoyilmasini aniqlang.

8.2.12. $\vec{a}(2; 1; 0)$, $\vec{b}(1; -1; 2)$, $\vec{c}(2; 2; -1)$ va $\vec{d}(3; 7; -7)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Har bir vektorning yoyilmasini qolgan uchta vektorni bazis sifatida qabul qilib aniqlang.

8.2.13. $\vec{a}(2; -1; 3)$ va $\vec{b}(-6; 3; -9)$ vektorlar kollinearligini tekshiring. Ularning qaysi biri necha marta uzunligini, qanday yo'nalganligini, bir tomonga yoki qarama-qarshi ekanligini ko'rsating.

8.2.14. α, β ning qanday qiymatida $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi?

8.2.15. $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'lsa, α va β ni toping.

8.2.16. $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(-6; 3; -9)$, $\vec{c}(1; 2; 3)$, $\vec{d}(-6; 12; 18)$ vektorlar berilgan. Ulardan qaysilari o'zaro kollinear?

8.2.17. $\vec{a}(\lambda n; n - 2; n + 1)$ va $\vec{b}(n - 3; \mu n; n - 1)$ vektorlar λ va μ parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini aniqlang.

8.2.18. Berilgan $\vec{a}(n; 2n + 1; 1 - n)$, $\vec{b}(n + 1; n - 1; \lambda)$ va $\vec{c}(n - 1; 3n; 1)$ vektorlar λ - parametrning qanday qiymatida komplanar bo'ladi?

8.2.19. Quyidagi hollarning har birida $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{4; -2\}$, $\vec{b} = \{3; 5\}$, $\vec{c} = \{1; -7\}$;

b) $\vec{a} = \{5; 4\}$, $\vec{b} = \{-3; 0\}$, $\vec{c} = \{19; 8\}$;

c) $\vec{a} = \{-6; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 7\}$, $\vec{c} = \{9; -3\}$.

8.2.20. Quyidagi hollarning har birida $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-8; 7\}$, $\vec{b} = \{-2; 3\}$, $\vec{c} = \{-4; 1\}$;

b) $\vec{a} = \{14; -16\}$, $\vec{b} = \{2; -1\}$, $\vec{c} = \{-4; 5\}$;

c) $\vec{a} = \{-1; 2\}$, $\vec{b} = \{-2; 4\}$, $\vec{c} = \{-1; 3\}$.

8.2.21. Quyidagi hollarning har birida $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{-1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; -4\}$, $\vec{c} = \{2; -3\}$;

b) $\vec{a} = \{3; -4\}$, $\vec{b} = \{-13; 13\}$, $\vec{c} = \{-4; 1\}$;

c) $\vec{a} = \{6; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; 1\}$, $\vec{c} = \{9; -3\}$.

8.2.22. Quyidagi hollarning har birida $\vec{d}$ vektorni $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{5; 7; 0\}$, $\vec{c} = \{3; -2; 4\}$, $\vec{d} = \{4; 12; -3\}$;

b) $\vec{a} = \{5; -2; 0\}$, $\vec{b} = \{0; -3; 4\}$, $\vec{c} = \{-6; 0; 1\}$,
 $\vec{d} = \{25; -22; 16\}$;

c) $\vec{a} = \{3; 5; 6\}$, $\vec{b} = \{2; -7; 1\}$, $\vec{c} = \{12; 0; 6\}$, $\vec{d} = \{0; 20; 18\}$.

8.2.23. Quyidagi hollarning qaysi birida uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektor chiziqli bog‘liq bo‘lishini va basharti ular chiziqli bog‘liq bo‘lgan holda $\vec{c}$ vektorni $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalang:

a) $\vec{a} = \{5; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 4; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; -1; 6\}$;

b) $\vec{a} = \{6; 4; 2\}$, $\vec{b} = \{-9; 6; 3\}$, $\vec{c} = \{-3; 6; 3\}$;

c) $\vec{a} = \{6; -18; 12\}$, $\vec{b} = \{-8; 24; -16\}$, $\vec{c} = \{8; 7; 3\}$.

8.2.24. Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektor va uchta λ , μ , ν son qanday bo'lsin, siz $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$, $\nu\vec{b} - \lambda\vec{c}$, $\mu\vec{c} - \nu\vec{a}$ vektorlarning komplanar ekanligini isbotlang.

8.2.25. $\vec{a}(m; -12; -2)$, $\vec{b}(0; m; 1)$ va $\vec{c}(1; 2; 3)$ vektorlar m parametrning qanday qiymatlarida komplanar bo'lishini toping.

8.2.26. Berilgan $\vec{a}(n; 2n + 1; 1 - n)$, $\vec{b}(n + 1; n - 1; \lambda)$ va $\vec{c}(n - 1; 3n; 1)$ vektorlar λ parametrning qanday qiymatida komplanar bo'ladi?

8.2.27. λ parametrning qanday qiymatida $\vec{a}(\lambda n; n - 2; n + 1)$ va $\vec{b}(n - 3; \lambda n; n - 1)$ vektorlar ortogonal bo'lishini aniqlang.

8.2.28. $\vec{x}(n; n + 4; n - 1)$ vektorni $\vec{e}_1(1; 1; 0)$, $\vec{e}_2(1; 0; 1)$ va $\vec{e}_3(0; 1; 1)$ bazisdagi yoyilmasini toping.

8.2.29. $\vec{a}(2n; n + 3; n - 1)$, $\vec{b}(n; 2n - 13; 4n)$ va $\vec{c}(2n; 13 - 5n; -13n - 3)$ vektorlar chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsating va bu bog'lanishni toping.

8.2.30. $\vec{e}_1(n; n - 1; 2n)$, $\vec{e}_2(n + 1; 0; n + 2)$ va $\vec{e}_3(1; n; n - 3)$ vektorlar bazis tashkil etishini ko'rsating.

8.3. Vektorlarning skalyar ko'paytmasiga doir misollar.

8.3.1. $\vec{a}(6; -8)$, $\vec{b}(12; 9)$ va $\vec{c}(-4; 3)$ vektorlar uchun

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}\vec{c}$; 3) $\vec{b}\vec{c}$ ni hisoblang.

8.3.2. $\vec{a}(3; 5; 7)$, $\vec{b}(-2; 6; 1)$ va $\vec{c}(2; -4; 0)$ vektorlar uchun

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}\vec{c}$; 3) $\vec{b}\vec{c}$; 4) $(2\vec{a} - \vec{b})(3\vec{b} + \vec{c})$;

5) $(3\vec{a} + 2\vec{c})(2\vec{b} - \vec{c})$ skalyar ko'paytmasini hisoblang.

8.3.3. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(6; -8)$, $\vec{b}(12; 9)$, $\vec{c}(2; -5)$, $\vec{d}(3; 7)$, $\vec{m}(-2; 6)$ va $\vec{n}(3; -9)$ vektorlar orasidagi

1) $\vec{a} \wedge \vec{b}$; 2) $\vec{c} \wedge \vec{d}$; 3) $\vec{m} \wedge \vec{n}$ ni toping.

8.3.4. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(8; 4; 1)$, $\vec{b}(2; -2; 1)$, $\vec{c}(2; 5; 4)$ va $\vec{d}(6; 0; -3)$ vektorlar orasidagi

1) $\vec{a} \wedge \vec{b}$; 2) $\vec{c} \wedge \vec{d}$ ni toping.

8.3.5. $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^\circ$ berilgan bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

8.3.6. $\vec{c}$ va $\vec{d}$ birlik vektor va $(\vec{c} \wedge \vec{d}) = 135^\circ$ berilgan bo'lsa, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

8.3.7. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ berilgan bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

8.3.8. $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{d}| = 7$, $\vec{c} \perp \vec{d}$ berilgan bo'lsa, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

8.3.9. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak tashkil qiladi. $|\vec{a}| = 3$ va $|\vec{b}| = 4$ bo'lsa, quyidagilarni hisoblang:

- 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$;
- 6) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$; 7) $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$; 8) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

8.3.10. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar, $\vec{c}$ vektor ularning har biri bilan $\varphi = \frac{\pi}{3}$ burchak hosil qilib, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ ga teng bo'lsa, quyidagilarni hisoblang:

- 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$;
- 4) $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; 5) $(2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c})(2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c})$

8.3.11. $\vec{a}(5; -6; 1)$, $\vec{b}(-4; 3; 0)$, $\vec{c}(5; -8; 10)$ vektorlar berilgan bo'lsa,

- 1) $3\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 2\vec{c}^2$;
- 2) $3\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}\vec{c} - 5\vec{a}\vec{c}$;
- 3) $2\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 5\vec{c}^2$ ifodalarni hisoblang.

8.3.12. $\vec{a}(3; 1; 2)$, $\vec{b}(2; 7; 4)$, $\vec{c}(1; 2; 1)$ vektorlar berilgan bo'lsa,

- 1) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{c}$;
- 2) $\vec{a}^2(\vec{b} \wedge \vec{c})$;
- 3) $\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{c} + \vec{c}^2\vec{a}$ ifodalarni hisoblang.

8.3.13. $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ va $C(0; 1; -5)$ nuqtalar berilgan bo'lsa,

1) $\sqrt{AB^2}$; 2) $\sqrt{AC^2}$; 3) $\sqrt{BC^2}$; 4) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$;

5) $(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB})(3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC})$ ifodalarni hisoblang.

8.3.14. $\vec{a}(2; -4; 4)$ va $\vec{b}(-3; 2; 6)$ vektorlar hosil qilgan burchak kosinusini toping.

8.3.15. $\vec{a}(5; 2)$, $\vec{b}(7; -3)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o'zida ikkita $\vec{a}\vec{x} = 38$, $\vec{b}\vec{x} = 30$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

8.3.16. $\vec{a}(3; 4)$, $\vec{b}(6; -7)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o'zida ikkita $\vec{a}\vec{x} = 2$, $\vec{b}\vec{x} = 19$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

8.3.17. $\vec{a}(3; -2; 4)$, $\vec{b}(5; 1; 6)$, $\vec{c}(-3; 0; 2)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o'zida $\vec{a} \cdot \vec{x} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = 35$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = 0$ tenglamalarni qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

8.3.18. $\vec{a}(2; 1; -1)$ vektorga kollinear va $\vec{x}\vec{a} = 3$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

8.3.19. $\vec{x}$ vektor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ vektorlarga perpendikulyar, Oy o'qi bilan o'tmas burchak hosil qiladi. $|\vec{x}| = 14$ bo'lsa, uning koordinatalarini toping.

8.3.20. Uchta $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{x}\vec{a} = -5$, $\vec{x}\vec{b} = -11$ va $\vec{x}\vec{c} = 20$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

8.3.21. Tomonlari birga teng bo'lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ deb $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{c}$ ifoda hisoblansin.

8.3.22. $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ vektorlar α ning qanday qiymatida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

8.3.23. ABC uchburchak tomonlarining uzunliklari berilgan: $|BC| = 5$, $|CA| = 6$, $|AB| = 7$ bo'lsa,

1) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$;

4) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{CA}$; 5) $\overrightarrow{CA}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi topilsin.

8.3.24. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ shart bilan quyidagilar $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ berilgan bo'lsa, $\vec{a} \vec{b} + \vec{b} \vec{c} + \vec{c} \vec{a}$ ni hisoblang.

8.3.25. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bir-birlari bilan 60° ga teng bo'lgan burchak tashkil qilsa, hamda $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ va $|\vec{c}| = 6$ berilgan bo'lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning modulini aniqlang.

8.3.26. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ berilgan. α ning qanday qiymatida $\vec{a} + \alpha \vec{b}$ va $\vec{a} - \alpha \vec{b}$ vektorlar perpendikulyar bo'ladi?

8.3.27. $\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\vec{a} - \vec{b}$ vektorga perpendikulyar bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak?

8.3.28. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$ bo'lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorlar orasidagi α burchakni toping.

8.3.29. $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$ va $C(3; -2; 1)$ uchburchakning uchlari berilgan. Uning B uchidagi ichki burchakni toping.

8.3.30. Uchburchakning $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ va $C(1; -2; 1)$ uchlari berilgan. Uning A uchidagi ichki burchakni aniqlang.

8.4. Vektorning vektor va aralash ko'paytmasiga doir misollar.

8.4.1. Determinantlarni hisoblang.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; & 2) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; & 3) \begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}; \\ 4) \begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ -4 & -21 \end{vmatrix} = 1; & 5) \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}; & 6) \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \end{array}$$

8.4.2. Determinantlarni hisoblang.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}; & 2) \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}; & 3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0; \\ 4) \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; & 5) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{array}$$

8.4.3. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$1) \begin{cases} 3y - x = -17 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos 2\alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin 2\alpha \end{cases}$$

8.4.4. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$1) \begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z = -6 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x + 5y + 2z = -1 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 16 = 0 \\ 4x - 2y + 5z - 5 = 0 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}.$$

8.4.5. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak hosil qiladi. Agar $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ bo'lsa, $||[\vec{a}\vec{b}]||$ ni hisoblang.

8.4.6. $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ va $\vec{a} \vec{b} = 12$ berilgan bo'lsa, $||[\vec{a}\vec{b}]||$ ni hisoblang.

8.4.7. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ va $||[\vec{a}\vec{b}]|| = 72$ bo'lsa, $\vec{a} \vec{b}$ ni toping.

8.4.8. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar. $|\vec{a}| = 3$ va $|\vec{b}| = 4$ ni bilgan holda, quyidagilarni hisoblang:

$$1) ||[(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})]||; \\ 2) ||[(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})]||.$$

8.4.9. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ ni bilgan holda, quyidagilarni hisoblang:

$$1) [\vec{a}, \vec{b}]^2; \quad 2) [(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]^2; \quad 3) [(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})]^2.$$

8.4.10. Ixtiyoriy $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ vektorlar berilgan. $\vec{a} = [\vec{p} \vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q} \vec{n}]$ va $\vec{c} = [\vec{r} \vec{n}]$ vektorlarni komplanar ekanligini isbotlang.

8.4.11. $\vec{a}(3; -1; -2)$ va $\vec{b}(1; 2; -1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmalar koordinatalarini toping:

$$1) [\vec{a} \vec{b}]; \quad 2) [(2\vec{a} + \vec{b})\vec{b}]; \quad 3) [(2\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})].$$

8.4.12. $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ va $C(3; 2; 1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko'paytmalar koordinatalarini toping:

1) $[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC}]$; 2) $[(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})\overrightarrow{CB}]$.

8.4.13. $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$ va $C(5; 2; 6)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchak yuzasini hisoblang.

8.4.14. Uchburchakning $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$ va $C(1; 3; -1)$ uchlari berilgan. B uchidan AC yon tomonga tushirilgan balandlik uzunligini hisoblang.

8.4.15. $\vec{a}(2; -2; 1)$ va $\vec{b}(2; 3; 6)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini hisoblang.

8.4.16. $A(3; -2; 5)$, $B(1; 4; -3)$ va $C(-6; 2; 4)$ nuqtalar berilgan bo'lsa,

1) $[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC}]\overrightarrow{AC}$; 2) $[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{BC}$; 3) $[\overrightarrow{BC} \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AB}$

aralash ko'paytmasini toping.

8.4.17. $C(-2; 4; 3)$, $D(1; -5; 6)$ va $E(3; 7; -4)$ nuqtalar berilgan bo'lsa,

1) $[\overrightarrow{CD} \overrightarrow{DE}]\overrightarrow{CE}$; 2) $(2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CE})(2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED})$;

3) $(3\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ED})(2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC})(\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CE})$ aralash ko'paytmasini toping.

8.4.18. $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$ va $\vec{c} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa,

1) $[\vec{a} \vec{b}]\vec{c}$; 2) $[\vec{a} \vec{c}]\vec{b}$; 3) $[\vec{b} \vec{c}]\vec{a}$;

4) $(\vec{b} + 2\vec{a})(\vec{c} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{c})$; 5) $(3\vec{a} - \vec{c})(2\vec{b} + \vec{a})(4\vec{c} + 3\vec{b})$

aralash ko'paytmasini toping.

8.4.19. $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(-3; 1; 2)$ va $\vec{c}(1; 2; 3)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $[[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}]$ va $[\vec{a}[\vec{b} \vec{c}]]$ ni hisoblang.

8.4.20. $\vec{a}(6; -4; 8)$ va $\vec{b}(-2; 4; 0)$ vektorlar berilgan bo'lsa:

1) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$;

2) $[\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})]$;

3) $\left[\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} (\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}) \right]$ topilsin.

8.4.21. Quyidagi hollarning har birida $[\vec{a} \vec{b}]$ vektor ko'paytma topilsin:

1) $\vec{a}(2; 3; 1), \vec{b}(5; 6; 4);$

2) $\vec{a}(5; -2; 1), \vec{b}(4; 0; 6);$

3) $\vec{a}(-2; 6; -4), \vec{b}(3; -9; 6).$

8.4.22. $\vec{a}(8; 4; 1)$ va $\vec{b}(2; -2; 1)$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuzi hisoblansin.

8.4.23. $\vec{a}(3; 1; 2), \vec{b}(2; 7; 4)$ va $\vec{c}(1; 2; 1)$ vektorlar berilgan:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c};$ 2) $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}];$ 3) $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ topilsin.

8.4.24. Berilganlarga ko'ra $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

1) $\vec{a} = \vec{k}, \vec{b} = \vec{i}, \vec{c} = \vec{j};$

2) $\vec{a} = \vec{i}, \vec{b} = \vec{k}, \vec{c} = \vec{j};$

3) $\vec{a} = \vec{j}, \vec{b} = \vec{i}, \vec{c} = \vec{k};$

4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{j}, \vec{c} = \vec{k};$

5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{c} = \vec{j};$

6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{c} = \vec{k}.$

8.4.25. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar hamda $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$ va $|\vec{c}| = 3$ berilgan bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

8.4.26. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil qiladi va $\vec{c}$ vektor bilan perpendikulyar. $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3$ va $|\vec{c}| = 4$ berilgan bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

8.4.27. $\vec{a}(1; -1; 3), \vec{b}(-2; 2; 1)$ va $\vec{c}(3; -2; 5)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

8.4.28. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, quyidagilarni toping.

1) $[\vec{a}\vec{b}];$ 2) $[\vec{b}\vec{c}];$ 3) $[\vec{a}\vec{c}];$ 4) $[[\vec{a}\vec{c}]\vec{b}];$ 5) $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}];$

6) $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]];$ 7) $([\vec{a}\vec{b}]\vec{c});$ 8) $([\vec{a}\vec{c}]\vec{b});$ 9) $(\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]);$

10) $[(2\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{a} - 5\vec{c})];$ 11) $[(\vec{a} - 2\vec{c})(3\vec{b} - 2\vec{a})];$

$$12) \left([(2\vec{b} + \vec{c})(3\vec{a} - \vec{c})](\vec{b} - 2\vec{a}) \right);$$

$$13) \left([(2\vec{a} - 5\vec{c})(2\vec{b} + 3\vec{c})](3\vec{b} - \vec{c}) \right); \quad 14) \left((\vec{a}\vec{b})\vec{c} \right); \quad 15) \left((\vec{b}\vec{c})\vec{a} \right).$$

8.4.29. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsa, quyidagilarni toping:

$$1) (\vec{a}[\vec{c}\vec{b}]); \quad 2) (\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]); \quad 3) [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]; \quad 4) [\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]];$$

$$5) ([\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]\vec{c}); \quad 6) ([\vec{a}[\vec{a}\vec{c}]] [\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]]).$$

8.4.30. Ayniyatni isbotlang:

$$1) [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] = 0;$$

$$2) [\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}] = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c});$$

$$3) [\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}] + [\vec{a}\vec{c}][\vec{d}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{d}][\vec{b}\vec{c}] = 0;$$

$$4) [[\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c});$$

$$5) [\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2;$$

$$6) \left[\vec{a} \left[\vec{a} \left[\vec{a}[\vec{a}\vec{b}] \right] \right] \right] = \vec{a}^4\vec{b} \text{ bu yerda, } \vec{a} \text{ va } \vec{b} \text{ vektorlar o'zaro}$$

perpendikulyar;

$$7) [\vec{a}(\vec{b}[\vec{c}\vec{d}])] = [\vec{a}\vec{c}](\vec{b}\vec{d}) - [\vec{a}\vec{d}](\vec{b}\vec{c});$$

$$8) \left[\vec{a} [\vec{b}[\vec{c}\vec{d}]] \right] = (\vec{a}\vec{c}\vec{d})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})(\vec{c}\vec{d});$$

$$9) [\vec{a}\vec{b}]^2 [\vec{a}\vec{c}]^2 - ([\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{c}]) = \vec{a}^2(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2;$$

$$10) [[\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}]] [[\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}]] [[\vec{c}\vec{a}][\vec{a}\vec{b}]] = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^4.$$

9-MAVZU: TEKISLIK VA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Reja:

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziq orasidagi burchak.

2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi.

3. Fazoda tekislikning ba‘zi tenglamalari.

4. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari.

Tayanch iboralar: burchak koeffitsiyenti, parallellik, perpendukulyarlik, to‘g‘ri chiziqlar dastasi, normal, normal vektor, bissektrisa, fazo, parallellik, perpendukulyarlik, kanonik, parametrik, normal.

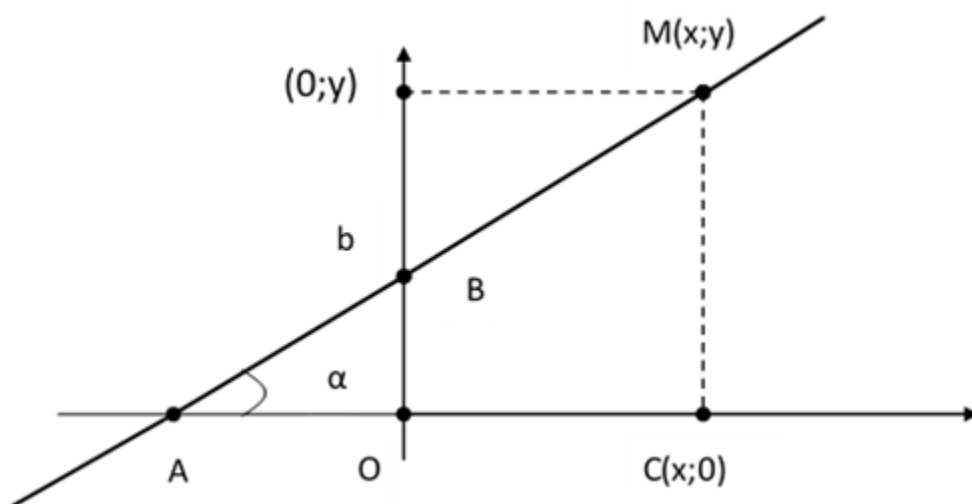
9.1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.

To‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

Bizda XOY dekart koordinatalar sistemasida to‘g‘ri chiziqning quyidagi parametrlari berilgan bo‘lsin.

1) To‘g‘ri chiziq bilan absissa o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchak α ;

2) To‘g‘ri chiziq bilan ordinata o‘qining kesishish nuqtasi(to‘g‘ri chiziqning ordinata o‘qidan ajratgan kesmasi) koordinatalari $(0; b)$.



9.1.1-chizma

Berilganlardan foydalanib, to‘g‘ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaramiz, hamda $tg\alpha = \frac{OB}{AO}$, $OB = b$ ekanligidan $AO = \frac{b}{tg\alpha}$ natijaga erishiladi.

1. Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan to'g'ri chiziq orasidagi burchak α va $B(0; b)$ nuqta to'g'ri chiziqning ordinata o'qi bilan kesishgan nuqtasi

2. Ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta tanlaymiz va $\triangle ABO$ va $\triangle AMC$ uchburchaklar o'xshashligidan

$$\frac{OB}{MC} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow b\left(\frac{b}{tg\alpha} + x\right) = \frac{yb}{tg\alpha}$$

$$y = xtga + b \text{ va } tga = k$$

deb belgilash kiritsak,

$$y = kx + b \quad (9.1)$$

to'g'ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

To'g'ri chiziqning tenglamasini k va b lar bo'yicha tahlil qilamiz:

1. $k > 0$ bo'lsa, $tga > 0$ bo'ladi. Bunda $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha$ o'tkir burchak;

2. $k < 0$ bo'lsa, $tga < 0$, bo'ladi. Bunda $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \Rightarrow \alpha$ o'tmas burchak;

3. $b > 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz ordinata o'qini musbat tomoni bilan kesishadi;

4. $b < 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz ordinata o'qini manfiy tomoni bilan kesishadi.

k va b larni o'zaro kombinatsiyasidan quyidagilar kelib chiqadi:

1. $k > 0$, $b > 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz koordinatalar sistemasining I, II va III choragidan o'tadi;

2. $k > 0$, $b < 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz koordinatalar sistemasining I, III va IV choragidan o'tadi;

3. $k < 0$, $b > 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz koordinatalar sistemasining I, II va IV choragidan o'tadi;

4. $k < 0$, $b < 0$ bo'lsa, to'g'ri chizig'imiz koordinatalar sistemasining II, III va IV choragidan o'tadi.

1-Misol. Umumiy tenglamasi $4x - 6y + 3 = 0$ bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini toping.

Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasidan burchak koeffitsiyenti va boshlang'ich ordinatasini topamiz:

$$4x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow 6y = 4x + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$k = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}$$

ga teng bo'ladi.

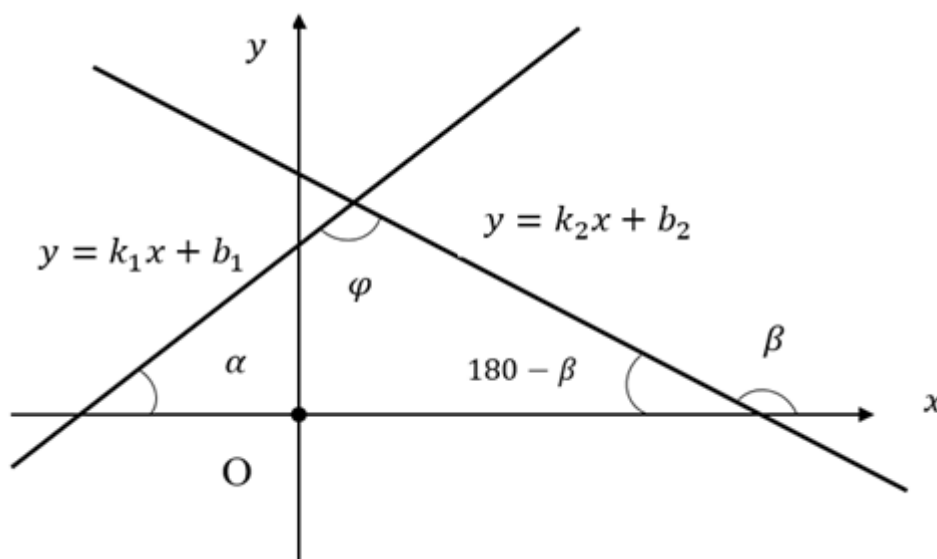
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Dekart kordinatalar tekisligida $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ tenglamalar bilan ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

Biz ikki to'g'ri chiziq orasidagi φ burchakni topish uchun:

1) to'g'ri chiziqning Ox o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchakni α desak, bundan $tg\alpha = k_1$.

2) to'g'ri chiziq Ox o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchakni β desak, $tg\beta = k_2$ kelib chiqadi.



9.1.2-chizma

Uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi formulasidan

$$\alpha + 180 - \beta + \varphi = 180 \Rightarrow \varphi = \beta - \alpha \Rightarrow tg\varphi = tg(\beta - \alpha)$$

$$tg\varphi = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$$

kelib chiqadi. Yuqoridagi belgilashlardan foydalansak,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (9.2)$$

ikki to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyenti topish formulasi kelib chiqadi.

2-Misol. Dekart koordinatalar tekisligida $y = x + 4$ va $y = 2x - 7$ tenglamalar 2 ta to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchakni toping.

Yechish: Bizga berilgan $k_1 = 1$ va $k_2 = 2$ ekanligidan, yuqorida berilgan (5.2) formuladan foydalanib,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{2 - 1}{1 + 1 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\varphi = \arctg \frac{1}{3}$ tengligi kelib chiqadi.

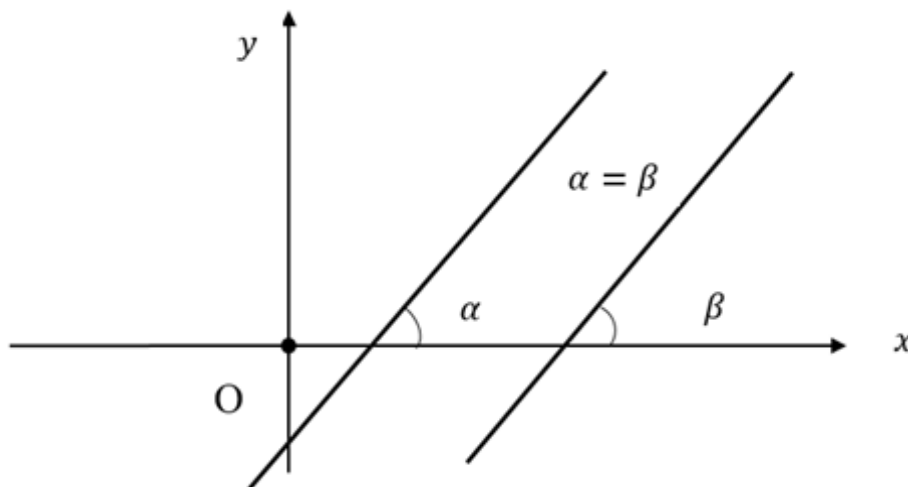
To'g'ri chiziqlarning parallelizm alomatlari.

1-usul. $y = k_1x + b_1$ to'g'ri chizig'imiz $y = k_2x + b_2$ ga parallel, ya'ni $\varphi = 0$ bo'lganda, $tg\varphi = 0$ bo'lib, $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$ bo'ladi. Bu yerda $k_2 - k_1 = 0$ bo'lsa, $k_1 = k_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

2-usul. $\alpha = \beta$ bo'lsa, $tg\alpha = tg\beta$ bo'ladi. Bundan

$$k_1 = k_2 \quad (9.3)$$

ekanligi kelib chiqadi. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyenti teng bo'lishi kerak.



9.1.3-chizma

To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik alomatlari.

$y = k_1x + b_1$ to'g'ri chiziq $y = k_2x + b_2$ ga perpendikulyar bo'lsa, $tg\varphi = tg90^\circ$ bo'ladi. $tg90^\circ$ mavjud bo'lmasligi va

aniqlanmagan bo'lishi kerak. Bu uchun $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ bo'lishi kerakligidan $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (9.4)$$

to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyentlari ham teskari ham qarama-qarshi ishorali bo'lishi kerak.

3-Misol. $y = 4x - 2$ to'g'ri chiziqqa parallel va perpendikulyar to'g'ri chiziqlarni toping.

Yechish: 1) $y = 4x - 2$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqni topish uchun yuqoridagi (9.3) formuladan foydalanib, $y = 4x + c$ ekanligi kelib chiqadi.

2) $y = 4x - 2$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqni topish uchun yuqoridagi (9.4) formuladan foydalanib, $y = -\frac{1}{4}x + c$ ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan nuqtadan o'tib berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

XOY tekisikdagi $l: y = kx + b$ to'g'ri chiziq va koordinatalari $M(x_0; y_0)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. M nuqtadan o'tib l to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik.

1-usul. $y = kx + b$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan $y = kx + c$ to'g'ri chiziq $M(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tishi uchun $y_1 = kx_1 + c$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

$c = y_1 - kx_1$ bu tenglikdan

$$y = kx + (y_1 - kx_1) \quad (9.5)$$

kelib chiqadi.

2-usul. $M(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi

$$\begin{aligned} y - y_1 &= d(x - x_1), \\ y &= dx + y_1 - dx_1 \end{aligned} \quad (9.6)$$

ko'rinishida ifodalaniladi.

Bu to'g'ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo'lishi uchun $d = k$ bo'lishi kerak. Bundan kelib chiqib,

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

ko‘rinishidagi tenglamamiz **berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

4-Misol. Berilgan $M(2; -1)$ nuqtadan $y = 0,3x - 7$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzing.

1-usul. Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $N = k$ bo‘lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan $y = 0,3x + c$ formuladan

$$0,3 \cdot 2 + c = -1 \Rightarrow 0,6 + c = -1 \Rightarrow c = -1,6$$

$y = 0,3x - 1,6$ kelib chiqadi.

2-usul: Bu to‘g‘ri chiziq $y = kx + b$ bilan parallel bo‘lishi uchun $N = k$ bo‘lsa, $y = kx + y_0 - kx_0$ ekanligidan

$$y + 1 = k(x - 2) \Rightarrow y = kx - 2k - 1 \Rightarrow k = 0,3$$

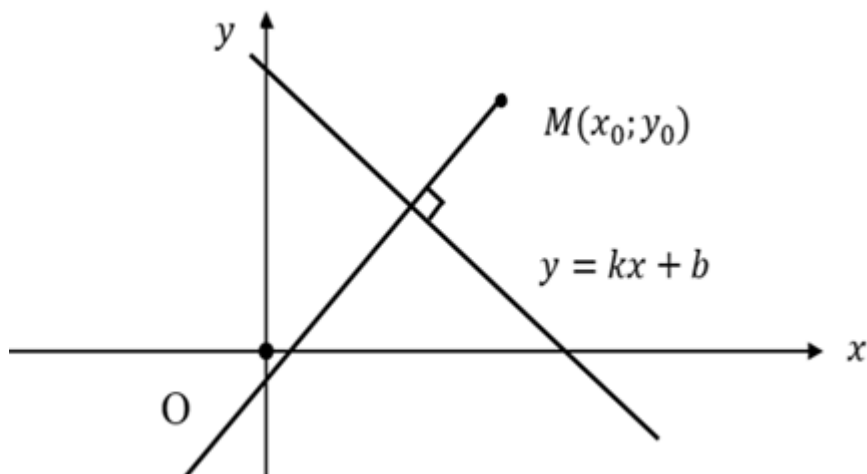
$$y = 0,3x - 2 \cdot 0,3 - 1$$

$$y = 0,3x - 1,6$$

kelib chiqadi. $M(2; -1)$ nuqtadan $y = 0,3x - 7$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = 0,3x - 1,6$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Berilgan nuqtadan o‘tib berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar tekisligida $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq va $M(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz.



9.1.4-chizma

1-usul. Berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $y = -\frac{1}{k}x_0 + c$ tenglamamizdan c ni topsak, $c = y_0 + \frac{1}{k}x_0$

$$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-usul. $y - y_0 = d(x - x_0)$ tenglamadan d ni topsak, $y = dx + y_0 - dx_0$ va $d = -\frac{1}{k}$ ekanligi kelib chiqadi hamda

$$y = -\frac{1}{k}x + y_0 + \frac{1}{k}x_0. \quad (9.7)$$

to'g'ri chiziq tenglamasini topdik.

5-Misol. Berilgan $M(2; -3)$ nuqtadan o'tib berilgan $y = 0,5x - 2$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (9.7) formuladan, $y = 0,5x - 2$ to'g'ri chiziq tenglamasiga perpendikulyar bo'lgan $y = -2x + c$ tenglamasidan, c va d ni topamiz.

$$-3 = -2 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 1$$

$$(y + 3) = d(x - 2)$$

$$y + 3 = dx - 2d \Rightarrow y = dx - 2d - 3 \Rightarrow d = -2.$$

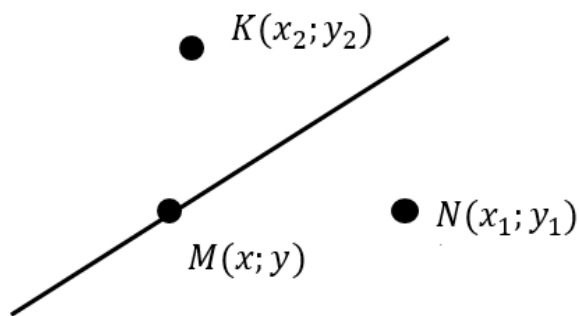
$M(2; -3)$ nuqtadan o'tib berilgan $y = 0,5x - 2$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -2x + 1$ bo'ladi.

9.2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi tenglamasi. To'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Bizda ma'lumki tekislikdagi ixtiyoriy ikkita nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Bizga $N(x_1; y_1)$ va $K(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.



9.2.1-chizma

Berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikda yotgan to'g'ri chiziqda $M(x; y)$ nuqta olamiz. Bu yerda $|KN| = |NM|$ ekanligidan

$|NM| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ va $|KN| = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$ teng bo'ladi. Bu tengliklardan

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 =$$

$$= x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2$$

$$2xx_2 - 2xx_1 + x_1^2 - x_2^2 + 2yy_2 - 2yy_1 + y_1^2 - y_2^2 = 0$$

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$$

kelib chiqib, $2x_2 - 2x_1 = A$, $2y_2 - 2y_1 = B$ va $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = C$ belgilash keritsak,

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (9.8)$$

to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi hosil bo'ladi.

Endi ayrim xususiy hollarni ko'ramiz:

1. $A = 0$ va $B \neq 0$ bo'lsa, $By + C = 0$ bo'ladi va bundan $y = -\frac{C}{B}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasi absissa o'qiga parallel va $(0; -\frac{C}{B})$ nuqtadan o'tadi;

2. $A \neq 0$ va $B = 0$ bo'lsa, $Ax + C = 0$ bo'ladi va bundan $x = -\frac{C}{A}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasi ordinata o'qiga parallel va $(-\frac{C}{A}; 0)$ nuqtadan o'tadi;

3. $A \neq 0$, $B \neq 0$ va $C = 0$ bo'lsa, $Ax + By = 0$ bo'ladi va berilgan to'g'ri chizig'imiz koordinata boshidan o'tadi.

6-Misol. Berilgan $N_1(2; 3)$ va $N_2(4; -2)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Yuqorida berilgan (9.8) formulada

$$|N_1M| = |N_2M| \text{ ekanligidan}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4)$$

$$-4x + 4 - 6y + 9 = -8x + 16 + 4y + 4$$

$$4x + 13 = 10y + 20$$

ekanligi ma'lum bo'ldi. Bundan kelib chiqib, N_1 va N_2 nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasi $4x - 10y - 7 = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

Tekislikda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Dekart koordinatalar sistemasida $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarning har biridan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Tuzmoqchi bo'lgan to'g'ri chizig'imizni $Ax + By + C = 0$ ko'rinishida izlaymiz. Bu to'g'ri chiziq $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tishi uchun tenglamalar sistemasidagi (2*) tenglamani, $M_2(x_2; y_2)$ nuqtadan o'tishi uchun esa (3*) tenglamani qanoatlantirishi kerak.

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1^*) \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 & (2^*) \\ Ax_2 + By_2 + C = 0 & (3^*) \end{cases}$$

$$(1^*) - (2^*) \Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

$$(3^*) - (2^*) \Rightarrow A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$$

$$A(x - x_1) = -B(y - y_1),$$

$$A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1).$$

hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} A(x - x_1) = -B(y - y_1) \\ A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1) \end{cases}$$

bundan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (9.9)$$

kelib chiqadi. Bu tenglama esa tekislikda M_1 va M_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasi kelib chiqadi.

7-Misol. $A(-3; 5)$ va $B(2; 1)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarning har biridan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzing.

Yechish. Yuqoridagi (5.9) formuladan foydalanib,

$$\frac{x + 3}{2 + 3} = \frac{y - 5}{1 - 5} \Rightarrow -4(x + 3) = 5(y - 5) \Rightarrow -4x - 12 = 5y - 25$$

$$-4x - 5y + 13 = 0 \Rightarrow 4x + 5y - 13 = 0$$

A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini keltirib chiqardik.

To'g'ri chiziqli tenglamaning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Bizda dekart koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqli tenglama berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqli tenglamamiz absissa o'qidan a uzunlikdagi kesmani, ordinata o'qidan esa b uzunlikdagi kesmani ajratgan bo'lsin. Demak, to'g'ri chiziqli tenglamamiz koordinatalari $A(a; 0)$ va $B(0; b)$ bo'lgan nuqtalardan o'tar ekan. Bu uchun bizga berilgan $A(a; 0)$ va $B(0; b)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini topish yetarli bo'ladi.

Berilganlardan foydalansak,

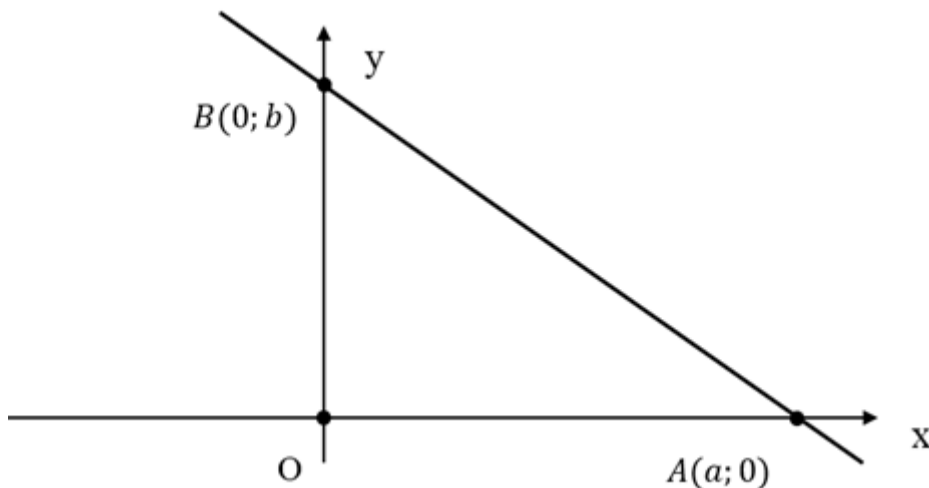
$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow b(x - a) = -a(y - 0) \Rightarrow bx - ab = -ay$$

$$bx + ay = ab$$

hosil bo'ladi. Oxirgi tengligimizni ikkala tomonini ab bo'lib yuborsak

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (9.10)$$

tenglama kelib chiqadi.



9.2.2-chizma

Ushbu tenglama absissa o'qini $(a; 0)$ va ordinata o'qini $(0; b)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi va to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.

8-Misol. Berilgan $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ to'g'ri chizig'imiz dekart koordinatalar sistemasini qaysi nuqtalarini kesib o'tadi.

Yechish. (5.10) formuladan foydalangan holda, berilgan tenglama absissa o'qini $(2; 0)$ va ordinata o'qini $(0; -3)$ nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi hosil bo'ladi.

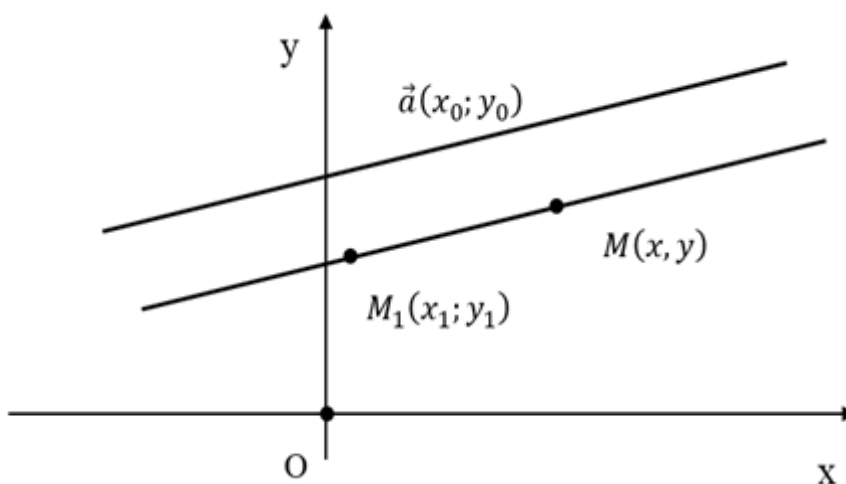
Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektor bo'yicha yo'nalgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Bizga dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}(x_0; y_0)$ vektor va $M_1(x_1, y_1)$ nuqta berilgan bo'lsin.

M_1 nuqtadan o'tib $\vec{a}$ vektor bo'yicha yo'nalgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish uchun berilgan to'g'ri chiziqda yotgan ixtiyoriy M nuqtasini olamiz. Bundan x va y bog'liqligini ko'rsatib, to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Bu yerda $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$, $\vec{a} = \{x_0; y_0\}$. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinearligidan

$$\frac{x - x_1}{x_0} = \frac{y - y_1}{y_0}$$



9.2.3-chizma

yoki

$$y_0x - x_0y + x_0y_1 - xy_0 = 0 \quad (9.11)$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

9-Misol. $\vec{a}(1; 2)$ vektor va $N(3; -4)$ nuqta berilgan. N nuqtadan o‘tib, $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan (9.11) formuladan

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 4}{2} \Rightarrow 2x - 6 = y + 4$$

ekanligi kelib chiqadi.

Agar tenglama $y = 2x - 10$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi esa, ushbu $2x - y - 10 = 0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

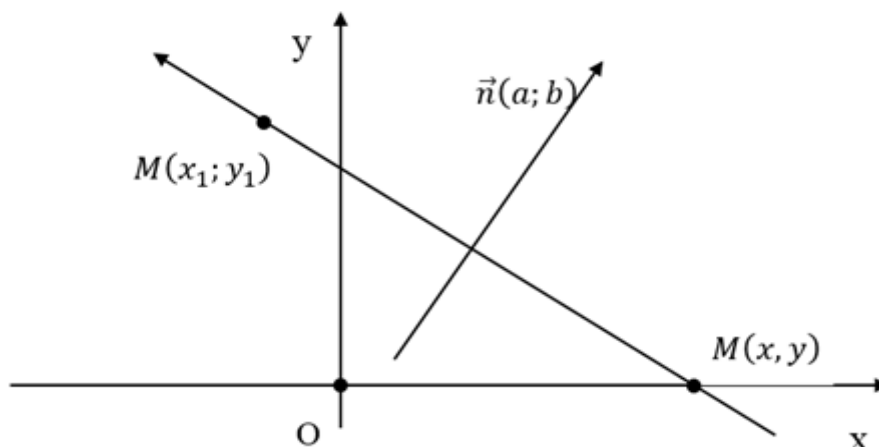
Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{n}(a; b)$ vektor va to‘g‘ri chiziqda yotgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Buning uchun to‘g‘ri chiziq ustidan ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqta olib, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ vektorni yasaymiz. $\vec{n}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar perpendikulyar bo‘lishi uchun skalyar ko‘paytmasi 0 ga teng bo‘lishi kerak.

Ya'ni, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ va $\vec{n}(a; b)$, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n} = 0$.

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

$$ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$



9.2.4-chizma

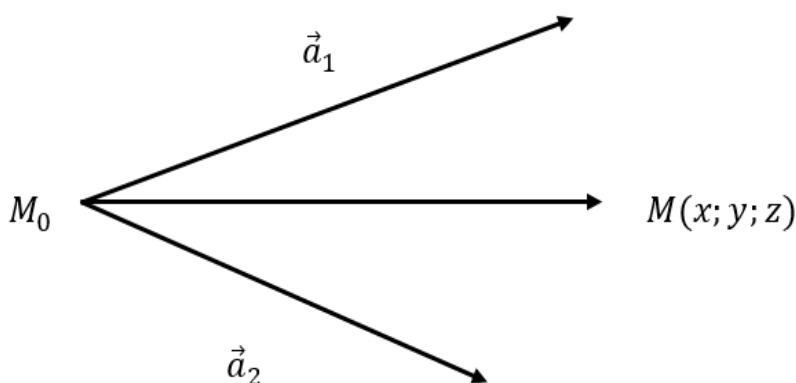
$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0 \quad (9.12)$$

to'g'ri chiziq tenglamasi $\vec{n}(a; b)$ vektorga perpendikulyar bo'ladi va bu $\vec{n}(a; b)$ vektor to'g'ri chiziqning **normal vektori** deyiladi.

9.3. Fazoda tekislikning ba'zi tenglamalari.

Ikkita kollinear bo'lmagan vektorlar va berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda $\vec{a}_1(l_1; m_1; n_1)$ va $\vec{a}_2(l_2; m_2; n_2)$ kollinear bo'lmagan vektorlar va $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlardan hamda M_0 nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik. Buning uchun $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar boshini M_0 nuqtaga keltirib qo'yamiz.



9.3.1-chizma

tuzmoqchi bo'lgan tekisligimizdan ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz. Uchinchi $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ vektorni tuzamiz.

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar komplanarligidan ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, ya'ni

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \quad (9.13)$$

bo'lishi kerak. Bundan

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

10-Misol. $\vec{a}(-3; 2; 1)$, $\vec{b}(2; 3; -2)$ vektorlardan va $M_0(2; 1; 3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Yuqorida berilgan (9.13) formuladan foydalanib,

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x - 2) - 9(z - 3) + 2(y - 1) - 4(z - 3) -$$

$$-3(x - 2) - 6(y - 1) = 0$$

$$-7(x - 2) - 4(y - 1) - 13(z - 3) = 0$$

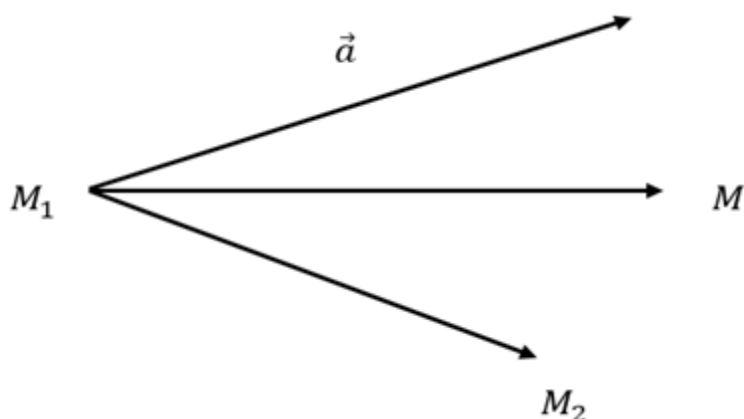
$$-7x + 14 - 4y + 4 - 13z + 39 = 0$$

$$7x + 4y + 13z - 57 = 0$$

to'g'ri chiziq tenglamasi $7x + 4y + 13z - 57 = 0$ ko'rinishida bo'ladi.

Fazoda berilgan vektordan va berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda $\vec{a}(l; m; n)$ koordinatali vektor va $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $\vec{a}$ vektordan hamda M_1 va M_2 nuqталardan o'tuvchi α tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun $\vec{a}$ vektorning boshini $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtaga keltirib qo'yamiz. Tuzmoqchi bo'lgan tekisligimizdan ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olib, $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorlarni yasaymiz.



9.3.2-chizma

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1), \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \\ \vec{a} &= (l; m; n).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir tekislikda yotishidan ularning aralash ko'paytmasi 0 ga teng bo'ladi.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0 \quad (9.14)$$

bo'lishi kerak. Bundan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

11-Misol. $\vec{a}(2; 3; -1)$ vektor $M_1(-2; 5; 4)$ va $M_2(0; 0; 0)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilgan vektor va ikki nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \begin{vmatrix} x + 2 & y - 5 & z - 4 \\ 2 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \\ 5(x + 2) + 6(z - 4) - 8(y - 5) + 10(z - 4) + 12(x + 2) + \\ &+ 2(y - 5) = 0 \\ 17(x + 2) - 6(y - 5) + 16(z - 4) &= 0 \\ 17x + 34 - 6y + 30 + 16z - 64 &= 0 \\ 17x - 6y + 16z &= 0\end{aligned}$$

$17x - 6y + 16z = 0$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Fazoda berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

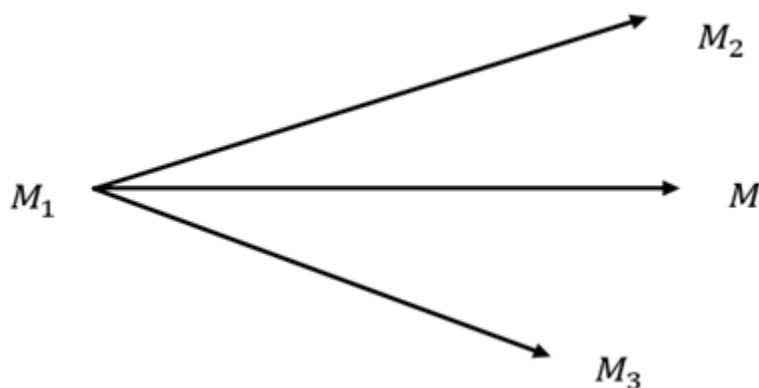
Bizga $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzish uchun tekislikdan yana bir $M(x; y; z)$ nuqta olamiz va $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlarni yasaymiz.

Bu $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

va $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ vektorlar bitta tekislikda yotadi. Bundan kelib chiqadiki, aralash ko‘paytmasi 0 ga teng bo‘lishi kerak.

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \quad (9.15)$$



9.3.3-chizma

hamda,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishida bo‘ladi, bu tenglamaning

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaga teng kuchli ekanligini ko‘rish murakkab emas.

12-Misol. $M_1(2; 3; -2)$ va $M_2(5; 6; 7)$ va $M_3(1; -2; 1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+2 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$9(x-2) - 15(z+2) - 9(y-3) + 3(z+2) + 45(x-2) - 9(y-3) = 0$$

$$54(x-2) - 18(y-3) - 12(z+2) = 0$$

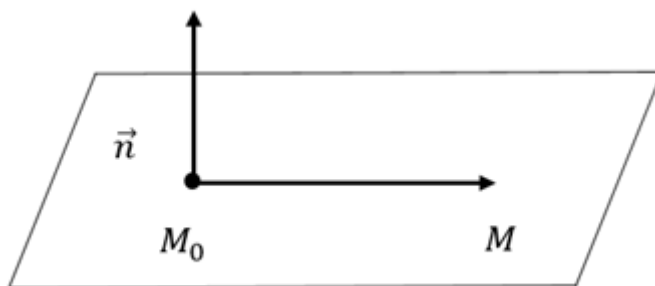
$$54x - 108 - 18y + 54 - 12z - 24 = 0$$

$$54x - 18y - 12z - 78 = 0$$

tenglikni ikkala tomonini 6 ga bo'lib yuborsak, $9x - 3y - 2z - 13 = 0$ ko'rinishida bo'ladi.

Berilgan nuqtadan o'tuvchi berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.

Fazoda koordinatalari $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta va $\vec{n}(A; B; C)$ vektor berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan o'tib, $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikdan ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz. $\vec{n}$ vektorning boshini $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtaga keltirib qo'yamiz.



9.3.4-chizma

$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ ekanligidan, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ kelib chiqadi hamda ushbu ko'rinishda

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

bo'ladi. Tekislikga perpendikulyar bo'lgan $\vec{n}$ vektor tekislikning **normal vektori** deyiladi.

Tekislikning normal tenglamasi

Faraz qilaylik, fazoda tekislikning koordinata o'qlari bilan uchrashgan nuqtalari A, B va C bo'lsin. Tekislikning koordinata o'qlariga nisbatan o'rni aniq bo'lishi uchun koordinatalar boshidan unga perpendikulyar qilib tushirilgan OP ning uzunligi va uning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari ma'lum bo'lsa kifoya qiladi. Faraz qilaylik, $OP = p$ va OP ning Ox, Oy, Oz o'qlarining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchaklari tartib bilan α, β, γ bo'lsin.

Tekislikdagi biror M nuqtaning koordinatalari: $x = OR, y = RN, z = MN$ bo'lsin. M va P nuqtalarni o'zaro tutashtirish natijasida $ORNMP$ sinik chiziq hosil bo'ladi va bu sinik chiziqning tutashtiruvchisi OP bo'ladi. Sinik chiziqning o'qdagi proyeksiyasi to'g'risidagi teorema bo'yicha haligi sinik chiziqning OP ga proyeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$OR \cos \alpha + NR \cos \beta + NM \cos \gamma + MP \cos \frac{\pi}{2} = p,$$

yoki shaklga asosan

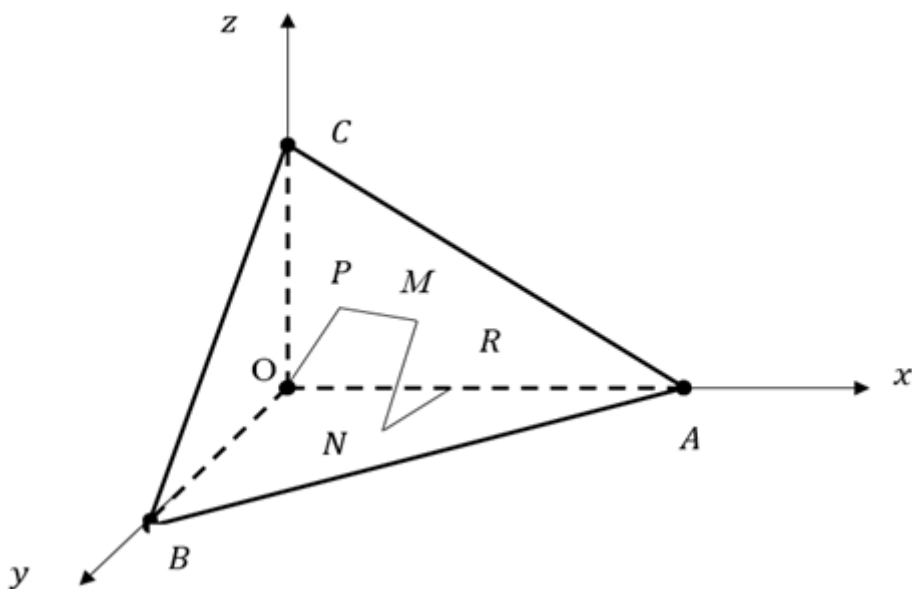
$$OR = x, \quad NR = y, \quad NM = z, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

bo'lgani uchun tekislikning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (9.16)$$

chunki M nuqta tekislikning qaysi yerida bo'lsada bu tenglama o'z kuchini saqlaydi.

Bu tenglama tekislikning **normal tenglamasi** deyiladi. Bu tenglama x, y, z ga nisbatan birinchi darajali. Demak: har bir tekislik o'zgaruvchi x, y, z koordinatalarga nisbatan birinchi darajali tenglama bilan ifoda qilinadi.



9.3.5-chizma

13-Misol. Tekislikning $2x - y + 2z - 5 = 0$ umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o'ting.

Yechish: Normallashtiruvchi μ ko'paytuvchini topamiz va berilgan umumiy tenglamani unga ko'paytirib, normal tenglamani topamiz:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0.$$

Bunda ozod had $D = -5 < 0$ bo'lgani uchun μ ishorasi musbat qilib olindi va normal tenglamada

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}, \quad p = \frac{5}{3}$$

bo'ladi.

Tekislikning umumiy tenglamasi.

Ixtiyoriy tekislik tenglamasi $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) ko'rinishida tasvirlash mumkin. Buni isbotlash uchun fazoda berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini qarasak, ushbu

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishida bo‘ladi. Determinantni satr bo‘yicha yoyib hisoblaymiz va nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + \\
 & + (-1)^{1+2} \cdot y \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \\
 & + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \\
 & A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \\
 & C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \\
 & Ax + By + Cz + D = 0 \tag{9.17}
 \end{aligned}$$

hosil bo‘ladi.

Istalgan $Ax + By + Cz + D = 0$ ko‘rinishidagi tenglama **tekislik tenglamasi** bo‘ladi.

Ixtiyoriy $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. $Ax + By + Cz + D = 0$ va $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ tekislik tenglamasi berilgan bo‘lsa, tekislik tenglamalarini bir – biridan ayirsak

$$\begin{aligned}
 & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D - D = 0 \Rightarrow \\
 & A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow \\
 & \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \tag{9.18}
 \end{aligned}$$

natija hosil bo‘ladi. Bu tenglama $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan va $\vec{a}(-B; A; 0)$ va $\vec{b}(-C; 0; A)$ vektorlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi hisoblanadi.

14-Misol. Berilgan uchta $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(4; -1; 2)$ va $M_3(2; -3; 3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini toping.

Yechish: Berilgan (6.5) va (6.6) formulalardan foydalanib,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot y \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot z \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = -4, \quad D = 11.$$

$$-x - y - 4z + 11 = 0 \Rightarrow x + y + 4z - 11 = 0$$

Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi.

1. Tekislikning fazodagi o'rni aniq bo'lishi uchun uning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari ma'lum bo'lishi kifoya qiladi. Faraz qilaylik, tekislikning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c$$

bo'lsin. Ya'ni tekislik absissa o'qini $A(a; 0; 0)$ nuqtada, ordinata o'qini $B(0; b; 0)$, aplikata o'qini esa $C(0; 0; c)$ nuqtalarda kesib o'tadi.

Uni quyidagi ikki usul bilan isbot qilamiz:

1-usul: Buning uchun tekislikning berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tenglamasidan foydalanamiz. Ma'lumki, bu tekislik $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ va $C(0; 0; c)$ nuqtalardan o'tadi.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{1+1} \cdot x \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot y \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} + \\
& + (-1)^{1+3} \cdot z \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \\
& x \cdot bc + y \cdot ac + z \cdot ab - abc = 0
\end{aligned}$$

tengligimizni ikkala tomonini abc ga bo'lib yuborsak, quyidagi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (9.19)$$

natijaga erishamiz.

2-usul: Koordinatalar boshidan tekislikka perpendikulyar qilib $OP = p$ ni o'tkazamiz. Faraz qilaylik OP ning koordinata o'qlarining musbat yo'nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari α, β, γ bo'lsin. Shaklga muvofiq a, b va c dan har birining OP dagi proyeksiyasi OP ning o'zi, ya'ni p bo'ladi. Shuning uchun

$$p = a \cos \alpha, \quad p = b \cos \beta, \quad p = c \cos \gamma,$$

yoki bulardan:

$$\cos \alpha = \frac{p}{a}, \quad \cos \beta = \frac{p}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{p}{c};$$

bular tekislikning ushbu

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

tenglamasiga qo'yilsa:

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y + \frac{p}{c}z - p = 0$$

yoki tenglamani ikkala tomonini p bo'lib, so'ngra ozod hadini o'ng tomonga o'tkazsak, tenglamaning odatdagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Tenglamadagi a, b, c ning qiymatlari algebraik bo'lib, ular musbat va manfiy bo'lishlari mumkin.

Tengsizlikning umumiy tenglamasi bo'lgan ushbu (9.17) tenglamaning koeffitsiyentlaridan hech biri nolga teng bo'lmagan holda u tenglamani hamma vaqt (9.19) shaklga keltirish mumkin.

Buning uchun tenglamaning ozod hadi bo'lgan D ni o'ng tomoniga o'tkazib, so'ngra tenglamaning ikkala tomonini $-D$ ga bo'lamiz:

$$-\frac{Ax}{D} - \frac{By}{D} - \frac{Cz}{D} = 1.$$

yoki

$$-\frac{x}{\frac{D}{A}} - \frac{y}{\frac{D}{B}} - \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1,$$

demak,

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

bo'ladi.

15-Misol. Umumiy $2x + 3y - 5z - 7 = 0$ tenglamasi bilan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasini toping.

Yechish: Umumiy tenglamani $D = 7$ soniga bo'lib, (9.19) tenglamada

$$a = \frac{D}{A} = \frac{7}{2}, \quad b = \frac{D}{B} = \frac{7}{3}, \quad c = -\frac{D}{C} = -\frac{7}{5}.$$

ekanligini topamiz. Bundan berilgan tekislikning kesmalardagi tenglamasi

$$\frac{2x}{7} + \frac{3y}{7} - \frac{5z}{7} = 1$$

yoki

$$\frac{x}{7/2} + \frac{y}{7/3} - \frac{z}{7/5} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

9.4. Fazoda to'g'ri chiziqli tenglamalari.

Berilgan vektorga parallel va berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasi.

Fazoda $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{a}(l; m; n)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzaylik. Buning uchun tuzmoqchi bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasini qanoatlantiradigan

ixtiyoriy $M(x; y; z)$ nuqta olamiz va $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ vektorni yasaymiz.

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ vektor va $\vec{a}$ vektorimizning kollinearligidan

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (9.20)$$

kelib chiqadi va bu tenglamamiz to'g'ri chiziqning berilgan nuqtadan o'tib berilgan vektorga parallel tenglamasi yoki kanonik tenglamasi deyiladi. $\vec{a}(l; m; n)$ vektor (9.20) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

16-Misol. $N(3; -2; 4)$ nuqtadan o'tuvchi $\vec{a}(-2; 4; -3)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Yuqoridagi (9.20) formuladan foydalanib,

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y - (-2)}{4} = \frac{z - 4}{-3} \Rightarrow \frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-3}$$

berilgan nuqtadan o'tib berilgan vektorga parallel tenglamasini keltirib chiqardik.

Fazoda berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Fazoda $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik. Buning uchun izlanayotgan to'g'ra chizig'imiz $M(x; y; z)$ nuqtani olamiz. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{M_2M}$ vektorlarni tuzamiz.

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_2M} = (x - x_2; y - y_2; z - z_2)$$

bu vektorlar bir to'g'ri chiziqda yotadi, ya'ni ular kollinear. Bundan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (9.21)$$

kelib chiqadi.

Bu tenglamalar berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqni ifoda qiladi, chunki bular x, y, z ga

nisbatan birinchi darajali bo'lib, har ikki nuqtaning koordinatalarini qanoatlantiradi.

17-Misol. $M_1(-1; 3; -5)$ va $M_2(2; 1; 0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi toping.

Yechish: Yuqoridagi (9.21) formuladan foydalanib,

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+5}{0+5} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{5}$$

fazoda berilgan M_1 va M_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topdik.

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi.

Fazoda $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ tenglama bilan to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Biz uni

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t$$

ko'rinishida yozsak:

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \quad (9.22)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi.

18-Misol. $M(2; -3; 5)$ va $N(-1; 4; -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq parametrik tenglamasi toping.

Yechish: Yuqoridagi (9.22) formuladan foydalanib,

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{8}$$

tenglamani tuzamiz. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bu tenglamani parametrik ko'rinishga

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{8} = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = t \\ \frac{y-4}{-7} = t \\ \frac{z+3}{8} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -7t + 4 \\ z = 8t - 3 \end{cases}$$

keltirdik.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

9.1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To'g'ri chiziq orasidagi burchakga doir misollar.

9.1.1. To'g'ri chiziq tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglama ko'rinishiga keltiring.

- 1) $3x + 2y - 9 = 0$; 2) $5x - 7y + 8 = 0$;
3) $2x - 6y + 11 = 0$; 4) $4x + 9y - 13 = 0$.

9.1.2. Dekart koordinatalar sistemasida quyidagi tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlarni yasang:

- 1) $y = 3x + 4$; 2) $y = 0,5x + 2$; 3) $y = \frac{3}{4}x - 5$;
4) $x + 2 = 0$; 4) $3x + 2y - 9 = 0$; 6) $2y - 5x + 2 = 0$.

9.1.3. $N(2; 3)$ nuqtadan o'tib, burchak koeffitsiyenti -5 ga teng bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.1.4. Quyidagi to'g'ri chiziqlar qaysi koordinata choraklaridan o'tadi.

- 1) $y = 2x - 5$; 2) $y = 5x + 7$;
3) $y = -3x + 4$; 4) $y = -7x - 3$.

9.1.5. Quyidagi

- 1) $2x + 3y = 0$, $x - y + 5 = 0$;
2) $x - 3y + 2 = 0$, $2x + y = 0$;
3) $2x + 5y - 3 = 0$, $5x + 2y - 6 = 0$;
4) $3x + 4y - 12 = 0$, $5x - 12y + 60 = 0$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi topilsin.

9.1.6. Dekart koordinatalar sistemasida $N(3; -2)$ nuqtadan o'tib, koordinata o'qlariga parallel (perpendikulyar) bo'lgan to'g'ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.

9.1.7. $A(2; 3)$ va $B(-1; 0)$ nuqtalar berilgan. B nuqtadan o'tuvchi va AB kesmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.1.8. Uchburchakning $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$ uchlaridan o'tuvchi va ular qarshisida yotgan tomonlarga parallel (perpendikulyar) to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentli tenglamalari tuzilsin.

9.1.9. $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tib, $2x + 7y = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9.1.10. Dekart koordinatalar tekisligida $y = 3x - 4$ va $y = -2x + 3$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchakni toping.

9.1.11. $x - 3y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqda $M(-3; 1)$, $N(5; 4)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.

9.1.12. Ikki to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = -\frac{1}{2}$ ma'lum, ular orasidagi burchakni toping.

9.1.13. Berilgan $K(3; 1)$ nuqtadan o'tib, $2x + 3y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa 45° burchak ostida og'ishgan to'g'ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.

9.1.14. Koordinatalar boshidan o'tib, $5x - 6y + 2 = 0$ to'g'ri chiziq bilan tashkil qilgan burchagining tangensi $\pm \frac{7}{6}$ ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqlar tenglamalari tuzilsin.

9.1.15. Ikkita $A(3; 3)$, $B(0; 2)$ nuqta berilgan. $x + y - 4 = 0$ to'g'ri chiziqdagi AB kesma 45° burchak ostida ko'rinadigan nuqtani toping.

9.1.16. m va n ning qanday qiymatida ushbu ikki to'g'ri chiziq

$$mx + 8y + n = 0, \quad 2x + my - 1 = 0$$

1) Parallel; 2) ustma-ust; 3) perpendikulyar bo'ladi .

9.1.17. Ordinata o'qiga parallel va $P(3; 5)$ nuqtadan 7 birlik masofada joylashgan to'g'ri chiziqlarning tenglamasi tuzilsin.

9.1.18. $A(2; -5)$, $B(0; -3)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq Ox o'qi bilan qanday burchak tashkil qiladi?

9.1.19. Berilgan ikki $C(1; 4)$, $D(3; 5)$ nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq Ox o'qiga qanday burchak ostida og'adi?

9.1.20. Koordinatalar boshidan o'tib, absissa o'qiga 150^0 burchak ostida og'ishgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9.1.21. Uchburchakning uchlari $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ nuqtalarda bo'lsa, uning har bir uchidan o'tib qarshisidagi tomonga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

9.1.22. $x + y - 2 = 0$; $5x + y - 14 = 0$ to'g'ri chiziqlardan mos ravishda A , B nuqtalar olingan bo'lib, AB to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti 3 ga teng va AB kesmaning uzunligi $\sqrt{10}$ ga teng bo'lsa, A va B nuqtalarning koordinatalari topilsin.

9.1.23. $y = 4x + 1$ va $y = x - 3$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini toping.

9.1.24. Berilgan 1) $A(2; 1)$, 2) $B(-3; 4)$, 3) $C(5; -2)$, 4) $D(-2; 3)$ nuqtadan o'tib $y = 3x - 2$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.1.25. Berilgan 1) $M(-4; 3)$, 2) $N(1; 5)$, 3) $P(3; -4)$, 4) $Q(-3; -2)$ nuqtadan o'tib, $y = -2x + 5$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.1.26. $B(x; y)$ nuqtadan o'tib, koordinata o'qlari bilan S yuzali uchburchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

1) $B(5; -5)$, $S = 50$ kv birlik;

2) $B(12; 6)$, $S = 150$ kv birlik;

3) $B(8; 6)$, $S = 12$ kv birlik.

9.1.27. $2x + 5y = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel va koordinata o'qlaridan yuzasi 5 ga teng bo'lgan uchburchak ajratuvchi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi tuzilsin.

9.1.28. Uchburchak tomonlari $2x + y - 7 = 0$ (AB), $3x - 4y - 5 = 0$ (BC), $5x - 3y - 1 = 0$ (CA), tenglamalar bilan berilgan. A uchidagi ichki burchagining kosinusini toping.

9.1.29. Ikkita parallel $x - y + 5 = 0$, $x - y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmasi 5 ga teng bo'lgan va $N(2; -1)$ nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.1.30. Uchburchak tomonlarining tenglamalari $x + 2y = 0$, $3x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$ berilgan. Uchburchak ichki burchaklarining tangenslari topilsin.

9.2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasiga doir misollar.

9.2.1. Quyidagi $K_1(3; 1)$, $K_2(2; 3)$, $K_3(6; 3)$, $K_4(-3; -3)$, $K_5(3; -1)$, $K_6(-2; 1)$ nuqtalardan qaysi biri $2x - 3y - 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli va qaysilari tegishli emas.

9.2.2. $3x - 2y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalar P_1, P_2, P_3, P_4 , va P_5 ; uning absissalari quyidagicha bo‘lsa: 4; 0; 2; -2 va -6 . Bu nuqtalarning ordinatalarini toping.

9.2.3. $x - 3y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalar Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , va Q_5 uning ordinatalari quyidagicha bo‘lsa: 4; 0; 2; -2 va -6 . Bu nuqtalarning absissalarini toping.

9.2.4. To‘g‘ri chiziq tenglamasi $5x + 3y - 3 = 0$ berilgan:

- 1) to‘g‘ri chiziqqa parallel;
- 2) to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing.

9.2.5. $K_1(2; -3)$ nuqtadan o‘tib, quyidagi to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing:

- 1) $3x - 7y + 3 = 0$; 2) $2x + 9y - 11 = 0$; 3) $3x - 7y + 3 = 0$;
- 4) $x + 9y - 11 = 0$; 5) $16x - 24y - 7 = 0$; 6) $2x + 3 = 0$.

9.2.6. $M(7; 4)$ nuqtadan o‘tuvchi va $3x - 2y + 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel (perpendikulyar) to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.7. $x + y + 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel (perpendikulyar) va $M(-8; 1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.8. $M(2; 5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $P(-1; 2)$, $Q(5; 4)$ nuqtalardan teng uzoqlikdagi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9.2.9. Parallel bo'lgan $x + y - 1 = 0$, $x + y - 13 = 0$ to'g'ri chiziqlardan teng uzoqlikda joylashgan va ularga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9.2.10. ABC uchburchakning AB , BC va AC tomonlarining tenglamasi berilgan: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$.

Uning uchlarining koordinatalarini toping.

9.2.11. $A(-3; 1)$, $B(2; -3)$, $C(5; -4)$, $D(-2; 4)$, $E(-1; 3)$ va $F(-5; -1)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

a) A va B dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning; b) B va C dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning; c) A va C dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning; d) B va E dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning; e) C va F dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning; f) D va F dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning

1) burchak koeffitsiyentli; 2) umumiy; 3) koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamalari tuzilsin.

9.2.12. Umumiy tenglama bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni toping:

1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y = 0$;
2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$; 4) $3x + 2y - 1 = 0$.

9.2.13. $2x + 3y + 4 = 0$ to'g'ri chiziq berilgan. $M_1(2; 1)$ nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziq bilan 45° burchak hosil qiladigan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.14. $x - 4y - 12 = 0$ tenglama va koordinata o'qlari bilan chegaralangan uchburchakning yuzini toping.

9.2.15. Koordinatalar sistemasida berilgan $2x - y + 5 = 0$ to'g'ri chiziq, boshi $N(5; 4)$ nuqtada va oxiri $M(2; 1)$ nuqtada joylashgan kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

9.2.16. To'rtta $M_1(5; 3)$, $M_2(1; 2)$, $M_3(3; 0)$, $M_4(2; 4)$ nuqta berilgan. M_1M_2 va M_3M_4 to'g'ri chiziqlarning o'zaro perpendikulyarligi va ularning kesishgan nuqtasi ham M_1 va M_2 ham M_3 va M_4 nuqtalar orasida yotishi isbotlansin.

9.2.17. Quyidagi hollarning har birida M_1M_2 kesmaning $l: 2x - y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan vaziyatini aniqlang:

1) $M_1(2; 3), M_2(0; -1)$; 2) $M_1(1; 1), M_2(3; 5)$;
3) $M_1(4; 3), M_2(-2; 2)$; 4) $M_1(0; 2), M_2(5; 0)$ va natijalarni
chizmada tekshiring.

9.2.18. Uchlari $A(3; 1), B(-2; 4), C(1; 0)$ nuqtalardagi
uchburchakning $x - 7y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan vaziyatini
aniqlang.

9.2.19. Koordinatalar boshidan va ikki $2x + y - 3 = 0, 7x - 4y +$
 $+2 = 0$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri
chiziq tenglamasini tuzing.

9.2.20. $7x - y + 3 = 0, 3x + 5y - 4 = 0$ to'g'ri chiziqlarning
kesishgan nuqtasi va $A(2; -1)$ nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziq
tenglamasini tuzing.

9.2.21. $3x - 5y + 2 = 0, 5x - 2y + 4 = 0$ to'g'ri chiziqlarning
kesishgan nuqtasidan o'tadigan va $2x - y + 4 = 0$ to'g'ri chiziqqa
parallel to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.22. Koordinatalar sistemasida $2x - 6y + 3 = 0, 5x + y - 2 = 0$
to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi va koordinata
o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini
tuzing.

9.2.23. $x + y - 6 = 0, 2x + y - 13 = 0$ to'g'ri chiziqlarning
kesishgan nuqtasidan o'tib, koordinata o'qlaridan teng kesmalar
ajratadigan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.24. Ikki juft $2x - y = 0, x + 4y - 2 = 0$ va $x + 2y = 0, 3x -$
 $-7y + 4 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtalaridan o'tadigan
to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.25. Ikki $3x - y = 0, x + 4y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning
kesishgan nuqtasidan o'tuvchi va $2x + 7y = 0$ to'g'ri chiziqqa
perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.26. Koordinatalar sistemasida Ox o'qida 3 ga teng kesma ajratgan
va $M(-5; 3)$ nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqning umumiy
tenglamasini tuzing.

9.2.27. Koordinatalar sistemasida koordinata o'qlaridan 3 va 5 ga teng kesmalar ajratgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.28. Koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratib, $M(-4; 10)$ nuqta orqali o'tgan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tuzing.

9.2.29. Koordinatalar sistemasida $C(2; -1)$ nuqtadan o'tgan, koordinata o'qlari orasidagi kesmasi shu nuqtada teng ikkiga bo'linadigan to'g'ri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

9.2.30. Dekart koordinatalar sistemasida koordinata o'qlari va $x + 2y - 6 = 0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan uchburchak yuzasi topilsin.

9.3. Fazoda tekislikning ba'zi tenglamalariga doir misollar.

9.3.1. Koordinatalar sistemasida $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(3; 1; 4)$, $M_3(2; 1; 5)$ nuqtalar va $\vec{a}_1(4; 1; 2)$, $\vec{a}_2(-2; 3; 5)$, $\vec{a}_3(5; -1; 3)$ vektorlar berilgan bo'lsin.

- 1) M_1 nuqtadan o'tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarga;
- 2) M_1 nuqtadan o'tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_3$ vektorlarga;
- 3) M_2 nuqtadan o'tib, $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.2. Koordinatalar sistemasida $N_1(2; 3; -1)$, $N_2(-2; 4; 1)$, $N_3(3; 2; -1)$ nuqtalar va $\vec{a}_1(-3; -1; 2)$, $\vec{a}_2(1; -3; -5)$, $\vec{a}_3(1; 2; 3)$ vektorlar berilgan bo'lsin.

- 1) N_1 va N_2 nuqtalardan o'tib, $\vec{a}_1$ vektorga;
- 2) N_1 va N_3 nuqtalardan o'tib, $\vec{a}_1$ vektorga;
- 3) N_1 va N_3 nuqtalardan o'tib, $\vec{a}_2$ vektorga parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.3. Koordinatalar sistemasida $M_1(3; 7; -2)$, $M_2(4; 1; 3)$, $M_3(5; 3; -1)$, $M_4(3; -5; 1)$ va $M_5(2; 3; -5)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

- 1) M_1 , M_2 va M_3 nuqtalardan;
- 2) M_1 , M_2 va M_4 nuqtalardan;
- 3) M_1 , M_3 va M_5 nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.4. Koordinatalar sistemasida $N_1(-3; 2; 1)$ va $N_2(2; -4; 3)$ berilgan bo'lsin.

- 1) N_1 nuqtadan Oxy tekisligiga;
- 2) N_1 nuqtadan Oyz tekisligiga;
- 3) N_1 nuqtadan Oxz tekisligiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.5. Koordinatalar sistemasida $M_1(4; 3; -1)$, $M_2(-2; 4; 5)$ va $M_3(3; -2; 2)$ berilgan bo'lsin.

- 1) M_1 nuqtadan va Ox o'qidan o'tuvchi;
- 2) M_1 nuqtadan va Oz o'qidan o'tuvchi;
- 3) M_2 nuqtadan va Ox o'qidan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.6. Koordinatalar sistemasida $N_1(1; -2; 3)$ va $N_2(2; 4; -3)$ berilgan bo'lsin.

- 1) N_1 nuqtadan o'tib, Ox o'qiga;
- 2) N_1 nuqtadan o'tib, Oy o'qiga;
- 3) N_1 nuqtadan o'tib, Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.7. Koordinatalar sistemasida $M_1(3; 2; -1)$, $M_2(1; 3; 5)$ va $M_3(2; -4; 3)$ berilgan bo'lsin.

- 1) M_1 va M_2 nuqtalardan o'tib, Ox o'qiga;
- 2) M_2 va M_3 nuqtalardan o'tib, Ox o'qiga;
- 3) M_1 va M_2 nuqtalardan o'tib, Oy o'qiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.3.8. Koordinatalar sistemasida uchta nuqtadan o'tgan tekislikning kanonik tenglamasi tuzilsin.

- 1) $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(3; 1; 4)$, $M_3(2; 1; 5)$;
- 2) $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(-2; 4; 1)$, $M_3(0; 2; -1)$;
- 3) $M_1(3; 7; -2)$, $M_2(4; 1; 3)$, $M_3(5; 3; -1)$.

9.3.9. Ox va Oy o'qlaridan mos ravishda 5 va -7 ga teng kesmalar ajratadigan va $N(1; 1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

9.3.10. $A(3; 5; -7)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratadigan tekislik tenglamasi tuzilsin.

9.3.11. $A(3; 5; 1)$ va $B(7; 7; 8)$ nuqtalardan o'tib, Ox , Oy o'qlaridan teng kesmalar ajratgan tekislik tenglamasi yozilsin.

9.3.12. Koordinatalar sistemasi o'qlaridan mos ravishda 3, 5, -7 ga teng kesmalar ajratadigan tekislik tenglamasi tuzilsin.

9.3.13. Koordinatalar sistemasida $x - y + 7z - 4 = 0$ tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari aniqlansin.

9.3.14. Uchi $A(2; 1; 0)$, $B(1; 3; 5)$, $C(6; 3; 4)$, $D(0; -7; 8)$ nuqtalarda bo'lgan tetraedr berilgan. AB qirradan va CD qirraning o'rtasidan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

9.3.15. Quyidagi hollarning har biri uchun tekislikning parametrik tenglamalariga ko'ra umumiy tenglamasi yozilsin:

1) $x = 2 + 3u - 4v$; $y = 4 - v$; $z = 2 + 3u$;

2) $x = u + v$; $y = u - v$; $z = 5 + 6u - 4v$.

9.3.16. Quyidagi tekisliklar juftlarining qaysilari parallel, kesishadi yoki ustma-ust tushishi aniqlansin:

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $3x - 6y + 1 = 0$;

2) $3x - 4y + 6z + 9 = 0$, $6x - 8y - 10z + 15 = 0$;

3) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $9x - 6y - 9z - 5 = 0$

9.3.17. $A(-3; 3; 5)$, $B(0; -7; -14)$, $C(6; 5; 1)$, $D(-3; -5; 2)$, $E(4; -7; 10)$, $F(2; 6; 1)$ nuqtalarning $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ tekislikka nisbatan vaziyatini aniqlang.

9.3.18. $A(3; 5; 1)$, $B(2; -6; 3)$ nuqtalar berilgan, AB kesmani $2x - 3y + 6z - 1 = 0$ tekislik qanday nisbatda bo'ladi?

9.3.19. $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasini toping.

9.3.20. Koordinata boshidan $3x - 4y - 24z + 12 = 0$ tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtasigacha bo'lgan masofasini toping.

9.3.21. Oxy tekisligi va $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ tekislik kesishishidan hosil bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

9.3.22. $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ tekislik bilan va koordinatalar tekisliklari bilan chegaralangan piramida hajmini toping.

9.3.23. Tekislik $M_1(6; -10; 1)$ nuqtadan o'tadi va absissa o'qida $a = -3$ va aplikata o'qida esa $c = 2$ kesmani kesib o'tadi. Bu tekislik uchun kesmalardagi tenglamasini tuzing.

9.3.24. Quyidagi tekisliklar tenglamasining qaysi biri normal ekanligini aniqlang:

- 1) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$;
 3) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$; 4) $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0$.

9.3.25. Quyidagi tekislik tenglamalarini normal ko'rinishga keltiring:

- 1) $2x - 2y + 2z - 18 = 0$;
 2) $x - y - \sqrt{2}z + 16 = 0$;
 3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$.

9.3.26. $P(-1; 1; -2)$ nuqtadan $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ va $M_3(4; -5; -2)$ nuqtalardan o'tadigan tekislikgacha d masofani aniqlang.

9.3.27. Quyidagi holatlarda parallel tekisliklar orasidagi masofani hisoblang:

- 1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$;
 2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.

9.3.28. Quyidagi holatlarda 2 parallel tekisliklardan bir xil uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasini tuzing:

- 1) $4x - y - 2z - 3 = 0$, $4x - y - 2z - 5 = 0$;
 2) $3x + 2y - z + 3 = 0$, $3x + 2y - z - 1 = 0$;
 3) $5x - 3y + 2z + 3 = 0$, $10x - 6y + 2z + 7 = 0$.

9.3.29. $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ tekislik tenglamasi berilgan, λ ning qanday qiymatlarida:

- 1) $M_1(1; -2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi; 2) Ox o'qiga parallel;
 3) Oy o'qiga parallel; 4) Oz o'qiga parallel bo'ladi.

9.3.30. $\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va:

- 1) $M_1(4; -2; -3)$ nuqtani qanoatlantiruvchi;
 2) Ox o'qiga parallel bo'lgan;
 3) Oy o'qiga parallel bo'lgan;

4) Oz o'qiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

9.4. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalariga doir misollar.

9.4.1. Koordinatalar sistemasida $\vec{a}_1(4; 1; 2)$, $\vec{a}_2(-2; 3; 5)$, $\vec{a}_3(5; -1; 3)$ vektorlar va $M_1(2; 3; 1)$, $M_2(3; 1; 4)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

- 1) $\vec{a}_1$ vektorga parallel va M_1 nuqtadan o'tuvchi;
- 2) $\vec{a}_1$ vektorga parallel va M_2 nuqtadan o'tuvchi;
- 3) $\vec{a}_2$ vektorga parallel va M_1 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqning;
a) kanonik; b) parametrik tenglamalarini tuzing.

9.4.2. Koordinatalar sistemasida $A(2; 3; 1)$, $B(3; 1; 4)$, $C(2; 1; 5)$ va $D(0; 2; -1)$ nuqtalardan

- 1) A va B ; 2) A va C ; 3) A va D ;
- 4) B va C ; 5) B va D ; 6) C va D o'tuvchi to'g'ri chiziqning;
a) kanonik; b) parametrik tenglamalarini tuzing.

9.4.3. Quyida berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.

- 1) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 4 = 0 \\ 2x + 3y + z + 12 = 0 \end{cases}$;
- 2) $\begin{cases} x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 6z + 9 = 0 \end{cases}$.

9.4.4. Koordinatalar sistemasida $A(2; -3; 1)$, $B(3; 1; -4)$ va $C(-2; 1; 5)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

- 1) A nuqtadan o'tib, Oxy o'qiga;
- 2) A nuqtadan o'tib, Oyz o'qiga;
- 3) B nuqtadan o'tib, Oxz o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.4.5. $M_1(-1; 4; -3)$ va $M_2(-8; 2; 5)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

- 1) M_1 nuqtadan o'tib, Oxy tekisligiga;
- 2) M_1 nuqtadan o'tib, Oxz tekisligiga;
- 3) M_1 nuqtadan o'tib, Oyz tekisligiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.4.6. Quyidagi nuqtalardan qaysilari bitta to'g'ri chiziqda yotadi?

- 1) $A(3; 0; 1)$, $B(0; 2; 4)$, $C(-3; 4; 7)$;
- 2) $C(1; 2; 3)$, $D(10; 8; 4)$, $E(3; 0; 2)$.

9.4.7. Ushbu $A(5; 8; 15)$, $B(-1; -1; -3)$, $C(5; 7; 1)$, $D(0; \frac{1}{2}; 0)$, $E(0; 0; 1)$ nuqtalardan qaysilari $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + 6t$ to'g'ri chiziqda yotadi?

9.4.8. Fazoda to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari tuzilsin:

1) $x - 2y + 4z = 0$, $3x - 2y + 5z = 0$;

2) $x + y - z + 5 = 0$, $2x - y + 2z - 2 = 0$.

9.4.9. 1) $M(3; 5; 1)$ nuqtadan o'tib, $x = 2 + 4t$, $y = -3t$, $z = -3$ to'g'ri chiziqqa parallel;

2) $N(0; -5; 4)$ nuqtadan o'tib, $x + 2y + 6 = 0$, $z = 5$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamalari yozilsin.

9.4.10. Quyidagi hollarning har birida to'g'ri chiziqning Oxy tekislikka proyeksiyasi topilsin.

1) $5x + 8y - 3z + 9 = 0$, $2x - 4y + z - 1 = 0$;

2) $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{8}$.

9.4.11. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalari topilsin:

1) $6x + 2y - z - 9 = 0$, $3x + 2y + 2z - 12 = 0$;

2) $x = 6 + 2t$, $y = -2 + 4t$, $z = -5t$.

9.4.12. To'g'ri chiziqning ikkita koordinata tekisliklar bilan kesishish nuqtalari $M(0; y_1; z_1)$, $N(x_2; 0; z_2)$ berilgan. Shu to'g'ri chiziqning uchinchi koordinata tekisligi bilan kesishish nuqtasini toping.

9.4.13. Quyidagi to'g'ri chiziqlarni

1) $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x + 4y - 6z - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$

koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtasini toping.

9.4.14. $\vec{a}(2; -1; -2)$ vektorga parallel bo'lgan va

$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

to 'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

9.4.15. $\vec{a}(7; 9; 17)$ vektorga parallel bo'lgan va

$$\begin{cases} 5x - 2y - z - 3 = 0 \\ x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

to 'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

9.4.16. Fazoda $N(2; 3; 1)$ nuqtadan o'tib $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ va

$\begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ to 'g'ri chiziqlar bilan kesishadigan to 'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9.4.17. Quyida berilgan to 'g'ri chiziqlarning qaysi berilgan tekislikda yotadi, qaysi birida unga parallel, qaysi birida u bilan kesishadi? Agar ular kesishsa kesishish nuqtasi topilsin.

1) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad 3x + 5y - z - 2 = 0$

2) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}, \quad 3x - 3y + 2z - 5 = 0$

9.4.18. To 'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin:

1) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}; \quad 2) \frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}$

9.4.19. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ va $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$ to 'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

9.4.20. Ikki $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ to 'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

9.4.21. To 'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar kosinuslari topilsin:

1) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 7 - 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ va $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases};$

2) $\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$

9.4.22. Kanonik tenglamalari $\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y+13}{\alpha} = \frac{z-6}{\sqrt{2}}$

bo'lgan to'g'ri chiziqlar α parametrning qanday qiymatida o'zaro perpendikular bo'ladi?

9.4.23. $\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ to'g'ri chiziq bilan $7x + 2y - 3z + 5 = 0$ tekislik

orasidagi burchak topilsin.

9.4.24. $x + y - z = 0$, $2x - 3y + z = 0$ to'g'ri chiziq bilan $3x + 5y - 4z + 2 = 0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

9.4.25. $2x + y - z + 4 = 0$, $x + y = 0$ to'g'ri chiziqning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi tenglamasi tuzilsin.

9.4.26. $2x - y + z - 8 = 0$, $4x + 3y - z + 14 = 0$ tekisliklarning kesishish chizig'ida $2x + 3y - 6z - 10 = 0$ tekislikdan 7 masofada joylashgan nuqtalar topilsin.

9.4.27. Quyida berilgan to'g'ri chiziqlar juftlaridan qaysilari ayqash, qaysilari kesishadi, qaysilari parallel yoki ustma-ust tushadi? Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, ular orqali o'tgan tekislik tenglamasi tuzilsin, agar ular kesishsa, ularni o'z ichiga olgan tekislik tenglamasi tuzilsin va ularning kesishish nuqtasi topilsin:

1) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ va $\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases}$ va $\begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases}$ va $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

9.4.28. l to'g'ri chiziqning

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{-2}$$

kanonik tenglamasidagi n parametr qanday qiymat qabul qilganda u umumiy tenglamasi $x - 3y + 6z + 7 = 0$ bo'lgan tekislikka parallel bo'ladi?

9.4.29. l to'g'ri chiziqning

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

kanonik tenglamasidagi m va P tekislikning $3x - 2y + Cz + 1 = 0$ umumiy tenglamasidagi C parametrlarning qanday qiymatida ular o'zaro perpendikulyar bo'ladilar?

9.4.30. Fazoda $M(3; -1; -4)$ nuqtadan o'tib, Oy o'qni kesib o'tadigan va $y + 2z = 0$ tekislikka kollinear(parallel) bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamalari tuzilsin.

10-MAVZU: TEKILIKDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING QUTB KOORDINATALAR SISTEMASIDAGI TENGLAMALARI.

Reja:

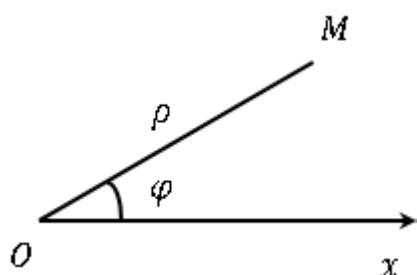
- 1.Qutb koordinatalar. Konus kesimlari.
- 2.Qutb koordinatalardagi tenglamalar.
- 3.Konus kesimlarining dekart koordinatalardagi kanonik ko'rinishli tenglamalari.

Tayanch iboralar: qutb, ellips, giperbola, parabola, diametr, vatar, fokus, parametr, direktrisa, asimptota, ekscentrisitet.

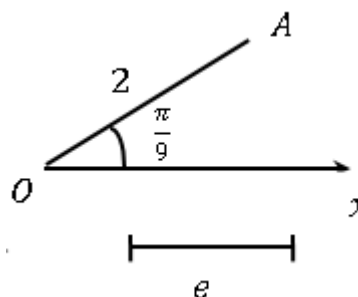
10.1. Qutb koordinatalar.

Qutb koordinatalar sistemasining asosiy elementlari va undan chiquvchi nur, ya'ni qutb O va **qutb o'qi** Ox dir (10.1.1- chizma).

M nuqtaning tekislikdagi o'rni bu nuqtaning qutbdan bo'lgan masofasi – radius – vektori ρ va radius – vektorning qutb o'qi bilan tashkil etgan qutb burchgi φ bilan aniqlanadi.



10.1.1-chizma



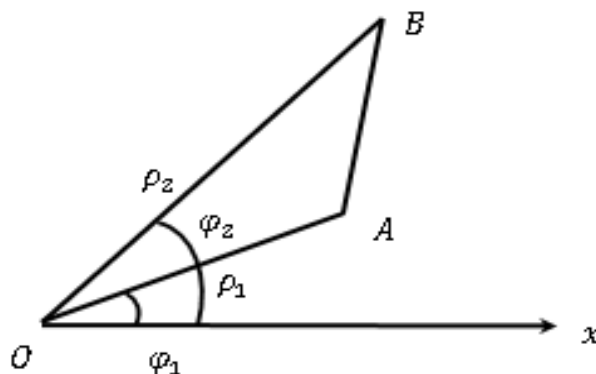
10.1.2-chizma

Ikki koordinata (ρ, φ) birgina nuqtani aniqlaydi. 10.1.2 - chizmada A nuqta $\rho = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{9}$ koordinatalari bo'yicha yasalgan.

Agar biz tekislikdagi nuqtalar va qo'sh koordinatalar (ρ, φ) orasidagi o'zaro qiymatli moslikni o'rnatmoqchi bo'lsak, u holda ρ ga faqat musbat qiymatlar, φ ga esa 0 bilan 2π orasidagi qiymatlar berish kifoya (nurni soat strelkasiga qarshi aylantirganda musbat burchaklar hosil bo'ladi). Agar bu cheklashlarga rioya qilinmasa, u holda birgina nuqtaning o'zi $(\rho; \varphi + 2\pi n)$ yoki $(-\rho; \varphi(2n + 1)\pi)$ koordinatalar bilan aniqlanadi, n – ixtiyoriy butun son. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ikkita nuqta $A(\rho_1, \varphi_1)$ va $B(\rho_2, \varphi_2)$ orasidagi masofa

$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (10.1)$$

formula bilan hisoblanadi.



10.1.3-chizma

Dekart koordinatalari bilan ish ko'rganimiz singari, egri chiziqning qutb koordinatalaridagi tenglamasi haqida gapirish mumkin, chunonchi, agar egri chiziqdagi har bir nuqtaning qutb koordinatalari ushbu

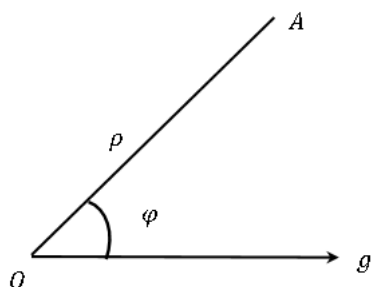
$$F(\rho; \varphi) = 0$$

tenglamani qanoatlantirsa, bu tenglama egri chiziqning **qutb koordinatalardagi tenglamasi** deb ataladi. Aksincha, ρ , φ sonlarning bu tenglamani qanoatlantiradigan istalgan jufti egri chiziq nuqtalaridan birining qutb koordinatalari bo'ladi.

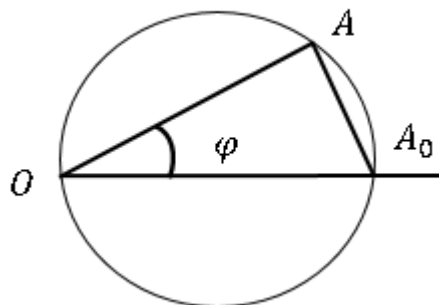
Misol tariqasida qutbdan o'tgan va markazi qutb o'qidagi R radiusli aylananing qutb koordinatalaridagi tenglamasini tuzaylik.

To'g'ri burchakli OAA_0 uchburchakdan $OA = OA_0 \cos \varphi$ ni hosil qilamiz (10.1.5- chizma). Bu yerdan aylana tenglamasini hosil qilamiz:

$$\rho = 2R \cos \varphi.$$



10.1.4-chizma

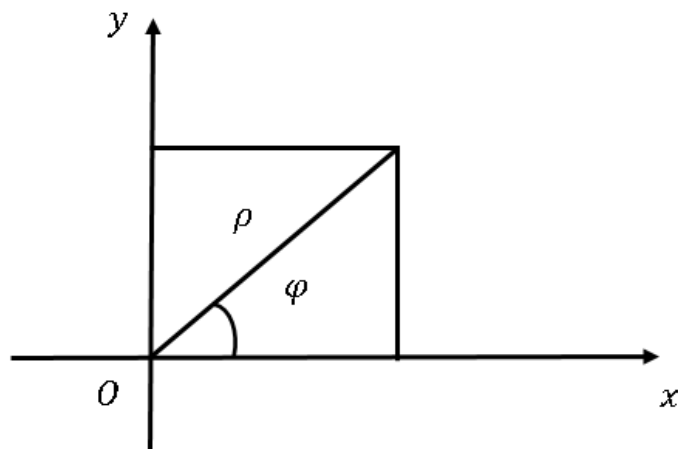


10.1.5-chizma

$\rho\varphi$ tekislikda dekart koordinatalari sistemasi xy ni kiritamiz, buning uchun qutb O ni dekart koordinatalari sistemasining boshi, qutb o'qini musbat yarim o'q x sifatida va musbat yarim y ning musbat yo'nalishini shunday tanlab olamizki, burchaklarni hisoblash uchun tanlab olingan yo'nalish bilan muvofiq holda qutb o'qi bilan $+\frac{\pi}{2}$ burchakni hosil qilsin.

Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasida quyidagicha bog'lanishning mavjudligi ravshan:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (10.2)$$



10.1.6-chizma

Bu egri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini bilgan holda, uning dekart koordinatalaridagi tenglamasini va aksincha, hosil qilish imkonini beradi.

Misol tariqasida ixtiyoriy to'g'ri chiziqning qutb sistemasidagi tenglamasini tuzaylik. To'g'ri chiziqning dekart koordinatalaridagi tenglamasi

$$ax + by + c = 0 \quad c < 0.$$

Bu tenglama ρ bilan φ ni x va y o'rniga (10.2) formula bo'yicha kiritsak, natijada:

$$\rho(a \cos\varphi + b \sin\varphi) + c = 0.$$

So'ngra ushbularni faraz qilsak:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\rho_0$$

to'g'ri chiziqning ushbu ko'rinishidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\rho \cos(\alpha - \varphi) = \rho_0.$$

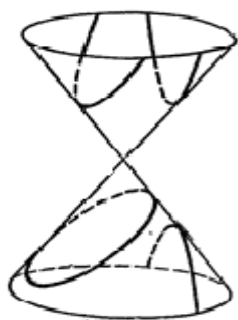
10.2. Konus kesimlari. Qutb koordinatalardagi tenglamalar.

Doiraviy konusni uning uchidan o'tmaydigan tekislik bilan kesish natijasida hosil qilingan egri chiziq **konus kesimi** deyiladi (10.1.7-chizma). Konus kesimlari qator ajoyib xossalarga ega. Ularning biri quyidagidan iborat.

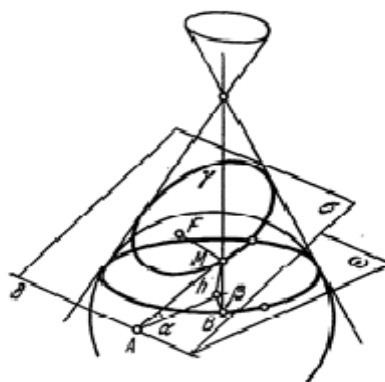
Aylanadan boshqa har qanday konus kesimi shunday nuqtalarning geometrik o'rnidan iboratki, ularning berilgan F nuqta va berilgan δ to'g'ri chiziqqa masofalarning nisbati o'zgarmasdir.

F nuqta konus kesimining fokusi, δ to'g'ri chiziq esa **direktrisasi** deyiladi. Bu xossani isbot qilaylik. Aytaylik, σ tekislikning konus bilan kesishgan egri chizig'i γ bo'lsin (10.1.8 – chizma).

Konus ichiga σ tekislikka urinadigan sfera chizaylik; sferaning tekislikka urinish nuqtasini F orqali belgilaylik. ω bilan sferaning konusga urinish aylanasi belgilaylik. γ egri chiziqda ixtiyoriy P nuqta olamiz. Bu P nuqta orqali konusning yasovchisini o'tkazib, uning ω tekislik bilan kesishgan nuqtasini B orqali belgilaymiz. Nihoyat, P nuqtadan σ , ω tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'i δ ga perpendikulyar tushiramiz.



10.1.7-chizma



10.1.8-chizma

Ana shu γ chiziqning F nuqta bilan δ to'g'ri chiziqqa nisbatan yuqorida aytilgan xossaga egaligini isbot qilish talab qilinadi. Haqiqatdan ham, $FP = BP$, chunki bu kesmalar sferaga bitta nuqtadan o'tkazilgan urinmalardir. So'ngra $h(P)$ bilan P nuqtadan ω tekislikkacha masofani belgilasak, u holda:

$$AP = \frac{h(P)}{\sin \alpha}, \quad BP = \frac{h(P)}{\sin \beta}.$$

bunda α bilan ω , δ tekisliklar orasidagi burchak belgilangan.

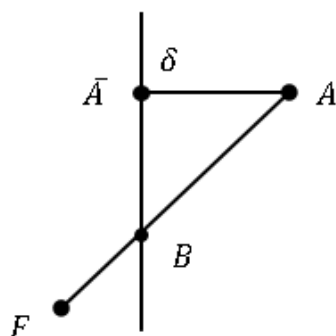
Bulardan ushbu tengliklarni hosil qilamiz:

$$\frac{AP}{FP} = \frac{AP}{BP} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

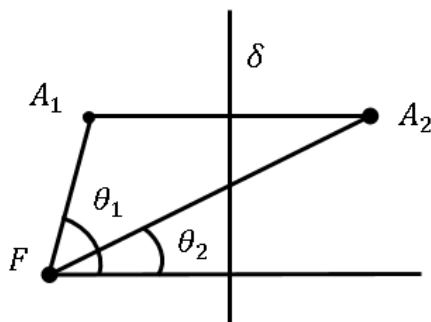
ya'ni $\frac{AP}{FP}$ nisbat P nuqtaga bog'liq emas degan xulosaga kelamiz. Aytganimiz isbot qilindi.

Konus kesimidagi nuqtaning fokus va direktrisagacha masofalarining nisbati λ ning qiymatiga qarab egri chiziq **ellips** ($\lambda < 1$), **parabola** ($\lambda = 1$), **giperbola** ($\lambda > 1$) deb ataladi. λ son konus kesimining **ekscentrisiteti** deyiladi.

F – konus kesimining fokusi, δ – uning direktrisasi bo'lsin (10.1.9-chizma). Ellips bilan parabola ($\lambda \leq 1$) holi uchun egri chiziqning hamma nuqtalari direktrisadan bir tarafda joylashadi, chunonchi: F fokus qayerdan joy olsa, bu nuqtalar ham o'sha yerdan joy oladi.



10.1.9-chizma



10.1.10-chizma

Haqiqatdan ham, direktrisaning ikkinchi tarifidagi nuqtalar uchun:

$$\frac{AF}{A\bar{A}} > \frac{AB}{A\bar{A}} \geq 1.$$

Girepbola bilan ish ko'rganda esa ($\lambda > 1$) direktrisaning ikkala tarafidan joylashga nuqtalar mavjud. Giperbola ikki tarmoqdan iborat bo'lib, direktrisa ularni bir – biridan ajratib turadi.

$\rho\varphi$ koordinatalar sistemasining qutbi sifatida konus kesimining fokusini qabul qilib, qutb o'qini esa shunday o'tkazamizki, u direktrisaga perpendikulyar bo'lsin va uning bilan kesishadigan bo'lsin. Koordinatalarning ana shunday qutb sistemasidan konus kesimining tenglamasini tuzamiz.

Fokusdan direktrisagacha masofa P bo'lsin. Konus kesimidagi ixtiyoriy A nuqtadan fokusgacha masofa ρ ga va direktrisagacha masofa esa A va F nuqtalarning direktrisadan bir tarafda yoki turli tarafda bo'lishiga qarab $P - \rho\cos\varphi$ yoki $\rho\cos\varphi - P$ ga teng. Bulardan konus kesimining tenglamasini hosil qilamiz: ellips bilan parabola uchun:

$$\frac{\rho}{P - \rho\cos\varphi} = \lambda \quad (10.3)$$

va giperbola uchun:

$$\frac{\rho}{P - \rho\cos\varphi} = \pm\lambda \quad (10.4)$$

(" + " ishora giperbolaning bir tarmog'i, " - " ishora esa ikkinchi tarmog'iga mos keladi).

(10.3), (10.4) tenglamalarni ρ ga nisbatan yechib, ushbuni hosil qilamiz:

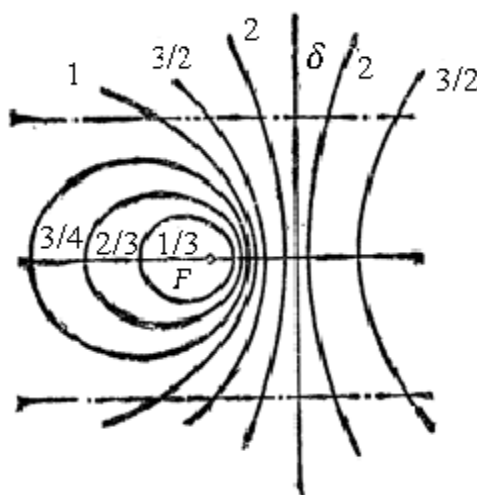
$$\rho = \frac{\lambda P}{1 + \lambda \cos \varphi}$$

bu **ellips bilan parabola tenglamasi** va

$$\rho = \frac{\pm \lambda P}{1 \pm \lambda \cos \varphi}$$

giperbola tenglamasidir.

Ekssentrisitetning qabul qilgan qiymatlariga qarab konus kesimining ko‘rinishi 10.1.11 - chizmada ko‘rsatilgan.



10.1.11-chizma

10.3. Konus kesimlarining dekart koordinatalardagi kanonik ko‘rinishli tenglamalari.

Yuqorida biz konus kesimlarning $\rho\varphi$ qutb koordinatalaridagi tenglamalarini hosil qilgan edik. Endi dekart koordinatalar sistemasiga o‘tamiz, buning uchun qutb O ni koordinatalar boshi va qutb o‘qini musbat yarim o‘q x sifatida qabul qilamiz.

(10.3) va (10.4) tenglamalardan istalgan konus kesimi uchun ushbuni hosil qilamiz:

$$\rho^2 = \lambda^2 (P - \rho \cos \varphi)^2.$$

Bundan esa qutb va dekart koordinatalar orasidagi bog‘lanishni aniqlovchi formulalarini nazarga olsak:

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 (P - x)^2$$

yoki

$$(1 - \lambda^2)x^2 + 2P\lambda^2x + y^2 - \lambda^2P^2 = 0 \quad (10.5)$$

ni hosil qilamiz.

Koordinatalar boshini x o'qi bo'ylab kerakligicha siljitish natijasida bu tenglama ancha soddalashadi.

Avval ellips bilan giperbolaga to'g'ri kelgan holni ko'zdan kechiraylik. Bu holda (10.5) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$(1 - \lambda^2)\left(x + \frac{P\lambda^2}{1 - \lambda^2}\right) + y^2 - \frac{P^2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Endi ushbu formulalar bo'yicha yangi x', y' koordinatalarni kiritaylik:

$$x + \frac{P\lambda^2}{1 - \lambda^2} = x', \quad y = y',$$

bu esa koordinatalar boshini $(-\frac{P\lambda^2}{1 - \lambda^2}, 0)$ nuqtaga ko'chirishga mos keladi. Egri chiziq tenglamasi bu holda ushbu ko'rinishni oladi:

$$(1 - \lambda^2)x'^2 + y'^2 - \frac{P^2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0$$

yoki qisqalik uchun

$$\frac{P^2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} = a^2, \quad \frac{P^2\lambda^2}{|1 - \lambda^2|} = b^2$$

deb faraz qilsak, ushbu tenglamalarni hosil qilamiz;

ellips uchun:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0,$$

giperbola uchun:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

a, b parametrlar ellips (giperbola)ning yarim o'qlari deyiladi.

Parabola ($\lambda = 1$) olgan holda (10.5) tenglama ushbu ko'rinishda qabul qilinadi:

$$2Px + y^2 - P^2 = 0$$

yoki

$$y^2 - 2P \left(-x + \frac{P}{2} \right) = 0;$$

yangi

$$x' = -x + \frac{P}{2}, \quad y' = y$$

koordinatalarni kiritish natijasida tenglama

$$y'^2 - 2Px' = 0$$

ko'rinishga keltiriladi.

Konus kesimlarining x' , y' koordinatalarga nisbatan hosil qilinadigan tenglamalari **kanonik tenglamalar** diyiladi.

1-misol. Berilgan $A \left(2; \frac{\pi}{12} \right)$ va $B \left(1; \frac{5\pi}{12} \right)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish: Berilgan A va B nuqtalar orasidagi masofani (10.1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)} = \\ &= \sqrt{5 - 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Qutb koordinatalar sistemasida A va B nuqtalar orasidagi masofa $\sqrt{3}$ ga teng ekan.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

10.1.1. Qutb koordinatalari quyidagi qiymatlarga ega bo'lgan nuqtalar yasalsin:

- 1) $\left(3; \frac{\pi}{6} \right)$; 2) $\left(1; \frac{5\pi}{3} \right)$; 3) $\left(5; \frac{7\pi}{6} \right)$; 4) $\left(0,5; \frac{\pi}{2} \right)$; 5) $\left(2,5; \frac{2\pi}{3} \right)$; 6) $(6; \pi)$;
7) $\left(3; \frac{\pi}{3} \right)$; 8) $\left(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{6} \right)$; 9) $\left(-2; \frac{\pi}{4} \right)$.

10.1.2. Qutb koordinatalari quyidagi tenglamalardan birini qanoatlantirgan nuqtalar qanday joylashgan:

1) $\rho = 1$; 2) $\rho = 5$; 3) $\rho = a$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 5) $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

6) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 7) $\varphi = \text{const.}$

10.1.3. a) Qutbga nisbatan, b) qutb o'qiga nisbatan, ushbu

1) $(1; \frac{\pi}{4})$; 2) $(3; \frac{2\pi}{3})$; 3) $(\frac{2}{3}; -\frac{\pi}{6})$; 4) $M(\rho; \varphi)$ nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

10.1.4. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam oltiburchak uchlarining qutb koordinatalari aniqlansin; oltiburchakning uchlaridan biri qutb, shu uchidan o'tuvchi tomoni qutb o'qi deb olinsin.

10.1.5. Qutb burchaklari 0^0 , 15^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 , 75^0 , 90^0 ga teng bo'lgan, mos radius – vektorlari $\rho = a \cdot \sin 2\varphi$ tenglamadan hisoblanuvchi nuqtalar yasalsin. Olingan nuqtalar uzluksiz egri chiziq bilan tutashtirilsin.

10.1.6. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa hisoblansin:

1) $A(2; \frac{\pi}{12})$ va $B(1; \frac{5\pi}{12})$; 2) $C(4; \frac{\pi}{5})$ va $D(6; \frac{6\pi}{5})$; 3) $E(3; \frac{11\pi}{18})$ va $F(4; \frac{\pi}{9})$.

10.1.7. Qutb koordinatalar sistemasida uchburchakning uchlari berilgan: $A(5; \frac{\pi}{2})$, $B(8; \frac{5\pi}{6})$, $C(3; \frac{7\pi}{6})$. Bu uchburchakning muntazam ekanligi tekshirilsin.

10.1.8. Qutb o'qiga joylashgan va $A(4\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ nuqtadan 5 birlik masofada yotgan nuqta topilsin.

10.1.9. Uchlaridan biri qutb bilan ustma –ust tushgan uchburchakning yuzini hisoblash uchun formula chiqarilsin.

10.1.10. Uchlaridan biri qutbda, qolgan ikki uchining qutb koordinatalari $(4; \frac{\pi}{9})$ va $(1; \frac{5\pi}{18})$ bo'lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.

10.1.11. Qutb koordinatalar sistemasida o'zining $A(9; \frac{\pi}{10})$, $B(12; \frac{4\pi}{15})$ va $C(10; \frac{3\pi}{5})$ uchlari bilan berilgan uchburchakning yuzi hisoblansin.

10.1.12. Qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan, radiusi a ga teng va markazi:

1) qutbda; 2) $(a; 0)$; 3) $(\rho_1; \varphi_1)$ nuqtada bo'lgan aylananing tenglamasi tuzilsin.

10.1.13. Qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan markazi qutb bilan va fokal o'qi qutb o'qi bilan ustma – ust tushgan ellipsning tenglamasi tuzilsin.

10.1.14. $\rho = \frac{288}{16-7\cos^2\varphi}$ ellipsning uzunligi 10 birlikka teng bo'lgan diametri fokal o'qqa qanday burchak ostida og'ishgan?

10.1.15. Ellipsning fokal o'qini qutb o'qi deb va qutbni 1) ellipsning chap fokusiga joylashtirib; 2) ellipsning o'ng fokusiga joylashtirib, ellipsning tenglamasini tuzing.

10.1.16. $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$ ellips yarim o'qlarining uzunligi va ikkala fokus orasidagi masofa hisoblansin.

10.1.17. Markazi qutb bilan va haqiqiy o'qi qutb o'qi bilan ustma – ust tushgan giperbolaning tenglamasi tuzilsin.

10.1.18. $\rho = \frac{48}{4\cos^2\varphi-1}$ giperbolaning asimptotalari orasidagi burchak hisoblansin.

10.1.19. Giperbolaning fokal o'qini qutb o'qi qabul qilinib va qutbni giperbolaning o'ng fokusida olib, uning tenglamasi tuzilsin.

10.1.20. $\rho = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos\varphi}$ giperbola asimptotalarining va direktrisalarining tenglamalari tuzilsin.

10.1.21. Parabolaning o'qini qutb o'qi va uchini qutb deb olib, uning tenglamasi tuzilsin.

10.1.22. $\rho = \frac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ parabolada shunday nuqta topilsinki, uning parabola dipektrisasidan bo'lgan masofa shu nuqtaning radius – vektoriga teng bo'lsin.

10.1.23. Fokusi qutb bilan ustma – ust tushgan va o'qi qutb o'qidan iborat bo'lgan parabolaning tenglamasi tuzilsin.

10.1.24. $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ parabolada shunday nuqta topilsinki, u

1) eng kichik radius – vektorga;

2) parabolaning parametriga teng bo‘lgan radius – vektorga ega bo‘lsin.

10.1.25. Parabolaning ixtiyoriy fokal vatarining uchlaridan uning o‘qiga tushirilgan perpendikulyarning ko‘paytmasi o‘zgarmas miqdor ekanligini isbotlang.

10.1.26. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagi egri chiziqlarning eng sodda tenglamalari tuzilsin:

1) $\rho = \frac{25}{13-12\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{1}{3-3\cos\varphi}$;

3) $\rho = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$; 4) $\rho = \frac{4}{\sqrt{5}-\cos\varphi}$.

10.1.27. $P(2; -1)$ nuqta polyarasining $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ egri chiziqqa nisbatan tenglamasi tuzilsin.

10.1.28. Quyidagi nuqtalarning polyarasi topilsin:

1) $(-3; 5)$ nuqtaning $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$ egri chiziqqa nisbatan;

2) $(0; 1)$ nuqtaning $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$ egri chiziqqa nisbatan.

10.1.29. Quyidagi nuqtalarning

1) $(1; -2)$ nuqtaning $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ egri chiziqqa nisbatan;

2) $(0; 0)$ nuqtaning $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ egri chiziqqa nisbatan polyarasini toping.

10.1.30. $18x - 17y - 41 = 0$ to‘g‘ri chiziqning $2x^2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0$ egri chiziqqa nisbatan qutbi topilsin.

11-MAVZU: TEKISLIKDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING KANONIK TENGLAMALARI.

Reja:

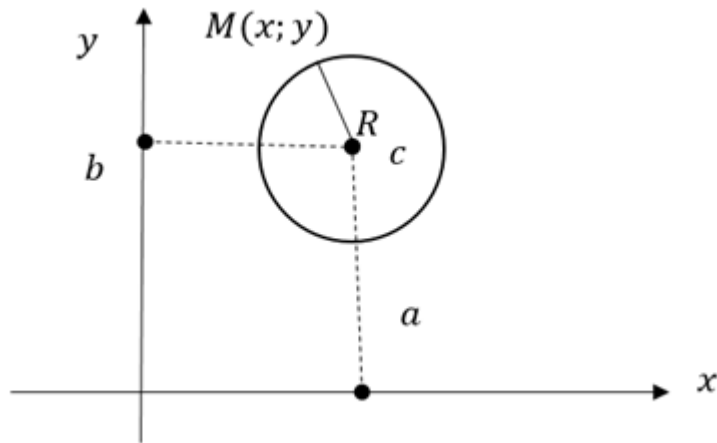
1. Ellips.
2. Giperbola.
3. Parabola.

Tayanch iboralar: ellips, giperbola, parabola, diametr, vatar, fokus, parametr, asimptota, direktisa, eksentrisitet.

11.1.Ellips.

Ta'rif. Tekislikda berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi.

Aylananing ta'rifidan foydalanib uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bizga Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Koordinatalar sistemasida $C(a; b)$ nuqta berilgan bo'lsin. $C(a; b)$ nuqtadan bir xil (R) uzoqlikdagi $M(x; y)$ nuqtalar to'plamiga aylana deyilar ekan.



11.1.1-chizma

$|CM| = R$ aylana tenglamasi bo'ladi.

$|CM| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} &= R \Rightarrow \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= R^2\end{aligned}\tag{11.1}$$

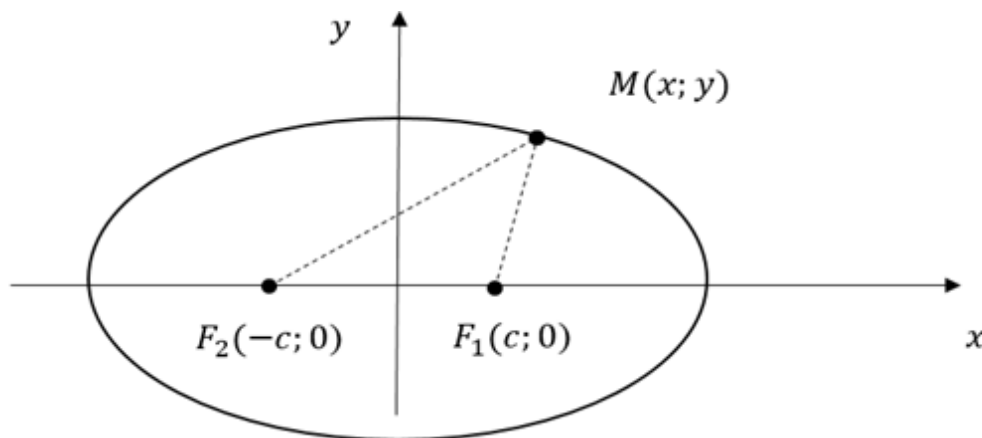
(11.1) tenglama markazi $C(a; b)$ nuqtada radiusi R ga teng bo'lgan tenglamasini keltirib chiqardik.

Xususiyl hollarda markazi koordinatalar boshida bo'lgan, ya'ni $O(0; 0)$ da bo'lsa, $x^2 + y^2 = R^2$ bo'ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida radiusi R ga teng bo'lgan aylana tenglamasi.

Ta'rif. Tekislikda qo'zg'almaydigan ikki nuqttagacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni **ellips** deyiladi.

Bizga qo'zg'almas ikkita nuqta berilgan bo'lsin. Mana shu qo'zg'almas ikki nuqtaga **fokus** deyiladi.

Tekislikda ikkita F_1 va F_2 nuqta berilgan bo'lsin. F_1 va F_2 nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz va to'g'ri chiziqqa yo'nalish berib uni absissa o'qi deymiz. F_1 va F_2 nuqtalarning o'rtasidan ordinata o'qini o'tkazamiz.



11.1.2-chizma

$|F_1F_2| = 2c$ ga teng bo'lsin, bundan kelib chiqadiki $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ bo'ladi. Ellipsning ta'rifini qanoatlantiruvchi $M(x; y)$ nuqta bo'lsin.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \text{ bo'ladi.}$$

$$|F_1M| = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \\
&- 2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2xc \\
&4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4xc = 0 \\
&a^2 - a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + xc = 0 \\
&a^2 + xc = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
&a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) \\
&a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
&a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 \\
&a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0 \\
&(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \\
&\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.2}
\end{aligned}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Fokuslar orasidagi masofani katta o'qqa nisbatiga eksentrisitet deyiladi.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \Rightarrow \varepsilon = \frac{c}{a} \tag{11.3}$$

Ellipsning kichik o'qiga parallel va uning markazidan a/ε masofadan o'tuvchi parallel to'g'ri chiziqlar ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

$$x = \pm \frac{c}{\varepsilon} = \pm \frac{a}{c/a} = \pm \frac{a^2}{c}$$

1-Misol. $x^2 + 4y^2 = 4$ tenglama ellipsni ifodalashini ko'rsating va uning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab berilgan tenglamani ikkala tomonini 4 soniga bo'lamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

bu yerdan berilgan tenglama yarim o'qlari $a = 2$ va $b = 1$ bo'lgan ellipsni ifodalashini ko'ramiz. Unda $c^2 = a^2 - b^2 = 3$ bo'lgani uchun qaralayotgan ellipsning fokuslari $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ va $F_2(\sqrt{3}; 0)$ nuqtalarda joylashganligini ko'ramiz. Bu natijalardan foydalanib, ellipsning eksentrisiteti va direktrisalari topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

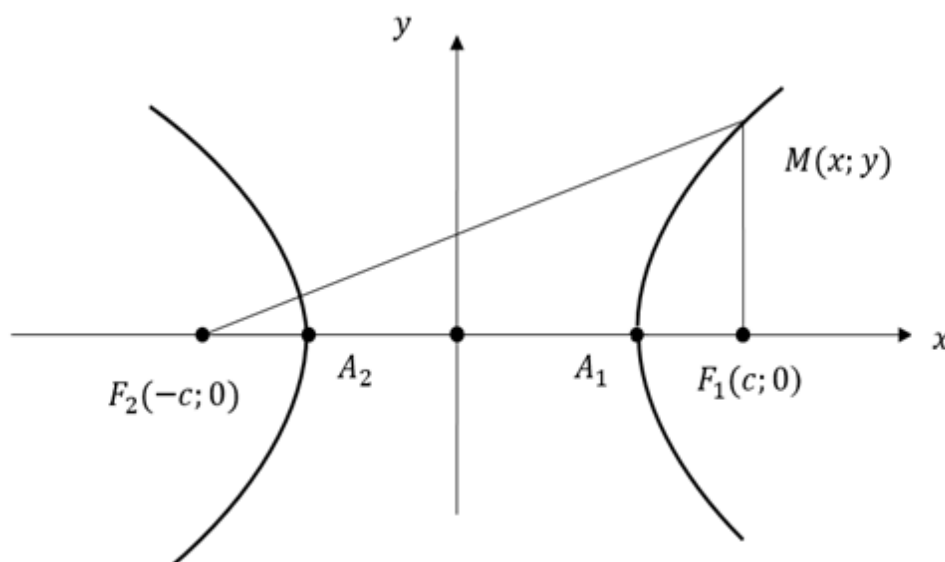
Ellipsga tegishli $M(x; y)$ nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = a + \varepsilon x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad r_2 = a - \varepsilon x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

formulalar bilan topiladi.

11.2. Giperbola.

Fokus deb ataladigan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalarining ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga **giperbola** deyiladi. Fokuslar - F_1, F_2 , ular orasidagi masofa $|F_1F_2| = 2c$. Fokuslar yotgan to'g'ri chiziqqa yo'nalish berib absissa o'qi deylik.



11.2.1-chizma

Absissa o'qini 2 ta fokusdan o'tkazaylik. Fokuslarning o'rtasidan absissa o'qiga perpendikulyar qilib **ordinata** o'qini o'tkazaylik.

$$|F_1M| - |F_2M| = 2a$$

$$\begin{aligned}
|F_1M| &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= \\
= x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \\
\pm 4a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 4a^2 + 4xc \\
a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) - a^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= 0 \\
x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) &\Rightarrow c > 0 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 \\
\Delta MF_1F_2 \Rightarrow F_1M - F_2M = 2a &\Rightarrow |F_1M - F_2M| < |F_1F_2| \Rightarrow \\
2a < 2c \Rightarrow a < c \\
x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned} \tag{11.4}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu yerda $2a$ —haqiqiy o‘q, $2b$ — mavhum o‘q, $2c$ — fokuslar orasidagi masofa.

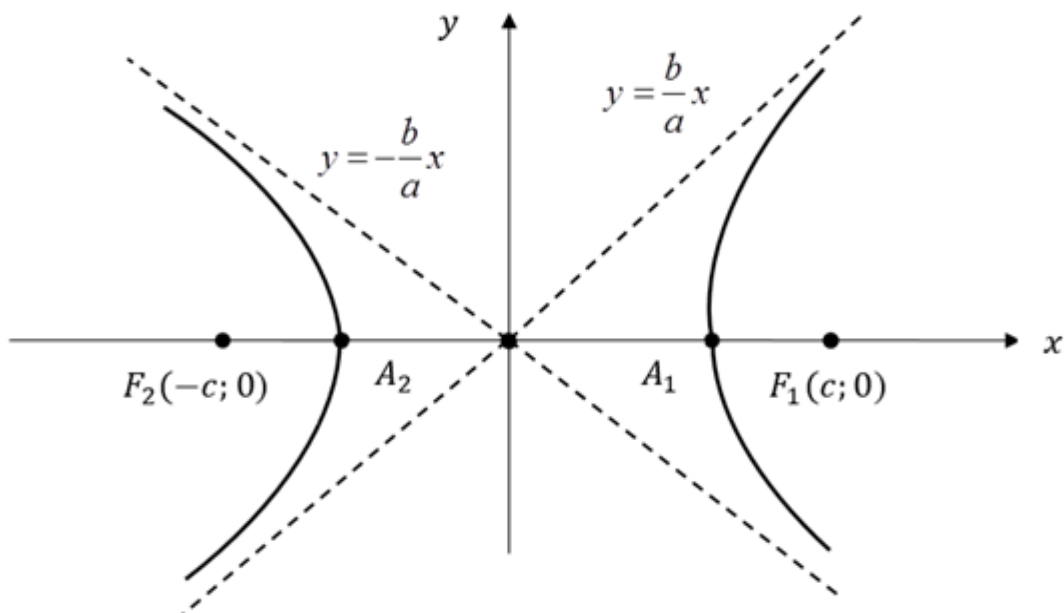
Giperbolaning eksentrisiteti deb, giperbola fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o‘qqa nisbatiga aytiladi.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$$

Giperbolaning mavhum o‘qiga parallel va uning markazidan

$$x = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{a}{c/a} = \frac{a^2}{c}$$

masofada yotuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa ***direktrisalari*** deyiladi.



11.2.2-chizma

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow d: x = \pm \frac{c}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 &\Rightarrow y = \pm \frac{b^2}{c} \Rightarrow \frac{c^2}{c} < a \Rightarrow a < c. \\ y &= \pm \frac{b}{a}x \end{aligned} \quad (11.5)$$

asimptota deyiladi.

$a = b$ bo'lsa, **teng yonli geperbola** deyiladi.

Fokal radiuslar. Ellips uchun

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \\ y^2 &= b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 \\ |MF_1| = r_1 &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - 2xc + a^2} =$$

$$= \left| \frac{c}{a} x - a \right| = |\varepsilon x - a|.$$

$$|MF_2| = r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| \frac{c}{a} x + a \right| = |\varepsilon x + a| \Rightarrow$$

$$0 < c < a$$

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x \Rightarrow r_1 = r_2 = 2a$$

Ellips yoki giperbola uchun fokal radiusi degani, uning biror nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofalar.

Giperbola uchun

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + 1 = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y^2 = b^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

$$|MF_1| = r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right) b^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x^2 - \frac{a^2}{a^2} 2xc + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} b^2 + a^2 b^2} = \left| \frac{c}{a} x - a \right|.$$

$$|MF_2| = r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \left| \frac{c}{a} x + a \right| \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow$$

$$c < a < 0$$

$$r_1 = \left| \frac{c}{a} x - a \right| = \frac{c}{a} x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a} x + a \quad (11.6)$$

bo'ladi.

2-Misol. Quydagi kanonik tenglamasi bilan berilgan giperbolaning barcha xarakteristikalarini toping:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Bu giperbolaning absissasi $x = 8$, ordinatasi $y > 0$ bo'lgan M nuqtasining fokal radiuslarini aniqlang.

Yechish: Berilgan tenglamani (11.4) kanonik tenglama bilan taqqoslab, giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari $a = 4$, $b = 3$ ekanligini ko'ramiz. Bu holda $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = 5$ bo'lgani uchun giperbolaning fokuslari $F_1(-5; 0)$ va $F_2(5; 0)$ nuqtalarda joylashganligini aniqlaymiz. Berilgan giperbolaning asimptotalari

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x = \pm 0,75x,$$

ekssentrisiteti $\varepsilon = c/a = 5/4 = 1,25$, direktrisalarining tenglamasi esa $x = \pm a/\varepsilon = \pm 4/1,25 = \pm 3,2$ bo'ladi. Endi giperbolaning berilgan $M(8; 0)$ nuqtasining fokal radiuslarini topamiz. Bu nuqta giperbolaning o'ng shoxida joylashgan va shu sababli (11.6) formulani "+" ishora bilan qaraymiz:

$$r_1 = a + \varepsilon x = 4 + 1,25 \cdot 8 = 14,$$

$$r_2 = -a + \varepsilon x = -4 + 1,25 \cdot 8 = 6$$

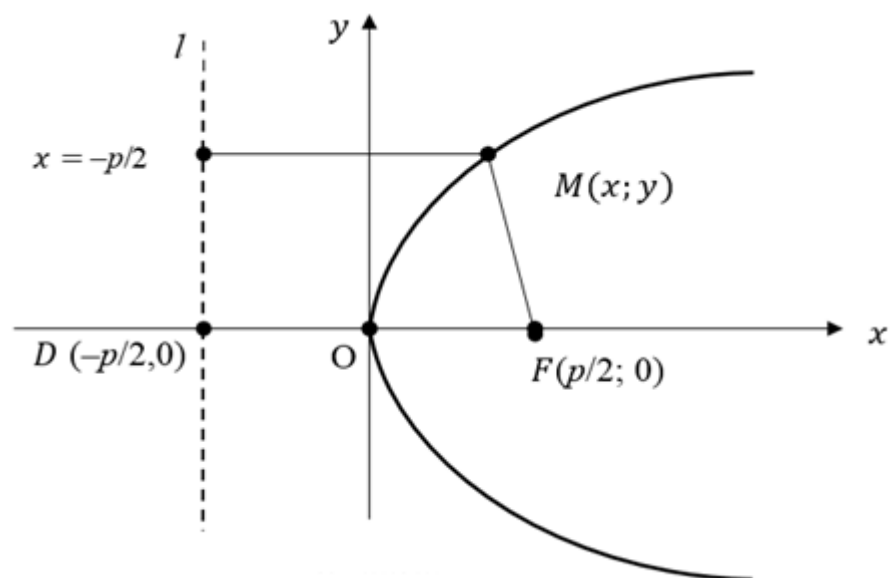
11.3. Parabola.

Berilgan nuqtadan va berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga **parabola** deyiladi.

Ta'rifdan foydalanib, parabolaning kanonik tenglamasini keltirib chiqaraylik. Bizga F nuqta va l to'g'ri chiziq berilgan ekan. F nuqtadan o'tib l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib Ox o'qini olaylik. l to'g'ri chiziqqa parallel va F nuqta bilan l to'g'ri chiziqni o'rtasidan Oy o'qini o'tkazaylik. Kanonik tenglamasini topmoqchi bo'lgan parabola ustidan ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqta olaylik. F nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa P bo'lsin. U holda F nuqtaning koordinatalari $F(\frac{p}{2}; 0)$ va l to'g'ri chiziqning tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'ladi. F nuqtadan M

nuqtagacha bo'lgan masofa $|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ bo'ladi. M

nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa esa $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ bo'ladi.



11.3.1-chizma

$$|FM| = |Fd|$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow x^2 - 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 = \\ &= x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 - xp = xp \Rightarrow \\ y^2 &= 2px \end{aligned} \quad (11.7)$$

tenglamamiz **parabola tenglamasi** hisoblanadi.

3-Misol. Ox o'qi parabolaning simmetriya o'qi bo'lib, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola va uning direktrisasi tenglamasini toping.

Yechish: Dastlab, masala shartiga asosan, parabolaning p parametrini topamiz:

$$|OF| = 4 \Rightarrow p/2 = 4 \Rightarrow p = 8.$$

Unda, (11.7) formulaga asosan, parabola tenglamasini topamiz:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 2 \cdot 8x = 16x.$$

Bu yerdan direktrisa tenglamasi $x = -p/2 \Rightarrow x = -4$ ekanligini ko'ramiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) kvadrat uchhadning grafigi uchi koordinatalari

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

bo'lgan $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada, simmetriya o'qi esa Oy o'qiga parallel va $x = -b/2a$ tenglamaga ega bo'lgan vertikal to'g'ri chiziqdan tashkil topgan paraboladan iboratdir. Agar $a > 0$ bo'lsa, parabola yuqoriga, $a < 0$ bo'lsa, pastga yo'nalgan bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

11.1. Ellipsga doir misollar.

11.1.1. Markazi $C(x; y)$ va radiusi R ga teng bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

- 1) $C(2; -3), R = 5;$ 2) $C(-5; 4), R = 2;$
- 3) $C(7; 1), R = 3;$ 4) $C(-2; 9), R = 4;$
- 5) $C(-4; 6), R = 7;$ 6) $C(6; -3), R = 6;$

11.1.2. Quyidagi har bir holda aylananing kanonik tenglamasini tuzing. Markazi va radiusini aniqlang.

- 1) $x^2 + y^2 - 6x = 0;$
- 2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0;$
- 3) $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0;$
- 4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0;$
- 5) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0;$
- 6) $3x^2 + 3y^2 - 2x + 7y + 1 = 0;$

- 11.1.3.** 1) $x^2 + y^2 - 1 = 0;$ 2) $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0;$
 3) $9x^2 + 9y^2 - 3 = 0;$ 4) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 1 = 0;$

aylanalarga nisbatan $A(3; 1), B(1; 0), C(-2; 0)$ va $D(-2; 1)$ nuqtalarning vaziyatini aniqlang.

11.1.4. Koordinatalari quyidagi:

- 1) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 \geq 25;$ 2) $16 \leq (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 25;$
- 3) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 25,$ 4) $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 \leq 9;$
- 5) $x^2 + y^2 - 6x \leq 0, y \geq 0;$ 6) $x^2 + y^2 - 4x \leq 0, |x| \geq 1$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar tekislikda qanday joylashadi?

11.1.5. Ox o'qiga $M(6; 0)$ nuqtada urinuvchi va $N(9; 9)$ nuqta orqali o'tadigan aylananing tenglamasi tuzilsin.

11.1.6. Markazi $C(2; 3)$ nuqtada yotadigan va $x - 2y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa urinadigan aylananing tenglamasi tuzilsin.

11.1.7. $A(-4; 1)$, $B(3; 2)$, $C(-2; -5)$, $D(5; 0)$ va $E(3; -6)$ nuqtalar berilgan.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) A, B, C nuqtalardan; | 2) A, B, D nuqtalardan; |
| 3) A, B, E nuqtalardan; | 4) B, C, D nuqtalardan; |
| 5) B, C, E nuqtalardan; | 6) C, D, E nuqtalardan |

o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

11.1.8. Berilgan $A(2; 7)$, $B(-2; 1)$ nuqtalar orqali o'tadigan va radiusi $r = \sqrt{26}$ bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

11.1.9. Quyidagilardan foydalanib aylana tenglamasini tuzing:

- 1) markazi koordinata boshida va radiusi $R = 3$ bo'lgan;
- 2) markazi $C(2; -3)$ nuqtada va radiusi $R = 7$ bo'lgan;
- 3) markazi koordinata boshida va $C(6; -8)$ nuqtadan o'tuvchi;
- 4) markazi $A(2; 6)$ nuqtada va $C(-1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi;
- 5) $A(3; 2)$ va $B(-1; 6)$ nuqtalar diametrning uchlari bo'lgan;
- 6) markazi koordinata boshida va $3x - 4y + 20 = 0$ to'g'ri chiziqqa urinuvchi.

11.1.10. Ikki parallel to'g'ri chiziq tenglamasi $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$ va bu to'g'ri chiziqlarning biri bilan $A(2; 1)$ nuqtada urinuvchi aylana berilgan. Aylananing tenglamasini tuzing.

11.1.11. Ikki aylana markazidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing:

- 1) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ va $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
- 2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ va $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

11.1.12. $A(1; -1)$ nuqta va ikki $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$ aylananing kesishgan nuqtasi orqali o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

11.1.13. $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$, $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$ aylananing kesishgan nuqtalari orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

11.1.14. Quyidagi malumotlarga ko'ra ellipsning kanonik tenglamasi tuzilsin:

- 1) yarim o'qlari mos ravishda 5 va 4 ga teng;
- 2) katta o'qi 10, fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng;
- 3) katta o'qi 26 va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

11.1.15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellips fokuslarining koordinatalari topilsin.

11.1.16. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$ ellips fokuslarining koordinatalari topilsin.

11.1.17. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ellipsga nisbatan quyidagi nuqtalarning: 1) $A_1(1; 2)$; 2) $A_2(-1; 3)$; 3) $A_3(6; 1)$; 4) $A_4(-1; 7)$ vaziyati aniqlansin.

11.1.18. O'qlari koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushuvchi va $P(2; 2)$, $Q(3; 1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi ellips tenglamasi tuzilsin.

11.1.19. Katta o'qi 2 birlikka teng, fokuslari $F_1(0; 1)$, $F_2(1; 0)$ nuqtalarda bo'lgan ellipsning tenglamasi tuzilsin.

11.1.20. Ellips fokuslarining biridan katta o'qi uchlarigacha masofalar mos ravishda 7 va 1 ga teng. Bu ellipsning tenglamasini tuzing.

11.1.21. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ellips direktrisalarining tenglamalarini yozing.

11.1.22. Ellipsning direktrisalari $x = \pm 8$ to'g'ri chiziqlar, uning kichik o'qi 8 ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, ellips tenglamasini tuzing.

11.1.23. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ellipsda o'ng fokusigacha masofa chap fokusigacha bo'lgan masofasiga nisbatan 4 marta katta bo'lgan nuqta topilsin.

11.1.24. Quyidagilarni bilgan holda fokusi absissa o'qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips tenglamasini tuzing:

- 1) uning yarim o'qlari 5 va 2 ga teng;
- 2) uning katta o'qi 10 ga teng, fokuslar orasidagi masofa esa $2c = 8$;
- 3) uning kichik o'qi 24 ga teng, fokuslar orasidagi masofa esa $2c = 10$;

4) fokuslar orasidagi masofa $2c = 6$ eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) uning katta o'qi 20 ga teng va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

6) uning kichik o'qi 10 ga teng , eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

11.1.25. Quyidagilarni bilgan holda fokusi ordinata o'qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan ellips tenglamasini tuzing:

1) uning yarim o'qlari mos ravishda 7 va 2 ga teng;

2) uning katta o'qi 10 ga teng , fokuslar orasidagi masofa esa $2c = 8$;

3) fokuslar orasidagi masofa $2c = 24$ va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

4) uning kichik o'qi 16 va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) fokuslar orasidagi masofa $2c = 6$ va direktrisalar orasidagi masofa $16\frac{2}{3}$ ga teng;

6) direktrisalar orasidagi masofa $10\frac{2}{3}$ ga va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{4}$ ga teng;

11.1.26. Ellipsning yarim o'qlarini toping:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$; 6) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

11.1.27. Ellips tenglamasi $9x^2 + 25y^2 = 225$ berilgan bo'lsa, quyidagilarni toping: 1) yarim o'qlarini; 2) fokuslarni; 3) eksentrisiteti; 4) direktrisa tenglamalarini tuzing.

11.1.28. Ellips tenglamasi $9x^2 + 5y^2 = 45$ berilgan bo'lsa, quyidagilarni toping:

1) yarim o'qlarini; 2) fokuslarni; 3) eksentrisiteti; 4) direktrisa tenglamalarini tuzing .

11.1.29. Quyidagi nuqtalardan qaysi birlari ushbu $8x^2 + 5y^2 = 77$ ellipsda yotadi:

1) $A_1(-2; 3)$; 2) $A_2(2; -2)$; 3) $A_3(2; -4)$; 4) $A_4(-1; 3)$;

5) $A_5(-4; -3)$; 6) $A_6(3; -1)$; 7) $A_7(3; -2)$; 8) $A_8(2; 1)$

shulardan qaysilari ichki, qaysilari tashqi nuqtalar?

11.1.30. Fokuslari absissa o'qida joylashgan bo'lib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing agar quyidagilar berilgan bo'lsa:

- 1) ellipsdan $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ nuqta va uning kichik yarim o'qi $b = 3$;
- 2) ellipsdan $M_1(2; -2)$ nuqta va uning katta yarim o'qi $a = 4$;
- 3) ellipsdan $M_1(4; -\sqrt{3})$ nuqta va $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ nuqta;
- 4) ellipsdan $M_1(\sqrt{15}; -1)$ nuqta va fokuslar orasidagi masofa $2c = 8$.

11.2. Giperbolaga doir misollar.

11.2.1. $x^2 - y^2 = 1$ giperbolaga nisbatan $A(4; 1)$, $B(1; -2)$, $C(\sqrt{2}; 1)$ nuqtalarning vaziyati aniqlansin.

11.2.2. Quyidagi malumotlarga ko'ra:

- 1) haqiqiy o'qi $a = 5$ mavhum o'qi $b = 3$;
- 2) fokuslari orasidagi masofa 10 ga, haqiqiy o'qi esa 8 ga teng giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

11.2.3. Quyidagi ma'lumotlarga ko'ra:

- 1) eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{12}{13}$ haqiqiy o'qi 48 ga teng;
- 2) haqiqiy o'qi 16 ga, asimptotasi bilan absissa o'qi orasidagi φ burchak tangensi $\frac{3}{4}$ ga teng.
- 3) giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

11.2.4. Teng tomonli giperbolaning eksentrisiteti hisoblansin.

11.2.5. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = \pm \frac{5}{12}x$ va giperbolada yotuvchi $M(24; 5)$ nuqta berilgan. Giperbola tenglamasi tuzilsin.

11.2.6. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ giperbolaning fokuslarini aniqlang.

11.2.7. $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ giperbolaning fokuslarini aniqlang.

11.2.8. Quyidagi ma'lumotlarga ko'ra:

- 1) direktrisalari orasidagi masofa $\frac{32}{5}$ ga teng va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

2) asimptotalari orasidagi burchak 60^0 ga teng va $c = 2\sqrt{3}$ giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

11.2.9. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ ellips bilan fokusdosh va ekscentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$ bo'lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

11.2.10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbola berilgan:

- 1) fokuslarining koordinatalari;
- 2) ekscentrisiteti;
- 3) asimptotalarining va direktrisalarning tenglamalari;
- 4) qo'shma giperbolaning tenglamasi va uning ekscentrisiteti hisoblansin.

11.2.11. Giperbola haqida quyidagilar ma'lum bo'lsa, uning yarim o'qlari hisoblansin:

- 1) fokuslari orasidagi masofa 8 ga va direktrisalari orasidagi masofa 6 ga teng;
- 2) direktrisalari $x = \pm 3\sqrt{2}$ tenglamalar bilan berilgan va asimptotalari orasidagi burchak to'g'ri burchak;
- 3) asimptotalari $y = \pm 2$ tenglamalar bilan berilgan va fokuslari markazdan 5 birlik masofada;
- 4) asimptotalari $y = \pm \frac{5}{3}x$ tenglamalar bilan berilgan va giperbola $N(6; 9)$ nuqtadan o'tadi.

11.2.12. Teng tomonli giperbola $x^2 - y^2 = 8$ berilgan. Unga fokusdosh bo'lib, $M(-5; 3)$ nuqtadan o'tuvchi giperbolaning tenglamasi topilsin.

11.2.13. Fokusi absissa o'qida joylashgan va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing, agar quyidagilar ma'lum bo'lsa:

- 1) uning o'qlari $2a = 10$ va $2b = 8$;
- 2) fokuslar orasidagi masofa $2a = 10$ va mavhum o'qi $2b = 8$;
- 3) fokuslar orasidagi masofa $2c = 6$ va ekscentrisiteti $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

- 4) haqiqiy o'qi $2a = 16$ va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
 5) asimptota tenglamasi $y = \pm \frac{4}{3}x$ va fokuslar orasidagi masofa $2c = 20$;
 6) direktrisalar orasidagi masofa 22 ga teng va fokuslar orasidagi masofa $2c = 26$.

11.2.14. Fokusi ordinata o'qida joylashgan va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing, agar quyidagilar ma'lum bo'lsa:

- 1) uning yarim o'qlari $a = 6$, $b = 18$;
 2) fokuslar orasidagi masofa $2c = 10$ va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{5}{3}$;
 3) asimptota tenglamasi $y = \pm \frac{12}{5}x$ va uchlari orasidagi masofa 48;
 4) direktrisalar orasidagi masofa $7\frac{1}{7}$ va eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{7}{5}$.

11.2.15. Quyida berilgan giperbolalarni a va b yarim o'qlarini toping:

- 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$;
 4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 6) $25x^2 - 16y^2 = 1$.

11.2.16. Giperbola tenglamasi berilgan $16x^2 - 9y^2 = 144$ bo'lsa, quyidagilarni:

- 1) yarim o'qlari a va b ; 2) fokuslarini; 3) eksentrisiteti;
 4) asimptota tenglamasini toping; 5) direktrisa tenglamasini toping.

11.2.17. Giperbola tenglamasi berilgan $16x^2 - 9y^2 = -144$ bo'lsa, quyidagilarni:

- 1) yarim o'qlari a va b ; 2) fokuslarini; 3) eksentrisiteti;
 4) asimptota tenglamasini toping; 5) direktrisa tenglamasini toping.

11.2.18. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbola asimptotasi va $9x + 2y - 24 = 0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan uchburchakning yuzini toping.

11.2.19. Quyidagi tenglamalar qanday chiziqlarni ifodalashini aniqlang:

- 1) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$;

$$3) y = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 9}; \quad 4) y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}.$$

va bu chiziqlarni chizmasini chizing.

11.2.20. $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ giperbolaning $M_1(10; -\sqrt{5})$ nuqtasi berilgan. Fakal radiusi M_1 nuqta bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

11.2.21. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ giperbolani $M_1(-5; \frac{9}{4})$ nuqta qanoatlantirishi ko'rinib turibdi, M_1 nuqtaning fakal radiusini toping.

11.2.22. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ giperboladagi nuqtadan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa 4,5 ga teng bo'lsa shu nuqtani koordinatasini toping.

11.2.23. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperboladagi nuqtadan chap fokusgacha bo'lgan masofa 7 ga teng bo'lsa, shu nuqtani koordinatasini toping.

11.2.24. Fokuslari absissa o'qida yotib koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing, quyidagilar berilgan bo'lsa:

- 1) giperbolaning $M_1(6; -1)$ va $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ nuqtalari;
- 2) giperbolaning $M_1(-5; 3)$ nuqtasi va ekscentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{2}$;
- 3) giperbolaning $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ nuqtasi va $y = +\frac{2}{3}x$ asimtota tenglamasi;
- 4) giperbolaning $M_1(-3; \frac{5}{2})$ nuqtasi va $y = +\frac{4}{3}$ direktrisa tenglamasi;
- 5) $y = +\frac{3}{4}x$ asimtota tenglamasi va $x = \pm \frac{16}{5}$ direktrisa tenglamasi;

11.2.25. Teng tomonli giperbolaning ekscentrisitetini hisoblang.

11.2.26. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokusi giperbolaning fokusi bilan ustma - ust bo'ladi. Agar giperbolaning ekscentrisiteti $\varepsilon = 2$ ga teng bo'lsa, giperbolaning tenglamasini tuzing.

11.2.27. Fokusi $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ellipsning uchida yotuvchi, direktrisasi esa ellipsning fokusidan o'tuvchi giperbola tenglamasini tuzing.

11.2.28. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning fokusidan uning asimptotasigacha bo'lgan masofa b ga teng bo'lishini isbotlang.

11.2.29. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning ikki asimptotasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi har doim $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ ga teng bo'lishini isbotlang.

11.2.30. Agar yarim o'qlari a va b , markazi $C(x_0; y_0)$ nuqta va fokusi quyidagi chiziqlarda:

1) Ox o'qiga parallel;

2) Oy o'qiga parallel

bo'lsa, giperbola tenglamasini tuzing.

11.3. Parabolaga doir misollar.

11.3.1. Quyidagi nuqtalardan qaysilari $y^2 = 6x$ parabolaga tegishli:

1) $A(-2; 4)$; 2) $B(1; 5)$; 3) $C(3; 1)$; 4) $A(-2; 4)$.

11.3.2. Quyidagi parabolalardan qaysilarining fokusi a) $F_1(3; 0)$, b) $F_2(-3; 0)$, c) $F_3(0; 3)$ va d) $F_4(0; -3)$ nuqtadan o'tadi:

1) $y^2 = 3x$; 2) $y^2 = -3x$; 3) $x^2 = 3y$; 4) $x^2 = -3y$;

5) $y^2 = 6x$; 6) $y^2 = -6x$; 7) $x^2 = 6y$; 8) $x^2 = -6y$.

11.3.3. Quyidagi parabolalardan qaysilarining direktrisa tenglamasi

a) $x = 5$, b) $x = -5$, c) $y = 5$ va d) $y = -5$:

1) $y^2 = 5x$; 2) $y^2 = -5x$; 3) $x^2 = 5y$; 4) $x^2 = -5y$.

11.3.4. $y^2 = 4x$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

11.3.5. $x^2 = 4y$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

11.3.6. $y^2 = -8x$ parabola fokusining koordinatalarini aniqlang.

11.3.7. $y^2 = 6x$ parabola direktrisasi tenglamasini tuzing.

11.3.8. Parabolaning fokusidan uchigacha bo'lgan masofa 3 ga teng, uning kanonik tenglamasini tuzing.

11.3.9. Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo'lgan masofa 2 ga teng, uning kanonik tenglamasini tuzing.

11.3.10. Parabolaning fokusi $F(3; 0)$ nuqtada va $x = -1$ direktrisasining tenglamasi bo'lsa, parabola tenglamasini tuzing.

11.3.11. Parabolaning uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 3 ga teng va parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lib, Oy o'qiga urinsa parabola tenglamasini tuzing.

11.3.12. Fokusi $M(5; 0)$ nuqtada bo'lib, ordinatalar o'qi direktrisa bo'lsa, parabola tenglamasini tuzing.

11.3.13. Parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lib, $M(1; -4)$ nuqtadan va koordinatalar boshidan o'tadigan parabola tenglamasini tuzing.

11.3.14. Parabolaning fokusi $M(0; 2)$ nuqtada va uchi koordinatalar boshida yotsa, parabola tenglamasini tuzing.

11.3.15. Parabola Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lib, $M(6; -2)$ nuqtadan va koordinatalar boshidan o'tadi, parabola tenglamasini tuzing.

11.3.16. $y^2 = 8x$ paraboladagi fokal radius vektori 20 ga teng bo'lgan nuqta topilsin.

11.3.17. Ox o'qiga nisbatan simmetrik, $A(9; 6)$ nuqtadan va uchi koordinatalar boshidan o'tuvchi parabola tenglamasini tuzing.

11.3.18. Ox o'qiga nisbatan simmetrik, $B(-1; 3)$ nuqtadan va uchi koordinatalar boshidan o'tuvchi parabola tenglamasini tuzing.

11.3.19. Oy o'qiga nisbatan simmetrik, $C(1; 1)$ nuqtadan va uchi koordinatalar boshidan o'tuvchi parabola tenglamasini tuzing .

11.3.20. Oy o'qiga nisbatan simmetrik, $D(4; -8)$ nuqtadan va uchi koordinatalar boshidan o'tuvchi parabola tenglamasini tuzing .

11.3.21. Koordinata boshidan o'tib, Oy o'qiga simmetrik va fokusi $F(0; -3)$ nuqtada bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

11.3.22. $y^2 = 24x$ parabola tenglamasidan F fokusini va direktrisa tenglamasini toping.

11.3.23. $y^2 = -24x$ parabola tenglamasidan F fokusini va direktrisa tenglamasini toping.

11.3.24. $x^2 = -24y$ parabola tenglamasidan F fokusini va direktrisa tenglamasini toping.

11.3.25. $y^2 = 20x$ parabola tenglamasi berilgan, agar M nuqtaning absissasi 7 ga teng bo'lsa, M fokal radiusni toping.

11.3.26. $y^2 = 12x$ parabola tenglamasi berilgan, agar M nuqtaning ordinatasi 6 ga teng bo'lsa, M fokal radiusni toping.

11.3.27. $y^2 = 16x$ parabola tenglamasi berilgan. Fokal radius 13 ga teng bo'ladigan M nuqtani toping .

11.3.28. $x^2 = 16y$ parabola tenglamasi berilgan. Fokal radius 13 ga teng bo'ladigan M nuqtani toping .

11.3.29. $x^2 = -16y$ parabola tenglamasi berilgan. Fokal radius 13 ga teng bo'ladigan M nuqtani toping .

11.3.30. Agar $F(-7; 0)$ fokus va direktirisa tenglamasi $x - 7 = 0$ berilgan bo'lsa, parabola tenglamasini tuzing.

12-MAVZU: TEKISLIKDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING UMUMIY TENGLAMALARI.

Reja:

- 1. Koordinata boshini ko'chirish yordamida ikkinchi tartibli chiziqlarni sinflarga ajratish. Markaziy va nomarkaziy chiziqlar.**
- 2. Ikkinchi tartibli egri chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesilishi.**
- 3. Egri chiziqning diametrlari. Bosh o'qlar. Asimptotalar. Egri chiziqning qo'shma yo'nalishlarga nisbatan tuzilgan tenglamasi; egri chiziqning asimptotalarga nisbatan tenglamasi.**
- 4. Ikkinchi tartibli chiziqlarning urinma tenglamalari.**

Tayanch iboralar: ellips, giperbola, parabola, diametr, vatar, fokus, parametr, asimptota, direktrisa, notrivial.

12.1. Koordinata boshini ko'chirish yordamida ikkinchi tartibli chiziqlarni sinflarga ajratish.

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (12.1)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug'ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o'zgartirish va (12.1) tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko'chirishda (12.1) tenglama koeffitsiyentlarini qanday o'zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (12.2)$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o'qlarining yo'nalishlari o'zgarmaydi, faqat koordinata boshi $O'(x_0; y_0)$ nuqtaga ko'chadi. Bu formulalardan x, y larni topib va (12.1) ga qo'yib,

$$a_{11}(x' + x_0)^2 + 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) + a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_{13}(x' + x_0) + 2a_{23}(y' + y_0) + a_{33} = 0 \quad (12.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan

$$\begin{aligned} & a_{11}(x'^2 + 2x_0x' + x_0^2) + 2a_{12}(x'y' + x'y_0 + y'x_0 + x_0y_0) + \\ & + a_{22}(y'^2 + y_0y' + y_0^2) + 2a_{13}x' + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y' + \\ & + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \\ & a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + (2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13})x' + \\ & + (2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23})y' + a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \\ & + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \end{aligned} \quad (12.4)$$

kelib chiqadi.

Bu formulalardan ko'rinib turibdiki, parallel ko'chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsiyentlar o'zgarmaydi.

Agar $O'(x_0; y_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (12.5)$$

sistemani qanoatlantirsa, (12.3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

Bundan tashqari, agar $O'(x_0; y_0)$ nuqtaning koordinatalari (12.5) sistemani qanoatlantirsa, $O'(x_0; y_0)$ nuqta ikkinchi tartibli chiziq uchun simmetriya markazi bo'ladi. Haqiqatan ham bu holda koordinatalar markazini $O'(x_0; y_0)$ nuqtaga ko'chirsak, tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi. Shuning uchun yangi koordinatalar sistemasida

$$F(x'; y') = F(-x'; -y')$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, $O'(x_0; y_0)$ nuqta chiziq uchun simmetriya markazidir. Va aksincha, agar birorta A nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa uning koordinatalari (12.5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Koordinata boshini A nuqtaga joylashtirib, yangi x, y koordinatalar sistemasini kiritamiz. Agar $F(x; y)$ nuqta chiziqqa tegishli bo'lsa,

$$F(x; y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Koordinata boshi simmetriya markazi bo'lgani uchun $F(-x; -y) = 0$ tenglik ham o'rinli bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olsak quyidagi ta'rifning geometrik ma'nosi yaxshi tushunarli bo'ladi.

1-ta'rif . Tekislikdagi $M_0(x_0; y_0)$ nuqtaning koordinatalari (12.5) sistemani qanoatlantirsa, u (12.1) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning markazi deyiladi.

Tabiiyki, (12.5) sistema yagona yechimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi yoki umuman yechimga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar, $a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \neq 0$
munosabat o'rinli bo'lsa, (9.5) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Agar,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o'rinli bo'lsa sistema cheksiz ko'p yechimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa sistema yechimga ega emas. Bularni e'tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

- a) yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- b) cheksiz ko'p markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- d) markazga ega bo'lmagan chiziqlar.

Markaziy va nomarkaziy chiziqlar.

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{01} & a_{02} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bu yerda $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$ belgilashlar kiritilgan. Yagona markazga ega chiziqlar uchun $\delta \neq 0$, yagona markazga ega bo'lmagan chiziqlar uchun $\delta = 0$. Chiziqlar cheksiz ko'p markazga ega bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglik bajarilishi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozib olsak, oxirgi determinant δ ga tengdir. Agar $\delta = 0$ bo'lsa, birorta k soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\Delta = 0$ tenglik ham bajarilsa

$$a_{13} - ka_{23} = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisi o'rinli bo'lsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ munosabatdan $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ munosabat kelib chiqadi. Agar, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$ bo'lsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ va $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosabat kelib chiqadi. Demak, $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

1-tasdiq. Ikkinchi tartibli chiziq

a) $\delta \neq 0$ bo'lsa yagona markazga ega,

- b) $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ bo'lsa, cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'plami bitta to'g'ri chiziqni tashkil etadi;
 c) $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ bo'lsa markazga ega emas.

2-tasdiq. Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq markazi unga tegishli bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Ikkinchi tartibli chiziq markazi $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada bo'lib, u chiziqqa tegishli bo'lsa

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (12.6)$$

va

$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$ (12.7) tengliklar bajariladi. Yuqoridagi (12.6) tenglikning birinchisini x_0 ga, ikkinchisini y_0 ga ko'paytirib, (12.7) tenglikdan ayirsak,

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $(x_0; y_0; 1)$ uchlik

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \quad (12.8)$$

bir jinsli sistemaning notrivial yechimidir. Bu esa $\Delta = 0$ shartga teng kuchlidir. Aksincha $\Delta = 0$ bo'lsa, (12.8) sistema notrivial $(x_0; y_0; z_0)$ yechimga egadir. Bu uchlikda $z_0 \neq 0$, chunki $\delta \neq 0$. Biz $z_0 = 1$ deb hisoblay olamiz, chunki $\delta \neq 0$ bo'lganligi uchun har bir z_0 uchun $(x_0; y_0)$ juftlik mavjud. Yuqoridagi (12.8) sistemada $z_0 = 1$ bo'lganda $(x_0; y_0)$ juftlik markaz koordinatalari ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari (12.8) sistemadan foydalanib,

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni olish mumkin.

1-misol. Quyidagi tenglama bilan berilgan chiziqning turi va joylashishi aniqlansin.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

Yechish: $I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0,$

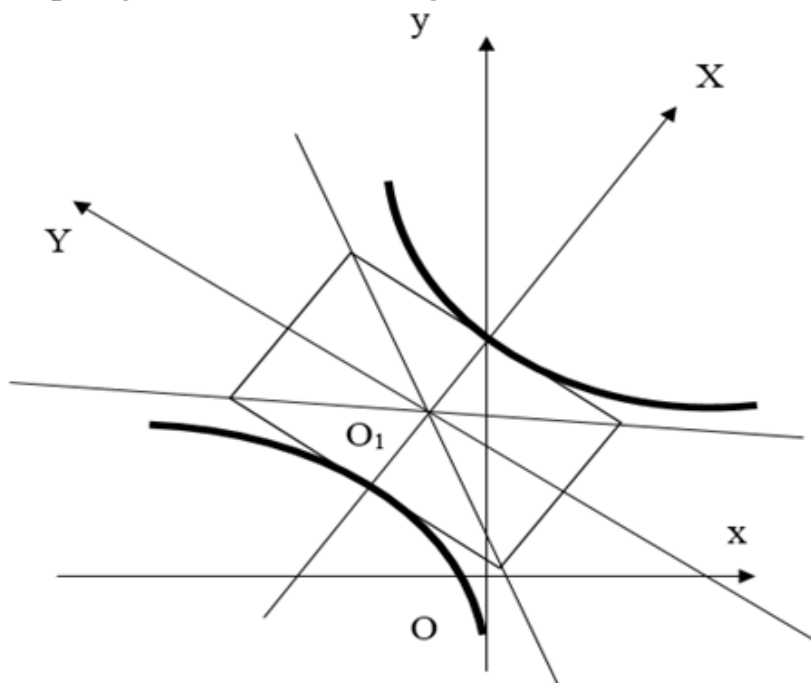
demak bu chiziq - birinchi guruhga tegishli:

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81 \neq 0,$$

chiziq giperboladan iborat:

$$I_1 = 0 + 8 = 8.$$

Chiziqning xarakteristik tenglamasi: $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$.



12.1.1-chizma

Xarakteristik tenglamaning yechimlari:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1,$$

Almashtirishdan so'ng tenglama $9X^2 - Y^2 + \frac{81}{-9} = 0$ ko'rinishga keladi.

Kanonik tenglamasi esa:

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Markazi quyidagi

$$\begin{cases} 3y - 6 = 0, \\ 3x + 8y - 13 = 0 \end{cases}$$

tenglamalardan topiladi. $O'(-1; 2)$ - nuqta chiziq markazi. $O'X$

o'qning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{9}{3} = 3$.

2-misol. Quyidagi

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

chiziqning shakli va joylashishi, fokusi va direktrisalari aniqlansin :

Yechish:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad K_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}.$$

Demak, berilgan chiziq - parabola:

$$I_1 = 1 + 4 = 5.$$

Parametri:

$$p = \sqrt{\frac{25}{4 \cdot 5^3}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Kanonik tenglamasi:

$$Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} X.$$

O'qining tenglamasi:

$$x - 2y - \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot (-\frac{3}{2})}{1 + 4} = 0$$

yoki

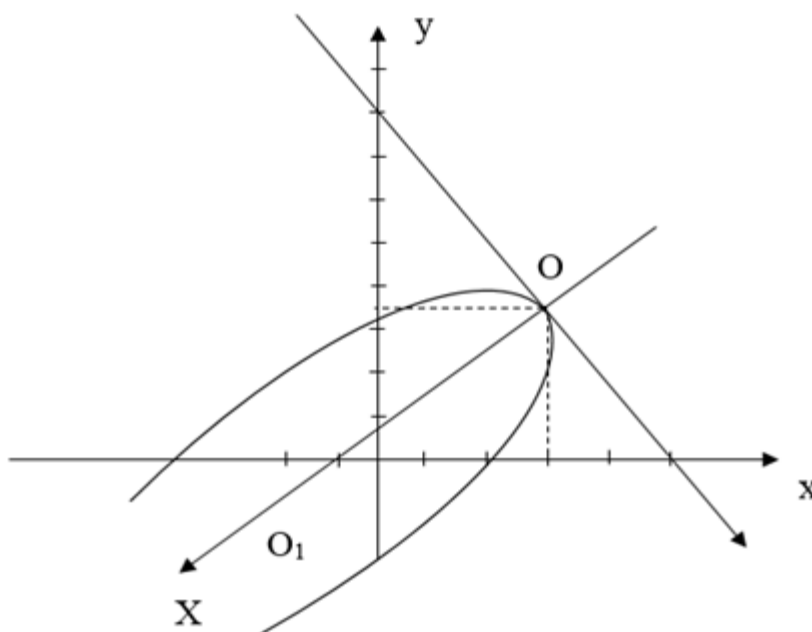
$$x - 2y + 1 = 0.$$

Parabola uchining koordinatalarini topish uchun tenglamalar:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ (x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7 = 0, \end{cases}.$$
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Natijada, parabola uchi $O'(3; 2)$ nuqtada, botiqlik tomoniga yo'nalgan o'q vektori esa

$$\left\{ \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \right\} = \left\{ -5, -\frac{5}{2} \right\} \Downarrow (-2, -1)$$



12.1.2-chizma

koordinatalarga ega (9.2.2-chizma). ($X = \sqrt{5}$ bo'lganda $Y = \pm 1$ teng ekanini bilish foydali).

Berilgan chiziq parametri $p = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ga teng parabolani ifodalaydi.

Parabola uchi $O'(3; 2)$ nuqtada. Parabola o'qining musbat yo'nalishi $(-2; -1)$ vektor bilan aniqlanadi. Ox va $O'x$ o'qlar orasidagi burchakni φ desak:

$$\cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

Demak almashtirish formulalari:

$$x = \frac{-2X + Y}{\sqrt{5}} + 3, \quad y = \frac{-X - 2Y}{\sqrt{5}} + 2$$

bundan

$$X = \frac{-2x - y + 8}{\sqrt{5}}, \quad Y = \frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}$$

Kanonik sistemada fokus koordinatalari: $X = \frac{1}{4\sqrt{5}}, \quad Y = 0,$

boshlang'ich sistemada esa: $x = 2,9; \quad y = 1,95$

kanonik sistemada direktrisa tenglamasi: $X = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$

boshlang'ich sistemada esa:

$$\frac{-2x - y + 8}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{4\sqrt{5}} \quad \text{yoki} \quad 8x + 4y - 33 = 0.$$

12.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqning to'g'ri chiziq bilan kesilishi.

Ikkinchi tartibli

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (12.9)$$

egri chiziqning

$$Ax + By + C = 0 \quad (12.10)$$

to'g'ri chiziq bilan kesilish nuqtalarining koordinatalari (12.9) va (12.10) tenglamalarni birgalikda yechib aniqlanadi.

Bu tenglamalar sistemasi, umuman aytganda, ikki qo'sh ildizga ega bo'lishi kerak, shuning uchun ikkinchi tartibli egri chiziq to'g'ri chiziq bilan ikkita (haqiqiy, mavhum yoki ustma – ust tushgan) nuqtada kesishadi. Agar bu ikki nuqta ustma – ust tushsa, to'g'ri chiziq egri chiziqqa shu nuqtadagi **urinma** deyiladi.

(12.9) egri chiziqqa $(x'; y')$ nuqtadagi urinmaning tenglamasi:

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0 \quad (12.11)$$

Agar berilgan

$$Ax + By + C = 0$$

(12.10) egri chiziqqa urinsa, u holda urinish nuqtasining koordinatalari bu to'g'ri chiziq va (12.11) urinma tenglamalari koeffitsiyentlarining proporsionallik, ya'ni:

$$\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} =$$

$$= \frac{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}}{C} \quad (12.12)$$

shartidan aniqlanadi.

(12.9) egri chiziq va (12.10) to'g'ri chiziq tenglamalarining koordinatalaridan birini yo'qotganda ikkinchi koordinatani aniqlash uchun ikkinchi darajali emas, balki birinchi darajali tenglama hosil bo'lishi (aniqlanayotgan koordinataning kvadrati oldidagi koeffitsiyent nolga aylanadi), (12.9) egri chiziqning (12.10) to'g'ri chiziq bilan kesilishining xususiy holiga ega bo'lamiz. Bu holda tekislikning chekli qismida (12.9) egri chiziq bilan (12.10) to'g'ri chiziqning birgina umumiy nuqtasi bo'ladi. Ular faqat bir nuqtada kesishadi deymiz. Bu to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

tenglamadan aniqlanadi. Agar (10.1) va (10.2) tenglamalar birgalikda bo'la olmasa, ya'ni umumiy chekli ildizlarga ega bo'lsa, (12.9) egri chiziq (12.10) to'g'ri chiziq bilan hech bir umumiy nuqtaga ega emas deymiz. Bu holda (12.9) va (12.10) tenglamalarning koordinatalaridan birini yo'qotishda faqat aniqlanayotgan koordinataning kvadrati oldidagi koeffitsiyenti ham nolga aylanadi.

12.3. Egri chiziqning diametrlari. Bosh o'qlar. Asimptotalar. Egri chiziqning qo'shma yo'nalishlarga nisbatan tuzilgan tenglamasi; egri chiziqning asimptotalarga nisbatan tenglamasi.

Agar ikkinchi tartibli egri chiziqning bir xil yo'nalishdagi hamma vatarlari o'tkazilsa, bu vatarlar o'rtalarining geometrik o'rni biror to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq berilgan vatarga *qo'shma diametr* deyiladi. Diametrning tenglamasi:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0, \quad (12.13)$$

yoki

$$F_x + kF_y = 0 \quad (12.14)$$

bu yerda k – berilgan yo'nalishdagi vatarlarning burchak koeffitsiyenti. k ni o'zgartirish bilan, ya'ni vatarlar yo'nalishini o'zgartirish bilan cheksiz ko'p diametrlar hosil qilamiz, ularning hammasi egri

chiziqning markazidan o'tadi. Parabolaning hamma diametrlari o'zaro paralleldir.

Vatarning yo'nalishi va ularga qo'shma diametrning yo'nalishi berilgan egri chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar deyiladi. Ikki qo'shma yo'nalish orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0. \quad (12.15)$$

Qo'shma diametrlar deb, shunday ikkita diametr ga aytiladiki, ularning har biri ikkinchisiga parallel vatarlarni teng ikkiga bo'ladi. Parabolaning qo'shma diametrlari yo'q, chunki hamma diametrlar bir xil yo'nalishga ega.

Qo'shma vatarlarga perpendikulyar bo'lgan diametrlar egri chiziqning bosh o'qlari deyiladi; ularning yo'nalishlari **bosh yo'nalishlar** deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida bosh yo'nalishlar

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0, \quad (12.16)$$

yoki

$$tg 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (12.17)$$

tenglamadan aniqlanadi, bunda φ – bosh yo'nalishlardan birining x o'qi yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi.

Qiyshiq burchakli koordinatalar sistemasida bosh yo'nalishlar tenglamasi:

$$(a_{12} - a_{22}\cos\omega)k^2 + (a_{11} - a_{22})k - (a_{12} - a_{11}\cos\omega) = 0. \quad (12.18)$$

Aylanadan tashqari har qanday ikkinchi tartibli egri chiziq ikkita bosh yo'nalishga ega; aylananing bosh yo'nalishlari aniq emas (cheksiz ko'p).

Parabolaning hamma diametrlari uchun burchak koeffitsiyenti

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad (12.19)$$

formula bilan aniqlanadi yoki parabolaning ikkinchi darajali hadlarining koeffitsiyentlari:

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{12} = \alpha\beta, \quad a_{22} = \beta^2$$

bilan belgilansa, u holda burchak koeffitsiyenti

$$k = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (12.20)$$

bo'ladi.

Parabolaning bosh o'qi uning diametrlaridan biri bo'lgani uchun u ham shu yo'nalishga egadir va to'g'ri burchakli koordinatalarda

$$F_x + \frac{\beta}{\alpha} F_y = 0 \quad (12.21)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Parabolaning ikkinchi bosh yo'nalishi uning diametriga perpendikulyardir, lekin parabolaning ikkinchi bosh o'qi yo'q.

Agar ikki qo'shma yo'nalishga nisbatan egri chiziqning tenglamasi tuzilsa, ya'ni koordinata o'qlari deb, bu egri chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlarga ega bo'lgan ikki to'g'ri chiziq olinsa, egri chiziq tenglamasiga koordinatalarning ko'paytmasidan tuzilgan had kirmaydi ($a_{12} = 0$). Parabola tenglamasida, bundan tashqari ikkinchi darajali hadlardan biri yo'qoladi ($a_{11} = 0$ yoki $a_{22} = 0$).

Agar markaziy egri chiziqning tenglamasi ikki qo'shma diametrga (yoki bosh o'qlarga) nisbatan yozilsa, uning tenglamasi

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \quad (12.22)$$

ko'rinishni oladi.

Koordinatalar boshini parabolaning uchiga, ya'ni parabolaning bosh o'qi bilan kesishish nuqtasiga olib ($a'_{33} = 0$), bosh o'qni absissalar o'qi ($a'_{23} = 0$, $a'_{12} = 0$ va $a'_{11} = 0$) va parabola uchidan o'tgan urinmani (u parabola o'qiga perpendikulyar) ordinatalar o'qi deb olinsa, parabolaning eng sodda tenglamasi hosil bo'ladi

$$a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0. \quad (12.23)$$

Koordinata o'qlari yuqoridagidek olinsa, markaziy egri chiziq

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0 \quad (12.24)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Egri chiziqning diametrlaridan o'z – o'ziga qo'shma bo'lganlariga uning asimptotalari deb qarash mumkin. Asimptotalarning burchak koeffitsiyentlari

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \quad (12.25)$$

tenglamadan aniqlanadi.

Asimptotalar faqat markaziy egri chiziqlarda bo'lishi mumkin: giperbola ikkita haqiqiy asimptotaga ega, ellips ikkita mavhum asimptotaga ega. Egri chiziq ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga ajralsa, u holda asimptotalar bu to'g'ri chiziqlar bilan ustma – ust tushadi. Giperbolaning asimptotalari koordinata o'qlari deb olinsa, u holda bu giperbolaning tenglamasi,

$$2a'_{12}xy + a'_{33} = 0 \quad (12.26)$$

shaklni oladi.

12.4. Ikkinchi tartibli chiziqlarning urinma tenglamalari.

Tekislikdagi $F(x; y) = 0$ oshkormas tenglama bilan berilgan egri chiziqning $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasidagi urinma tenglamasi

$$F'_x(x_0; y_0)(x - x_0) - F'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0 \quad (12.27)$$

Ellips uchun

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad F'_x(x) = \frac{2x}{a^2}, \quad F'_y(y) = \frac{2y}{a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y}{a^2}(y - y_0) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{a^2} - \frac{2yy_0}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{a^2}$$

ellipsni urinma tenglamasi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (12.28)$$

deyiladi.

Giperbola uchun

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad F'_x(x) = \frac{2x}{a^2}, \quad F'_y(y) = \frac{2y}{a^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
F'_x(x_0; y_0) &= \frac{2x_0}{a^2}, & F'_y(x_0; y_0) &= -\frac{2y_0}{a^2} \Rightarrow \\
\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{a^2}(y - y_0) &= 0 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{a^2} \\
\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{a^2} &= 1
\end{aligned} \tag{12.29}$$

giperbolani urinma tenglamasi deyiladi.

3-misol. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ egri chiziqning shunday ikkita qo'shma diametrlari topilsinki, ularning biri koordinatalar boshidan o'tsin.

Yechish: $\delta \neq 0$ bo'lgani uchun, berilgan egri chiziq markaziy egri chiziq hisoblanadi. Uning ixtiyoriy diametrining tenglamasi

$$(x - y - 2) + k(-x + 2y - 3) = 0$$

bo'ladi, bu yerda k — unga qo'shma diametrning burchak koeffitsiyenti. Izlangan diametr koordinatalar boshidan o'tganligi uchun uning tenglamasidagi ozod had nolga teng bo'lishi, ya'ni $-2 - 3k = 0$ va $k = -\frac{2}{3}$ bo'lishi kerak. Parametrning bu qiymatini diametrning umumiy tenglamasiga qo'yib va soddalashtirib, $5x - 7y = 0$ tenglamani olamiz. Bu izlangan diametrlardan birining tenglamasidir, uning burchak koeffitsiyenti $k' = \frac{5}{7}$, demak, bunga qo'shma diametrning tenglamasi

$$(x - y - 2) + \frac{5}{7}(-x + 2y - 3) = 0,$$

yoki $2x + 3y - 29 = 0$ ko'rinishida bo'ladi.

4-misol. $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$ parabolaning o'qi topilsin.

Yechish: Berilgan parabolaning hamma diametrlari $k = 1$ burchak koeffitsiyentga ega. Parabolaning o'qi diametriga perpendikulyar vatarga, ya'ni $k_1 = -1$ burchak koeffitsiyentli vatarlarga qo'shma bo'lgan diametrdir, bu holatda koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli deb faraz qilinadi. Bu parabola har qanday diametrining tenglamasi

$$2x - 2y + 1 + k(-2x + 2y - 2) = 0$$

bo'ladi: $k = -1$ bo'lganda parabola o'qining $4x - 4y + 3 = 0$ tenglamasi hosil bo'ladi.

5-misol. Koordinatalar boshidan o'tuvchi ikkinchi tartibli egri chiziqning ikki juft qo'shma diametrlari ma'lum:

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 5x - 5y - 4 = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} 5y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Bu egri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Qo'shma diametrlarning burchak koeffitsiyentlari

$$c_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Berilgan diametrlarning burchak koeffitsiyentlari $k_1 = \frac{1}{3}$ va $k_2 = 1$; $k'_1 = 0$ va $k'_2 = 2$. Bu qiymatlarni ko'rsatilgan tenglamaga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3a_{11}x + 4a_{12} + a_{22} = 0 \\ a_{11} + 2a_{12} = 0 \end{cases}, \quad a_{11}:a_{12}:a_{22} = 2:-1:-2.$$

Izlangan egri chiziq markazining koordinatalarini ikki diametr tenglamalarini birgalikda yechib aniqlashimiz mumkin:

$$x_0 = \frac{1}{5}; \quad y_0 = \frac{3}{5}.$$

Bu koordinatalar $Fx_0 = 0$ va $Fy_0 = 0$ tenglamalarni, ya'ni berilgan holda $2x_0 - y_0 + a_{13} = 0$ va $-x_0 - 2y_0 + a_{23} = 0$ tenglamalarni qanoatlantirishi kerak; x_0 va y_0 ning qiymatlarini bu tenglamalarga qo'yib, $a_{13} = -1$ va $a_{23} = -1$ ni olamiz. Bundan tashqari egri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi, demak, $a_{33} = 0$ va egri chiziqning tenglamasi:

$$2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x - 2y = 0 \text{ yoki } x^2 - xy - y^2 - x - y = 0.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

12.1. Koordinata boshini ko'chirish yordamida ikkinchi tartibli chiziqlarni sinflarga ajratish. Markaziy va nomarkaziy chiziqlarga doir misollar.

12.1.1. Beshta nuqtadan o'tuvchi ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi tuzilsin: $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(2; -5)$, $(-5; 2)$.

12.1.2. Quyidagi egri chiziqlarning markazlari topilsin:

$$1) 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0;$$

$$2) 2xy - 4x + 2y + 11 = 0;$$

$$3) 4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 5y + 6 = 0;$$

$$4) x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0.$$

12.1.3. 1) Parallelogrammga tashqi chizilgan ikkinchi tartibli chiziqning markaziy chiziq ekanligi va markazi parallelogram diagonallarining kesishish nuqtasidan iboratligi isbotlansin.

2) Parallelogrammga ichki chizilgan ikkinchi tartibli chiziqning hamisha markaziy ekanligi va markaz parallelogram diagonallarining kesishish nuqtasida ekanligi ko'rsatilsin.

12.1.4. Uchburchakka ichki chizilgan ikkinchi tartibli chiziq markazi uchburchakning og'irlik markazi bo'lsa, bu chiziqning ellips ekanligi isbotlansin.

12.1.5. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida quyidagi:

$$1) 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0;$$

$$2) 2xy - 4x + 2y - 3 = 0;$$

$$3) x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0;$$

$$4) 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 2 = 0;$$

$$5) x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0.$$

ikkinchi tartibli chiziqlarning markaziy yoki nomarkaziy chiziq ekanligini aniqlang.

12.1.6. Quyidagi beshta nuqtadan o'tuvchi ikkinchi tartibli egri chiziqning tenglamasi tuzilsin:

$$(0; 0), (0; 2), (-1; 0), (-2; 1), (-1; 3).$$

12.1.7. Quyidagi nuqtalardan qanday ikkinchi tartibli egri chiziq o'tkazish mumkin: $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(6; 0)$, $(2; 2)$ va $(-2; 1)$.

12.1.8. To'rtta nuqta berilgan: $(0; 15)$, $(3; 0)$, $(5; 0)$ va $(2; 3)$. Bular orqali parabola tipidagi egri chiziq o'tkazilsin.

Ko'rsatma. Parabola tipidagi egri chiziq to'rtta shart bilan aniqlanadi, chunki uning koeffitsiyentlari orasida $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ munosabat mavjud bo'lishi kerak; demak, parabolik egri chiziqning tenglamasi faqat to'rtta erkli parametrغا ega.

12.1.9. Agar koordinatalar boshi $O'(1; 0)$ nuqtaga ko'chirilsa,

$$x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$$

egri chiziqning tenglamasi qanday shaklni oladi?

12.1.10. $xy - 6x + 2y + 3 = 0$ egri chiziq berilgan. Koordinatalar boshi $(-2; 6)$ nuqtaga ko'chirilgandan so'ng bu egri chiziqning almashingan tenglamasi topilsin.

12.1.11. $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$ egri chiziqning koordinatalar boshi $(-3; -1)$ nuqtaga ko'chirilgandan so'ng almashingan tenglamasi topilsin.

12.1.12. Quyidagi egri chiziqlarning markazlari topilsin:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

2) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0;$

3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0;$

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

5) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0;$

6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0.$

12.1.13. a va b parametrlarning qanday qiymatlarida

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0.$$

tenglama:

a) markaziy egri chiziqni;

b) parabola tipidagi egri chiziqni;

c) markazlar chizig'iga ega bo'lgan egri chiziqni ifodalaydi?

12.1.14. Quyidagi egri chiziqlarning markazlari topilsin:

1) $5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0;$

2) $3x^2 - 2xy + 4 = 0;$

3) $7xy - 3 = 0;$

4) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0;$

5) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$

12.1.15. Koordinatalar boshi $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$ egri chiziqning markaziga ko'chirilsa, uning tenglamasi qanday ko'rinishni oladi?

12.1.16. Koordinatalar boshini ko‘chirishdan foydalanib, quyidagi egri chiziqlarning tenglamalari soddalashtirilsin:

a) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$;

b) $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$;

c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$.

12.1.17. Umumiy $(x_0; y_0)$ markazga ega bo‘lgan hamma ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi tuzilsin.

12.1.18. Ikkinchi tartibli egri chiziqning koordinatalar boshidan va $A(0; 1)$, $B(1; 0)$ nuqtalardan o‘tadi. Bundan tashqari uning $C(2; 3)$ markazi ma’lum. Shu egri chiziqning tenglamasi tuzilsin.

12.1.19. $x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay + 1 = 0$ egri chiziqlar markazlarining geometrik o‘rni topilsin, bunda a – o‘zgaruvchi parametr.

12.1.20. To‘rtta $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 1)$ va $(1; 2)$ nuqtalardan o‘tuvchi hamma ikkinchi tartibli markaziy egri chiziqlar markazlarining geometrik o‘rni topilsin.

12.2. Ikkinchi tartibli egri chiziqning to‘g‘ri chiziq bilan kesilishi. Ikkinchi tartibli to‘g‘ri chiziqning diametriga doir misollar.

12.2.1. $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ chiziqning $x - 2y - 1 = 0$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil qilingan vatarining o‘rtasidan o‘tadigan diametr tenglamasi yozilsin.

12.2.2. $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ egri chiziqning $(-4; 2)$ nuqta orqali o‘tadigan diametri tenglamasi yozilsin.

12.2.3. $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x = 0$ egri chiziqning $2x - 3y = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan diametri tenglamasi yozilsin.

12.2.4. Ikki egri chiziqning umumiy diametri topilsin:

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

12.2.5. $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ chiziq va ikkita $A(2; 1)$ va $B(1; 4)$ nuqta berilgan. A nuqtadan o‘tuvchi diametrqa qo‘shma bo‘lgan B nuqtadan shunday vatar o‘tkazilsin.

12.2.6. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaning $N(5; 1)$ nuqtada teng ikkiga bo'linadigan vatarining tenglamasi tuzilsin.

12.2.7. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning o'qlari ular teng ikkiga bo'ladigan vatarlarga perpendikulyar bo'lgan yagona diametrlari ekanligini tekshiring.

12.2.8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga ichki chizilgan kvadratning uchlari topilsin va qanday giperbolalarga ichki kvadrat chizish mumkinligi tekshirilsin.

12.2.9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning $F(c; 0)$ fokusi orqali katta o'qiga perpendikulyar bo'lgan vatar o'tkazilgan. Bu vatar uzunligini toping.

12.2.10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsga ichki chizilgan kvadrat tomonining uzunligi hisoblansin.

12.2.11. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ellipsning $2x - y + 7 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ vatarlarining o'rtalari orqali o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

12.2.12. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsning $M(2; 1)$ nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatar tenglamasi tuzilsin.

12.2.13. $y^2 = 2px$ parabolaning fokusi orqali uning o'qiga perpendikulyar bo'lgan vatar o'tkazilgan. Bu vatarning uzunligini aniqlang.

12.2.14. $y^2 = 4x$ parabolaning $M(3; 1)$ nuqtada teng ikkiga bo'ladigan vatarini toping.

12.2.15. $x + y - 3 = 0$ to'g'ri chiziq va $x^2 = 4y$ parabola kesishgan nuqtani toping.

12.2.16. $3x + 4y - 12 = 0$ to'g'ri chiziq va $y^2 = -9x$ parabola kesishgan nuqtani toping.

12.2.17. $3x - 2y + 6 = 0$ to'g'ri chiziq va $y^2 = 6x$ parabola kesishgan nuqtani toping.

12.2.18. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ ellips bilan $y^2 = 24x$ parabolaning kesishish nuqtalarini toping.

12.2.19. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ giperbola va $y^2 = 3x$ parabola kesishgan nuqtalarini toping.

12.2.20. Ikki parabolaning kesishish nuqtalarini toping:

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad x = y^2 - 6y + 7.$$

12.2.21. $x + 2y - 7 = 0$ to'g'ri chiziq bilan $x^2 + 4y^2 = 25$ ellipsning kesishish nuqtalarini toping.

12.2.22. $3x + 10y - 25 = 0$ to'g'ri chiziq va $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ tenglama bilan berilgan ellipsning kesishish nuqtalarini toping.

12.2.23. $3x - 4y - 40 = 0$ to'g'ri chiziq va $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ tenglama bilan berilgan ellipsning kesishish nuqtalarini toping.

12.2.24. Agar to'g'ri chiziq va ellips quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, ularning o'zaro kesishishi, urinishi yoki umumiy nuqtaga ega emasligini aniqlang:

1) $2x - y - 3 = 0,$

2) $2x + y - 10 = 0,$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

3) $3x + 2y - 20 = 0,$

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$$

12.2.25. $y = -kx + m$ to'g'ri chiziq m ning qanday qiymatlarida $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ellipsni: 1) kesib o'tadi; 2) unga urinadi; 3) ushbu ellips tashqarisidan o'tadi.

12.2.26. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ giperbola va $2x - y - 10 = 0$ to'g'ri chiziq kesishmasining nuqtalarini toping.

12.2.27. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbola va $4x - 3y - 16 = 0$ to'g'ri chiziq kesishmasining nuqtalarini toping.

12.2.28. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbola va $2x - y + 1 = 0$ to'g'ri chiziq kesishmasining nuqtalarini toping.

12.2.29. m ning qanday qiymatlarida $y = 5x + m$ to'g'ri chiziq:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ giperbola bilan kesishadi; 2) urinma bo'ladi;

3) giperbolaning tashqarisidan o'tadi.

12.2.30. k va m ning qanday qiymatida $y = kx + m$ to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga urinadi.

12.3. Egri chiziqning diametrlari. Bosh o'qlar. Asimptotalar.
Egri chiziqning qo'shma yo'nalishlarga nisbatan tuzilgan tenglamasi; egri chiziqning asimptotalarga nisbatan tenglamasiga doir misollar.

12.3.1. Berilgan to'rtta $A(1; 0)$, $B(3; 2)$, $C(0; 2)$, $D(0; -2)$ nuqta orqali o'tadigan; AB va CD vatarlari o'zaro qo'shma yo'nalishlari ekanligini bilgan holda, ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasini yozing.

12.3.2. $3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10 = 0$, $3x^2 - 2xy - y^2 + 6x - 10 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqlar berilgan. Har bir chiziq uchun shunday qo'shma diametrlar juftini topingki, birinchi juft diametrlar ikkinchi juft diametrlarga parallel bo'lsin.

12.3.3. Giperbolaning asimptotalari topilsin:

$$10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0.$$

12.3.4. Quyidagi

1) $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$;

2) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y - 14 = 0$;

3) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$;

4) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y + 21 = 0$.

giperbolalarning asimptotalari topilsin.

12.3.5. $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ chiziqning absissa o'qi bilan kesishish nuqtalaridagi urinmalari tenglamalari tuzilsin.

12.3.6. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ chiziqning $3x + 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalari tenglamalari tuzilsin.

12.3.7. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqning Oy o'qiga parallel urinmalarining tenglamalari yozilsin.

12.3.8. $M(3; 4)$ nuqtadan $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ egri chiziqqa urinmalar o'tkazilsin.

12.3.9. $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0$, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$ tenglama berilgan.

- 1) Bu tenglamaning parabolani aniqlashi;
- 2) $\alpha x + \beta y + \gamma$ to'g'ri chiziqning diametr ekanligi;
- 3) $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqning diametr bilan parabolaning kesishish nuqtasidagi urinmasi ekanligi ko'rsatilsin.

12.3.10. Parabola: $(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$ tenglama bilan berilgan. Parabola uning ixtiyoriy $(x_0; y_0)$ nuqtasidan o'tkazilgan urinma tenglamasini va unga mos kelgan qo'shma diametr tenglamasini yozing.

12.3.11. Ikkinchi tartibli chiziqqa tashqi chizilgan parallelogrammning diagonallari berilgan chiziqning qo'shma diametrlari ekanligi isbotlansin.

12.3.12. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaga $M(5; -4)$ nuqtada urinadigan to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

12.3.13. $x^2 - y^2 = 8$ giperbolaga $N(3; -1)$ nuqtada urinadigan to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

12.3.14. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ giperbolaga $M(1; 4)$ nuqta orqali o'tadigan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

12.3.15. Berilgan $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ giperbolaga:

- 1) $3x - y - 17 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel;
2) $2x + 5y + 11 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari tuzilsin.

12.3.16. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $y = \pm \frac{1}{2}x$ va urinmalardan birining tenglamasi $5x - 6y - 8 = 0$ ma'lum bo'lsa, giperbola tenglamasini tuzing.

12.3.17. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ giperbolaga urinma va $4x + 3y - 7 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tenglamani tuzing.

12.3.18. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ giperbolaga urinma va $10x - 3y + 9 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tenglamani tuzing.

12.3.19. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ giperbolaga urinma va $2x + 4y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tenglamani tuzing va ular orasidagi masofa d ni toping.

12.3.20. $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ giperbola va $3x + 2y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa eng yaqin bo'lgan M_1 nuqtani toping va M_1 nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani hisoblang.

12.3.21. $N(-1; -7)$ nuqtadan o'tib, $x^2 - y^2 = 16$ giperbolaga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

12.3.22. $C(1; -10)$ nuqtadan $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$ giperbolaga urinma o'tkazilgan. C nuqtadan o'tuvchi tenglamasini tuzing.

12.3.23. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsning burchak koeffitsiyenti $k = \frac{2}{3}$ bo'lgan vatariga qo'shma diametrini aniqlang.

12.3.24. $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ elipsning $M(4; 3)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmasining tenglamasi tuzilsin.

12.3.25. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsning $N(10; 4)$ nuqta orqali o'tuvchi urunmalarining tenglamalarini tuzing.

12.3.26. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning $x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalarini aniqlang.

12.3.27. $3x^2 + 8y^2 = 45$ ellips markazidan 3 birlik uzoqlikdan o'tadigan urinmalarining tenglamalari tuzilsin.

12.3.28. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ellipsga tashqi chizilgan kvadrat tomonlarining tenglamalarini tuzing.

12.3.29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning ikkita qo'shma diametri orasidagi o'tkir burchakning o'zgarish chegaralarini aniqlang.

12.3.30. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning teng qo'shma radiuslarini toping.

13-MAVZU: IKKINCHI TARTIBLI SIRTLARNING KANONIK TENGLAMALARI.

Reja:

1. Ellipsoid va sfera.

2. Fazoda ba'zi sirtlarning tenglamalari va nomlanishi.

Tayanch iboralar: transtendent sirt, ellipsoid, siqma ellipsoid, cho'ziq ellipsoid, diametral tekislik, bir pallali giperboloid, ikki pallali giperboloid, sfera, konus, elliptik silindr, giperbolik silindr, parabolik silindr, elliptik paraboloid, giperbolik paraboloid.

13.1. Ellipsoid va sfera.

Sirtlar, ularning Dekart koordinatalariga nisbatan ifoda qilingan tenglamalarga qarab, tekislikdagi chiziqlar kabi, algebraik va transtendent sirtlarga bo'linadi. Shuning uchun algebraik sirt deb, shunday sirtga aytiladiki, agarda uni $f(x; y; z) = 0$ ko'rinishidagi tenglama bilan ifodalash mumkin bo'lsa va $f(x; y; z)$ esa x, y, z ga nisbatan polinom(ko'p hadli) bo'lsa, algebraik bo'lmagan hamma sirtlarni **transtendent sirtlar** deyiladi.

Algebraik sirtlar, o'z navbatida, turli tartibli sirtlarga bo'linadi. Agarda $f(x; y; z)$ polinomning darajasi n bo'lsa, unday sirlarni **n – tartibli sirt** deyiladi.

Dekart o'zgaruvchi x, y, z koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan ifoda qilingan sirt **ikkinchi tartibli sirt deyiladi**. Shuning uchun ikkinchi tartibli sirt ifoda qiladigan ikkinchi darajali algebraik tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1xy + B_2xz + B_3yz + C_1x + C_2y + C_3z + F = 0,$$

bunda $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, \dots, F$ koeffitsiyentlar haqiqiy o'zgarmas sonlardan iborat bo'lib, xususiyl holda ulardan ba'zilar nolga teng bo'lishi mumkin. Bu tenglamaning umumiyligiga xalal bermay uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0. \quad (13.1)$$

Tenglamani ushbu ko'rinishda yozsak, uning bilan bog'langan amallarni bajarish birmuncha qulay bo'ladi.

Koordinatalar sistemasini alamashtirish yordamida (13.1) tenglamani soddalashtirib, uni

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0 \quad (13.2)$$

yoki

$$A_1x^2 + A_2y^2 + 2C_3z = 0 \quad (13.3)$$

shaklga keltirish mumkin.

(13.2) tenglama bilan ifoda qilingan sirt ikkinchi tartibli **markazli sirt** deyiladi va (13.3) tenglama bilan ifoda qilingan sirt ikkinchi tartibli **markazsiz**(yoki markazi cheksizlikdagi) **sirt** deyiladi.

Faraz qilaylik, ikkinchi tartibli markazli sirtning eng sodda tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0 \quad (13.4)$$

va bundagi ozod had bo'lgan F ning ishorasi qolgan koeffitsiyentlarining ishorasiga teskari bo'lsin. Tenglamaning F

koeffitsiyentini o'ng tomonga o'tkazib, so'ngra uning ikkala tomonini $(-F)$ ga bo'lamiz:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = -F,$$

$$\frac{A_1x^2}{-F} + \frac{A_2y^2}{-F} + \frac{A_3z^2}{-F} = 1,$$

yoki

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A_1}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{A_2}} + \frac{z^2}{-\frac{F}{A_3}} = -1. \quad (13.5)$$

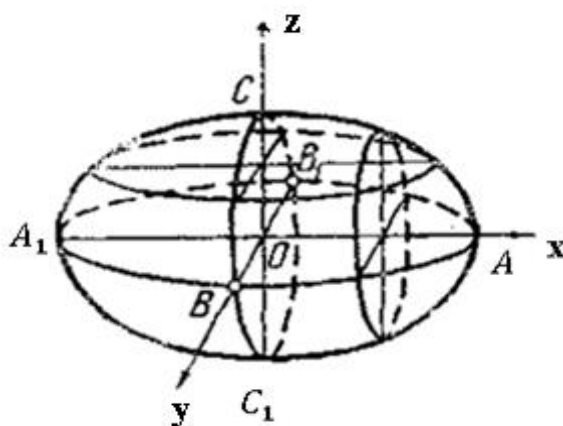
(13.4) tenglamaning koeffitsiyentlari to'g'risida qilingan farazga muvofiq F ning ishorasi qolgan koeffitsiyentlarning ishorasiga teskari bo'lgani uchun, (13.5) tenglamaning chap tomonidagi har bir kasrning maxraji musbat bo'ladi. Shuning uchun ulardan birinchisini a^2 , ikkinchisini b^2 va uchinchisini c^2 deb faqaz qilamiz:

$$-\frac{F}{A_1} = a^2, \quad -\frac{F}{A_2} = b^2, \quad -\frac{F}{A_3} = c^2, \quad (13.6)$$

demak, (13.5) tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (13.7)$$

Bu tenglama bilan ifoda qilingan sirt **ellipsoid** deyiladi.



13.1.1-chizma

Tenglamaning tuzilishiga qaraganda uning chap tomonidagi har bir kasrning qiymati birdan katta bo'la olmaydi, ya'ni

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

yoki

$$x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2, \quad z^2 \leq c^2,$$

demak,

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

Endi ellipsoidning shaklini tekshiramiz. Buning uchun eng avval uning koordinata o'qlari bilan uchrashgan nuqtalarini topamiz. Agar (13.7) tenglamada $y = 0, z = 0$ faraz qilinsa, $x = \pm a$ bo'ladi, ya'ni absissa o'qi ellipsoidni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $A(a; 0; 0)$ va $A_1(-a; 0; 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Shunga o'xshash $x = 0, z = 0$ faraz qilinsa, $y = \pm b$ bo'ladi, ya'ni ordinata o'qi ellipsoidni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $B(0; b; 0)$ va $B_1(0; -b; 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi; $x = 0, y = 0$ faraz qilinsa, $z = \pm c$ bo'ladi, ya'ni applikata o'qi ellipsoidni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $C(0; 0; c)$ va $C_1(0; 0; -c)$ nuqtalarda kesib o'tadi.

Aniqlangan nuqtalardan A — ellipsoidning yOz tekislikdan eng uzoqlashgan nuqtasi bo'ladi; shunga o'xshash qolgan nuqtalar ham tegishli koordinata tekisliklaridan eng uzoqlashgan nuqtalardan iborat. Shuning uchun ularni ellipsoidning boshlari deyiladi va har ikki nuqtalarning orasidagi $2a, 2b, 2c$ masofalar ellipsoidning ***o'qlari*** deyiladi. Ellipsoidning o'qlari to'g'risida qo'shimcha shart bo'lmagan holda $a > b > c$ faraz qilinadi. Tekshirishdan chiqarilgan natijalarga qaraganda ellipsoid yopiq sirtidan iborat, chunki u

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

tekisliklardan yasalgan parallelepipedning ichida bo'ladi.

Endi ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesilishidan hosil bo'lgan shakllarni tekshiramiz. Masalan, xOy tekisligi bilan kesish uchun $z = 0$ faraz qilishga to'g'ri keladi va bu holda (13.7) ning ko'rinishi ushbu ko'rinishida bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (13.8)$$

Shunga o'xshash $y = 0$ faraz qilinsa,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \quad (13.9)$$

va $x = 0$ faraz qilinsa,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1. \quad (13.10)$$

(13.8), (13.9), (13.10) tenglamalardan har biri ellipsni ifoda qiladi. Demak, ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesimlari ellipslardan iborat. Bular ellipsoidning **bosh kesimlari** deyiladi.

Endi ellipsoidni koordinata tekisliklariga parallel bo'lgan tekisliklar bilan kesib ko'ramiz. Masalan, xOy tekislikka parallel bo'lgan tekislikning tenglamasini birgalikda yechishga to'g'ri keladi.

$z = k$ ni (13.7) ga qo'yilsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1,$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

yoki

$$\frac{\frac{x^2}{a^2(c^2 - k^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^2(c^2 - k^2)}}{\frac{c^2}{c^2}} = 1,$$

yoki

$$\frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2} = a_1^2, \quad \frac{b^2(c^2 - k^2)}{c^2} = b_1^2 \quad (13.11)$$

faraz qilinsa, tenglamani ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad (13.12)$$

Bu tenglama ellipsni ifoda qiladi. Biroq, bu ellipsning haqiqiy bo'lishi uchun $|k| \leq c$ bo'lishi lozim, chunki (13.11) dagi tengliklarga qaraganda $|k| > c$ bo'lgan holda a_1 va b_1 mavhum bo'ladi. Shunga o'xshash ellipsoidni yOz va xOz tekisliklarga parallel bo'lgan tekislik bilan kesgan holda ham hamon shu kabi natija kelib chiqadi, ya'ni ellips hosil bo'ladi.

Ellipsoidning o'qlaridan ikkitasi o'zaro teng bo'lganda, unday ellipsoid **aylanma ellipsoid** deyiladi. Masalan, ellipsoidning (13.7) tenglamasida $a = b > c$ faraz qilinsa, u tenglamaning ko'rinishi

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (13.13)$$

bo'ladi va bu ellipsoid **siqma ellipsoid** deyiladi, chunki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipsning kichik o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladi.

Agar (13.13) da $z = 0$ deb faraz qilinsa,

$$x^2 + y^2 = a^2$$

bo'ladi, bu esa aylanani ifoda qiladi. Demak, (13.13) aylana ellipsoidning xOy tekisligi bilan kesimi aylanadan iborat. Shunga o'xshash, xOy tekisligiga parallel bo'lgan tekislik bilan (13.13) ni kesganda yana aylana hosil bo'ladi. Agar (13.7) tenglamada $a > b = c$ faraz qilinsa, u tenglamaning ko'rinishi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \quad (13.14)$$

bo'ladi va bu ellipsoid **cho'ziq ellipsoid** deyiladi, chunki u

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ellipsning katta o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladi. Agar (13.14) da $x = 0$ faraz qilinsa, $y^2 + z^2 = b^2$ bo'ladi, ya'ni cho'ziq ellipsoidning yOz tekisligiga parallel bo'lgan tekislik bilan (13.14) ni kesganda, yana aylana hosil bo'ladi.

Ellipsoidning o'qlari o'zaro teng bo'lgan holda ya'ni $a = b = c$ bo'lganda (13.7) tenglamaning ko'rinishi

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (13.15)$$

bo'ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida bo'lgan radiusi a ga teng bo'lgan **sferani** ifoda etadi.

13.2. Fazoda ba'zi sirtlarning tenglamalari va nomlanishi.

Endi bir nechta sirtlarning tenglamalarini va nomlarini keltirib o‘tamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{bir pallali giperboloid};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \text{ikki pallali giperboloid};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 - \text{konus};$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{elliptik silindr};$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{giperbolik silindr};$$

$$y^2 = 2px - \text{parabolik silindr};$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z - \text{elliptik paraboloid}; (p > 0, q > 0).$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z - \text{giperbolik paraboloid}; (p > 0, q > 0).$$

Bu sirtlar ham ellipsoid kabi tahlil qilinadi. Tahlilni o‘quvchiga qoldiramiz.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar.

13.1.1 - 13.1.30 mashqlarda berilgan sirtlarning:

- 1) koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini;
- 2) koordinata tekisliklari bilan kesishgan nuqtalarining geometrik o‘rnini;
- 3) koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesishgan nuqtalarining geometrik o‘rnini aniqlang.

13.1.1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{121} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.4. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.

- 13.1.7. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.8. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.9. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.10. $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{4} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.14. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = -1$ (ikki pallali giperboloid) tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.15. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{81} + \frac{z^2}{36} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.16. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{49} - \frac{z^2}{16} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.17. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.18. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.19. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{100} - \frac{z^2}{81} = 0$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.20. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.21. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{49} = 0$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elliptik silindr) tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.23. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.24. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (giperbolik silindr) tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.25. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.26. $y^2 = -2x$ tenglama bilan berilgan sirt.
- 13.1.27. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (elliptik paraboloid) tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.28. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 2z$ tenglama bilan berilgan sirt.

13.1.29 - 13.1.30 mashqlarda tenglama bilan berilgan sirtlarni simmetriklikka tekshiring.

13.1.29. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

13.1.30. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$; 4) $y^2 = 2px$.

SINOV TESTI

1. Matritsa mazmuni qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

- A) sonlar yig'indisi
- B) sonlar ko'paytmasi
- C) sonlar jadvali
- D) sonlar to'plami

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.

- A) 3×3
- B) 3×2
- C) 2×2
- D) 2×3

3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ matritsaning elementlari bo'yicha $a_{13} + a_{21}$

yig'indini toping.

- A) -4
- B) 5
- C) 4
- D) -5

4. Birlik matritsani ko'rsating.

- A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ matritsa bo'yicha $2A$ matritsani toping.

- A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$
- B) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$
- C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 9 \end{pmatrix}$
- D) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

6. Qanday matritsalar qo'shish va ayirish mumkin?

- A) ustunlar soni bir xil bo'lgan matritsalar
- B) satrlar soni bir xil bo'lgan matritsalar
- C) har qanday matritsalar
- D) faqat kvadrat matritsalar

7. Ushbu M va N matritsalarining $M + N$ yig'indisini toping:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
- C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
- D) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

8. Quyidagi A va B matritsalarining $A \cdot B$ ko'paytmasini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A) $AB = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ B) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ C) $AB = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ D) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

A) 26 B) -26 C) 1414 D) 0

10. $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ tenglamani yeching.

A) $x = 7$ B) $x = -1$ C) $x = 2$ D) $x = 4$

11. Ushbu determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -2

12. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

A) $x = 1$ B) $x = 2,5$ C) $x = 0,5$ D) $x = 0$

13. Ushbu IV- tartibli determinant qiymatini toping:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

A) $x = 24$ B) $x = -300$ C) $x = 300$ D) $x = 0$

14. Ushbu determinantning A_{23} algebraik to'ldiruvhisini hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

A) 0 B) 7 C) -7 D) 35

15. Agar $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bo'lsa, M^{-1} teskari matritsani toping.

A) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsientlarining yig'indisini toping:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

A) 5 B) 10 C) 0 D) 15

17. Matritsaviy ko'rinishdagi $AX = B$ tenglamani yeching:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

A) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ B) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ C) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ D) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

18. Quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi haqidagi qaysi tasdiq o'rinli?

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

A) Sistema cheksiz ko'p yechimga ega

B) Sistema yagona yechimga ega

C) Sistema yechimga ega emas

D) Sistemaning yechimi nollardan iborat

19. Tenglamalar sistemasini yeching va $x_1^2 + x_2^2$ ifodaning qiymatini aniqlang:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

A) 2 B) 1 C) 5 D) 3

20. Ushbu 2 noma'lumli 3 ta chiziqli tenglamalar sistemaning yechimini toping:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases}.$$

A) $\begin{cases} x_1 = C/4 \\ x_2 = C \end{cases}$ B) $\begin{cases} x_1 = 3C/4 \\ x_2 = C \end{cases}$ C) $\begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 1/4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x_1 = 3C/4 \\ x_2 = C/4 \end{cases}$

21. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ va $\vec{b} = 2\vec{j}$ bo'lsa, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlarning koordinatalarini ko'rsating.

A) $(-4; 12)$ B) $(-4; 0)$ C) $(4; 0)$ D) $(2; -6)$

22. To'rtburchakning uchi $M(2; 4)$, $N(-4; 0)$ va $P(2; -2)$ uchlari berilgan. Agar $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{QP}$ bo'lsa, Q uchining koordinatalarini toping.

A) $(-7; -2)$ B) $(3,5; -1)$ C) $(7; -1)$ D) $(3,5; 2)$

23. $\vec{m}(-1; 2)$, $\vec{p}(4; -2)$, va $\vec{n}(2; -3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ vektorni $\vec{m}$ va $\vec{p}$ vektorlar orqali ifodalang.

A) $-\frac{5}{3}\vec{m} + \frac{1}{3}\vec{p}$ B) $-\vec{m} + 2\vec{p}$

C) $3\vec{m} - 4\vec{p}$ D) $2\vec{m} + \vec{p}$

24. Agar $A(-5; 2; 8)$ nuqta va $\overrightarrow{AB}(-3; 4; 1)$, $\overrightarrow{BD}(-2; 4; 1)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $ABCD$ parallelogram C uchining koordinatalari yig'indisini toping.

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12

25. $\vec{a}(1; 4/3)$ vektor berilgan. $3\vec{a}$ vektorning modulini toping.

A) 4,5 B) 3,5 C) 5 D) 5,5

26. $\vec{a}(1; 2; 3)$ va $\vec{b}(4; -2; 9)$ bo'lsa, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

A) 5,5 B) 4 C) 13 D) 8

27. $\vec{a}(-2; 6; 3)$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan birlik vektorning koordinatalarini toping.

A) $(\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7})$ B) $(-1; -3; -1)$

C) $(-\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2})$ D) $(-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7})$

28. $\vec{a}(3; 1)$ va $\vec{b}(1; 3)$ vektorlarga qurilgan parallelogram diagonallarining uzunliklari yig'indisini toping.

- A) $2\sqrt{2}$ B) 6 C) $6\sqrt{2}$ D) 8
29. $|\vec{a}| = \sqrt{137}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ va $|\vec{a} - \vec{b}| = 18$ bo'lsa, $|\vec{b}|$ ni toping.
- A) $11\sqrt{6}$ B) 15 C) 12 D) 8
30. $\vec{a}(4; -12; z)$ vektorning moduli 13 ga teng bo'lsa, z ning qiymatini toping.
- A) 3 B) 4 C) -3 D) ± 3
31. Absissa o'qiga nisbatan $M(-3; 5)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.
- A) $(-3; -5)$ B) $(3; 5)$ C) $(3; -5)$ D) $(-3; 5)$
32. Uchlari $A(2; 4)$, $B(-3; -2)$, $C(-3; 4)$ va $D(2; -2)$ nuqtalarda bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni perimetrini toping.
- A) 10 B) 23 C) 40 D) 22
33. Ordinata o'qiga nisbatan $M(-4; -9)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani toping.
- A) $(4; 9)$ B) $(4; -9)$ C) $(-4; -9)$ D) $(-4; 9)$
34. Uchlari $A(1; 1)$, $B(-2; 1)$ va $C(1; 7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.
- A) 9 B) 18 C) 8 D) 5
35. $ABCD$ parallelogrammda $A(1; 3)$ va $C(-5; 7)$ bo'lsa, uning digonallar kesishgan nuqtasi koordinatasini toping.
- A) $(5; 2)$ B) $(-4; 3)$ C) $(-2; 5)$ D) $(2; 1)$
36. $ABCD$ rombda $B(4; 3)$ uchi va $O(2; 1)$ diagonallar kesishgan nuqtasi koordinatasi bo'lsa, uning $D(x; y)$ uchi koordinatasini toping.
- A) $(1; 2)$ B) $(0; -1)$ C) $(2; 2)$ D) $(1; 3)$
37. Agar $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ va $\varphi = 30^\circ$ bo'lsa, $|\vec{a}\vec{b}| = ?$
- A) 20 B) 10 C) $10\sqrt{3}$ D) 41
38. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 0; 4)$ va $\vec{c}(5; -2; 0)$ vektorlarning aralash ko'paytmasi $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ hisoblansin.
- A) 0 B) 23 C) -46 D) -23
39. m parametrning qanday qiymatlarida $\vec{a}(2; 0; 1)$, $\vec{a}(1; 1; m)$, va $\vec{c}(-1; 3m; 1)$ vektorlar komplanar bo'ladi?

A) 1 va $-0,5$

B) 1 va -1

C) $0,5$ va 1

D) $0,5$ va -1

40. $\vec{a}(2; 4; 1)$ va $\vec{b}(-1; 1; 3)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

A) $(11; -7; 6)$

B) $(11; 3; 8)$

C) $(13; 7; 6)$

D) $(14; 7; 1)$

41. $\vec{a}(-2; 1; 3)$ va $\vec{b}(0; 1; 2)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

A) $(-3; 7; -6)$

B) $(11; -3; 8)$

C) $(-1; 4; -2)$

D) $(14; -7; -1)$

42. $\vec{a}(1; 2; 1)$ va $\vec{b}(1; -1; 3)$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

A) $(-1; -7; 6)$

B) $(7; -2; -3)$

C) $(-3; 7; -6)$

D) $(-4; -7; 1)$

43. $\vec{a}(1; 0; 4)$ va $\vec{b}(3; -2; 4)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A) 19

B) 15

C) 13

D) 14

44. $\vec{a}(3; -1; 2)$ va $\vec{b}(3; 1; 0)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A) 19

B) 8

C) 5

D) 6

45. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

A) $(3; 2)$

B) $(1; -1)$

C) $(1; 1)$

D) $(3; 3)$

46. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

A) $(3; -2)$

B) $(7; -1)$

C) $(1; 1)$

D) $(3; 3)$

47. $\vec{a} = 8\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchakni aniqlang.

A) 90^0

B) 30^0

C) 0^0

D) 60^0

48. $\vec{a}(1; 2)$ va $\vec{b}(2; 1)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini toping.

A) $1/5$

B) $3/5$

C) $4/7$

D) $2/3$

49. $\vec{a}(1; 6; -4)$, $\vec{b}(-3; 2; 7)$ va $\vec{c}(-5; -6; 2)$ vektorlar berilgan bo'lsa $[\vec{a} \ \vec{b}] \vec{c}$ aralash ko'paytmani toping.

A) -240 B) 240 C) 244 D) 144

50. $\vec{a}(1; 6; -4)$, $\vec{b}(-3; 2; 7)$ va $\vec{c}(-5; -6; 2)$ vektorlar berilgan bo'lsa $[\vec{a} \ \vec{c}] \vec{b}$ aralash ko'paytmani toping.

A) 156 B) 240 C) -240 D) 144

51. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak tashkil qiladi. $|\vec{a}| = 3$ va $|\vec{b}| = 4$ bo'lsa, $\vec{a} \vec{b}$ ni toping.

A) 4 B) 6 C) -6 D) -9

52. $\vec{a}(5; 2)$, $\vec{b}(7; -3)$ vektorlar berilgan. Bir vaqtning o'zida ikkita $\vec{a} \vec{x} = 38$, $\vec{b} \vec{x} = 30$ tenglamani qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektor topilsin.

A) $(-6; 4)$ B) $(6; 4)$ C) $(-4; 6)$ D) $(6; -4)$

53. Tomonlari birga teng bo'lgan teng tomonli ABC uchburchak berilgan. $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ deb $\vec{a} \vec{b} + \vec{b} \vec{c} + \vec{a} \vec{c}$ ifoda hisoblansin.

A) $-\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$

54. $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k}$ vektorlar α ning qanday qiymatida o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

A) -6 B) 3 C) -3 D) 2

55. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bir-birlari bilan 60° ga teng bo'lgan burchak tashkil qilsa, hamda $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ va $|\vec{c}| = 6$ berilgan bo'lsa, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorning modulini aniqlang.

A) 12 B) 10 C) 9 D) 11

56. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$

A) 3 B) 4 C) -3 D) 2

57. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ -4 & -21 \end{vmatrix} = 1$

A) 17 B) 14 C) 15 D) -17

58. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

- A) 92 B) 100 C) -87 D) 102

59. Determinantni hisoblang. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 8 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

- A) 51 B) 207 C) -43 D) 0

60. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} 3y - x = -17 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$$

- A) (5; -2) B) (2; -5) C) (-2; 5) D) (-5; 2)

61. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}$$

- A) (-3; 2; 1) B) (2; 3; -1) C) (1; 2; 3) D) (3; 2; -1)

62. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ burchak hosil qiladi. $|\vec{a}| = 1$,

$|\vec{b}| = 2$ ni bilgan holda, quyidagini hisoblang: $[\vec{a} \vec{b}]^2$.

- A) 3 B) 4 C) 9 D) 2

63. $\vec{a}(3; -1; -2)$ va $\vec{b}(1; 2; -1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmalar koordinatasini toping: $[\vec{a} \vec{b}]$.

- A) (5; -1; 7) B) (-3; 1; -7) C) (5; 1; -4) D) (5; 1; 7)

64. $\vec{a}(3; -1; -2)$ va $\vec{b}(1; 2; -1)$ vektorlar berilgan. Vektor ko'paytmaning koordinatasini toping: $[(2\vec{a} + \vec{b})\vec{b}]$.

- A) (5; 1; 6) B) (10; 2; 14) C) (2; 5; 3) D) (4; 1; 5)

65. $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ va $C(3; 2; 1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko'paytmaning koordinatasini toping: $[\overrightarrow{AB} \overrightarrow{BC}]$.

- A) (8; 2; -4) B) (5; 3; 12) C) (6; -4; -6) D) (3; -2; 5)

66. $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$ va $C(3; 2; 1)$ nuqtalar berilgan. Vektor ko'paytmalar koordinatalarini toping: $[(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})\overrightarrow{CB}]$.

A) $(12; -8; 12)$ B) $(10; 4; -6)$ C) $(-11; 6; 4)$ D) $(-12; 8; 12)$

67. $\vec{a}(2; -2; 1)$ va $\vec{b}(2; 3; 6)$ vektorlar orasidagi burchak sinusini hisoblang.

A) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{17}}{21}$ B) $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{17}}{21}$

C) $\sin\alpha = -\frac{5\sqrt{17}}{21}$ D) $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{21}$

68. $A(3; -2; 5)$, $B(1; 4; -3)$ va $C(-6; 2; 4)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, $[\overrightarrow{BC} \overrightarrow{AC}]\overrightarrow{AB}$ aralash ko'paytmasini toping.

A) -13 B) -28 C) 0 D) 28

69. $C(-2; 4; 3)$, $D(1; -5; 6)$ va $E(3; 7; -4)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, $(2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{DE})(\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CE})(2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED})$ aralash ko'paytmasini toping.

A) -3 B) 0 C) 3 D) -2

70. $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$ va $\vec{c} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $[\vec{a} \vec{c}]\vec{b}$ aralash ko'paytmasini toping.

A) 240 B) 244 C) -240 D) 120

71. $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$ va $\vec{c} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $(\vec{b} + 2\vec{a})(\vec{c} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{c})$ aralash ko'paytmasini toping.

A) -920 B) 940 C) 960 D) -930

72. $\vec{a}(6; -4; 8)$ va $\vec{b}(-2; 4; 0)$ vektorlar berilgan bo'lsa:

$\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2})\right]$ topilsin.

A) $(24; 12; -12)$ B) $(-14; 13; 12)$

C) $(12; 24; -12)$ D) $(-24; -12; 12)$

73. $\vec{a}(8; 4; 1)$ va $\vec{b}(2; -2; 1)$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuzi hisoblansin.

A) $8\sqrt{3}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{2}$

74. Berilganlarga ko'ra $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping. $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$.

- A) 1 B) -1 C) 0 D) -2

75. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{k}.$$

- A) 1 B) -1 C) 0 D) -2

76. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ burchak tashkil qiladi va $\vec{c}$ vektor bilan perpendikulyar. $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ va $|\vec{c}| = 4$ berilgan bo'lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ni toping.

- A) 20 B) 36 C) -12 D) 24

77. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $([\vec{a}\vec{c}]\vec{b})$ ni toping.

- A) -15 B) 12 C) 15 D) 10

78. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $[(\vec{a} - 2\vec{c})(3\vec{b} - 2\vec{a})]$ ni toping.

- A) (5; -40; 5) B) (40; 15; -5)
C) (-5; 40; -5) D) (-15; 45; 5)

79. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]\vec{c}$ ni toping.

- A) -146 B) -156 C) 180 D) -180

80. $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ va $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $[\vec{a}[\vec{a}\vec{c}]] [\vec{b}[\vec{a}\vec{c}]]$ ni toping.

- A) 1926 B) 1350 C) 2120 D) 2020

81. Quyida berilgan aylana tenglamasidan aylana markazi va radiusi topilsin.

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

- A) $R = 3$, (0; 3); C) $R = 9$, (0; 3);
B) $R = 3$, (0; -3); D) $R = 9$, (0; -3).

82. Ellipsning yarim o'qlarini toping: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

A) ± 3 va ± 5

C) 3 va 5

B) ± 5 va ± 3

D) 5 va 3

83. Quyidagilardan qaysi biri ellips tenglamasini ifodalaydi?

A) $x^2 + 25y^2 = 4$

C) $x^2 - 16y^2 = 16$

B) $x^2 + 9y^2 = 0$

D) $x^2 - y^2 = 1$

84. Radiusi $R = 5$, markazi $(2; -4)$ nuqtada bo'lgan aylana tenglamasini toping.

A) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 5 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

D) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

85. Ellips fokuslarining koordinatalarini toping: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

A) $(\pm 6; 0)$

C) $(6; 0)$

B) $(0; \pm 6)$

D) $(0; -6)$

86. Quyidagi ellips tenglamasining eksentrisitetini aniqlang:

$x^2 + 4y^2 = 1$

A) $\varepsilon = \sqrt{3}$

C) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B) $\varepsilon = \pm\sqrt{3}$

D) $\varepsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

87. Direktrisalari $x = \pm\frac{7}{2}$ eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{7}}$ bo'lgan ellips tenglamasi topilsin.

A) $7x^2 + 3y^2 = 21$

C) $3x^2 + 7y^2 = 1$

B) $7x^2 + 3y^2 = 1$

D) $3x^2 + 7y^2 = 21$

88. Quyidagi ellips tenglamasining fokuslari orasidagi masofani aniqlang: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$

A) 8

B) 12

C) 18

D) 24

89. Yarim o'qlari 2 va 5 bo'lgan ellips tenglamasini ko'rsating.

A) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

C) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

B) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

D) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

90. Tekislikda berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rniga deyiladi.

- A) ellips
B) aylana
C) shar
D) giperbola

91. Parabola tenglamasining umumiy ko'rinishini ko'rsating.

- A) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
B) $x^2 + y^2 = R^2$
C) $y^2 = 2px$
D) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

92. $y^2 = 8x$ parabolaning direktrisasini toping.

- A) $y = 2$
B) $y = -2$
C) $x = 2$
D) $x = -2$

93. Direktrisasi $y = -6$ bo'lgan parabola tenglamasini aniqlang.

- A) $y^2 = 24x$
B) $x^2 = 24y$
C) $y^2 = -24x$
D) $x^2 = -24y$

94. $y^2 = 12x$ parabola tenglamasining fokusi nimaga teng?

- A) $F(0; 3)$
B) $F(0; -3)$
C) $F(3; 0)$
D) $F(-3; 0)$

95. Agar $F(-5; 0)$ fokus va direktrisa tenglamasi $x = 5$ bo'lsa, parabola tenglamasini tuzing.

- A) $y^2 = -20x$
B) $y^2 = 20x$
C) $y^2 = -10x$
D) $y^2 = 10x$

96. Quyidagi nuqtalardan qaysilari $y^2 = 18x$ parabolaga tegishli?

- A) $A(2; 6)$
B) $B(2; 36)$
C) $C(1; 18)$
D) $D(-1; 18)$

97. Ushbu nuqtalar tegishli bo'lgan parabola tenglamasi toping?

$A(-7; 7), B(-1; \sqrt{7})$.

- A) $y^2 = -6x + 7$
B) $y^2 = -7x$
C) $y^2 = -2x + 5$
D) $y^2 = -\sqrt{7}x$

98. Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo'lgan masofa 4 ga teng. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

- A) $y^2 = 16x$
B) $y^2 = -16x$
C) $y^2 = -8x$
D) $y^2 = 8x$

99. $y^2 = 20x$ parabola tenglamasi berilgan. Fokal radiusi 10 ga teng bo'ladigan M nuqtani toping.

- A) $(8; -11), (8; 11)$ C) $(11; -8), (11; 8)$
 B) $(-11; 8), (11; 8)$ D) $(-8; 11), (8; 11)$

100. $x^2 = 10y$ parabola $(5; 7)$ nuqtadan o'tganda ushbu nuqtada fokal radius topilsin.

- A) $\sqrt{41}$ C) $\sqrt{26}$
 B) $\sqrt{53}$ D) $\sqrt{50}$

101. Giperbola tenglamasi uchun qaysi shart bajarilganda teng yonli giperbola deyiladi?

- A) $a \neq b$ C) $a > b$
 B) $a < b$ D) $a = b$

102. Haqiqiy o'qi 10, mavhum o'qi 8 ga teng bo'lgan giperbola tenglamasi topilsin.

- A) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1$ C) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{8} = 1$
 B) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ D) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$

103. Fokuslari orasidagi masofa $2c = 8$, eksentrisiteti $\varepsilon = \frac{4}{3}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasini aniqlang.

- A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ C) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$
 B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$

104. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning ikki asimptotasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi har doim ga teng bo'ladi.

- A) $\frac{ab}{a^2+b^2}$ C) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$
 B) $\frac{a^2b^2}{a+b}$ D) $\frac{ab}{a+b}$

105. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$ giperbola tenglamasi berilgan bo'lsa, uning yarim o'qlari topilsin.

- A) 3 va 8 C) -8 va -3

113. $A(3; \frac{\pi}{6})$ nuqtani qutb o'qi atrofida $\frac{3\pi}{4}$ burchakka musbat yo'nalishda burilsa bu nuqtaning koordinatalarini aniqlang.

- A) $(3; \frac{17\pi}{12})$ B) $(3; \frac{2\pi}{3})$ C) $(-3; \frac{2\pi}{5})$ D) $(3; \frac{5\pi}{6})$

114. Qutb koordinatalar sistemasida $A(8; -\frac{2\pi}{3})$ va $B(6; \frac{\pi}{3})$ nuqtalar berilgan. AB kesma o'rtasining koordinatalarini toping.

- A) $(3; -\frac{2\pi}{3})$ B) $(2; \frac{\pi}{3})$ C) $(1; -\frac{2\pi}{3})$ D) $(1; \frac{2\pi}{3})$

115. Dekart koordinatalar sistemasida $M(\sqrt{3}; 1)$ nuqta berilgan. Uni qutb koordinatalarini toping.

- A) $(2; \frac{\pi}{6})$ B) $(1; \frac{2\pi}{3})$ C) $(2; \frac{\pi}{3})$ D) $(3; \frac{\pi}{3})$

116. Qutb koordinatalarida a radiusli, markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasini toping.

- A) $r = 2a$ B) $r = a$ C) $r = a^2$ D) $r = 3a$

117. Qutb koordinatalar sistemasida $M(3; \frac{5\pi}{6})$ va $N(2; \frac{\pi}{6})$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

- A) $\sqrt{19}$ B) 2 C) 3 D) $\sqrt{5}$

118. Qutb koordinatalar sistemasida $r = \frac{2}{1-\cos\varphi}$ tenglama bilan berilgan chiziqni dekart koordinatalar sistemasida tenglamasini toping.

- A) $y^2 = 4(x + 1)$ B) $y^2 + x^2 = 1$
C) $x = y^2$ D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

119. Qutb koordinatalar sistemasida $M(3; \frac{5\pi}{6})$ va $N(4; \frac{\pi}{3})$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

- A) 6 B) 3 C) 7 D) 5

120. $\rho = \frac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ parabolaning direktrisa tenglamasini toping.

- A) $x = 5$ B) $x = -3$ C) $x = -1$ D) $x = -2$

121. Quyidagi $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ egri chiziqni markazi topilsin.

- A) $(-1; 1)$ B) $(-\frac{1}{8}; \frac{5}{8})$ C) $(\frac{1}{2}; -4)$ D) $(2; -3)$

122. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$ berilgan ikkinchi tartibli chiziqning turini aniqlang.

A) giperbola B) parabola C) parallel to'g'ri chiziqlar D) ellips

123. Ushbu $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqning eksentrisitetini aniqlang.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{7}{5}$

124. Quyidagi $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$ egri chiziqning asimptotalarini toping.

A) $\pm \frac{2}{3}x$ B) $\pm \frac{5}{2}x$ C) $\pm \frac{4}{3}x$ D) $\pm \frac{1}{3}x$

125. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$ ellipsning fokuslari orasidagi masofani aniqlang.

A) 5 B) 6 C) 10 D) 8

126. Ushbu $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqning tipini aniqlang.

A) giperbola B) parallel to'g'ri chiziqlar C) ellips D) parabola

127. Quyidagi $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning direktrisasini aniqlang.

A) $x = -\frac{5}{3}$ B) $x = -\frac{7}{2}$ C) $x = -\frac{4}{3}$ D) $x = -\frac{5}{2}$

128. Ushbu $5x^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0$ egri chiziqning haqiqiy o'qining burchak koeffitsiyentini aniqlang.

A) $k = \frac{1}{3}$ B) $k = \frac{3}{4}$ C) $k = \frac{2}{3}$ D) $k = \frac{1}{2}$

129. Quyidagi $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqning markazi qaysi nuqtada joylashgan?

A) (1; 1) B) (-2; 3) C) (-3; 1) D) (-1; 1)

130. $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning turini aniqlang.

A) parabola B) ellips C) parallel to'g'ri chiziqlar D) giperbola.

SINOV TESTI JAVOBLARI

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	D	C	A	B	D	A	A	A
1	A	B	C	D	B	A	C	D	B	A
2	C	C	B	A	D	C	C	D	C	B
3	D	A	D	B	A	C	B	B	C	A
4	A	C	B	A	B	C	A	A	B	A
5	B	C	B	D	A	B	A	C	B	D
6	B	D	A	D	B	C	D	A	C	B
7	A	C	D	B	A	D	B	A	C	D
8	B	A	C	A	D	B	C	D	B	A
9	B	C	D	B	C	A	A	B	D	C
10	A	D	B	B	C	A	D	C	B	A
11	C	B	D	A	C	A	B	A	A	D
12	C	B	A	C	A	C	B	D	C	A
13	D									

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti Toshkent. 2008 y.
2. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to‘plami. T.Universitet, 586 b, 2005 y.
3. Погорелов А.В. Аналитик геометрия. Т., Ўқитувчи, 1983 й.
4. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 1962 г.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия . М. Наука, 1981 г.
6. Т.Ш.Шодиев., Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Ўқитувчи. 1984 й.
7. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М. Наука, 1976 г.
8. Қори-Ниёзий Т.Н., Аналитик геометрия асосий курси. Фан. 1971 й
9. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва., Наука, 1980 г.
10. Т.Н.Rasulov., G‘.G‘.Qurbonov., Z.N.Hamdammov. Analitik geometriyadan misol va masalalar. O‘quv qo‘llanma., Durdona nashriyoti. 2021 y.

T.H.RASULOV
G'.G'.QURBONOV

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYADAN
MASALALAR TO'PLAMI

o'quv qo'llanma

<i>Muharrir:</i>	<i>A. Qalandarov</i>
<i>Texnik muharrir:</i>	<i>G. Samiyeva</i>
<i>Musahhih:</i>	<i>Sh. Qahhorov</i>
<i>Sahifalovchi:</i>	<i>M. Ortiqova</i>

Nashriyot litsenziyasi AI № 178. 08.12.2010. Original-maketdan bosishga ruxsat etildi: 06.09.2022. Bichimi 60x84. Kegli 16 shponli. «Times New Roman» garn. Ofset bosma usulida bosildi. Ofset bosma qog'oz. Bosma tobog'i 15,2. Adadi 100. Buyurtma №441.

Buxoro viloyat Matbuot va axborot boshqarmasi
“Durdona” nashriyoti: Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy.
Bahosi kelishilgan narxda.

“Sadriddin Salim Buxoriy” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri Muhammad Iqbol ko'chasi, 11-uy. Tel.: 0(365) 221-26-45