SCIENCE AND EDUCATION

ISSN 2181-0842
VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

SCIENCE AND EDUCATION

SCIENTIFIC JOURNAL

ISSN 2181-0842

VOLUME 2, ISSUE 11

NOVEMBER 2021

www.openscience.uz

TABLE OF CONTENTS / МУНДАРИЖА

EXACT SCIENCES / АНИҚ ФАНЛАР

NATURAL SCIENCES / ТАБИИЙ ФАНЛАР

О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения

Хайдар Раупович Расулов
xrasulov71@mail.ru
Бухоро давлат университети

Аннотация: В данной статье дается более подробный обзор об истоки теории асимптотического разложение и ее применение. Приведены вычисление несколько несобственных интегралов методом интегрирования по частям. Также указан метод вычисление этих интегралов разложив подынтегральную функцию в ряд Тейлора. Изучены поведения ошибки в зависимости от n и x.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, графы, алгоритм, интегрирование, несобственный интеграл, неустранимая ошибка, функциональный ряд.

About the concept of asymptotic decomposition and its some applications

Xaydar Raupovich Rasulov
xrasulov71@mail.ru
Bukhara State University

Abstract: The article provides a more detailed overview of the origins of the asymptotic expansion theory and its applications. Several improper integrals are calculated by the method of integration by parts. Also a method for calculating these integrals by expanding the integrand in a Taylor series is indicated. The behavior of the error depending on n and x is studied.

Keywords: asymptotic expansion, graphs, algorithm, integration, improper integral, fatal error, functional series.

Известно, что в настоящее время теория асимптотического разложения является актуальной темой, из-за многочисленного применения. В этой связи, считается целесообразным освещать более подробно данную тему. Чтобы заинтересовать студентов приведен обзор об истоки теории асимптотического разложение и ее применение, а также в качества примера вычислены два несобственных интегралов с разными методами.

Отметим, что как Пуанкаре А. в 1886 году ввёл понятие асимптотического ряда, в курсах математического анализа появились разделы, посвящённые асимптотическим разложениям. Однако на первой половине XX века этот раздел не получил глубокого интереса со стороны математиков. К середине века асимптотические главы не только не выросли в монографии, но в большинстве курсов вовсе исчезли. Оканчивая университет, студенты не знали ни метода перевала, ни явлений Стокса.

За последние 60 лет положение коренным образом изменилось. Появились и продолжают выходить десятки монографий по асимптотическим методам. Издаётся межвузовский сборник «Асимптотические методы в теории систем». Во многих курсах анализа, дифференциальных уравнений, комплексной переменной, математической физики асимптотические разделы заняли прочное место. В университетах одновременно читается несколько спецкурсов, раскрывающих роль асимптотических методов в теории колебаний, задачах дифракции, теории рассеяния и других областях прикладной математики.

Это связано с внедрением в деятельности человечество компьютерных технологий и расширением области применения асимптотического анализа.

Так, асимптотический анализ является ключевым инструментом изучения дифференциальных уравнений, возникающих в математическом моделировании явлений реального мира. Как правило, применение асимптотического анализа направлено на исследование зависимости модели от некоторого безразмерного параметра, который предполагается пренебрежимо малым в масштабах решаемой задачи.

Можно отметить, что асимптотические разложения, как правило, возникают при приближенных вычислениях некоторых интегралов (метод Лапласа, метод перевала) или распределений вероятности (ряд Эджворта). Примером расходящегося асимптотического разложения являются графы Фейнмана в квантовой теории поля.

Для более полного представление об асимптотическом анализе перечислим области ее применения:

- в прикладной математике (это область математики, рассматривающая применение математических методов, алгоритмов в других областях науки и техники) для построения численных методов решения уравнений;

- в математической статистике (это наука, разрабатывающая математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов. Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятностей, дающую возможность оценить надёжность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала (например, оценить необходимый объём выборки для получения результатов требуемой точности при выборочном обследовании)) для определения предельных свойств случайных величин и статистических оценок;

- в теории вероятностей (это раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними) для определения предельных свойств случайных величин и статистических оценок;

- в информатике (это наука о методах и процессах сбора, хранения, обработки, передачи, анализа и оценки информации с применением компьютерных технологий, обеспечивающих возможность её использования для принятия решений) при анализе алгоритмов и их времени работы.

- в статистической физике (это раздел теоретической физики, посвящённый изучению систем с произвольным (часто - бесконечным) числом степеней свободы. Изучаемые системы могут быть как классическими, так и квантовыми)) при анализе поведения физических систем.

Здесь под объектом физических исследований, понимается такое множество взаимосвязанных элементов, отделённых от окружающей среды, что взаимодействует с ней, как целое. При этом под элементами следует понимать физические тела или другие физические системы. Взаимодействие физической системы с окружением, а также связь между отдельными составляющими физической системы реализуется с помощью фундаментальных физических взаимодействий. Выделение конкретной физической системы из окружения зависит от конкретных целей и задач исследований);

- в анализе катастроф (это раздел математики, включающий в себя теорию бифуркаций дифференциальных уравнений (динамических систем) и теорию особенностей гладких отображений. Теория катастроф - раздел современной математики, который является дальнейшим развитием теории устойчивости и бифуркаций. Термины «катастрофа» и «теория катастроф» были введены Рене Томом и Кристофером Зиманом в конце 1960-х - начале 1970-х годов («катастрофа» в данном контексте означает резкое качественное изменение объекта при плавном количественном изменении параметров, от которых он зависит)) при определении причин катастрофы моделированием множества катастроф в том же месте.

Попытаемся систематизировать асимптотическую литературу. Так, она подразделяется, прежде всего по объектам применения асимптотических методов: асимптотика интегралов, асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметру или аргументу, теория возмущений краевых задач и пр. Можно выделять и наиболее развитые асимптотические методы: метод перевала, метод ВКБ, метод пограничного слоя, метод усреднения и пр.

Попробуем раскрыть суть асимптотических методов безотносительно к объекту асимптотического анализа. Пусть какой-то процесс описывается совокупностью функций $f_i(x_1, x_2, \dots x_n,)$, определённых каким угодно образом.

Поведение этих функций, вообще говоря, неоднородно. Существуют области резкого изменения количества, превращающегося в некоторое качество: разрыв, излом, обращение в нуль или бесконечность и пр. Точки, в окрестности которых происходит такое превращение, назовём особыми (в широком смысле). Они могут быть изолированными или образовывать линии, поверхности и вообще многообразия с числом измерений $m < n$. Например, в газодинамике особыми являются бесконечно удалённая точка, поверхность обтекаемого тела, ударные волны, тангенциальные разрывы, на-чальный момент времени, значения параметров $M = 0, 1, \infty; Re = 0, \infty$ и т.д.

Явления, характерные для окрестности особых точек, будем называть асимптотическими явлениями. Асимптотическими методами теперь можно называть методы, приспособленные для исследования асимптотических явлений. Это определение годится в качестве первого приближения, но ещё не раскрывает специфику асимптотических методов.

Асимптотика - это прежде всего упрощение. Упрощение, достигаемое за счёт локализации (в пространстве всех аргументов, включая параметры). Причём точность упрощаемого представления при локализации возрастает. Итак, асимптотические методы - это методы исследования асимптотических явлений путём упрощения за счёт локализации, точность которых растёт вместе с локализацией.

Изучение нового обычно начинается с основных особенностей и предельных ситуаций. Важность асимптотического анализа в прикладной математике видится именно в том, что поскольку поведение функции определяется её наихудшей сингулярностью.

В примере покажем применение асимптотического метода в теории интегралов. Часто бывает, что для вычисления некоторой величины можно использовать расходящийся бесконечный ряд, причем сама величина является в некотором смысле суммой ряда. Типичная ситуация такова: некоторая функция разлагается в функциональный ряд, причем приближение, даваемое несколькими первыми членами ряда, тем лучше, чем ближе независимая переменная к некоторому предельному значению (таким значением часто является 1). Во многих случаях члены ряда сначала быстро убывают (тем быстрее, чем ближе независимая переменная к предельному значению), но потом члены ряда вновь начинают возрастать. В математической литературе такие ряды получили название асимптотических рядов (Пуанкаре, Стильтьес, 1886).

Асимптотические ряды могут как сходиться, так и расходиться, но наибольший интерес представляют расходящиеся ряды. Мы увидим ниже, что с такими формально расходящимися рядами можно, хотя и с известной осторожностью, совершать все те же действия (складывать, умножать, интегрировать, дифференцировать), что и со сходящимися функциональны-ми рядами. Чтобы понять типичную ситуацию, которая здесь возникает, рассмотрим несколько примеров.

Попытаемся вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-xt} costdt.$$

Определяемая им функция

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} costdt,$$

аналитична в области $Rex > 0$ в силе абсолютной сходимости интеграла. При этих условия интеграл вычисляется повторным интегрированием по частям:

$$(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dsint = e^{-xt} sint|_0^\infty + x\int_0^\infty e^{-xt} sintdt =$$

$$x\int_0^\infty e^{-xt} sintdt = xe^{-xt} cost|_0^\infty - x^2\int_0^\infty e^{-xt} costdt =$$

$$x - x^2F(x),$$

Так, что $(1 + x^2)F(x) = x$ и

$$F(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Этого же результата можно добиться, разложив $cost$ в ряд Тейлора:

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} costdt = \int_0^\infty e^{-xt}\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right)dt =$$

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\frac{(xt)^{2n}}{(2n)!\,x^{2n}}\frac{d(xt)}{x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}\frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!} =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 + x^{-2}} = \frac{x}{1 + x^2},$$

если $|x| > 1$.

Несобственный интеграл

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

также является аналитической (но уже не элементарной) функцией в области $Re x > 0$. Заменяя под знаком интеграла $(1+t)^{-1}$ на соответствующий ряд Тейлора, приходим к выражению

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt} t^n dt =$$

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt} \frac{(xt)^n}{x^n} d(xt) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma(2n+1)}{x^{n+1}} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Получили ряд, расходящийся при любом x, отличном от нуля, что говорит о неправомерности приведенных рассуждений. Этого можно ожидать, поскольку используемое разложение имеет место не на всем промежутке интегрирования. Повторим те же вычисления с конечной частью ряда Тейлора функции $(1+t)^{-1}$. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n,$$

поэтому

$$G(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^\infty e^{-xt} t^k d(xt) + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t} =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}.$$

Последнее слагаемое

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-xt}}{1+t}$$

представляет собой ошибку приближения функции $G(x)$ конечным рядом

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} +.$$

Нетрудно видеть, что при $Re x = a > 0$

$$|R_n(x)| < \left| \int_0^\infty t^n e^{-xt} dt \right| = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

В частности, если $x -$ действительное положительное число, что мы и предположим далее простоты изложения, то

$$|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$$

и этот остаток имеет знак $(-1)^n$. Изучим поведения ошибки в зависимости от n и x:

а) Фиксируем n. Тогда с ростом x остаток $R_n(x)$ стремится к нулю;

б) Фиксируем x. Ошибка уменьшается с ростом n, пока n не превосходит целой части $[x]$ числа x. Затем ошибка $R_n(x)$ начинает расти. Таким образом, имеем неустранимую ошибку вычислений, равную

$$\varepsilon(x) = \frac{[x]!}{x^{[x]}}.$$

Она весьма мала при больших x. Например, при $x = 10$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-3}$, а при $x = 100$ ошибка $\varepsilon \sim 10^{-40}$, что говорить о том, что приближения получаются очень хорошими, не смотря на неустранимые ошибки. Приведенный способ вычисления был аксиоматизирован Пуанкаре А. в 1890 г.

Практика показывает, что во время лекционных занятий приведение обзор об истоках темы и ее применение, также об интеграции с другими темами и дисциплинами [1–17] дают более эффективные результаты. Кроме того, использование новых педагогических технологий изложенных в [18-30], при преподавании специальных предметов, дают хорошие положительные результаты.

Использованная литература

1. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // *Проблемы педагогики,* № 53:2 (2021), с. 7-10.

2. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // *XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019,* с. 197-199.

3. Расулов Х.Р. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа // *«Комплексный анализ, математическая Физика и нелинейные уравнения» Международная научная конференция Сборник тезисов Башкортостан РФ* (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.), с.65-66.

4. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // *Ученый XXI века, международный научный журнал*, 53:6-1 (2019), с.16-18 .

5. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Scientific progress,* 2:1 (2021), p.42-48.

6. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.23-26.

7. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.81-96.

8. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Динамик системаларнинг тарихи ва фазали портретларини чизиш йўллари ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.39-52.

9. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference*, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.

10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.665-672.

11. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.19-22.

12. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // *Наука, техника и образование*, 72:2-2 (2021) с.27-30.

13. Расулов Х.Р., Джўрақулова Ф.М. Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.455-462.

14. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.448-454.

15. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // *«The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference,* Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

17. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // *Scientific progress*, 2:2 (2021), p.870-879.

16. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // *Science and Education, scientific journal*, 2:9 (2021), p.7-20.

18. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p. 586-595.

19. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.596-607.

20. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар // *Scientific progress*, 2:1 (2021), p.559-567.

21. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // *Наука, техника и образование*, 72:8 (2020) c.29-32.

22. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // *Вестник науки и образования,* 97:19-1 (2020), С. 6-9.

23. Расулов Т.Х. (2011). О числе собственных значений одного матричного оператора. *Сибирский математический журнал*, 52:2, С. 400-415.

24. Ахмедов О.С. (2021). Методы организации работы с одаренными учащимся. *Science and Education*. 2 (10), 239-248 b.

25. Ахмедов О.С. (2021). Преимущества историко-генетического метода при обучении математики. *Scientific progress*. 2:4 (2021), p. 523-530.

26. Ахмедов О.С. (2021). Определение предмета и место математики в системе наук. *Scientific progress*. 2:4, p. 531-537.

27. Boboeva M.N., Rasulov T.H. (2020). The method of using problematic equation in teaching theory of matrix to students. *Academy*. 55:4, pp. 68-71.

28. Дилмуродов Э.Б. (2017). Числовой образ многомерной обобщенной модели Фридрихса. Молодой ученый. №15, С. 105-106.

29. Rasulov Kh.R. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

30. Расулов Т.Х. (2020). Инновационные технологии изучения темы линейные интегральные уравнения. *Наука, техника и образование.* 73:9, С. 74-76.

References

1. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. The role of mathematics in biological sciences // Problems of pedagogy, no. 53: 2 (2021), p. 7-10.

2. Rasulov Kh.R. On a nonlocal problem for an equation of hyperbolic type // XXX Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. Collection of materials of the international conference KROMSH-2019, p. 197-199.

3. Rasulov Kh.R. On a boundary value problem for an equation of hyperbolic type // "Complex analysis, mathematical physics and nonlinear equations" International scientific conference Collection of abstracts Bashkortostan RF (Lake Bannoe, March 18-22, 2019), pp.65-66.

4. Rasulov Kh.R. et al. On the solvability of the Cauchy problem for a degenerate quasilinear hyperbolic equation // Scientist of the XXI century, international scientific journal, 53: 6-1 (2019), pp.16-18.

5. Rasulov Kh.R., Sobirov S.Zh. A problem of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneration // Scientific progress, 2: 1 (2021), pp. 42-48.

6. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On some Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) p.23-26.

7. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the bisexual population and its mathematical model // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), r.81-96.

8. Rasulov X.R., Kamariddinova Sh.R. On the history of dynamic systems and ways to draw phase portraits // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.39-52.

9. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. On one quadratic stochastic operator with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P. 145-146.

10. Rasulov Kh.R., Yashieva F.Yu. Ikki zhinsli population dynamics of aқida // Scientific progress, 2: 1 (2021), p. 665-672.

10. Rasulov X.R., Yashieva F.Yu. On the dynamics of a bisexual population // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.665-672.

12. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. On the analysis of some non-Volterra dynamical systems with continuous time // Science, technology and education, 72: 2-2 (2021) pp. 27-30.

13. Rasulov X.R., Djo'rakulova F.M. On numerical solutions of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.455-462.

14. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. On the analysis of some dynamic systems // Scientific progress, 2: 1 (2021), p.448-454.

15. Rasulov Kh.R., Kamariddinova Sh.R. About one dynamic system with continuous time // "The XXI Century Skills for Professional Activity" International Scientific-Practical Conference, Tashkent, March 2021 y., P.115-116.

16. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Ways to solve some equations, inequalities and systems of equations involving the module // Science and Education, scientific journal, 2: 9 (2021), r.7-20.

17. Rasulov Kh.R., Raupova M.Kh. Mathematical models and laws in biology // Scientific progress, 2: 2 (2021), pp. 870-879.

18. Rasulov X.R., Sobirov S.J. On the use of interactive methods in solving some rational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.

19. Rasulov X.R., Sobirov S.J. Application of interactive methods in solving some irrational equations // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

20. Rasulov T.H., Rasulov X.R. Methodical recommendations for teaching the department of functions with limited variability // Scientific progress, 2: 1 (2021), r.559-567.