BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTI

5/2024

Научный вестник Бухарского государственного университета
Scientific reports of Bukhara State University
5/2024

E-ISSN 2181-1466
9772181146004

ISSN 2181-6875
9772181687004

MUNDARIJA *** СОДЕРЖАНИЕ *** CONTENTS

UO‘K 517.98 + 519.21

AYRIM VOLTERRA DINAMIK SISTEMALARINING DINAMIKASI HAQIDA

Rasulov Xaydar Raupovich,
Buxoro davlat universiteti matematik analiz kafedrasi dotsenti
xrasulov71@mail.ru
http://orcid.org/0000-0001-8525-4701

Annotatsiya. *Maqolada o‘zbek olimlari tomonidan kiritilgan o‘n oltita Volterra kvadratik stoxastik operatorining (chetki ikki jinsli Volterra kvadratik stoxastik operatori) to‘liq ro‘yxati keltirilgan. Ro‘yxatda keltirilgan diskret vaqtli beshinchi, yettinchi va sakkizinchi kvadratik stoxastik operatorlarning uzluksiz analogi tahlil qilingan. MathCAD matematik paketida tuzilgan maxsus dastur yordamida turli boshlang‘ich qiymatlarda ularning sonli yechimlari topilgan. Sonli va analitik yechimlar o‘zaro taqqoslangan. Dinamik sistemalarning qo‘zg‘almas nuqtalari topilgan va turg‘unligi o‘raganilgan. Turg‘un qo‘zg‘almas nuqta atrofida dinamik sistemalarning trayektoriyalari va fazali portretlari chizilgan. Beshinchi va sakkizinchi operatorlarning amaliy tadbiqlari to‘g‘risida xulosalar berilgan.*

***Kalit so‘zlar*:** *Volterra kvadratik stoxastik operatori, chetki ikki jinsli dinamik sistema, oddiy differensial tenglama, trayektoriya, fazali fazo, matematik paket, analitik va sonli yechim, turg‘un va noturg‘un muvozanat nuqta, taqqoslash.*

О ДИНАМИКЕ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА

Аннотация. *В статье приведен полный список шестнадцати квадратичных стохастических операторов типа Вольтерры (крайний двуполый квадратичный стохастический оператор типа Вольтерры), введенных узбекскими учеными. Анализированы непрерывного аналога перечисленных дискретных пятого, седмого и восьмого квадратичных стохастических операторов. Найдены численные решения при различных начальных значениях с помощью специальной программы, составленной в математическом пакете MathCAD. Сравнены численные и аналитические решения. Найдены неподвижные точки динамических систем и исследованы их устойчивость. Построены траектории и фазовые портреты динамических систем в окрестности устойчивой неподвижной точки. Сделаны выводы о практическом применении пятого и восьмого операторов.*

***Ключевые слова*:** *квадратичный стохастический оператор типа Вольтерры, крайняя двуполая динамическая система, обыкновенное дифференциальное уравнение, траектория, фазовое пространство, математический пакет, аналитическое и численное решение, устойчивое и неустойчивое положение равновесия, сравнение.*

ABOUT THE DYNAMICS OF SOME VOLTERRA DYNAMIC SYSTEMS

Abstract. *The article provides a complete list of sixteen quadratic stochastic operators of Volterra type (extreme two-sex quadratic stochastic operator of Volterra type) introduced by Uzbek scientists. The continuous analogue of the listed discrete fifth, seventh and eighth quadratic stochastic operators is analyzed. Numerical solutions were found for various initial values using a special program compiled in the MathCAD mathematical package. Numerical and analytical solutions are compared. Fixed points of dynamic systems are found and their stability is investigated. Trajectories and phase portraits of dynamic systems in the vicinity of a stable fixed point are constructed. Conclusions are drawn about the practical application of the fifth and eighth operators.*

***Keywords*:** *quadratic stochastic operator of Volterra type, extreme two-sex dynamical system, ordinary differential equation, trajectory, phase space, mathematical package, analytical and numerical solution, stable and unstable equilibrium position, comparison.*

Kirish. Bir qator biologik, fizik-kimyoviy va iqtisodiy jarayonlarning matematik modeli kvadratik stoxastik operatorlar (KSO) yordamida ifodalanadi. Bu o‘z navbatida matematiklarning sohaga qiziqishlarini orttirmoqda. Hozirda bu sohada ko‘plab ilmiy ishlar nashr qilingan [1-9].

Bevosita ikki jinsli Volterra kvadratik stoxastik operatorlarini o‘rganishga to‘xtalamiz. $z=(x,y)-$ birorta F avlodning holati bo‘lsin. Faraz qilamiz, F avloddagi ixtiyoriy $z=(x,y)$ holatda kelgusi F' holat tabiiy tanlanish va chatishuv natijasida bir qiymatli bo‘lgan $z'=(x',y')$ holat orqali aniqlansa, bu populyatsiyaning differensiatsiyasi irsiy deyiladi. Bu yerda

$$z'=Vz\ (z\in S)$$

tenglik bilan aniqlanadigan $V: S\to S$ akslantirish evolyutsion operator deyiladi, tenglik esa o‘rganilayotgan populyatsiyaning evolyutsiya tenglamasi deb ataladi. Bu akslantirish koordinatalarda quyidagi tenglamalar sistemasi ko‘rinishida bo‘ladi [1]:

$$\begin{cases} x_i'=f_i(x_1,\dots,x_n:y_1,\dots,y_\nu)\ (1\le i\le n),\\ y_k'=g_i(x_1,\dots,x_n:y_1,\dots,y_\nu)\ (1\le k\le \nu).\end{cases}$$

Faraz qilamiz, F avlodni holati $(x,y)-$ bo‘lsin. Keyingi holati esa quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$W=\begin{cases} x_j{}'=\sum_{i,k=1}^{n,\nu} p_{ik,j}^{(f)}x_iy_k,\ 1\le j\le n,\\ y_l{}'=\sum_{i,k=1}^{n,\nu} p_{ik,l}^{(m)}x_iy_k,\ 1\le l\le \nu.\end{cases} \qquad (1)$$

Ta’rif [2]. (1) evolyutsion operator ikki jinsli Volterra tipidagi kvadratik stoxastik operator deyiladi, agarda

$$p_{ik,j}^{(f)}=0, j\,\bar{\in}\,\{i,k\}, 1\le i,j\le n, 1\le k\le \nu$$

va

$$p_{ik,l}^{(m)}=0, l\,\bar{\in}\,\{i,k\}, 1\le i\le n, 1\le k,l\le \nu.$$

[2] da 16 ta chetki ikki jinsli Volterra tipidagi KSO mavjudligi ko‘rsatilgan va o‘rganilgan.

[1] monografiyada ikki jinsli populyatsiyani evolyutsiyasini o‘rganish muammolari shakllantirilgan va uni yechishning umumiy usullari batafsil yoritilgan. [2] da [1] dagi operatorlarning qism sinfiga tegishli bo‘lgan diskret vaqtli dinamik sistema o‘rganilgan va yangi yondashuv bilan fundamental natijalarga erishilgan. Shu bilan bir qatorda, ikki jinsli populyatsiyaning o‘n oltita chetki operatorlari keltirib chiqarilgan va dinamikasi o‘rganilgan. Ular quyidagi ko‘rinishga ega:

$W_1(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1+x_2y_1,x_2y_2,x_1+x_2y_1,x_2y_2);$
$W_2(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1+x_2y_1,x_2y_2,x_1,x_2);$
$W_3(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1+x_2y_1,x_2y_2,y_1,y_2);$
$W_4(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1+x_2y_1,x_2y_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2);$
$W_5(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1,x_2,x_1+x_2y_1,x_2y_2);$
$W_6(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1,x_2,x_1,x_2);$
$W_7(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1,x_2,y_1,y_2);$
$W_8(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1,x_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2);$
$W_9(x_1,x_2;y_1,y_2)=(y_1,y_2,y_1+x_1y_2,x_2y_2);$
$W_{10}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(y_1,y_2,x_1,x_2);$
$W_{11}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(y_1,y_2,y_1,y_2);$
$W_{12}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(y_1,y_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2);$
$W_{13}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2,x_1+x_2y_1,x_2y_2);$
$W_{14}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,x_1,x_2);$
$W_{15}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,y_1,y_2);$
$W_{16}(x_1,x_2;y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2).$

Aytib o‘tamiz, ushbu keltirilgan chetki operatorlarning uzluksiz analogi to‘liq o‘rganilmagan. Bundan tashqari, [2] da ushbu chetki operatorlarning qaysi jarayonlarni ifodalashi to‘g‘risida ham xulosalar keltirilmagan.

Ushbu maqolamizda [2] da taqdim qilingan o‘n oltita chetki operatorning beshinchi, yettinchi va sakkizinchisi tahlil qilingan. Shuningdek, xorijlik olimlar olib borgan tajribalar va Xardi-Vaynberg qonuniga asoslanib [10], o‘rganilgan chetki uzluksiz vaqtli dinamik sistemalarning amaliy tadbig‘i - aniq biologik jarayonlarni ifodalashi mumkinligi to‘g‘risida xulosalar chiqarilgan.

Bundan tashqari, maqolada chetki operatorlarning uzluksiz analogini o‘rganish jarayonida amalga oshirilgan usullar nochiziqli differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganish uchun qiziqish uyg‘otadi. Chunki ular differensial tenglamalarning ayrim muhim sinflarini, shuningdek, ba’zi klassik muammolarni hal qilishda asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Asosiy qism. [2] ilmiy izlanishda keltirilgan beshinchi KSO ning uzluksiz vaqtli analogini o‘rganamiz. KSO bizning holda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 0, \\ \dot{x_2} = 0, \\ \dot{y_1} = x_1 + x_2 y_1 - y_1, \\ \dot{y_2} = x_2 y_2 - y_2, \end{cases} \tag{1}$$

bu yerda $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ va $\big(y_1(t), y_2(t)\big)$ ehtimollik taqsimoti juftligi bo‘lib,

$$x_1(t) \geq 0,\ \ x_2(t) \geq 0,\ \ y_1(t) \geq 0,\ \ y_2(t) \geq 0.$$

Masalaning qo‘yilishi. (1) sistemani quyidagi $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohada:

$$\Omega_1 = \{(x_1(t), x_2(t)) : x_1(t) \geq 0,\ \ x_2(t) \geq 0, x_1(t) + x_2(t) < 1\},$$
$$\Omega_2 = \{(y_1(t), y_2(t)) : y_1(t) \geq 0,\ \ y_2(t) \geq 0, y_1(t) + y_2(t) < 1\}$$

hamda $S_1 \times S_2$ sohada:

$$S_1 = \{(x_1(t), x_2(t)) : x_1(t) \geq 0,\ \ x_2(t) \geq 0, x_1(t) + x_2(t) = 1\},$$
$$S_2 = \{(y_1(t), y_2(t)) : y_1(t) \geq 0,\ \ y_2(t) \geq 0, y_1(t) + y_2(t) = 1\}$$

analitik va sonli yechimlarini topish, qo‘zg‘almas nuqtalari atrofida turg‘unligini o‘rganish, fazali portretini chizish va olingan natijalarni tahlil qilish, amaliy tadbig‘i to‘g‘risida xulosalar chiqarish.

(1) sistemaning $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohadagi qo‘zg‘almas nuqtalari $M_1(0{,}1; c_3, c_4)$ (noturg‘un), $M_2\left(c_1, c_2; \frac{c_1}{1-c_2}, 0\right)$ (turg‘un) bo‘lib, umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$a)\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ y_1 = c_3, \\ y_2 = c_4; \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 0; \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = \dfrac{c_1}{1-c_2} + \dfrac{c_3}{c_2 - 1} e^{(c_2-1)t}, \\ y_2 = c_4 e^{(c_2-1)t}. \end{cases}$$

Sistemaning $S_1 \times S_2$ dagi qo‘zg‘almas nuqtalari $M_3(0{,}1; c_3, 1-c_3)$ (noturg‘un), $M_4(c_1, 1-c_1; 1{,}0)$ (turg‘un) bo‘lib, umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$d)\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ y_1 = c_3, \\ y_2 = 1 - c_3; \end{cases} \quad e)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = 1, \\ y_2 = 0; \end{cases} \quad f)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 1 - c_1, \\ y_1 = 1 - c_3 e^{-c_1 t}, \\ y_2 = c_3 e^{-c_1 t}. \end{cases}$$

(1) sistemaning $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohadagi a) va b), $S_1 \times S_2$ sohadagi d) va e) yechimlaridagi barcha o‘zgaruvchilar o‘zgarmas ekanligi nazariy jihatdan qiziqish uyg‘otmaydi, chunki jarayonda rivojlanish bo‘lmaydi.

Shuning uchun c) va f) yechimlarni tahlil qilamiz. (1) sistemaning $t = 0$ da Koshi shartlarini

$$x_1(0) = x_1^0,\ \ x_2(0) = x_2^0,\ \ \ y_1(0) = y_1^0,\ \ \ y_2(0) = y_2^0 \tag{2}$$

qanoatlantiruvchi $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ va $S_1 \times S_2$ sohadagi yechimlari, mos ravishda:

$$c)\ \begin{cases} x_1 = x_1^0, \\ x_2 = x_2^0, \\ y_1 = \dfrac{x_1^0}{1 - x_2^0} + \dfrac{x_1^0 - y_1^0(1 - x_2^0)}{x_2^0 - 1} e^{(x_2^0 - 1)t}, \\ y_2 = y_2^0 e^{(x_2^0-1)t}; \end{cases} \quad f)\begin{cases} x_1 = x_1^0, \\ x_2 = 1 - x_1^0, \\ y_1 = 1 - y_2^0 e^{-x_1^0 t}, \\ y_2 = y_2^0 e^{-x_1^0 t}. \end{cases}$$

Yuqoridagilarga qo‘shimcha qilish sifatida shuni aytamizki, $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohada $M_0(0{,}0; 0{,}0)$ nuqta ham muvozanat nuqta bo‘ladi, lekin bu holat ham a) va b) yechimlardagi kabi qiziq emas, chunki jarayonda hech narsa yo‘q va kelgusida ham rivojlanish bo‘lmaydi.

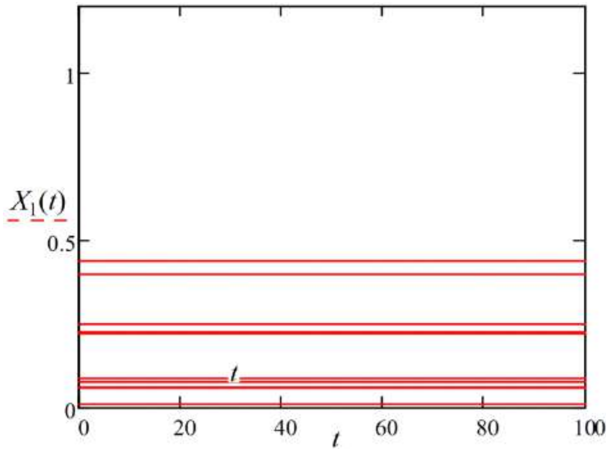
c) yechimni qaraganimizda, ya’ni muvozanat nuqta noldan farqli bo‘lganda qiziqarli jarayonlar sodir bo‘ladi. Dastlabki parametrlarga (boshlang‘ich shartlarga) qarab, maxsus nuqta, o‘z navbatida populyatsiya hajmi ham o‘zgaradi. Buni sistemani analitik va sonli yechimlarini topib, grafiklarini chizib, tahlil qilganda ham kuzatish mumkin.

(1) sistemani berilgan $(x_1^0, x_2^0;\ y_1^0, y_2^0)^T$ boshlang‘ich qiymatlarda sonli yechimlarini topamiz. Sistema uchun boshlang‘ich qiymatlar sifatida quyidagi matritsaning tegishli ustunlaridagi qiymatlar mos ravishda olinadi:

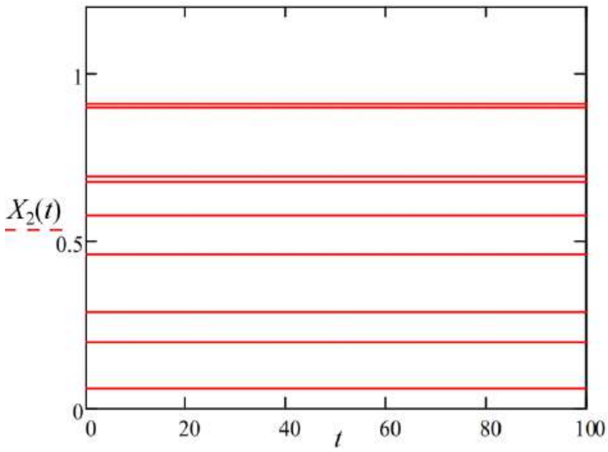
$$\begin{pmatrix} 0.37 & 0.22 & 0.4 & 0.09 & 0.44 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.25 & 0.23 \\ 0.33 & 0.68 & 0.46 & 0.91 & 0.06 & 0.2 & 0.9 & 0.9 & 0.695 & 0.58 \\ 0.411 & 0.34 & 0.03 & 0.86 & 0.25 & 0.087 & 0.39 & 0.18 & 0.827 & 0.65 \\ 0.55 & 0.29 & 0.907 & 0.94 & 0.685 & 0.3 & 0.6 & 0.8 & 0.33 & 0.322 \end{pmatrix}$$

MathCAD matematik paketi orqali (1) sistemani (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi sonli yechimlarini izlaymiz.

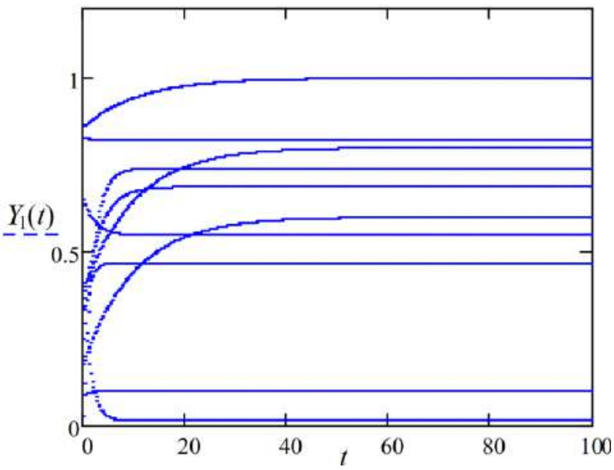
(1) sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ sohadagi sonli yechimlarining grafiklari 1-4-chizmalarda keltirilgan. Chizmalarda $X_1(t)$ va $X_2(t)$ hamda $Y_1(t)$ va $Y_2(t)$ lar (1) sistemaning sonli yechimlarini ifodalaydi.



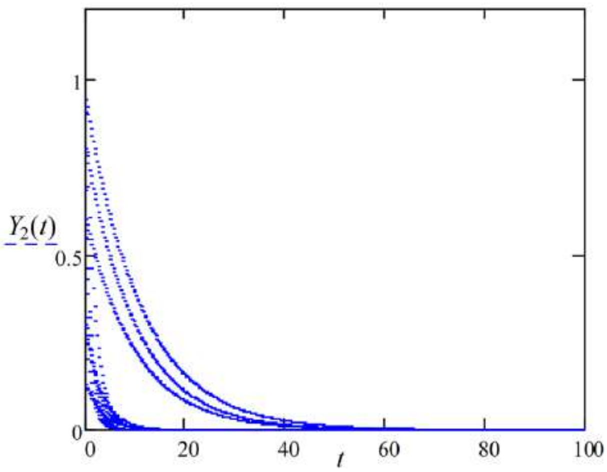
1-chizma



2-chizma



3-chizma



4-chizma

Maqolada [2] dagi o‘zgaruvchi va terminlardan foydalanilgan. O‘sha terminlarga ko‘ra, $X_1(t)$ va $X_2(t)$ lar ayollar, $Y_1(t)$ va $Y_2(t)$ lar erkaklar tipini ifodalaydi.

[2] da ikki jinsli Volterra tipidagi KSO nazariy jihatdan chuqur o‘rganilgan va tahlil qilingan. Lekin, KSO larni qaysi jarayonlarni ifodalashi mumkinligi to‘g‘risida fikrlar bildirilmagan. Shuni inobatga olib, (1) sistemani amaliy tadbig‘ini o‘rganishga harakat qilamiz.

Amerika alligatorlarini o‘rganuvchi xalqaro olimlar jamoasi harorat tug‘iladigan timsoh jinsiga ta’sir qilishini aniqlashgan. Olimlar alligator embrionlarining jinsiy bezlarida TRPV4 oqsili mas’ul ekanligini topishgan. Jumladan, TRPV4 moddasi atrof-muhit haroratiga qarab, kaltsiy ionlarini hujayralarga kirishiga yo‘l ochadi, bu esa erkak tipidagi rivojlanishni ta’minlaydigan genlarni faollashtiradi (https://naked-science.ru/article/sci/uchenye-vyyasnili-kak-temperat).

Olingan natijalarga ko‘ra, ba’zi sudraluvchilarning jinsi – nafaqat alligatorlar, balki toshbaqalarning ham jinsiga tuxum qo‘yilgan joyning harorati ta’sir qiladi. Amerika alligatorlarida urg‘ochilar tuxumdan 30°C dan, erkaklari esa 33°C dan chiqadi. Biologlarning fikriga ko‘ra, jinsi harorat bilan belgilanadigan organizmlar, ayniqsa, atrof-muhitdagi o‘zgarishlarga, xususan, global isishga juda sezgir bo‘ladi.

Global isish alligatorlar va toshbaqalar uchun muammoga aylanishi mumkin, chunki uyalarning harorati bir darajaga ko‘tarilsa, populyatsiyadagi jinslar o‘rtasidagi muvozanat keskin o‘zgaradi. Natijada alligatorlar va toshbaqalar soni keskin kamayib ketishi, bu hatto ularning yo‘q bo‘lib ketishiga olib kelishi mumkin.

Xitoylik olimlar chuchuk suvda yashovchi toshbaqalar *(Mauremys reevesii)* ustida tadqiqot o‘tkazib, tug‘iladigan avlodning jinsini o‘zgarish harorati chegarasi taxminan 28°C ekanligini aniqlashgan. Tuxumlar bu belgidan sovuqroq bo‘lsa, ulardan asosan erkaklar, issiqroq bo‘lsa, urg‘ochilar paydo bo‘lgan. Bunday holda, 2-2,5°C daraja og‘ish naslda bir jinsning boshqasidan deyarli to‘liq ustun bo‘lishiga olib kelgan.

Shuningdek, olimlar laboratoriya tajribasini o‘tkazib, tuxumlarni bir tomondan 29°C haroratgacha, boshqa tomondan esa 27°C gacha qizdirishgan. Embrion harakat qilmagan tuxumlarda 85% hollarda erkaklar rivojlangan.

Olimlar kelajakdagi toshbaqalar tasodifan harakatlanmaydi degan xulosaga kelishgan. Embrionlar tuxum ichida juda issiq yoki juda sovuq bo‘lmagan yo‘nalishda harakatlanadi. Bu tuxumdan chiqqanlar orasidagi jinsiy muvozanatni kamaytiradi (https://nauka.tass.ru/nauka/6815397?utm_source=google.com &utm_medium=organic&utm_ campaign= google. com&utm _referrer= google.com).

Ma’lumki, Hardi-Vaynberg qonuni populyatsiya genetikasi va zamonaviy evolyutsiya nazariyasining matematik modelining asosi bo‘lib hisoblanadi. Bu qonun 1908 yilda matematik G.Hardi (Angliya) va shifokor V.Vaynberg (Germaniya) tomonidan mustaqil ravishda tuzilgan. Qonunga ko‘ra, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) populyatsiyadagi individlar soni juda ko‘p (ideal holda cheksiz ko‘p);
2) juftlashish tasodifiy sodir bo‘lsa;
3) mutatsiya jarayoni mavjud bo‘lmasa;
4) boshqa populyatsiyalar bilan gen almashinuvi yo‘q;
5) tabiiy tanlanish yo‘q bo‘lsa, populyatsiyadagi allellar va genotiplarning chastotalari avloddan-avlodga o‘zgarmas bo‘lib qoladi.

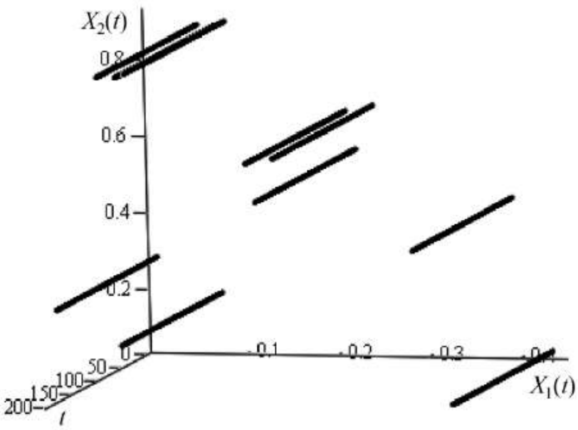
Ushbu qonundan kelib chiqib, populyatsiyaning rivojlanishini avloddan avlodga gen chastotalari (yoki genotiplari) dagi o‘zgarishlar bilan baholash mumkin. Bu qonun tabiatda mavjud bo‘lmagan va bo‘lishi mumkin bo‘lmagan ideal populyatsiya uchun amal qilishiga qaramay, u katta amaliy ahamiyatga ega, chunki u turli mikroevolyutsion omillar ta’sirida o‘zgarib turadigan gen chastotalarini hisoblash imkonini beradi.

Yuqorida keltirilganlar: olimlar o‘tkazgan tajribalar va Xardi-Vaynberg qonunidan kelib chiqib, quyidagi xulosani qilishimiz mumkin.

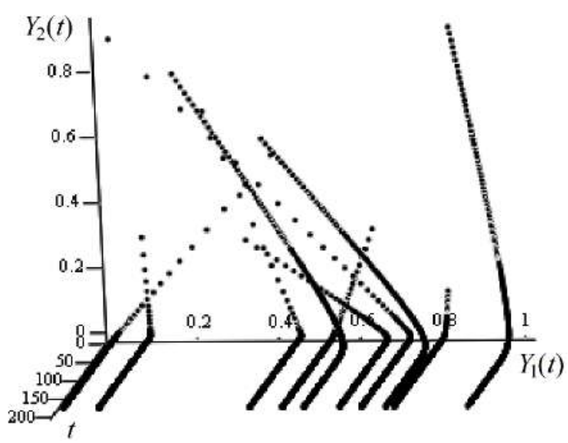
Xulosa. (1) sistema qaysidir ma’noda alligatorlar va toshbaqalar populyatsiyasining matematik modelini ifodalashi mumkin.

3-chizmani tahlil qilsak, undan ko‘rinib turibdiki, $Y_1(t)$ yechim boshlang‘ich shartlar asosida $x_1^0 - y_1^0(1 - x_2^0)$ ifodaning ishorasiga qarab, o‘sib borib qo‘zg‘almas nuqtaga intiladi yoki kamayib borib intiladi. Bu o‘z navbatida o‘rganilayotgan jarayonning boshlang‘ich holatiga qat’iy bog‘liqligini, shu jumladan, sistemani $M_2\left(c_1, c_2; \frac{c_1}{1-c_2}, 0\right)$ qo‘zg‘almas nuqta atrofida turg‘un ekanligini namoyon qiladi.

Yechimlarni $(t, X_1(t), X_2(t))$ va $(t, Y_1(t), Y_2(t))$ fazolarida fazali trayektoriyalarini quramiz. Fazali trayektoriyalar 5-6-chizmalarda tasvirlangan.



5-chizma



6-chizma

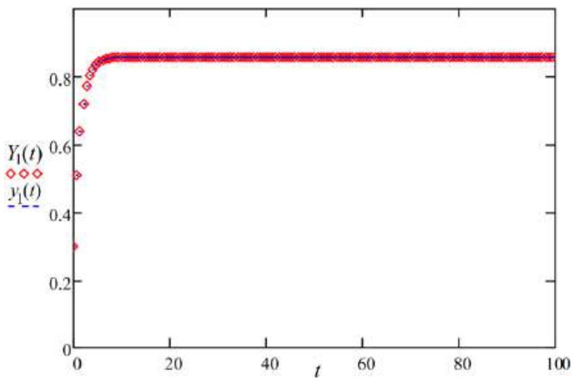
Keltirilgan fazali portretdan ko‘rinib turibdiki, trayektoriyalar qo‘zg‘almas nuqtaning atrofidan uzoqqa chiqib ketmagan.

MathCAD matematik paketi yordamida $x_1^0 = 0.6, x_2^0 = 0.3, y_1^0 = 0.3, y_2^0 = 0.57$ boshlang‘ich qiymatlarda topilgan sonli yechim natijalari bilan c) yechimni taqqoslaymiz. Taqqoslash natijalari 7-8-chizmalarda tasvirlangan. Ko‘rinib turibdiki, yechimlar o‘zaro ustma-ust tushadi.

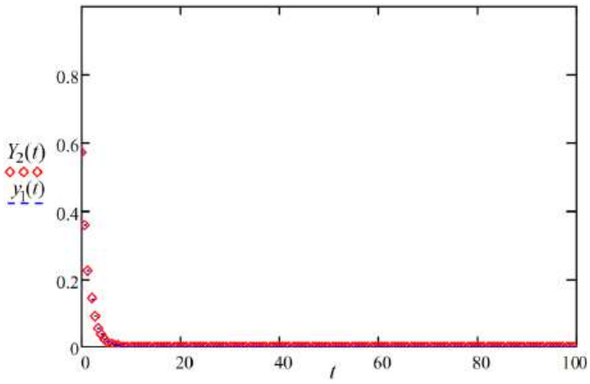
[2] maqolada keltirilgan chetki operatorlarning eng soddasi bo‘lib, yettinchi operator hisoblanadi. Uning uzluksiz vaqtli analogi

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 0, \\ \dot{x_2} = 0, \\ \dot{y_1} = 0, \\ \dot{y_2} = 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lib, dinamik sistema doimiy ravishda o‘zgarmasdan turadi. Bu holatda sistema doimo tinch holatda bo‘ladi. Shu sababli nazariy jihatdan qiziqish uyg‘otmaydi.



7-chizma



8-chizma

Xuddi shuningdek, [2] maqolada keltirilgan sakkizinchi KSO ning uzluksiz vaqtli analogi

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 0, \\ \dot{x_2} = 0, \\ \dot{y_1} = x_1 y_1 - y_1, \\ \dot{y_2} = x_2 y_1 \end{cases} \tag{3}$$

ko‘rinishida bo‘lib, $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ va $S_1 \times S_2$ sohadagi yechimlari mos ravishda quyidagicha:

$$g)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = c_3, \\ y_2 = c_2 c_3 t + c_4; \end{cases} \quad h)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad i)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ y_1 = c_3 e^{(c_1 - 1)t}, \\ y_2 = -c_3 e^{(c_1 - 1)t} + c_4 \end{cases}$$

va

$$k)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 1 - c_1, \\ y_1 = 0, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad l)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 1 - c_1, \\ y_1 = c_3, \\ y_2 = 1 - c_3; \end{cases} \quad m)\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 1 - c_1, \\ y_1 = c_3 e^{(c_1 - 1)t}, \\ y_2 = 1 - c_3 e^{(c_1 - 1)t}. \end{cases}$$

(3) sistemaning $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohadagi g) va h), $S_1 \times S_2$ sohadagi k) va l) yechimlarining bittasi to‘g‘ri chiziqdan iboratligi, qolgan o‘zgaruvchilar esa o‘zgarmas ekanligi uchun bu yechimlar ham nazariy jihatdan qiziqish uyg‘otmaydi. Shuning uchun i) va m) yechimlarni tahlil qilamiz.

Xuddi (1) sistemani o‘rganishda olib borilgan tahlillar kabi (3) sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ $(S_1 \times S_2)$ sohada qo‘zg‘almas nuqtalari aniqlanadi va turg‘unligi o‘rganiladi. Shuning uchun bunga to‘xtalib turmaymiz. Bevosita uning yechimini o‘rganamiz.

(3) sistemani (2) shartni qanaotlantiruvchi yechimlari mos ravishda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i)\begin{cases} x_1 = x_1^0, \\ x_2 = x_2^0, \\ y_1 = y_1^0 e^{(x_1^0 - 1)t}, \\ y_2 = -y_1^0 e^{(x_1^0 - 1)t} + y_1^0 + y_2^0; \end{cases} \quad m)\begin{cases} x_1 = x_1^0, \\ x_2 = 1 - x_1^0, \\ y_1 = y_1^0 e^{(x_1^0 - 1)t}, \\ y_2 = 1 - y_1^0 e^{(x_1^0 - 1)t}. \end{cases}$$

(3) sistemani $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohada quyidagi $(x_1^0, x_2^0;\ y_1^0, y_2^0)^T$

$$\begin{pmatrix} 0.01 & 0.22 & 0.4 & 0.09 & 0.44 & 0.08 & 0.08 & 0.06 & 0.25 & 0.23 \\ 0.29 & 0.68 & 0.46 & 0.91 & 0.06 & 0.2 & 0.9 & 0.9 & 0.695 & 0.58 \\ 0.411 & 0.34 & 0.03 & 0.86 & 0.25 & 0.087 & 0.39 & 0.18 & 0.827 & 0.65 \\ 0.55 & 0.29 & 0.907 & 0.94 & 0.685 & 0.3 & 0.6 & 0.8 & 0.13 & 0.322 \end{pmatrix}$$

boshlang‘ich qiymatlardagi sonli yechimlarini topamiz. Boshlang‘ich qiymatlar sifatida keltirilgan matritsaning mos ustunlaridagi qiymatlar mos ravishda olingan. Sonli yechim MathCAD matematik paketi orqali topilgan. (3) sistemani $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ sohadagi yechimi 9-10-chizmalarda tasvirlangan.

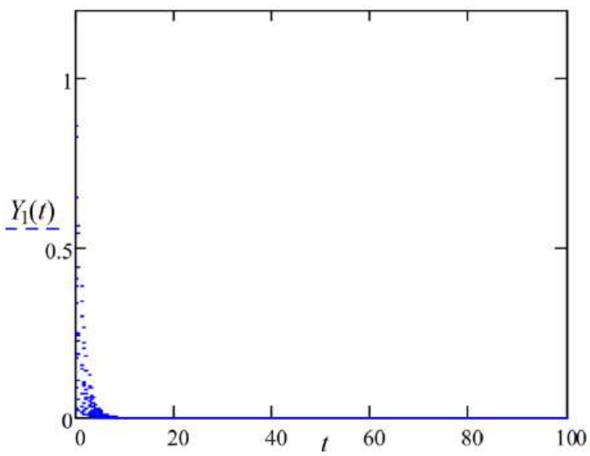
(i) yechimda $X_1(t)$ va $X_2(t)$ lar o‘zgarmas bo‘lganligi uchun ularning grafiklari keltirilmadi. 9-10-chizmalarda (3) sistemaning faqat 3-4 o‘zgaruvchilar bo‘yicha sonli yechimlari $Y_1(t)$ va $Y_2(t)$ larning grafiklari tasvirlangan.

Shu o‘rinda aytish joizki, (3) sistemaning ham (1) sistema kabi birinchi va ikkinchi o‘zgaruvchilari o‘zgarmaslardan iborat.

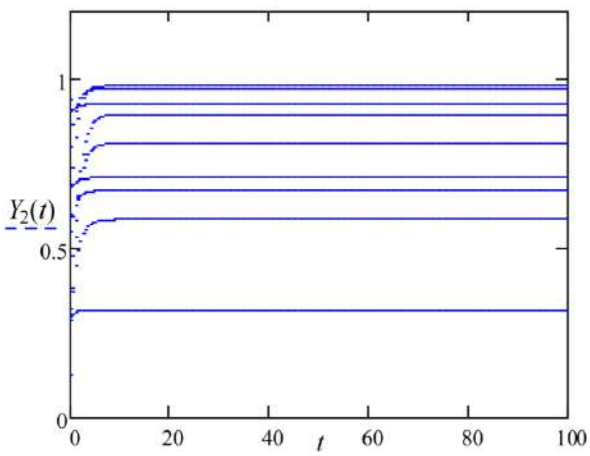
Xulosa 2. (3) sistema ham alligatorlar va toshbaqalar populyatsiyasining matematik modelini ifodalashi mumkin.

Tahlillarga ko‘ra, (1) sistemaning yechimlari $t \geq 50$, (3) sistemaning yechimlari $t \geq 15$ dan boshlab qo‘zg‘almas nuqtaga intilishi kuzatildi.

Bundan tashqari, qat’iy novolterra operatorining uzluksiz vaqtli analogining dinamikasi diskret vaqtli Volterra operatorlari dinamikasiga qaraganda ancha kengroq va boyroq ekanligi ma’lum bo‘ldi ([2] ning natijalari bilan taqqoslang).



9-chizma



10-chizma

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. (1) sistemaning $\Omega_1 \times \Omega_2$ $(S_1 \times S_2)$ sohada (2) Koshi shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi c) (f)) bo‘lib, sistema $M_2\left(c_1, c_2, \frac{c_1}{1-c_2}, 0\right)$ $(M_4(c_1, 1-c_1, 1, 0))$ muvozanat nuqtasida Lyapunov ma’nosida turg‘un, $M_1(0,1,c_3,c_4)$ $(M_3(0,1,c_3,1-c_3))$ muvozanat nuqtasida Lyapunov ma’nosida noturg‘un bo‘ladi.

Xulosa qilib, shuni aytish mumkinki, MathCAD da qiyinroq masalalarni yechish uchun dasturlar tuzish (murakkab dasturlar tuzish) juda ham qiyin. Shuning uchun dastur tuzganda eng avvalo masalani sodda bo‘lgan masalalarga ajratish va hisoblash ishlarini kamaytirishga harakat qilish lozim. So‘ngra olingan natijalarni birlashtirish osonroq bo‘ladi. Grafiklar bilan ishlashda ham bir qator muammolarga duch kelinadi.

Boshqacha qilib aytganda, MathCAD ning asosiy qo‘llanilishi oddiy hisob-kitoblar va tadqiqotlarni amalga oshirish, shuningdek, kompyuterda katta dasturlarning tarkibiy qismlarini sinovdan o‘tkazishdan iboratdir.

ADABIYOTLAR:

1. Lyubich Yu. I. Mathematical structures in population genetics, Biomathematics, 1992, 22.

2. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции // Укр. мат. журн., 2011, т. 63, № 7, стр. 985-998.

3. Filipe I. Fazanaro, Diogo C. Soriano, Ricardo Suyama, Marconi K. Madrid, Jose Raimundo de Oliveira, Ignacio Bravo Munoz, Romis Attux, Numerical Characterization of Nonlinear Dynamical Systems Using Parallel Computing: The Role of GPUs Approach, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (2016).

4. Zongmin Yue, Wenjuan Wang, Qualitative Analysis of a Diffusive Ratio-Dependent Holling-Tanner Predator-Prey Model with Smith Growth // Discrete Dynamics in Nature and Society Volume 2013, Article ID 267173, pp. 1-9.

5. Xia Liu, Yepeng Xing, Bifurcations of a Ratio-Dependent Holling-Tanner System with Refuge and Constant Harvesting // Abstract and Applied Analysis Volume 2013, Article ID 478315, pp. 1-10.

6. Rasulov Kh.R. On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek mathematical journal, 2018, №4, pp. 126-130.

7. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

8. Muzaffarova M. Bitta ikki jinsli populyatsiyaning dinamikasi haqida. Bull. Inst. Math., 2024, vol.7, №1, pp. 33-40.

9. Muzaffarova M.U. About the Dynamics of a Dynamic System // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research, 4:7, 2023, pp. 77-86.

10. Тимофеев-Ресовский Н.В., Яблоков А.В., Глотов Н.В. Очерк учения о популяции. Москва, издательство Наука, 1973, 277 с.